МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

МАРЦАФЕЙ АННА СЕРГІЇВНА

УДК 519.6

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ З ВИКОРИСТАННЯМ БАГАТОПРОЦЕСОРНИХ СИСТЕМ

01.05.02 – чисельне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Грищенко Олександр Юхимович
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. В останні десятиріччя розвиток математичного моделювання динамічних та кінетичних процесів руху в'язкої рідини відбувається у напрямку поглиблення і розширення досліджень за рахунок використання більш повних систем рівнянь, зменшення кількості обмежень, пов'язаних з ідеалізацією моделей руху та рівнянь стану. Одночасно з розвиненням методів математичного моделювання у прикладних галузях науки, виробництві та запитах суспільства виникає значна кількість нових актуальних задач, пов'язаних з процесами, які описуються системами рівнянь переносу та системами рівнянь Нав'є-Стокса.

Практичне застосування на багатопроцесорних комп'ютерних системах показало, що багато із ефективних методів розв'язування задач гідро-, газодинаміки є малоефективними, зокрема, двокрокові схеми Мак-Кормака [1], Браіловської [2], Лакса-Вендроффа [3], Алена-Чена [4], Дюфорта-Франклена [5] та роботи інших авторів [6-11]. В той же час, ідеї запропоновані в роботах [12-18] одержали подальший розвиток в напрямку застосування на паралельних обчислювальних комплексах. При побудові алгоритмів для таких обчислювальних комплексів все ширше почали використовуватись двокрокові різницеві алгоритми, так в роботах [19,20] побудовані двокрокові ітераційні алгоритми для реалізації на багатопроцесорних комп'ютерних системах при розв'язуванні систем рівнянь Нав'є-Стокса. В роботі [21] проведено синтез методів Харлоу [14,15] (метод маркерів та комірок) з методом SIMPLE Патанкара і Сполдінга [16,17]. Свій розвиток в напрямку застосування до багатопроцесорних систем, одержав також і двокроково-симетризований алгоритм [22,23].

Незважаючи на достатньо велику кількість робіт, запити наукового та суспільного розвитку вимагають більш широкого застосування сучасних багатопроцесорних комплексів, а отже, і розробки нових алгоритмів чисельного моделювання відповідних процесів. Ця обставина обумовлює актуальність вибору тематики даної дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у відповідності до плану наукових досліджень кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках бюджетної науково-дослідної теми № ДР 11БФ015-03 «Алгоритми керування і розпізнавання в складних системах» (2011-2015 рр., номер державної реєстрації 0111U006679).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є побудова і дослідження ефективних методів чисельного моделювання на багатопроцесорних системах процесів тепломасопереносу та процесів динаміки в'язкої нестислої рідини, які описуються системами рівнянь Нав'є-Стокса. Поставлена мета обумовлює необхідність розв'язування таких основних *задач*:

- сформулювати постановку задачі та визначити формалізовані вимоги до розпаралелених чисельних алгоритмів;
- побудувати і обґрунтувати узагальнення двокроково-симетризованого алгоритму для ітераційного моделювання стаціонарних процесів переносу;
- побудувати алгоритми розщеплення за просторовими напрямками з використанням двокроково-симетризованого алгоритму;
- дослідити та теоретично обґрунтувати основні обчислювальні характеристики побудованих алгоритмів: апроксимацію, стійкість, дисперсійність та дисипативність;
- проаналізувати можливість розпаралелення побудованих алгоритмів;
- побудувати ефективну при розпаралеленні різницеву схему для моделювання руху нестислої рідини (системи рівнянь Нав'є-Стокса);
- дослідити дисперсійність, дисипативність та адекватність одержаного чисельного алгоритму реальним фізичним процесам;
- розробити алгоритм проведення чисельного моделювання руху в'язкої нестислої рідини на багатопроцесорній системі з MIMD-архітектурою;

- реалізувати та проаналізувати ефективність роботи алгоритму на багатопроцесорній обчислювальній системі з MIMD-архітектурою.

Об'єктом досліджень дисертаційної роботи є процеси тепломасопереносу та процеси динаміки в'язкої нестислої рідини.

Предметом досліджень є математичні моделі тепломасопереносу та руху в'язкої нестислої рідини, записані у вигляді системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, а також систем відповідних скінчено-різницевих рівнянь.

Методами досліджень є класичні методи математичного та функціонального аналізу, методи математичного моделювання, методи теорії різницевих схем використовувалися для побудови чисельних алгоритмів та дослідження таких важливих характеристик як стійкість, дисперсійність, дисипативність, збіжність та консервативність різницевих схем. Концепції побудови паралельних алгоритмів застосовувалися при побудові алгоритмів та для оцінки якості їх реалізації на багатопроцесорних системах.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертаційній роботі розроблено і обґрунтовано новий метод чисельного моделювання процесів динаміки в'язкої рідини на багатопроцесорних системах. Здобуто такі основні результати:

- *вперше* побудовано і обґрунтовано узагальнення двокроково-симетризованого алгоритму для ітераційного моделювання стаціонарних процесів переносу;
- *вперше* розроблено та досліджено схеми розщеплення системи рівнянь конвекції-дифузії, побудовані на базі двокроково-симетризованого алгоритму;
- обґрунтовано стійкість, дисипативність та дисперсійність побудованих двокроково-симетризованих алгоритмів розщеплення;
- *набув подальшого розвитку* двокроково-симетризований алгоритм розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса, записаної у дивергентній формі;

- обґрунтовано консервативність, дисипативність та дисперсійність побудованого двокроково-симетризованого алгоритму для системи рівнянь Нав’є-Стокса;
- *вперше* розроблено і обґрунтовано алгоритм розпаралелення для системи рівнянь Нав’є-Стокса на багатопроцесорних системах та зроблено аналіз її ефективності.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи в основному мають теоретичний характер, їх застосування є перспективним при чисельному моделюванні на багатопроцесорних обчислювальних комплексах процесів переносу різного роду фізичних субстанцій. Розроблені методи та алгоритми розпаралелення дозволяють підвищити швидкодію та точність процесів чисельного моделювання складних динамічних систем, які базуються на системах рівнянь конвекції-дифузії та системах рівнянь Нав’є-Стокса. Окремі наукові результати, одержані в роботі, були впроваджені впроваджені у 2015-2016 н. р. у навчальний процес кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні спеціальних курсів: для магістрів 1 року навчання «Чисельне моделювання динаміки систем», для бакалаврів 4 року навчання «Чисельне моделювання процесів гідродинаміки» та для бакалаврів 3 року навчання «Методи оптимізації для систем із розподіленими параметрами».

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота є самостійною науковою працею. Робота містить теоретичні та методичні положення і висновки, сформульовані здобувачем особисто. Використані в дисертації ідеї, положення чи гіпотези інших авторів мають відповідні посилання і використані для підкріплення ідей здобувача. Серед опублікованих наукових робіт – 2 виконано особисто [24,25], інші 4 – у співавторстві. В роботах [26,27,28] автору належать алгоритми розщеплення, формулювання та доведення відповідних теорем, Грищенку О. Ю. – загальна постановка задачі, Федоровій В. С. – алгоритм розщеплення для рівнянь із коефіцієнтами, залежними від часу, записаних у дивергентному вигляді. У роботі [29] здобувачу належить блочна схема алгоритму розпаралелення та аналіз результатів, Оноцькому В. В. та Попову О. В. – реалізація алгоритму на багатопроцесорному обчислювальному комплексі «Інпарком» з MIMD-архітектурою, Грищенку О. Ю. – ідея розпаралелення чисельної моделі за рівняннями.

Апробація результатів. Основні матеріали дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на міжнародних наукових конференціях:

1. III Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 2009);
2. XVI Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 2009);
3. Міжнародна молодіжна математична школа «Питання оптимізації обчислень» (Кацивелі, 2011);
4. VI Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 2013);
5. Міжнародна наукова конференція «Питання оптимізації обчислень» (Кацивелі, 2013);
6. Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» (Київ, 2014);
7. XXVI International Conference «Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU – 2015)» (Odessa, 2015);
8. VIII Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 2015).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалася та обґрунтовувалася на науковому семінарі кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України під керівництвом чл.-кор. НАН України, проф. Ляшка С. І. та науковому семінарі відділу чисельних методів та комп’ютерного моделювання

Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України під керівництвом чл.-кор. НАН України, проф. Хіміча О. М.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 6 статтях у наукових фахових журналах, затверджених МОН України [24-29], один з яких [27] включений до міжнародної наукометричної бази Scopus, та 9 тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях [30-38].

РОЗДІЛ 1
АНАЛІЗ СТАНУ ПРОБЛЕМИ ТА ОСОБЛИВОСТІ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧІ

1.1. Аналіз стану проблеми

В останні десятиріччя розвиток динаміки рідин і газів, а також їх застосування тісно пов'язані з використанням загальних математичних моделей, побудованих на системах рівнянь Нав'є-Стокса. Ці рівняння в загальному вигляді мало вивчені і містять великий запас не досліджених можливостей. Частинними випадками цих рівнянь є класичні рівняння ідеальної (нев'язкої) рідини, рівняння акустики, турбулентного руху, рівняння внутрішніх хвиль тощо.

Великий вклад у вивчення властивостей систем рівнянь Нав'є-Стокса внесли О. А. Ладиженська [39], Р. Темам [40], Дж.-Л. Ліонс [41], В. А. Солонніков [42-44], В. М. Ковеня [45], П. Роуч [46], В. А. Гущін [47], Г. И. Марчук [48], Г. М. Кобельков [49], А. С. Михайлов [50], І. Ю. Брайловська [51-53] та їх учні. Незважаючи на значні досягнення названих вчених, дослідження строгості постановки задачі, існування та єдності розв'язку для тривимірного випадку залишається малодослідженою проблемою. Про це свідчить оголошена шоста проблема тисячоліття (Millenium Prize Problems), визначена математичним інститутом Клея у 2000 році, яку охарактеризовано як «важливу класичну задачу, розв'язання якої не знайдено впродовж багатьох років»: рівняння Нав'є-Стокса (існування та гладкість розв'язків). Була неоднарозова спроба розв'язати цю проблему, наприклад, Отелбаєвим [54], а О. А. Ладиженська в [55] дала достатньо повний аналіз стану проблеми та звела основну проблему однозначності розв'язку тривимірної задачі до можливості побудови спеціальної апріорної оцінки для всіх можливих розв'язків. У двовимірному випадку в значній мірі ця задача була розв'язана О. А. Ладиженською і В. А. Солонніковим в [56] ще 1958 році.

При дослідженнія і побудові розв'язків систем рівнянь Нав'є-Стокса у здебільшого використовується позитивний досвід, який був досягнутий при вивченні конвективного і тепло-, масообміну. Ці рівняння описують стан багатьох реальних фізичних процесів, разом з тим часто вони бувають складовими значно більш загальних процесів. Вивченню цих моделей також присвячена значна кількість робіт. Це, зокрема, роботи А. А. Самарського [57-60], Г І. Марчука [48,61], П. Н. Вабищевича [59,60,62,63], М. М. Яненка [45,64-66], І. І. Ляшка [67-75], В. В. Скопецького [76-79], С. І. Ляшка [80-86], О. Ю. Грищенка [70,87-103].

Характерологія системи рівнянь Нав'є-Стокса обумовлюється специфічною нелінійністю рівнянь, існуванням в багатьох випадках малого параметру при старшій похідній, просторовим нестаціонарним характером руху. Це значно обмежує можливості їх аналітичного дослідження і приводить до висновку, що ефективне вивчення можливе лише за допомогою чисельних методів.

До широкого розповсюдження ЕОМ і розвитку чисельних методів гідродинаміки задача можливості знаходження чисельних розв'язків системи рівнянь Нав'є-Стокса викликала великі дискусії. Така задача вже сформулювана як самостійний напрямок в механіці рідини та газу та її застосуваннях в аеро-, гідродинаміці, енергетиці та інших фізичних і технологічних сферах. Розвиток прикладних задач сьогодні вимагає врахування все більше різних факторів впливу на протікання процесу, а також підвищення точності розрахунків. Це в свою чергу, ставить задачу вдосконалення чисельних методів та збільшення можливостей обчислювальної техніки. Резервом збільшення швидкодії обчислювальних комплексів є багатопроцесорні системи.

Однією зі складових математичного моделювання є чисельне моделювання. Цей етап моделювання складається з двох основних частин: першої – дискретизації математичної моделі, тобто способу побудови скінченно-вимірної моделі, яка по суті є алгебраїчним відображенням основної фізичної моделі, та другої – побудови методу знаходження розв'язку одержаної системи рівнянь. До чисельної моделі ставиться низка апріорних вимог. Це перш за все – адекватне відображення основної моделі (законів збереження або їх наслідків) на дискретизованому функціональному просторі, обчислювальної стійкості, існування та єдиності розв'язку та збіжності його до розв'язку основної задачі. Вибір того чи іншого конкретного чисельного методу визначається багатьма об'єктивними і суб'єктивними факторами. Серед них: особливості даного класу задач, вимоги до чисельного розв'язку, зокрема точності і швидкості одержання результату, а також можливостями обчислювальної техніки, яка є в розпорядженні дослідника.

Методам чисельного розв'язування задач конвекції-дифузії та систем рівнянь Нав'є-Стокса присвячено широке коло літератури. Відомими досягненнями в цій області є результати роботи наукових шкіл відомих математиків К. І. Бабенко [104,105], О. М. Білоцерковського [106,107], С. К. Годунова [108], Г. І. Марчука [109,110], О. А. Самарського [111,112], М. М. Яненка [113,114], В. М. Полежаєва [115].

Основними наближеними методами є методи, побудовані на методі скінчених різниць, методі скінчених елементів та методах, заснованих на варіаційних і проекційних принципах. В чисельному моделюванні процесів гідродинаміки та конвективного тепло-масопреносу визначну роль відіграють саме різницеві методи. До найбільш поширених методів доцільно віднести економічні різницеві методи, побудовані на основі змінних напрямків [116,117], методи розщеплення: метод дробових кроків [118], методи циклічного розщеплення [48,61], методи розщеплення за фізичними процесами [48,61,119].

Вибір конкретного методу для реалізації чисельної моделі тісно пов'язаний з вибором архітектури обчислювальної системи. Застосування багатопроцесорних систем показало, що більшість ефективних чисельних методів при обчисленні на одно процесорному комп'ютері виявляються мало ефективними при паралельних обчисленнях. Алгоритми паралельних обчислень, які зменшують час розв'язування задачі, повинні враховувати як оптимальне використання кеш-пам'яті процесорів, так і наявність декількох ядер в процесорах. Для створення ефективних алгоритмів необхідно враховувати особливості архітектури комп'ютерів і їх міжпроцесорні комунікації. Найбільш ефективною при багаторівневому чисельному моделюванні є MIMD-архітектура. Проблеми розпаралелення алгоритмів для розв'язування основних класів задач обчислювальної математики присвячено значну кількість робіт, наприклад, В. В. Воєводін [120], І. М. Молчанов [121], Дж. Ортега [122], О. М. Хіміч [123].

Проведений аналіз свідчить про актуальність побудови і досліджень чисельних методів моделювання процесів в'язкої нестислої рідини на багатопроцесорних системах.

1.2. Базові моделі динаміки процесів. Особливості постановки задачі дисертаційного дослідження

Значна кількість фізико-хімічних процесів, зокрема процесів дифузії, теплопровідності та дрейфу електричного зарядження атомів домішок в електричному полі тощо, породжено рухом середовища під дією тих чи інших сил. Математичний запис рівнянь стану цих процесів записується формально однотипними рівняннями.

Так, якщо $\vec{V}(x,t)$ – вектор швидкості руху середовища (рідини), ρ – його щільність, то тепловий стан цього середовища описується рівнянням

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)T\right)=\nabla\cdot(k\nabla T)+q, \qquad (1.1)$$

де T – температура, c_p – теплоємність при сталому тиску, k – теплопровідність рідини, а q – потужність об'ємних джерел тепла. Отже, температура в точці (x,t) визначається дифузією та переміщенням елементів об'ємів середовища (конвекцією) [124,125,48].

Якщо рідина не однорідна по складу та є сумішшю двох компонент, то склад суміші визначається концентрацією c однієї з них. Рівняння конвекції викликаного, наприклад, градієнтом температури має вигляд [126,61]

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t}+\nabla(\vec{V}\rho c)=\nabla(\rho k\nabla c) \qquad (1.2)$$

або

$$\frac{\partial m}{\partial t}+\nabla(\vec{\tilde{V}} m)=\nabla(k\nabla m), \qquad (1.3)$$

де $m=\rho c$ – маса однієї з речовин в одиниці об’єму, $\vec{\tilde{V}}=\vec{V}+\frac{k}{\rho}\nabla\rho$ – ефективний конвективний перенос.

Враховуючи, що такі моделі доповнюються законом збереження маси у вигляді рівняння нерозривності

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\vec{V}\rho)=0, \qquad (1.4)$$

рівняння (1.3) подаємо у вигляді

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t}+\nabla(\vec{V}\rho c)=\rho\left(\frac{\partial c}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)c\right) \qquad (1.5)$$

або

$$\frac{\partial c}{\partial t}+(\vec{\tilde{V}}\nabla)c=\nabla(k\nabla c), \qquad (1.6)$$

де $\vec{\tilde{V}}=\vec{V}-\frac{k}{\rho}\nabla\rho$.

Моделі тепло-масопереносу, які включають в себе і рівняння, що визначають рух самого середовища, зокрема його швидкість $\vec{V}$ описується системою рівнянь Нав’є-Стокса, яка при умові нестискуваності однорідного середовища $\rho=const$ має вигляд

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}\right)=-\nabla P+\mu\nabla^2\vec{V}, \qquad \nabla\vec{V}=0. \qquad (1.7)$$

Тут P – скалярна функція тиску, а μ – динамічна в’язкість рідини.

Якщо звести поняття ротора потоку $\vec{W} = \mathrm{rot}\vec{V}$, то рівняння (1.7) перепишемо

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{W} - (\vec{W}\nabla)\vec{V}\right) = \eta\nabla^2 W .$$

Це рівняння динаміки завихрень в умовах нестискуваної рідини.

Записані вище рівняння не тільки самі є моделями стану різноманітних процесів, але часто використовуються як чистини складних динамічних процесів. Зокрема, це екологічні проблеми, які пов'язані з розповсюдженням шкідливих речовин в атмосфері і водоймах. Рівняння типу (1.7) відіграють важливу роль при дослідженні процесів в мікроелектроніці [57,59,40]. Прикладом є рівняння руху електрично заряджених домішок в твердому тілі

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla(\mu \vec{E} c) = \nabla(k\nabla c) \qquad (1.8)$$

де E – напруженість електричного поля, k – коефіцієнт дифузії, μ – рухомість часток, домішок.

Це рівняння описує процес перенесення, який обумовлений дифузією та дрейфом електрично заряджених атомів в електричному полі.

При вивченні руху токопровідного середовища в магнітно-гідродинамічних генераторах модель базується як на гідродинамічних рівняннях Нав'є-Стокса, так і на рівняннях електродинаміки Максвела.

Процеси динаміки в'язкої рідини, тепло-масопереносу або іншої субстанції моделюються на основі системи рівнянь типу рівнянь Нав'є-Стокса.

Дисертаційну роботу присвячено побудові чисельних методів моделювання динамічних процесів вказаного типу. До основних вимог, які поставлено при розробці цих методів відносяться їх точність, швидкодія та можливість розв'язувати задачі з великою кількістю вузлових точок сіткової області.

Постановка задачі дисертаційного дослідження включає дві складові.

1. Побудувати ефективні алгоритми чисельного моделювання процесів динаміки в'язкої нестислої рідини, стан якої описується системою рівнянь руху (переносу) субстанції

$$L\vec{u} \equiv k\frac{\partial u}{\partial t} + B(\vec{u}) - \vec{f} = 0, \qquad \vec{f} = \vec{f}\left(x_\alpha, \frac{\partial P}{\partial x_\alpha}\right) \tag{1.9}$$

в наближенні нестискуваної рідини [39]

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{1.10}$$

а процеси протікають в циліндричній області $Q = \Omega \times (0 < t < T)$, де Ω – регулярна область у R^N з кусково-гладкою границею $\partial\Omega$, а

$$B(u) = -\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + k\sum_{\alpha=1}^{N} b_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + qu, \tag{1.11}$$

причому $B_\alpha(x) \ge 0$ для всіх $\alpha = \overline{1,N}$ – неперервно-диференційовані за своїми змінними та

$$\sum_{\alpha=1}^{N} B_\alpha \xi_\alpha \ge \alpha_B \sum_{\alpha=1}^{N} \xi_\alpha^2, \qquad \xi_\alpha \in R. \tag{1.12}$$

Крім того розв'язок задачі (1.9), (1.10) задовольняє задані початкові і граничні умови:

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad x \in \Omega; \qquad u|_{\partial\Omega} = g(x,t), \quad x \in \partial\Omega.$$

Для спрощення подальших викладок і не обмежуючи загальності міркувань, далі покладемо $N = 2$, а $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, і позначимо

$$\Lambda = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(B_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) \tag{1.13}$$

– оператор теплопровідності, а через

$$C^1(b)u = \vec{b}\,\mathrm{grad}\,u = \sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \tag{1.14}$$

– оператор конвективного переносу.

Легко переконатися [45,60], що при виконанні (1.10) оператор (1.14) еквівалентний наступному:

$$C^2(\vec{b})u = \operatorname{div}(\vec{b}u) = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial (b_\alpha u)}{\partial x_\alpha}. \qquad (1.15)$$

Якщо $b_n(x) = 0$, або $\omega(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$, або ці функції задовольняють умові періодичності, то при виконанні умови (1.10), у гільбертовому просторі $L_2(\Omega)$, маємо

$$C^1(\vec{b})(\omega,\omega) = \int_\Omega \vec{b}\operatorname{grad}\omega^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}(\vec{b}\omega)dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \omega^2 \operatorname{div}\vec{b}dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} b_n\omega^2 dx = 0.$$

Отже, в цьому разі оператор (1.14) (або (1.15)) – кососиметричний. У випадку, коли оператор конвективного переносу моделюється рівністю

$$C = C^0 = \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial (b_\alpha(x)u)}{\partial x_\alpha}\right), \qquad (1.16)$$

то $(C\omega,\omega) = 0$ навіть якщо умова (1.10) не виконується.

2. Розробити схему ефективного застосування розробленого алгоритму на багатопроцесорних комплексах MIMD-архітектури.

1.3. Загальні підходи до вибору методів чисельного моделювання на багатопроцесорних системах

Серед множини різних наближених методів, які можна застосовувати при моделюванні поставлених в п. 1.2 задач найбільш часто застосовуються чисельні підходи, зокрема метод скінчених елементів та метод скінчених різниць [126,127]. Це перш за все пояснюється гнучкістю цих методів, пристосовністю до різних типів граничних умов, слабкою залежністю від геометричної форми області, у якій протікає процес.

При конструюванні або виборі скінчено-різницевих методів для моделювання фізичних процесів потрібно звертати увагу на їх важливі внутрішні характеристики, які можна розподілити на дві конфліктуючі групи.

До першої з них віднесемо характеристики, які визначають коректність обчислювального методу (а саме: апроксимацію, стійкість, збіжність, аналіз першого диференціального наближення, консервативність тощо). До другої віднесемо характеристики, які визначаються ресурсно-необхідними затратами для обчислення задачі на ЕОМ: час розв'язування, затрати пам'яті. Спорідненою з другою групою характеристик є можливість використання адаптованого алгоритму на багатопроцесорних системах.

1.3.1. Основні характеристики методів чисельного моделювання

В першій групі необхідною характеристикою є апроксимація диференціальної задачі різницевою, а саме введенням простору функцій дискретних змінних та запис аналогів диференціальних операторів в просторі функцій дискретної змінної. Апроксимація задачі є локальною (в околі точки) асимптотичною характеристикою, яка має сенс при прямуванні кроків сітки дискретної області до нуля.

Другою важливою характеристикою є обчислювальна стійкість різницевої схеми.

Якщо різницева задача $L_h u_h = \varphi_h$ апроксимує еволюційну диференціальну задачу $Lu = f$ з похибкою $O(h^m + \tau^l)$, тобто

$$L_h u_h - \varphi_h = Lu - f + O(h^m + \tau^l) .$$

І різницева задача на часових кроках має вигляд

$$B_0 u_h^{n+1} = B_1 u_h^n + \varphi_h ,$$

де B_0 – обмежений оператор і існує B_0^{-1}, то будемо вважати, що відповідна різницева схема безумовно стійка, якщо множина степенів оператора $B_0^{-1}B_1$ обмежена, або умовно стійка, якщо існує умова, накладена на співвідношення кроків сітки h і τ при виконанні якої $\left\| B_0^{-1}B_1 \right\|^n$ буде обмеженою.

За теоремою Лакса [128], з того, що різницева задача апроксимує диференціальну і є обчислювальною сіткою випливає, що розв’язок різницевої задачі збігається до розв’язку диференціальної при $h \to 0$ і $\tau \to 0$, тобто $u_h \to u$. Швидкість збіжності визначається порядком апроксимації.

Ця оцінка є необхідною умовою в теоретичному обґрунтуванні, але вона часто мало корисна при підготовці практичних розрахунків. Всі реальні обчислювальні системи дозволяють вибирати довільно малий, але все ж скінченний крок сітки. Крім того, зменшення кроків сіткової області приводить і до зростання кількості вузлів сітки, а отже і кількості невідомих в системі різницевих рівнянь.

Глибокий аналіз залишкового члена похибки апроксимації за допомогою першого диференціального наближення [129] дає змогу оцінити вплив членів похибки апроксимації, які містять, наприклад, перші степені кроків. Такий підхід дозволяє з’ясовувати низку важливих особливостей даної різницевої схеми. Це можливість виникнення осциляційних шумів (дисперсійність схеми) або пригнічення великих градієнтів розв’язку (дисипативність). Крім того, дослідження першого диференціального наближення різницевої задачі в ряді випадків показують, що ця задача є апроксимацією задачі іншого типу. Зокрема, часто замість рівняння параболічного типу ми розв’язуємо рівняння гіперболічного типу з малим коефіцієнтом при старшій похідній.

Розглядаючи різницевий алгоритм як інструмент чисельного моделювання, необхідно приймати до уваги його властивість відображати закони збереження, або їх наслідки, покладені в балансні рівняння.

В нашому випадку різницеві рівняння є не тільки засобом побудови розв’язків диференціальних рівнянь, а і інструментом моделювання реальних процесів. Отже, вони повинні відображати ті закони збереження чи наслідки законів, які притаманні процесу. Будуючи диференціальні рівняння для того чи іншого процесу виходять з побудови так званих балансних рівнянь. Ці рівняння відображають урівноваженість сил, маси або інших факторів, які діють в деякому об’ємі скінченого розміру за одиницю часу. Далі робляться припущення про необхідну гладкість функцій і приходять до «границі при прямуванні розмірів контрольного об’єму» до нуля. Таким чином, диференціальне рівняння є наслідком балансного рівняння при певних умовах, накладених на гладкість функцій.

Виконання балансного рівняння на сітковій області забезпечує консервативність різницевих схем. Різницеву схему називають консервативною, якщо ця схема виражає на сітковій множині відповідний закон збереження. Схеми, які порушують закон збереження називають дисбалансними.

1.3.2. Основні характеристики алгоритмів для ефективного розпаралелення

Перейдемо до другої групи характеристик. Як зазначалося вище, є можливість знаходження розв’язку різницевої задачі. До недавнього часу це питання розв’язувалось в умовах використання однопроцесорних (послідовних) обчислювальних систем. Останнє десятиліття дало великий прогрес у побудові доступної багатопроцесорної техніки. Відкрилися нові можливості розв’язувати широкі кола складних задач з великими потоками інформації за реальні проміжки часу. Поява такої можливості суттєво вплинула на розробку чисельних методів, які є ефективними при використанні на багатопроцесорних комплексах [120,122,130].

Сформулюємо основні моменти достатньо складної концепції побудови та дослідження паралельних обчислювальних методів. Робота одно процесорної ЕОМ полягає в послідовному виконанні окремих команд. Опис впорядкованої послідовності цих команд у вигляді програми розташовано в пам’яті. В основі архітектури та організації роботи таких ЕОМ лежить принцип послідовного виконання окремих команд.

Об’єднання декількох процесорів і блоків пам’яті в одну систему за допомогою каналів зв’язку при самих кращих умовах може привести збільшення швидкості, пропорційно числу збільшення процесорів та числу пристроїв пам’яті. Але значне збільшення числа процесорів з розподіленою пам’яттю, скоріш за все, приведе до того, що можливості комунікаційної мережі в забезпеченні швидкої передачі інформації стануть обмеженими. Отже, прагнення збільшити швидкодію за рахунок збільшення процесорів має свою межу.

Досягти високої продуктивності системи можна лише у випадку, якщо в процесі розв’язування задачі усі процесори або значна їх частина буде постійно завантажена. Проте, не всі алгоритми в силу причин, викликаних внутрішньою структурою, можуть забезпечувати постійну загрузку великого числа процесорів. Існує багато чисельних методів, які мають високу продуктивність при послідовних обчисленнях, але можуть бути ефективно реалізовані на багатопроцесорних системах. Високу ефективність можна досягти в результаті узгодження структури чисельних методів та архітектури обчислювальної системи.

Якщо при реалізації алгоритму зможемо так організувати обчислення, що всі функціональні пристрої будуть рівномірно завантажені виконанням корисної роботи, то в цілому (без урахування затрат на підготовчі роботи) на даній системі буде досягнута максимальна швидкодія.

Ще одним вузьким місцем є швидкі обміни інформацією між процесорами. В багатопроцесорних системах здебільшого кожен процесор має свою власну пам’ять. Це так звані *системи з розподіленою пам’яттю*. Обмін інформацією маж цими розподіленими блоками відбувається повільно.

Зазначимо, що комп’ютери паралельної архітектури мають кілька рівнів зв’язків: між обчислювальними вузлами (блоками) та між процесорами одного вузла.

Ці зв’язки суттєво відрізняються своєю швидкодією. Програми, які реалізують розв’язування задач в середині одного вузла, можуть звертатися до будь-яких частин лінійної і однорідної пам'яті. Крім того, процесори сучасних комп'ютерів мають внутрішню кеш-пам'ять. Тому виникає задача визначення необхідної кількості використаних процесорів і необхідної топології (зв'язків між процесорами) для розв'язування конкретної задачі. Система програмного розпаралелення MPI дає можливість створення віртуальної топології (топологія зв'язків між процесорами, що створюється програмно: кільце, решітка, тор, гіперкуб) при визначеній кількості ядер.

Отже, користувач повинен визначити необхідну кількість ядер та розподілити вхідні дані між ними, забезпечуючи між ними рівномірне завантаження.

В наш час існує два основні типи класифікації паралельних систем за потоками команд (SIMD) та потоками даних (MIMD). Але якою б не була паралельна обчислювальна система, її робота підкорена загальній ідеї: в кожен момент часу обробка інформації маже здійснюватися одночасно на багатьох функціональних пристроях, причому на кожному пристрої інформація обробляється незалежно від інших.

Якщо операції алгоритму розбиті на групи, які впорядковані так, що кожна операція довільної групи залежить або від початкових даних алгоритму або від результатів виконання операцій, які знаходяться в попередніх групах, то таке подання алгоритму називається *паралельною формою алгоритму*. Кожна група операцій називається ярусом паралельної форми, число груп – висотою, а максимальне число операцій в ярусі – шириною паралельної форми [120]. Отже, якщо відома паралельна форма алгоритму, то алгоритм реалізується на паралельній системі по крокам послідовно ярус за ярусом. Час реалізації алгоритму в цьому разі залежить від висоти алгоритму. В свою чергу, висота алгоритму може залежати від архітектури системи, кількості процесорів в ньому.

Основними вимогами до паралельних алгоритмів і програм для MIMD комп'ютерів є здатність розв'язувати поставлену задачу, виконуючи багато операцій одночасно. *Масштабованість* – можливості виконання програми з використанням різного числа процесорів; *локальність* – характеризує можливість звернення до локальних даних частіше, ніж звертання до віддалених даних. Остання характеристика є важливою для підвищення ефективності програм на архітектурі з розподіленою пам'яттю, зокрема для MIMD архітектури. Це пов'язано безпосередньо з організацією паралельних обчислень, зокрема: ефективним розпаралеленням обчислень, визначенням ефективності схеми, декомпозиції початкової інформації, із забезпеченням необхідної топології і кількості процесорів для ефективного виконання процесу розв'язування задачі та для забезпечення рівномірної загрузки для усіх процесорів, мінімізації обмінів між процесорами та їх синхронізацією.

При побудові алгоритмів, які моделюють на багатопроцесорних системах MIMD архітектури передбачають розподіл основного алгоритму на окремі частини для подальшого їх паралельного виконання. До основних *концепцій алгоритмічного паралелізму* відносяться чотири типи розпаралелення. *Розпаралелення за рівняннями* – це вищий рівень паралелізму, який полягає у можливості розв'язувати кожне рівняння системи окремо на своєму процесорі чи групі процесорів. Якщо при розв'язуванні окремого рівняння вдається побудувати алгоритм, в якому складний багатовимірний оператор розкладається на суму простіших одновимірних, кожну з яких можна розв'язувати на своєму процесорі, такий алгоритм є *розпаралеленням за просторовими напрямками*. Важливим є геометричний паралелізм, який передбачає *розпаралелення за декомпозицією структури даних*. Ідея полягає в поділі просторової області на частини, в кожній з яких розв'язується своя простіша підзадача. *Розпаралелення за фізичними процесами* будується з використанням певних фізичних гіпотез.

Загальною оцінкою якості паралельних алгоритмів є такі два показники: коефіцієнт прискорення

$$S_p = \frac{T_1}{T_p}$$

та коефіцієнт ефективності

$$E_p = \frac{S_p}{p}.$$

Тут p – кількість процесорів, яка використовується для розв'язування задач на MIMD системі, T_1 – час розв'язування задачі на послідовному алгоритмі (однопроцесорному комп'ютері), T_p – час розв'язування тієї ж задачі на p–процесорній системі.

В наступних розділах дисертації при побудові паралельних алгоритмів враховано викладені вище рекомендації.

1.4. Аналіз чисельних методів зручних при розпаралеленні

Методи розщеплення в математичному моделюванні фізичних процесів. Апроксимація різницевими схемами систем рівнянь Нав'є-Стокса в'язкої стискуваної або нестискуваної рідини чи рівнянь тепло-масопереносу призводить до систем лінійних або нелінійних алгебраїчних рівнянь. Побудова ефективних методів для знаходження розв'язку таких систем є складною проблемою, яка пов'язана перш за все зі складність самих рівнянь, а також з тим, що простіші явні різницеві рівняння мають достатньо жорсткі обмеження на часовий крок. Неявні схеми таких обмежень або не накладають, або їх значно послаблюють, але призводять до розв'язування на кожному часовому кроці складної часто нелінійної системи алгебраїчних рівнянь. Тому з метою зменшення розмірності системи при побудові чисельного розв'язку багатовимірних рівнянь використовують підходи, які базуються на побудові різницевої схеми у вигляді скінченої послідовності простіших задач, для яких існують ефективні чисельні алгоритми.

М. М. Яненко в монографії [64] запропонував метод дробових кроків, оснований на ідеї слабкої апроксимації системи рівнянь. В основу цього метода покладено розщеплення складного оператора за однією з ознак:

1. *Розщеплення за напрямками просторових змінних*.
Воно полягає у заміні багатовимірної задачі на послідовність задач меншої розмірності (краще одновимірних), яка циклічно змінюється в часі.

2. *Розщеплення за фізичними процесами*.
У цьому разі фізичний процес, що розглядається подається як почергово змінна послідовність процесів більш простої фізичної структури. Наприклад, відділяються процеси конвективного переносу, теплообміну, тощо.

3. *Аналітичне розщеплення*, яке дозволяє на дробових кроках знайти аналітичні розв'язки усіх складових задач (або принаймні частини), зокрема задачі відновлення дивергентності.

Розщеплення на дробових кроках у ряді задач супроводжується процедурою наближеної факторизації оператора. Розщеплення і наближена факторизація оператора можуть реалізовуватися у диференціальній, дискретній і напівдискретній формах.

1.4.1. Розщеплення за просторовими напрямками

Нехай в циліндричній області $Q = \Omega \times (0 < t < T)$, де Ω – регулярна область в R^N з кусково-гладкою границею $\partial\Omega$ задано параболічну систему рівнянь

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N} A_\alpha(\vec{U})\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha,\beta}^{N} B_{\alpha\beta}(\vec{U})\frac{\partial \vec{U}}{\partial x_\beta} = 0, \tag{1.17}$$

де $\vec{U}$ – $m-$вимірний вектор, A_α, $B_{\alpha\beta}$ – квадратні матриці $m \times m$.

Схема повного розщеплення.

Покладемо спочатку, що рівняння (1.17) не містить мішаних похідних $B_{\alpha\beta} = 0$ *при* $\alpha \neq \beta$ і виконується умова параболічності $B_\alpha < 0$. Для такої системи метод слабкої апроксимації [65] реалізується за наступним алгоритмом.

До вектора функції $\vec{U}$ застосовуємо матричний оператор

$$L=\sum_{\alpha=1}^{N} A_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} B_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \qquad (1.18)$$

і позначимо

$$L=L_1+L_2+\ldots+L_N\,, \qquad (1.19)$$

де $L_i=A_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}B_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ – просторові однорідні оператори ($i=\overline{1,N}$ – індекс просторової змінної).

Використовуючи ідею слабкої апроксимації, запишемо систему рівнянь

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{N}\Theta_\alpha(t,\tau)L_\alpha\vec{U}=0\,. \qquad (1.20)$$

Тут $\Theta_\alpha(t,\tau)$ – функція змінної t та параметра τ, така що $\Theta_\alpha(t,\tau)=\delta_k^\alpha$, при $t\in\left[n\tau+(k-1)\tau/N,n\tau+k\tau/N\right]$, а $\delta_k^\alpha=\begin{cases}1, & при\ \alpha=k\\ 0, & при\ \alpha\neq k\end{cases}$ – символ Кронекера.

Цей запис практично означає, що на кожному часовому інтервалі $\left[t_n+(k-1)\tau/N,t_n+k\tau/N\right]$ розв’язується система одновимірних рівнянь

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+NL_k\vec{U}=0\,,\qquad k=\overline{1,N}$$

для якої початковими даними є розв’язок задачі на попередньому дробовому кроці.

Побудоване диференціальне розщеплення називають *розщепленням за напрямками.*

Схема наближеної факторизації оператора.

Складнішою є ситуація, коли $B_{\alpha\beta}\neq 0$ при $\alpha\neq\beta$, оскільки у цьому разі не можна строго казати про розщеплення, а можна лише процедурі розщеплення (1.17) надати зовнішню форму «розщеплення за напрямками» [45].

Проілюструємо це на прикладі двовимірного рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu, \qquad (1.21)$$

де $\quad L=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}a_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}$.

Запишемо

$$L=L_1+L_2, \qquad (1.22)$$

де $\quad L_i=\frac{\partial}{\partial x_i}a_{i1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_i}a_{i2}\frac{\partial}{\partial x_2}=L_{i1}+L_{i2}, \quad i=1,2$.

Кожне з розщеплених рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t}=L_1u, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=L_2u$$

не наближає рівняння (1.26) [45], але повністю розщеплена система

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\Theta_1L_1+\Theta_2L_2\right)u$$

наближає. Тому систему

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t}=\left(\Theta_1L_{11}+\Theta_2L_{22}\right)u(t)+f(t),$$

де $\quad f(t)=\left(\Theta_1L_{12}+\Theta_2L_{21}\right)u\left(t-\frac{\tau}{2}\right),$

формально можна розглядати як диференціальне розщеплення за напрямками при заданій правій частині $f(t)$. Така інтерпретація цілком виправдовується при різницевому розщепленні [65]:

$$\frac{y^{n+1/2}-y^n}{\tau}=\Lambda_{11}y^{n+1/2}+\Lambda_{12}y^n,$$
$$\frac{y^{n+1}-y^{n+1/2}}{\tau}=\Lambda_{21}y^{n+1/2}+\Lambda_{22}y^{n+1},$$

де $\quad \Lambda_{\alpha\beta}$ – різницева апроксимація оператора $L_{\alpha\beta}$.

Використовуючи ідею метода наближеної факторизації оператора, легко побудувати схему розщеплення методу змінних напрямків.

Нехай $L = L_1 + L_2$, $L_\alpha = C_\alpha + \Lambda_\alpha$, де C_α та Λ_α - різницеві оператори, які є апроксимацією одномірних операторів конвективного та дифузійного переносу вздовж осі x_α $(\alpha = 1,2)$. Тоді схема змінних напрямків матиме вигляд

$$\begin{aligned}
&\frac{y_{ij}^{n+1/2} - y_{ij}^{n}}{0.5\tau} + \frac{1}{2}\left(L_1 y_{ij}^{n+1/2} + L_2 y_{ij}^{n}\right) = \varphi_{ij}^{1},\\
&\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n+1/2}}{0.5\tau} + \frac{1}{2}\left(L_1 y_{ij}^{n+1/2} + L_2 y_{ij}^{n+1}\right) = \varphi_{ij}^{2},\\
&y_{ij}^{0} = u\left(x_i, y_j, 0\right).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Такі схеми детально досліджені в [48,61].

У багатовимірному випадку, коли в просторових диференціальних операторах містяться мішані похідні, розщеплення проводиться аналогічно (1.21), (1.22).

Запишемо систему (1.17) у вигляді:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = L\vec{U}, \tag{1.24}$$

де $L = \tilde{L}_1 + \ldots + \tilde{L}_m$, а $\tilde{L}_i = L_i + M_i$;

$$L_i = \frac{\partial}{\partial x_i} B_{ii} \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad M_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} B_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad B_{ij} \neq B_{ji} \quad (i \neq j)$$

Тоді розщеплена система (1.24) набуде вигляду:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(t,\tau)\left(L_i \vec{U} + \vec{f}^{\,i}(t)\right), \tag{1.25}$$

де $\Theta_i(t,\tau) = \delta_i^k$, $\quad (n\tau + (k-1)\tau/N) \le t < (n\tau + k\tau/N)$, $\quad \vec{f}^{\,i}(t) = M_i \vec{U}(t - \tau/N)$.

В системі (1.25) функцію $f^i(t)$ формально можна вважати заданою. Саме у такому розумінні будується алгоритм розщеплення за просторовими змінними для системи рівнянь еволюційного типу, зокрема системи рівняннь Нав’є-Стокса.

Використовуючи таку систему розщеплення (1.25) можна побудувати ітераційний метод розв’язування стаціонарних крайових задач, оснований на схемі факторизованого розщеплення.

Дійсно, якщо в області $\Omega\times[0,T]$ поставлено початково-крайову задачу

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}=L\vec{U}+\vec{F} \qquad (1.26)$$

$$l\vec{U}=\vec{\varphi}, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \qquad (1.27)$$

$\vec{U}(x,0)=\vec{U}_0(x)$, $\quad x\in\Omega$, (l – оператор граничних умов), та умови (1.27) не залежать від часу, то система (1.26) може мати розв'язок, який усталюється. Тобто розв'язок $\vec{U}(x,t)$ задачі (1.26), (1.27) при $t\to\infty$ прямуватиме до розв'язку стаціонарної задачі

$$L\vec{U}+\vec{F}=0. \qquad (1.28)$$

Отже, рівняння (1.26) володіє властивістю стаціонаризації, то для розв'язування задачі (1.28) можна застосовувати ітераційний алгоритм, континуальним аналогом якого є рівняння з релаксаційним оператором R таким, що замінивши в рівнянні (1.26) оператор $E\dfrac{\partial}{\partial t}$ на оператор $R\dfrac{\partial}{\partial t}$, (де E тотожний, а R – релаксаційний оператор), отримаємо множину систем, розв'язок кожної з яких володіє властивістю усталення. Ця властивість розв'язків широко використовується в практиці побудови ітераційних процесів для знаходження наближених розв'язків рівняння (1.28) як розв'язок

$$R\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}=L\vec{U}+\vec{F}. \qquad (1.29)$$

При цьому рівняння (1.29) повинно володіти властивістю стаціонаризації розв'язку, а оператор R бути підібраним так, щоб континуальний і дискретний процеси стаціонаризації збігалися швидше, ніж цей процес для рівняння (1.26). У цьому разі, потрібно переконатися, що задача має єдиний стаціонарний розв'язок, який не залежить від процесу стаціонаризації.

Наступні кроки розщеплення виконуються за схемою (1.25).

1.4.2. Методи розщеплення за фізичними процесами

Ці методи полягають у зведенні розв'язку поставленої задачі, яка описує складний фізичний процес, до розв'язування послідовності задач, що описують процеси більш простої фізичної структури. Одержані розв'язки повинні у сукупності наближати розв'язок початкової задачі.

Вказану ідею проілюструємо на прикладі розщеплення системи рівнянь

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial u\phi}{\partial x}+\frac{\partial v\phi}{\partial y}-\mu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)+\sigma\varphi=f, \tag{1.30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{1.31}$$

$$\varphi=g \quad \text{при} \quad t=0, \quad \sigma\ge 0, \quad \mu\ge 0. \tag{1.32}$$

Щоб не ускладнювати дослідження впливом розщеплення граничних умов, розв'язок φ шукаємо в усій площині x,y. Рівняння (1.30) описує два принципово різні процеси.

Якщо функції $u\ x,y$ та $v\ x,y$ є проекціями вектора швидкості конвективного переносу, які задовольняють рівняння нерозривності (1.31), то процес перенесення деякої субстанції вздовж траєкторії, яка описується задачею

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}+\frac{\partial u\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial v\varphi_1}{\partial y}=0, \tag{1.33}$$

$$\varphi_1=g_1, \quad t=0. \tag{1.34}$$

Рівняння

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}-\mu\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right)+\sigma\varphi_2=f, \tag{1.35}$$

$$\varphi_2=g_2, \quad t=0 \tag{1.36}$$

визначає процес дифузії та поглинання субстанції.

Вказані процеси є граничними переходами загального рівняння (1.30), (1.31). При $\mu\to 0$, $\sigma\to 0$ рівняння (1.30) переходить в (1.33), (1.34), а при

$u = v = 0$ з (1.30), (1.31) маємо (1.35), (1.36).

Ідея послідовного розв'язування задач (1.33), (1.34) та (1.35), (1.36) – розщеплення за фізичними процесами ґрунтується на наступних міркуваннях.

Нехай функції $\varphi(x, y, t)$ та $g\ x, y$ допускають запис у вигляді інтегралів Фур'є

$$\begin{gathered}\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi\ \alpha,\beta,t\ e^{I\alpha x+I\beta y}d\alpha d\beta,\\ g\ x,y\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}A\ \alpha,\beta\ e^{I\alpha x+I\beta y}d\alpha d\beta,\end{gathered} \tag{1.37}$$

і покладемо, що в (1.30), (1.32) u та v – сталі, $f \equiv 0$, а $g\ x, y$ достатньо швидко спадає при прямуванні до нескінченості, так що (1.37) мають зміст. При вказаних умовах точний розв'язок задачі (1.30), (1.31) матиме вигляд [61]

$$\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}A\ \alpha,\beta\ e^{I\ \alpha\ u-xt\ +\beta\ v-yt\ \ -I\ \sigma+\mu\ \alpha^2+\beta^2\ t}\,d\alpha d\beta. \tag{1.38}$$

Спробуємо тепер зробити зворотній хід і об'єднати розв'язки задач (1.30), (1.31) з (1.35), (1.36), щоб одержати розв'язок задачі (1.30), (1.31).

Для цього на інтервалі $0 < t < \tau$ послідовно розв'яжемо дві задачі: спочатку (1.33), (1.34) з початковою умовою $\varphi_1 = g,$ а потім (1.35), (1.36) з початковою умовою $\varphi_2 = \varphi_1$.

Далі знайдемо розв'язок розщепленої задачі (1.33)-(1.36).

Фурьє-компоненти задачі (1.33), (1.34) та (1.35), (1.36) визначаються формулами [61]

$$\Phi_1\ \alpha,\beta,t\ = Ae^{-I\ \alpha u+\beta v\ t},$$

$$\Phi_2\ \alpha,\beta,t\ = \Phi_1\ \alpha,\beta,t\ \ Ae^{-\left[\sigma+\mu\ \alpha^2+\beta^2\ \right]t}.$$

Отже,

$$\Phi_2\ \alpha,\beta,t\ = Ae^{-I\ \alpha u+\beta v\ t-\left[\sigma+\mu\ \alpha^2+\beta^2\ \right]t},$$

а

$$\varphi_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\alpha,\beta)\, e^{i\alpha(x-u\tau)+i\beta(y-v\tau)-(\sigma+\mu(\alpha^2+\beta^2))\tau}\, d\alpha d\beta .$$

Тобто одержане значення φ_2 та значення точного розв’язку φ за формулою (1.38) співпадають.

Відзначимо, що у практичних задачах u та v не є сталими. Тому алгоритм розщеплення не дає точного розв’язку при $t = t_j = j\tau \quad (j = 1,2,..)$. Отже, часові кроки повинні бути настільки малі, щоб їх величини забезпечували достатню точність наближення функцій u та v сталими значеннями.

Іноді локально-одномірні різницеві схеми сумарної апроксимації будуються на основі комбінованого розщеплення за напрямками та фізичними процесами [64]

$$\frac{y^{n+\alpha/4} - y^{n+(\alpha-1)/4}}{\tau} + A_\alpha\left(\sigma_\alpha y^{n+\alpha/4} + (1-\sigma_\alpha)\, y^{n+(\alpha-1)/4}\right) = \phi_\alpha^n, \quad \alpha = \overline{1,4}\,, \qquad (1.39)$$

причому $A_\alpha = C_\alpha \ (\alpha = 1,2)$ та $A_\alpha = \Lambda_{\alpha-2} \ (\alpha = 3,4)$; $\phi^n = \phi_1^n + \phi_2^n + \phi_3^n + \phi_4^n$.

Ця схема стійка при $\sigma_\alpha \geq 0.5$, $\alpha = \overline{1,4}$.

Метод розщеплення за фізичними процесами знайшов широке застосування при розв’язуванні багатьох задач фізики, гідро- та газової динаміки (М. М. Яненко [64], В. М. Ковеня [131], О. Мигель та ін. [132], В. А. Гущін [13], Р. Темам [40]), метеорології та океанології (Г. І. Марчук [61]) тощо.

У роботі А. Дж. Чоріна [133] запропоновано метод знаходження наближеного розв’язку рівнянь в’язкої нестислої рідини, який ґрунтується на використанні теореми Гельмгольця про декомпозицію векторного поля: «Векторне поле може мати єдиний розклад на соленоїдальну A_p та безвихрову A_t складові, якщо нормальна компонента A_p на границі рівна нулю». Теоретичне обґрунтування методу зроблено в роботі Р. Темама [40], а у роботі М. М. Яненка та ін. [66] цей метод одержав інтерпретацію з позиції методу розщеплення за фізичними процесами. Модифікацію методу у застосуванні до побудови розв’язку нетрадиційної задачі для рівнянь Нав’є-Стокса, коли на границі області задано тиск та дотичні компоненти швидкості, наведено Б. Г. Кузнєцовим та ін. у роботі [134].

1.5. Двокрокові симетризовані алгоритми (ДС-алгоритми)

Неявні різницеві схеми є не тільки безумовно стійкими, але і мають певний «надлишковий запас стійкості». Це було виявлено В. К. Саульєвим, при дослідженні двокрокового алгоритму, в якому на послідовних часових кроках чергувались явні неявні схеми [135]. Дж. Шелдон [136] запропонував двокроковий явно-неявний чисельний «hopscoch» алгоритм для ітераційного розв’язування еліптичних рівнянь. С. М. Скала і Р. Гордон використовували цю ідею для розв’язування задачі нестаціонарного обтікання кругового циліндра в роботах [137-139]. Ідея використання явно-неявних двокрокових різницевих схем була реалізована в ДС-алгоритмах знаходження розв’язків нестаціонарних різницевих рівнянь, які мають триточкові шаблони вздовж кожного координатного напрямку [93].

У роботах О. Ю. Грищенка та ін. [88,89,140] анонсовано і обґрунтовано основні положення двокрокових симетризованих алгоритмів (ДС-алгоритми), які є розвиненням і поширенням «hopscotch» методу на параболізовані лінійні і квазілінійні задачі течії в’язкої рідини, переносу, а також системи рівнянь Нав’є-Стокса.

Побудовані таким чином алгоритми не потребують обернення матриці системи сіткових рівнянь, мають високу швидкість обчислення розв’язку.

Для ілюстрації реалізації ДС-алгоритму в області $D=G\;\;x,y\;\;\times\;\;0,T\;\;$, $G\;\;x,y\;\;=\;\;x,y\,\big|\,a<x<b;\;c\le y\le d\;\;$ розглянемо задачу масопереносу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-k_1\frac{\partial u}{\partial x}-k_2\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-qu-f\,,$$

де $u\;\;x,y,0\;\;=u_0\;\;x,y\;\;,\;u\;\;x,y,t\;\;\big|_{\partial\Omega}$ – задано.

Область D покриваємо рівномірною сіткою $\omega_{\tau h}$. Цю сіткову область розділяємо на дві допоміжних підобласті $\Omega_{\tau h}^{1,n}$ й $\Omega_{\tau h}^{2,n}$. Елементами першої підобласті будемо називати точки $x_{1,i}, x_{2,j}, t_n$ такі, що сума індексів $s = i + j + n$ – парна, а інші точки віднесемо до другої підобласті. Будемо вважати, що часовий крок 2τ має дві складові: непарний півкрок $2n+1$ і парний $2n+2$. На $2n+1$ спочатку обчислюються значення y_{ij}^{2n+1} у всіх точках $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ за явними різницевими формулами [96]

$$\frac{y_{ij}^{2n+1} - y_{ij}^{2n}}{\tau} = C\ b\ \ y_{ij}^{2n} - \Lambda y_{ij}^{2n} - f_{ij}^{2n+1} - q y_{ij}^{2n}, \tag{1.40}$$

а потім у точках $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$ за неявними

$$\frac{y_{ij}^{2n+1} - y_{ij}^{2n}}{\tau} = C\ b\ \ y_{ij}^{2n+1} - \Lambda y_{ij}^{2n+1} - f_{ij}^{2n+1} - q y_{ij}^{2n+1}. \tag{1.41}$$

На півкроці $2n+2$ знаходимо рішення задачі спочатку у вузлах $\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}$

$$\frac{y_{ij}^{2n+2} - y_{ij}^{2n+1}}{\tau} = C\ b\ \ y_{ij}^{2n+1} - \Lambda y_{ij}^{2n+1} - f_{ij}^{2n+1} - q y_{ij}^{2n+1}, \tag{1.42}$$

після чого в точках $\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}$

$$\frac{y_{ij}^{2n+2} - y_{ij}^{2n+1}}{\tau} = C\ b\ \ y_{ij}^{2n+2} - \Lambda y_{ij}^{2n+2} - f_{ij}^{2n+1} - q y_{ij}^{2n+2}. \tag{1.43}$$

Тут $C\ b$ та Λ – різницеві апроксимації конвективного та дифузійного операторів.

Дана схема (1.40)-(1.43) дозволяє проводити обчислення шуканої функції у всіх вузлах $\omega_{\tau h}$ за розрахунковими алгоритмами з похибкою апроксимації $O\ \tau^2 + h^2$, якщо $C\ b$ апроксимуємо центрально-різницевим оператором або $O\ \tau^2 + h$, якщо для оператора $C\ b$ використано односторонню апроксимацію.

Важливе місце в побудові обчислювального алгоритму має апроксимація крайових умов. Умови першого роду у всіх граничних вузлах сіткової області, за винятком кутових точок прямокутника, а у випадку багатомірної області – ребер сіткового паралелепіпеда, задовольняються точно.

Формули, які апроксимують умови третього роду, наведено в [24].

Особливості розв'язування початково-крайових задач із залежними від часу коефіцієнтами на багатопроцесорних системах показано в роботі [26]. Алгоритм розпаралелення, який базується на методі розщеплення за просторовими змінними та ДС-алгоритмі висвітлено в роботі [28]. Підхід до розпаралелення обчислювальних процесів при моделюванні тепломасопереносу та розроблений економічний алгоритм опубліковано в журналі, який включений до міжнародної наукометричної бази Scopus [27]. Для початково-крайової задачі для системи рівнянь Нав'є-Стокса побудовано ефективний обчислювальний ДС-алгоритм, досліджено характеристики дисперсійності і дисипативності, які висвітлено в роботі [25]. Реалізація та ефективність чисельного ДС-алгоритму для системи рівнянь Нав'є-Стокса на багатопроцесорних системах з аналізом наведених результатів та висвітленням нових можливостей представлено в роботі [29].

1.6. Висновки

В цьому розділі:

– проведено аналіз стану проблеми, визначено базові моделі динаміки процесів в'язкої нестислої рідини;
– наведено загальні підходи до вибору методів чисельного моделювання на багатопроцесорних системах;
– описано множину чисельних методів, зручних при розпаралеленні;
– вказано на особливості постановки задачі дисертаційного дослідження, а саме на особливості алгоритмів чисельного моделювання досліджуваних процесів на багатопроцесорних системах;
– аноносовано двокрокові симетризовані алгоритми (ДС-алгоритми).

РОЗДІЛ 2
ПОБУДОВА ДВОКРОКОВО-СИМЕТРИЗОВАНИХ АЛГОРИТМІВ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНОСУ, ЕФЕКТИВНИХ ПРИ РОЗПАРАЛЕЛЕННІ

Даний розділ присвячено побудові та обґрунтуванню узагальнення ДС-алгоритму для ітераційного моделювання стаціонарних процесів переносу.

Для запропонованого алгоритму апроксимації диференціального оператора граничних умов доведено теорему про збіжність ітераційного процесу.

Тут також побудовано чотири схеми розщеплення для рівнянь конвекції-дифузії при умові нерозривності потоку. ДС-алгоритми побудовано для двох випадків: коли коефіцієнти конвекції залежать від часу та коли не залежать, з першим або другим порядком апроксимації.

На завершення в даному розділі досліджено апроксимацію, стійкість, дисперсійність та дисипативність цих алгоритмів та висвітлено у відповідних теоремах. А також всі чотири алгоритми проаналізовано на можливість використання на багатопроцесорних системах.

2.1. Узагальнення чисельного ДС-алгоритму для ітераційного моделювання стаціонарних процесів переносу

В цьому підрозділі запропоновано ітераційний метод чисельного моделювання процесу переносу, який описується системою диференціальних рівнянь другого порядку без мішаних похідних. Він є узагальненням скінчено-різницевого ДС-алгоритму [141,142] на відповідні системи з диференціальними операторами, діючими в комплекснозначних функціональних просторах.

Також наведено приклади апроксимації граничних умов для запропонованих ітераційних схем. Доведено теорему про збіжність ітераційного процесу [24].

2.1.1. Ітераційний підхід до моделювання стаціонарних процесів

Значна кількість динамічних процесів своїм граничним режимом має усталений режим. Такий стан описується стаціонарною крайовою задачею для системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} B_k \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_k^2} = \vec{F}, \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in G, \tag{2.1}$$

$$T\vec{u} = \vec{g}(\vec{u}), \qquad \vec{x} \in \partial G,$$

де A_k, B_k – $p \times p$ матриці, $\vec{u}$ та $\vec{F}$ – p, а $\vec{x}$ – n-вимірні вектори розв'язку задачі, правої частини системи рівнянь (2.1) та координат відповідно; T – матричний оператор крайових умов, $G \subset \mathbb{R}^n$– задана область, а ∂G її гладка границя.

Нехай елементи матриць A_k, B_k та вектора $\vec{F}$ не залежать від $\vec{u}$, оператор T є лінійним, а матриці A_k, B_k та вектор $\vec{F}$ такі, що стаціонарна задача є коректно поставленою. При таких умовах нестаціонарна задача

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} B_k \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_k^2} = \vec{F}, \qquad (x,t) \in \Omega = G \times (0,\infty), \tag{2.2}$$

$$T\vec{u} = \vec{g}(x,t) \in \partial\Omega, \qquad \vec{u}(x,0) = \vec{u}_0(x)$$

має єдиний розв'язок $\vec{u}(x,t)$, який володіє властивістю усталення. Тобто при $t \to \infty$ $\vec{u}(x,t) \to \vec{u}^*(x)$ – стаціонарного розв'язку задачі [39]. Цю властивість широко використовують в практиці ітераційного моделювання стаціонарних процесів.

Для більшості задач властивість параболічності системи рівнянь забезпечує коректність як нестаціонарної, так і стаціонарної задач [39]. Вона гарантує можливість усталення нестаціонарного розв'язку. Проте в загальному випадку це питання потребує додаткового дослідження.

Точний розв'язок як нестаціонарних, так і стаціонарних задач у частинних похідних вдається отримати лише в окремих випадках. Серед наближених методів достатньо ефективним є метод скінчених різниць (або метод сіток) [48, 143-146].

Незважаючи на те, що в даний час існує значна кількість методів побудови різницевих схем різного порядку точності та методів розв’язування різницевих рівнянь [143, 145] тощо, на нашу думку, заслуговують на увагу двокрокові ітераційні схеми, побудовані на основі ДС-алгоритмів у застосуванні до систем стаціонарних рівнянь, що апроксимуються на триточкових шаблонах уздовж кожного з координатних напрямків (зокрема, еліптичних рівнянь другого порядку без мішаних похідних). Такі алгоритми показали ефективність при моделюванні еволюційних процесів, які описуються відповідними початково-крайовими задачами для рівнянь другого порядку [142].

Хоча запропонований метод і не універсальний, оскільки може ефективно використовуватися лише для вказаних різницевих схем, він для вказаного класу задач володіє такими позитивними властивостями:

1) на кожному з ітераційних кроків не потребує розв’язування системи алгебраїчних рівнянь (лінійної для лінійних диференціальних операторів, нелінійної – для нелінійних, що особливо важливо для нелінійних систем);

2) має другий порядок швидкості збіжності відносно малого ітераційного параметра;

3) ефективно може бути реалізований на багатопроцесорних системах.

2.1.2. Апроксимація диференціального оператора та ітераційна схема

Нехай B – нормований банаховий простір. Функції, які залежать від просторових змінних $x \in \ddot{Y}^n$ і координати часу t, при фіксованому t – сприймаємо як точки цього функціонального простору і позначаємо u. Стан фізичної системи зображуємо точкою функціонального простору, а її положення в часі відображає рух цієї точки в деякому функціональному просторі B'. Через $\tilde{R}_n$ позначаємо комплексний n-вимірний евклідів векторний простір зі скалярним добутком $(\vec{a},\vec{b}) = \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j$ і нормою $\|a\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{a}_j}$ ($\bar{b}$ – комплексно спряжене число до b).

Вводимо також допоміжний нормований простір B', елементи якого є довільні неперервні криві $\omega(t) \in B$, які при кожному $t \in [0,T]$, визначені як функції просторових змінних, а норма $\|\omega(t)\|_B = \max_{0\le t\le T} \|\omega(t)\|_{B'}$.

Для наглядності *апроксимацію диференціального оператора* та *схему побудови ітераційного процесу* реалізуємо для задачі, поставленої в прямокутній області $G(x,y) = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ з границею Γ, в якій шукаємо розв'язок рівняння

$$A\vec{u} = \vec{f}(x,y), \tag{2.3}$$

$$\vec{u}\big|_{\Gamma} = \vec{\mu}(x,y), \tag{2.4}$$

де A – заданий лінійний диференціальний оператор другого порядку без мішаних похідних, що діє у просторі комплекснозначних функцій $\vec{u}(x,y) = \mathrm{Re}\,\vec{u} + i\,\mathrm{Im}\,\vec{u}$, $\vec{f}(x,y) = \mathrm{Re}\,\vec{f} + i\,\mathrm{Im}\,\vec{f}$, $A(\cdot) = \mathrm{Re}\,A(\cdot) + i\,\mathrm{Im}\,A(\cdot)$, і такий, що поставлена задача коректна.

Для знаходження стаціонарного розв'язку будуємо двокроковий ітераційний процес. Вводимо фіктивну область $\Omega(x,y,t) = G(x,y) \times (0,\infty)$, де t є рекласійним параметром. І яку покриваємо рівномірною сіткою

$$\Omega_{h_1,h_2,\tau} = \{(x_i, y_j, t_n) \,|\, x_i = ih_1;\ y_j = jh_2;\ t_n = n\tau;\ i = \overline{0,M_1};\ j = \overline{0,M_2};$$
$$n = 0,1,2,...;\ h_1 = 1/M_1;\ h_2 = 1/M_2\}.$$

Цю сіткову область розщеплюємо на дві підобласті $\Omega^{1,n}_{h_1,h_2,\tau}$, $\Omega^{2,n}_{h_1,h_2,\tau}$. До першої з них віднесемо точки, у яких сума індексів $S = i + j + n$ – непарна, до другої – сума S парна. Вважаємо, що кожен ітераційний крок складається із двох допоміжних: непарного $2n+1$ та парного $2n+2$.

На непарному $2n+1$ (предикторі) – точкам множини $\Omega^{1,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$ ставимо у відповідність явні різницеві рівняння

$$\frac{\vec{v}_{ij}^{\,2n+1}-\vec{v}_{ij}^{\,2n}}{\tau}=-A_h\vec{v}_{ij}^{\,2n}+\vec{\varphi}_{ij}^{\,2n}, \tag{2.5}$$

а точкам $\Omega^{2,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$ неявні

$$\frac{\vec{v}_{ij}^{\,2n+1}-\vec{v}_{ij}^{\,2n}}{\tau}=-A_h\vec{v}_{ij}^{\,2n+1}+\vec{\varphi}_{ij}^{\,2n}. \tag{2.6}$$

На парному кроці $2n+2$ (коректорі) у точках $\Omega^{1,2n+2}_{h_1,h_2,\tau}$ відповідно

$$\frac{\vec{v}_{ij}^{\,2n+2}-\vec{v}_{ij}^{\,2n+1}}{\tau}=-A_h\vec{v}_{ij}^{\,2n+1}+\vec{\varphi}_{ij}^{\,2n+2}, \tag{2.7}$$

а точкам $\Omega^{2,2n+2}_{h_1,h_2,\tau}$ –

$$\frac{\vec{v}_{ij}^{\,2n+2}-\vec{v}_{ij}^{\,2n+1}}{\tau}=-A_h\vec{v}_{ij}^{\,2n+2}+\vec{\varphi}_{ij}^{\,2n+2}. \tag{2.8}$$

Тут A_h – різницевий оператор, що апроксимує диференціальний оператор A на шаблоні, який має три точкову структуру вздовж кожного координатного напрямку, $\vec{\varphi}$ – сіткова вектор-функція, яка апроксимує $\vec{f}$, а $\vec{v}_{ij}^{\,2n}$ є апроксимацією розв'язку $\vec{u}\;x,y$ у вузлах сітки x_i,y_j на $2n$-тому ітераційному кроці.

Знаходження $\vec{v}_{ij}^{\,2n}$ починаємо з точок області $\Omega^{1,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$ за явною скінчено-різницевою схемою (2.5). Оскільки після обходу всіх точок цієї множини значення функції $\vec{v}_{ij}^{\,2n+1}$ у цих точках будуть визначені, то формально неявна різницева схема (2.6) дозволяє знайти розв'язок у вузлах множини $\Omega^{2,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$ явно. Результати розрахунків, проведені за формулами (2.5), (2.6) використовуємо як допоміжні. На наступному ітераційному кроці виконуємо цикл розрахунків за формулами (2.7), (2.8) і одержуємо значення $\vec{v}_{ij}^{\,2n+2}$, які приймаємо за ітераційне наближення. Обчислення за формулами (2.5)-(2.8) проводимо в усіх внутрішніх вузлах сітки.

Якщо розмірність області більше двох, то очевидно, що загальна схема побудови ітераційного алгоритму залишається без зміни. Зокрема, коли розглядається система рівнянь (2.1), то

$$A=\sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k}+\sum_{k=1}^{n} B_k \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x_k^2}.$$

Умовою зупинки ітераційного процесу є виконання нерівності

$$\left\|\vec{v}^{2n+2}-\vec{v}^{2n}\right\|<\varepsilon ,$$

де норму розуміємо у рівномірній метриці, а ε задаємо як точність усталення розв'язку задачі.

Далі наведемо апроксимацію граничних умов для задачі (2.5)-(2.8).

2.1.3. Апроксимація граничних умов

Приймаємо, що умови першого роду в усіх граничних вузлових точках області, за винятком кутових точок прямокутника (у випадку багатовимірної області – на ребрах сіткового паралелепіпеда), задовольняються точно.

Якщо на одній із ділянок границі, наприклад, $x=x_M=1$, виконується умова третього роду

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}+c\vec{u}=\vec{d}\,, \tag{2.9}$$

то цю умову апроксимуємо односторонніми різницями з першим порядком точності на двоточковому шаблоні

$$1+ch_1\ \vec{v}_{M_1 j}^{2n+1}-\vec{v}_{M_1-1 j}^{2n+1}=\vec{d}h_1 \tag{2.10}$$

або з другим порядком точності на триточковому шаблоні

$$1+ch_1\ \vec{v}_{M_1 j}^{2n+1}-4\vec{v}_{M_1-1 j}^{2n+1}+\vec{v}_{M_1-2 j}^{2n+1}=2\vec{d}h_1 . \tag{2.11}$$

Для збереження стійкості алгоритму в залежності від належності граничних точок до відповідної сіткової множини $\Omega_{h_1,h_2,\tau}^{1,2n+1}$ чи $\Omega_{h_1,h_2,\tau}^{2,2n+1}$, значення шуканих функцій в граничних та приграничних вузлових точках обчислюємо за різними формулами.

Якщо приграничла точка $(x_{M_1-1}, y_j, t_{2n+1}) \in \Omega^{1,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$, то значення $\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-1\,j}$ знаходимо з рівняння $\vec{v}^{\,2n+1}_{ij} = \vec{v}^{\,2n}_{ij} + \tau A_h \vec{v}^{\,2n}_{ij}$ при $i = M_1 - 1$, а $\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1 j}$ –
з умови (2.10) або (2.11).

Якщо ж $(x_{M_1-1}, y_j, t_{2n+1}) \in \Omega^{2,2n+1}_{h_1,h_2,\tau}$, то $\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-1\,j}$ та $\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1 j}$ визначаємо з системи

$$\begin{cases} a_{11}\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-1\,j} + a_{12}\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1 j} = \vec{b}_1, \\ a_{21}\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-1\,j} + a_{22}\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1 j} = \vec{b}_2, \end{cases} \tag{2.12}$$

в якій, наприклад, для різницевої задачі, де A_h є різницевим оператором Лапласа, отримуємо

$$a_{11} = 1 + 2\alpha\tau\left(h_1^{-2} + h_2^{-2}\right),$$

$$a_{12} = -2\alpha\tau h_1^{-2},$$

$$\vec{b}_1(j) = \vec{v}^{\,2n}_{M_1 j} + \alpha\tau\left[h_1^{-2}\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-2\,j} + h_2^{-2}\left(\vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-1\,j+1} + \vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-1\,j-1}\right)\right],$$

а коефіцієнти a_{21}, a_{22} та b_2 визначаємо в залежності від апроксимації граничної умови. При виконанні (2.10) –

$$a_{21} = -1, \qquad a_{22} = 1 + ch, \qquad \vec{b}_2 = \vec{d}h,$$

або (2.11) відповідно –

$$a_{21} = -4, \qquad a_{22} = 1 - 2ch, \qquad \vec{b}_2 = 2\vec{d}h - \vec{v}^{\,2n+1}_{M_1-2\,j}.$$

Зауваження 2.1. Використання ідеї неявної апроксимації граничних умов (2.10)-(2.12) пов’язано з потребою зберегти безумовну стійкість різницевої схеми.

Зауваження 2.2. У ряді конкретних випадків при використанні апроксимації різницевого рівняння, апроксимацію граничних умов можна покращити.

Зауваження 2.3. Запропонована вище методика легко переноситься на багатовимірний випадок.

2.1.4. Теорема про збіжність ітераційного процесу

Дослідження та доведення збіжності проводимо на множині $\Omega_{h_1,h_2,\tau}$, де вводимо сітковий простір H_{2h} зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\psi\|_{L_2} = (\psi,\psi)^{1/2}$ як аналог простору H_2.

Позначимо

$$C = (E - 2\tau A_h), \qquad D = (E + 2\tau A_h). \tag{2.13}$$

Лема 2.1. Оператори C та D^{-1}, які визначаються за формулами (2.13), переставні.

Доведення леми 2.1 випливає з того, що C і D переставні оператори, то C та D^{-1} так само переставні. Дійсно

$$CD^{-1} = D^{-1}(DC)D^{-1} = D^{-1}(CD)D^{-1} = D^{-1}C.$$

Далі, з безпосереднього множення $C \cdot D$ та $D \cdot C$, використовуючи формули (2.13) і порівнявши результат, приходимо до твердження леми 2.1.

Лему доведено.

Терема 2.1. Якщо комплекснозначний скінченно-різницевий оператор A_h $(A_h(\cdot) = \mathrm{Re}\,A_h(\cdot) + i\,\mathrm{Im}\,A_h(\cdot))$ лінійний, $\mathrm{Re}\,A_h(\cdot) \geq 0$, функція f – рівномірно обмежена в області побудови розв’язку G, релаксаційний крок τ сталий або змінюється через парне число кроків, то ітераційний алгоритм, побудований на двокроковій симетризованій схемі (2.5)-(2.8), збіжний при довільних початкових умовах.

Доведення. Оскільки розв’язок задачі знаходимо за допомогою двох пар формул (2.5), (2.7) для точок сіткової множини $\Omega^{1,n}_{h_1,h_2,\tau}$ та (2.6), (2.8) – для $\Omega^{2,n}_{h_1,h_2,\tau}$, то на цих множинах вводимо допоміжні скалярні добутки та норми: $\|\vec{\phi}\|_1 = \left(\vec{\phi},\vec{\phi}\right)_1^{1/2}$ – коли аргументи функції $\vec{\phi}(x_i, y_j, t_{2n})$ належить $\Omega^{1,n}_{h_1,h_2,\tau}$ та

$\|\vec{\phi}\|_2 = \left(\vec{\phi},\vec{\phi}\right)_2^{1/2}$ – коли її аргумент $\vec{\phi}\left(x_i, y_j, t_{2n}\right) \in \Omega^{2,n}_{h_1,h_2,\tau}$. Ці добутки та норми є аналогами скалярного добутку та норми L_2.

Розглянувши перехід з ітераційного кроку $2n$ на крок $2n+1$ в точках $\Omega^{1,n}_{h_1,h_2,\tau}$ з виразів (2.5) і (2.7) маємо

$$\vec{v}_{ij}^{\,2n+2} = \left(E+\tau A_h\right)^{-1}\left(E-\tau A_h\right)\vec{v}_{ij}^{\,2n} + 2\tau\left(E+\tau A_h\right)^{-1}\vec{\varphi}_{ij}, \tag{2.14}$$

або

$$\vec{v}_{ij}^{\,2n+2} = G^{2n+1}\vec{v}_{ij}^{\,2n+1} + 2\tau G_1^{2n+1}\vec{\varphi}_{ij}. \tag{2.15}$$

Тут $G^{2n+1} = \left(E+\tau A_h\right)^{-1}\left(E-\tau A_h\right)$; $G_1^{2n+1} = \left(E+\tau A_h\right)^{-1}$; $\vec{\varphi}_{ij}$ – сіткова вектор-функція, яка апроксимує праву частину рівняння (2.3).

У решті точок одержимо

$$\vec{v}_{ij}^{\,2n+2} = \tilde{G}^{2n+1}\vec{v}_{ij}^{\,2n+1} + 2\tau \tilde{G}_2^{2n+1}\vec{\varphi}_{ij}, \tag{2.16}$$

де

$$\tilde{G}^{2n+1} = \left(E-\tau A_h\right)\left(E+\tau A_h\right)^{-1}, \qquad \tilde{G}_2^{2n+1} = \left(\tilde{G}^{2n+1}+\tau E\right). \tag{2.17}$$

Оскільки оператори $\left(E+\tau A_h\right)^{-1}$ та $\left(E-\tau A_h\right)$ переставні, то

$$G^{2n+1} = \tilde{G}^{2n+1} = \left(E+\tau A_h\right)^{-1}\left(E-\tau A_h\right) = \left(E-\tau A_h\right)\left(E+\tau A_h\right)^{-1}.$$

Поклавши $\vec{\phi} = \left(E+\tau A_h\right)^{-1}\vec{\psi}$ при довільному фіксованому $t=t_{2n+1}$ маємо

$$\left\|G^{2n+1}\right\| = \left\|\left(E+\tau A_h\right)^{-1}\left(E-\tau A_h\right)\right\| = \left\|\left(E-\tau A_h\right)\left(E+\tau A_h\right)^{-1}\right\| =$$

$$= \sup_{\vec{\psi}\neq 0}\frac{\left(\left(E-\tau A_h\right)\left(E+\tau A_h\right)^{-1}\vec{\psi},\ \left(E-\tau A_h\right)\left(E+\tau A_h\right)^{-1}\vec{\psi}\right)}{\left(\vec{\psi},\vec{\psi}\right)} =$$

$$= \sup_{\vec{\phi}\neq 0}\frac{\left(\vec{\phi},\vec{\phi}\right) + \tau^2\left(A_h\vec{\phi},A_h\vec{\phi}\right) - \tau\left[\left(A_h\vec{\phi},\vec{\phi}\right) + \left(\vec{\phi},A_h\vec{\phi}\right)\right]}{\left(\vec{\phi},\vec{\phi}\right) + \tau^2\left(A_h\vec{\phi},A_h\vec{\phi}\right) + \tau\left[\left(A_h\vec{\phi},\vec{\phi}\right) + \left(\vec{\phi},A_h\vec{\phi}\right)\right]} =$$

$$= \sup_{\vec{\phi}\neq 0}\frac{\left(\vec{\phi},\vec{\phi}\right) + \tau^2\left(A_h\vec{\phi},A_h\vec{\phi}\right) - 2\tau\operatorname{Re}\left(A_h\vec{\phi},\vec{\phi}\right)}{\left(\vec{\phi},\vec{\phi}\right) + \tau^2\left(A_h\vec{\phi},A_h\vec{\phi}\right) + 2\tau\operatorname{Re}\left(A_h\vec{\phi},\vec{\phi}\right)}.$$

Тут враховуємо, що $\operatorname{Re} A_h \geq 0 \quad \forall \tau, h > 0$, далі з останньої рівності одержуємо оцінки

$$\max_n \left\| G^{2n+1} \right\|_1 = q < 1, \qquad \max_n \left\| \tilde{G}^{2n+1} \right\|_2 = \tilde{q} < 1.$$

Отже, оператори G^{2n+1} та $\tilde{G}^{2n+1}$ є операторами стискання, отже ітераційний процес (2.7), (2.8) буде збіжним при довільному початковому наближенні.

У результаті об'єднання цих нерівностей на сітці $\Omega_{h_1,h_2,\tau}$ при врахуванні уведених просторів та норм, одержуємо загальну ітераційну формулу

$$\vec{v}^{\,2n+2} = G_\tau^{2n} \vec{v}^{\,0} - \sum_{k=0}^{n} \left(E - \tau B \right)^k \tau \vec{\varphi}_{ij}\,.$$

Використовуючи формули (2.14)-(2.17) переконуємося, що B – цілком обмежений оператор, який виражається через комплекснозначний скінченно-різницевий оператор A_h. Отже, вірною є оцінка

$$\left\| \vec{v}^{\,2n+2} \right\|^2 \leq K_1^{2n} \left\| \vec{v}^{\,0} \right\|^2 + K_2^2 \left\| \vec{\varphi} \right\|^2 \leq \left(K_1^n \left\| \vec{v}^{\,0} \right\| + K_2 \left\| \vec{\varphi} \right\|^2 \right)^2,$$

де $K_1 = \max\left(q_1, \tilde{q} \right) < 1; \quad K_2 = const < \infty$.

Позначимо через $\vec{\vartheta}^{\,2n}$ похибку розв'язку на кожному кроці $2n$ ітераційного процесу $\vec{\vartheta}^{\,2n} = \vec{v}^{\,2n} - \vec{v}^{\,*}$, де

$$\vec{v}^{\,*} = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(E - \tau B \right)^k \tau \vec{\varphi}$$

– точний розв'язок системи різницевих рівнянь.

Тоді, використовуючи формули (2.8) та (2.9), для похибки розв'язку отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \vec{\vartheta}^{\,2n+2} = \lim_{n\to\infty} G^{2n} v^0 = 0\,.$$

Звідси випливає, що при $\max_{n\to\infty} \left\| G_\tau \right\|_1 = q < 1$ похибка ітераційного наближення прямує до нуля при $n \to \infty$. Тобто, ітераційний процес збіжний і розв'язок не залежить від початкового наближення.

Теорему доведено.

2.2. Побудова та дослідження ДС-алгоритмів розщеплення для рівнянь конвекції-дифузії

Метою підрозділу є побудова алгоритмів чисельного моделювання процесів конвекції-дифузії, ефективність яких визначається високою швидкістю реалізації на багатопроцесорних комп'ютерах. На основі ДС-алгоритму розроблено і досліджено чотири нові реалізації схем розщеплення. Кожна з них має свої переваги для різних класів задач.

Вибір ДС-алгоритму обумовлений його економічністю. Кількість обчислювальних операцій є величиною $O(M)$, де M – число вузлових точок області. Крім того, він легко реалізується при розпаралеленні.

2.2.1. Модель конвекції-дифузії та властивості операторів

Тут наведемо модель, відносно якої будемо будувати різницеві алгоритми.

Процес конвективно-дифузійного переносу в наближенні нестискуваної рідини [61] в циліндричній області $Q=\Omega\times(0<t<T)$, де Ω – регулярна область в $\mathbb{R}^N$ з кусково-гладкою границею $\partial\Omega$, описується системою рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t}-L(u)-f=0, \tag{2.18}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha}=0, \tag{2.19}$$

де

$$L(u)=-\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+\sum_{\alpha=1}^{N}b_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \tag{2.20}$$

причому $B_\alpha(x)\geq 0$ для всіх $\alpha=\overline{1,N}$ – неперервно-диференційовні за своїми змінними та

$$\sum_{\alpha=1}^{N}B_\alpha\xi_\alpha\geq\alpha_B\sum_{\alpha=1}^{N}\xi_\alpha^2,\qquad \xi_\alpha\in\mathbb{R},\quad \alpha=\overline{1,N}. \tag{2.21}$$

Розв'язок задачі (2.18), (2.19) має задовольняти заданим початково-граничним умовам

$$u\big|_{t=0} = u^0(x), \qquad x \in \Omega;$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = g(x,t), \qquad x \in \partial\Omega.$$

Зокрема, при $N = 2$, а $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, позначимо

$$\Lambda = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(B_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \qquad \Lambda \ge 0 \tag{2.22}$$

– оператор дифузії, а через

$$C^1(\vec{b})u = \vec{b}\,grad\,u = \sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \tag{2.23}$$

– оператор конвективного переносу.

Відомо [45,60], що при виконанні (2.19) оператор (2.23) еквівалентний наступному

$$C^2(\vec{b})u = \mathrm{div}(\vec{b}u) = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial (b_\alpha u)}{\partial x_\alpha}. \tag{2.24}$$

Запишемо початково-крайову задачу конвекції-дифузії (2.18)-(2.21) в операторному вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f,$$

$$Lu \equiv C(b)u + \Lambda(u),$$

де $C(b)$ визначаємо однією з формул (2.23) чи (2.24), а Λ формулою (2.22).

В реальних фізичних задачах коефіцієнти b_α можуть як залежати від часу, так і не залежати. При побудові різницевих алгоритмів розщеплення для розглянутих початково-крайових задач суттєву роль відіграє виконання умови (2.19), записаної на сіткових часових кроках. Це спонукає при побудові чисельного алгоритму розглядати окремо випадки залежності чи незалежності оператора $C(b)$ від часу.

2.2.2 Схеми ДС-розщеплення для рівнянь з коефіцієнтами конвекції не залежними від часу

В цьому підрозділі запропоновано два алгоритми. Перший має порядок апроксимації $O\;\tau$. За цикл з чотирьох обрахунків множин точок алгоритм переводить розв'язок з часового шару $2n$ на часовий шар $2n+4$. Другий алгоритм має порядок апроксимації $O\;\tau^2$ та ту ж саму кількість обчислювальних операцій, але переводить розв'язок з часового шару $2n$ на шар $2n+2$.

Отже, якщо в процесі моделювання важливішим є отримання розв'язку при виході на режим усталення (стаціонарний режим) і нас менше цікавить точність проміжних розрахунків, то доцільно використовувати перший алгоритм, оскільки в процесі розрахунків потрібно обчислити вдвічі менше часових кроків.

Другий алгоритм до стаціонарного режиму приведе за число часових кроків вдвічі більше, але точність розрахунків на кожному кроці вища. Отже, він має перевагу, коли потрібна висока точність значень на кожному кроці обчислень.

Алгоритм І. [27]

Адитивну схему розщеплення задачі (2.18), (2.19) (із сумарною апроксимацією) запишемо як послідовний розв'язок сукупності одновимірних різницевих задач

$$\frac{y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)} - y_{ij}^{2n+2(\alpha-1)}}{\tau} - C_\alpha y_{ij}^{2n+2(\alpha-1)} + \Lambda_\alpha y_{ij}^{2n+2(\alpha-1)} = \varphi_{ij}^{2n+1+2\;\alpha-1}, \tag{2.25}$$

$$x_{1i}, y_{2j}, t_n \;\in \Omega_{\tau h}^{1,2n+1+2\;\alpha-1},$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)} - y_{ij}^{2n+2(\alpha-1)}}{\tau} - C_\alpha y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)} + \Lambda_\alpha y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)} = \varphi_{ij}^{2n+1+2\;\alpha-1}, \tag{2.26}$$

$$x_{1i}, y_{2j}, t_n \;\in \Omega_{\tau h}^{2,2n+1+2\;\alpha-1},$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+2+2(\alpha-1)}-y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)}}{\tau}-C_\alpha y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)}+\Lambda_\alpha y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)}=\varphi_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)}, \tag{2.27}$$

$$(x_{1i},y_{2j},t_n)\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+2+2(\alpha-1)},$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+2+2(\alpha-1)}-y_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)}}{\tau}-C_\alpha y_{ij}^{2n+2+2(\alpha-1)}+\Lambda_\alpha y_{ij}^{2n+2+2(\alpha-1)}=\varphi_{ij}^{2n+1+2(\alpha-1)}, \tag{2.28}$$

$$(x_{1i},y_{2j},t_n)\in\Omega_{\tau h}^{2,2n+2+2(\alpha-1)},$$

$\alpha=1,2;\qquad \varphi_{ij}^n=f_{ij}^n$.

Тут введено сіткові функції

$$y_{ij}^n=u(x_{1i},x_{2j},t_n),\qquad y_{\overset{0}{x}}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}=\frac{du}{dx}+O(h^2),$$

$$y_{\bar{x}}=\frac{y_i-y_{i-1}}{h}=\frac{du}{dx}+O(h),\qquad y_x=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=\frac{du}{dx}+O(h),$$

а різницевий оператор дифузії –

$$\Lambda_\alpha y=(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(B_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+O(h^2),\qquad \text{де}\qquad a_\alpha=B_\alpha(x_\alpha-0.5h_\alpha),$$

та оператор конвективного переносу, який може бути записаний в одній із форм

$$C(b)y=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left((b_\alpha(x)y)_{\overset{0}{x}_\alpha}+b_\alpha(x)y_{\overset{0}{x}_\alpha}\right)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(b_\alpha(x)u)+b_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+O(h^2),$$

$$C(b)y=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left((b_\alpha^-(x)y)_{x_\alpha}+b_\alpha^+(x)y_{\bar{x}_\alpha}+(b_\alpha^+(x)y)_{\bar{x}_\alpha}+b_\alpha^-(x)y_{x_\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(b_\alpha(x)u)+O(h)$$

при $\quad b_\alpha^+=\frac{1}{2}\left(b_\alpha(x)+|b_\alpha(x)|\right)\ge 0,\qquad b_\alpha^-=\frac{1}{2}\left(b_\alpha(x)-|b_\alpha(x)|\right)\le 0,\qquad \alpha=1,2.$

Позначимо $\quad L=\sum_{\alpha=1}^{2}L_\alpha$, де $L_\alpha=-C_\alpha+\Lambda_\alpha$, $\alpha=1,2$.

Поклавши у формулах (2.25)-(2.28) $\alpha=1$ явно обчислюємо значення функції, що наближує розв’язок задачі розщеплення вздовж напрямку x_1. Далі при $\alpha=2$ проводимо послідовні обчислення за тими ж самими формулами і знаходимо наближений розв’язок задачі вздовж x_2 та розв’язок вцілому.

Питання збіжності та стійкості алгоритму I розглянуто в підрозділі 2.3.

Алгоритм II. [28]

Цей алгоритм застосовуємо до розв’язування початково-крайової задачі рівняння переносу з лінійним джерельним членом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(B_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + qu + f \tag{2.29}$$

при заданих початкових і граничних умовах.

Для побудови алгоритму введемо вектори $\vec{\tilde{U}}^{2n}(j_0) = \left(\tilde{y}_{ij_0}^{2n}\right)^T\Big|_{i=1}^{m_1}$, $j_0 = \overline{1, m_2}$, $\vec{\tilde{V}}^{2n}(i_0) = \left(\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n}\right)^T\Big|_{j=1}^{m_2}$, $i_0 = \overline{1, m_1}$ і оператори $L_\alpha = -C_\alpha + \Lambda_\alpha + q$, $\alpha = 1, 2$. Тут C_α та Λ_α мають вказаний вище сенс. Оскільки значення розв’язку різницевої задачі на часовому кроці $2n$ відоме і значення $y_{ij}^{2n} = \tilde{y}_{ij}^{2n} = \tilde{\tilde{y}}_{ij}^{2n}$, то обчислення компонент векторів $\vec{\tilde{U}}^{2n+2}(j_0)$ та $\vec{\tilde{V}}^{2n+2}(i_0)$ можна навіть проводити на $m_1 + m_2$ процесорах одночасно за формулами одновимірного ДС-алгоритму

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1} - y_{ij_0}^{2n}}{\tau} + L_1 y_{ij_0}^{2n} = \varphi_{ij_0}^{2n+1}, \qquad (x_{1i}, y_{2j_0}, t_{2n+1}) \in \Omega_{\tau h}^{1,2n+1}, \tag{2.30}$$

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1} - \tilde{y}_{ij_0}^{2n}}{\tau} + L_1 \tilde{y}_{ij_0}^{2n+1} = \varphi_{ij_0}^{2n+1}, \qquad (x_{1i}, y_{2j_0}, t_{2n+1}) \in \Omega_{\tau h}^{2,2n+1}, \tag{2.31}$$

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2} - \tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}}{\tau} + L_1 \tilde{y}_{ij_0}^{2n+1} = \varphi_{ij_0}^{2n+1}, \qquad (x_{1i}, y_{2j_0}, t_{2n+2}) \in \Omega_{\tau h}^{1,2n+2}, \tag{2.32}$$

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2} - \tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}}{\tau} + L_1 \tilde{y}_{ij_0}^{2n+2} = \tilde{\varphi}_{ij_0}^{2n+1}, \qquad (x_{1i}, y_{2j_0}, t_{2n+2}) \in \Omega_{\tau h}^{2,2n+2}, \tag{2.33}$$

при кожному фіксованому $j_0 = \overline{1, m_2}$ та

$$\frac{\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+1} - y_{i_0 j}^{2n}}{\tau} + L_2 y_{i_0 j}^{2n} = \varphi_{i_0 j}^{2n+1}, \qquad (x_{1i_0}, y_{2j}, t_{2n+1}) \in \Omega_{\tau h}^{1,2n+1}, \tag{2.34}$$

$$\frac{\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+1}-\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n}}{\tau}+L_2\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+1}=\varphi_{i_0 j}^{2n+1}, \qquad (x_{1i_0}, y_{2j}, t_{2n+1})\in\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}, \tag{2.35}$$

$$\frac{\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+2}-\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+1}}{\tau}+L_2\tilde{y}_{i_0 j}^{2n+1}=\varphi_{i_0 j}^{2n+1}, \quad (x_{1i_0}, y_{2j}, t_{2n+2})\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}, \tag{2.36}$$

$$\frac{\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+2}-\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+1}}{\tau}+L_2\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+2}=\tilde{\tilde{\varphi}}_{i_0 j}^{2n+1}, \quad (x_{1i_0}, y_{2j}, t_{2n+2})\in\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}, \tag{2.37}$$

при кожному фіксованому $i_0=\overline{1,m_1}$.

Тут покладено

$$\varphi_{ij}^{2n}=f_{ij}^{2n}, \qquad \tilde{\varphi}_{ij}^{2n+1}=f_{ij}^{2n+1}-2L_2\tilde{y}_{ij}^{2n+1}, \qquad \tilde{\tilde{\varphi}}_{ij}^{2n+1}=f_{ij}^{2n+1}-2L_1\tilde{\tilde{y}}_{ij}^{2n+1}.$$

Зауважимо, що часовий проміжок $\left[2n\tau,\ 2n+\ 2\tau\right]$ формально можна привести до проміжку довжини $\tau_1=2\tau$ й записати формули (2.30)-(2.37) як формули дробових кроків. Але при такому записі ускладнюється формальне визначення сіткових множин $\Omega_{\tau h}^{1,n}$ та $\Omega_{\tau h}^{2,n}$, тому запишемо запис в цілих часових кроках.

За розв'язок різницевої задачі, яка апроксимує задачу (2.29), (2.19) на часовому кроці $2n+2$ приймаємо

$$y_{ij}^{2n+2}=\frac{1}{2}\left(\tilde{y}_{ij}^{2n+2}+\tilde{\tilde{y}}_{ij}^{2n+2}\right). \tag{2.38}$$

Питання збіжності та стійкості алгоритму II розглянуто в підрозділі 2.3.

2.2.3. Схеми ДС-розщеплення для рівнянь з коефіцієнтами залежними від часу

Розглянемо випадок, коли коефіцієнти рівняння залежать від часу. Для побудови розв'язку поставленої задачі введену сіткову множину $\omega_{\tau h}$ розділимо, як і раніше, на дві підмножини $\Omega_{\tau h}^{1,n}$ та $\Omega_{\tau h}^{2,n}$. Вважатимемо, що розв'язком задачі (2.18), (2.19) є функція y_{ij}, обчислена через часовий крок 2τ, який має дві складові: непарний півкрок із номером $2n+1$ і непарний з номером $2n+2$.

Уведемо різницеві оператори $L_{\alpha}^{2n+1} = -C_{\alpha}^{2n+1} + \Lambda_{\alpha}^{2n+1}$, $\alpha = 1,2$, та сіткові функції $y_{ij}^{n} = u\;\; x_{1i}, y_{2j}, t_n$, $\varphi_{ij}^{n} = f\;\; x_{1i}, y_{2j}, t_n$, де

$$C_1^m y_{ij}^n = \frac{b_{1i+1j}^m y_{i+1j}^n - b_{1i-1j}^m y_{i-1j}^n}{2h_1}, \qquad C_2^m y_{ij}^n = \frac{b_{2i+1j}^m y_{i+1j}^n - b_{2i-1j}^m y_{i-1j}^n}{2h_2},$$

а [145]

$$\Lambda_1^m y_{ij}^n = \frac{a_{i+1j}^m y_{i+1j}^n - \;\; a_{i+1j}^m + a_{ij}^m \;\; y_{ij}^n + a_{i-1j}^m y_{i-1j}^n}{2h_1^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(B_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + O\;\; h^2 \;\;,$$

$$a_1^n = B_1 \;\; x - 0.5h_1, t_n \;\; .$$

Аналогічно записується $\Lambda_2^m y_{ij}^n$ по змінній x_2.

Стандартний алгоритм розщеплення задачі (2.18), (2.19)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{2\tau} = -C_1 \;\; b^{n+1} \;\; u^{n+1} + \Lambda_1^{n+1} u^{n+1},$$

$$\frac{u^{n+2} - u^{n+1}}{2\tau} = -C_2 \;\; b^{n+2} \;\; u^{n+2} + \Lambda_2^{n+2} u^{n+2}$$

сумарно апроксимує диференціальне рівняння (2.18), але не задовольняє умову $C\;\; b\;\; u^{n+1}, u^{n+1} \;\; = 0$, оскільки $C_1 \;\; b^{n+1} \;\; u^{n+1} + C_2 \;\; b^{n+2} \;\; u^{n+2}, u^{n+2} \;\; \neq 0$. Це спонукає до побудови двох окремих алгоритмів.

Алгоритм III. [26]

Третій алгоритм розщеплення побудовано для випадку, коли оператор конвективного переносу $C\;\; b$ представлено у дивергентній формі.

Уважаючи, що розв'язок задачі (2.18), (2.19) на часовому кроці $2n$ – відомий (при $n = 0$ задано початкову умову), на часовому кроці $2n+1$ – при кожному фіксованому значенні $j = j_0$, $j_0 = \overline{1, m_2}$ за одновимірним вздовж координати x_1 ДС-алгоритмом обчислюються спочатку значення $\tilde{y}_{ij}^{2n+1}$ в усіх точках $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ за явними різницевими формулами

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1} - y_{ij_0}^{2n}}{\tau} + L_1^{2n+1} y_{ij_0}^{2n} = \varphi_{ij_0}^{2n+1}, \qquad (2.39)$$

а потім у точках $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$ за неявними

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1} - y_{ij_0}^{2n}}{\tau} + L_1^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1} = \varphi_{ij_0}^{2n+1}. \tag{2.40}$$

На часовому шарі $2n+1$ при кожному $j = j_0$ знаходимо розв'язок спочатку у вузлах $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2} - \tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}}{\tau} + L_1^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1} = \tilde{\varphi}_{ij_0}^{2n+1}, \tag{2.41}$$

після чого в точках $\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}$ за формулою

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2} - \tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}}{\tau} + L_1^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2} = \tilde{\varphi}_{ij_0}^{2n+1}, \tag{2.42}$$

де $\quad \tilde{\varphi}_{ij_0}^{2n+1} = \varphi_{ij_0}^{2n+1} - 2L_2^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}$.

Розв'язком задачі на часовому проміжку $\left[2n\tau,\ (2n+2)\tau\right]$ при кожному j_0 є значення $\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2}$.

Аналогічно розв'яжемо задачу вздовж координати x_2 при кожному фіксованому $i = i_0$, $i_0 = \overline{1, m_1}$. Позначимо $\tilde{\tilde{\varphi}}_{i_0 j}^{2n+1} = \varphi_{i_0 j}^{2n+1} - 2L_1^{2n+1}\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+1}$. Тоді

$$\frac{\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+1} - \tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n}}{\tau} + L_2^{2n+1} y_{i_0 j}^{2n} = \varphi_{i_0 j}^{2n+1}, \qquad (x_{1i_0}, y_{2j}, t_{2n+1}) \in \Omega_{\tau h}^{1,2n+1} \tag{2.43}$$

$$\frac{\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+1} - \tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n}}{\tau} + L_2^{2n+1}\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+1} = \varphi_{i_0 j}^{2n+1}, \qquad (x_{1i_0}, y_{2j}, t_{2n+1}) \in \Omega_{\tau h}^{2,2n+1} \tag{2.44}$$

$$\frac{\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+2} - \tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+1}}{\tau} + L_2^{2n+1}\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+1} = \tilde{\tilde{\varphi}}_{i_0 j}^{2n+1}, \quad (x_{1i_0}, y_{2j}, t_{2n+2}) \in \Omega_{\tau h}^{1,2n+2} \tag{2.45}$$

$$\frac{\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+2} - \tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+1}}{\tau} + L_2^{2n+1}\tilde{\tilde{y}}_{i_0 j}^{2n+2} = \tilde{\tilde{\varphi}}_{i_0 j}^{2n+1}, \quad (x_{1i_0}, y_{2j}, t_{2n+2}) \in \Omega_{\tau h}^{2,2n+2} \tag{2.46}$$

За наближений розв'язок задачі (2.18), (2.19) на кроці $2n+2$ приймаємо значення сіткової функції

$$y_{ij}^{2n+2} = \frac{1}{2}\left(\tilde{y}_{ij}^{2n+2} + \tilde{\tilde{y}}_{ij}^{2n+2}\right). \tag{2.47}$$

Надалі для запису одержаних результатів введемо вектори $\vec{\tilde U}^{2n}(j_0) = \left(\tilde y_{ij_0}^{2n}\right)^T\Big|_{i=1}^{m_1}$, $j_0 = \overline{1,m_2}$, $\vec{\tilde V}^{2n}(i_0) = \left(\tilde y_{i_0 j}^{2n}\right)^T\Big|_{j=1}^{m_2}$, $i_0 = \overline{1,m_1}$. Оскільки значення розв'язку y_{ij}^{2n} різницевої задачі на часовому кроці $2n$ відоме, то обчислення компонент векторів $\vec{\tilde U}^{2n+2}(j_0)$ та $\vec{\tilde V}^{2n+2}(i_0)$ можна проводити навіть на $m_1 + m_2$ процесорах одночасно.

Питання збіжності та стійкості алгоритму III розглянуто в підрозділі 2.3.

Алгоритм IV.

Четвертий алгоритм розщеплення запропоновано для випадку, коли оператор $C(b)$ подано у недивергентній формі. Його доцільно записати в наступному вигляді [39]

$$C(b(x,t))u = b_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial u}{\partial x_2} = b_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{u}{2}\left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}\right) = (\tilde C_1 + \tilde C_2)u\,, \qquad (2.48)$$

де враховано рівняння нерозривності і покладено

$$\tilde C_\alpha u = b_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{u}{2}\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha} = C_\alpha u + \hat C_\alpha u\,, \qquad (2.49)$$

$$C_\alpha u = b_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, \qquad \hat C_\alpha u = \frac{u}{2}\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha}\,. \qquad (2.50)$$

Тоді

$$(\tilde C_\alpha u,u) = (C_\alpha u,u) + (\hat C_\alpha u,u) = -\frac{1}{2}\int_0^a dx_1\int_0^b u^2\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha}dx_2 + \frac{1}{2}\int_0^a dx_1\int_0^b u^2\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha}dx_2 = 0\,.$$

Одержати алгоритм розщеплення другого порядку сумарної апроксимації можна, якщо використовувати таку циклічну схему розщеплення

$$\frac{y_{ij}^{2n+1} - y_{ij}^{2n}}{2\tau} = -\tilde C_1^{2n+1} y_{ij}^{2n} + \Lambda_1 y_{ij}^{2n} + f_{ij}^{2n+1}, \qquad (x_i, y_j, t_n) \in \Omega_{\tau h}^{1,2n+1}\,, \qquad (2.51)$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+1} - y_{ij}^{2n}}{2\tau} = -\tilde C_1^{2n+1} y_{ij}^{2n+1} + \Lambda_1 y_{ij}^{2n+1}, \qquad (x_i, y_j, t_n) \in \Omega_{\tau h}^{2,2n+1}\,, \qquad (2.52)$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n+1}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+1}y_{ij}^{2n+1}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+1},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}\ , \tag{2.53}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n+1}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+1}y_{ij}^{2n+2}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+2},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}\ , \tag{2.54}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+3}-y_{ij}^{2n+2}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+3}y_{ij}^{2n+2}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+2},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{1,2n+3}\ , \tag{2.55}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+3}-y_{ij}^{2n+2}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+3}y_{ij}^{2n+3}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+3}+f_{ij}^{2n+3},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{2,2n+3}\ , \tag{2.56}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+4}-y_{ij}^{2n+3}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+3}y_{ij}^{2n+3}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+3},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{1,2n+4}\ , \tag{2.57}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+4}-y_{ij}^{2n+3}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+3}y_{ij}^{2n+4}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+4},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{2,2n+4}\ , \tag{2.58}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+5}-y_{ij}^{2n+4}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+5}y_{ij}^{2n+4}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+4},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{1,2n+5}\ , \tag{2.59}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+5}-y_{ij}^{2n+4}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+5}y_{ij}^{2n+5}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+5}+f_{ij}^{2n+5},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{2,2n+5}\ , \tag{2.60}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+6}-y_{ij}^{2n+5}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+5}y_{ij}^{2n+5}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+5},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{1,2n+6}\ , \tag{2.61}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+6}-y_{ij}^{2n+5}}{2\tau}=-\tilde{C}_2^{2n+5}y_{ij}^{2n+6}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+6},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{2,2n+6}\ , \tag{2.62}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+7}-y_{ij}^{2n+6}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+7}y_{ij}^{2n+6}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+6},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{1,2n+7}\ , \tag{2.63}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+7}-y_{ij}^{2n+6}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+7}y_{ij}^{2n+7}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+7},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{2,2n+7}\ , \tag{2.64}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+8}-y_{ij}^{2n+7}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+7}y_{ij}^{2n+7}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+7}+f_{ij}^{2n+7},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{1,2n+8}\ , \tag{2.65}$$

$$\frac{y_{ij}^{2n+8}-y_{ij}^{2n+7}}{2\tau}=-\tilde{C}_1^{2n+7}y_{ij}^{2n+8}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+8},\qquad x_i,y_j,t_n\ \in\Omega_{\tau h}^{2,2n+8}\ , \tag{2.66}$$

де $\tilde{C}_1^{n+k}$, $\tilde{C}_1^{n+k}$ – різницеві аналоги диференціальних операторів (2.49), (2.50).

Як і для попередніх трьох алгоритмів, питання збіжності та стійкості для алгоритму IV розглянуто в підрозділі 2.3.

2.3. Дослідження апроксимації та стійкості ДС-алгоритмів в схемі розщеплення

Даний підрозділ присвячено дослідженню основних обчислювальних характеристик побудованих в п. 2.2.2 та п 2.2.3 ДС-алгоритмів розщеплення.

В п. 2.3.1 досліджено та обґрунтовано питання апроксимації диференціальної задачі (2.18)-(2.19) наведеними чотирма алгоритмами. Також в п. 2.3.2 наведено обґрунтування другої важливої характеристики методів чисельного моделювання – обчислювальної стійкості різницевих алгоритмів I, II, III, IV. Ці обидві характеристики досліджені та обґрунтовані для всіх чотирьох алгоритмів та представлені у вигляді теорем.

2.3.1. Апроксимація алгоритмів I, II, III, IV

Очевидно, що жодна окрема різницева схема в наведених вище алгоритмах розщеплення не апроксимує поставлену задачу (2.18), (2.19). Але при послідовному виконанні кожного з алгоритмів та використанні формул (2.38) або (2.47) для алгоритмів II та III, вони мають сумарну апроксимацію. Дане твердження вірне для усіх чотирьох розглянутих алгоритмів розщеплення.

Апроксимація алгоритму I (2.25)-(2.28).

Теорема 2.2. Алгоритм (2.25)-(2.28) апроксимує рівняння (2.18), (2.19) з порядком $O\left(\tau + h^m\right)$, де m – порядок апроксимації операторів C_α за просторовою змінною.

Доведення. Складемо формули (2.25) і (2.28), а також (2.26) і (2.27), отримані при $\alpha = 1$, з точністю до $O\left(\tau^2\right)$ одержимо

$$\frac{y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n}}{2\tau}-C_1 y_{ij}^{2n+1}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+1}=\varphi_{ij}^{2n+1}, \qquad (2.67)$$

а при $\alpha=2$

$$\frac{y_{ij}^{2n+4}-y_{ij}^{2n+2}}{2\tau}-C_2 y_{ij}^{2n+3}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+3}=\varphi_{ij}^{2n+3}. \qquad (2.68)$$

Додавши до (2.67) формулу (2.68), остаточно одержимо

$$\frac{y_{ij}^{2n+4}-y_{ij}^{2n+2}}{4\tau}-C_1 y_{ij}^{2n+1}-C_2 y_{ij}^{2n+3}+\Lambda_1 y_{ij}^{2n+1}+\Lambda_2 y_{ij}^{2n+3}=\varphi_{ij}^{2n+2}. \qquad (2.69)$$

За допомогою розвинення розв’язку в ряд Тейлора неважко показати, що різницеве рівняння (2.69) апроксимує диференціальне рівняння (2.18) з першим порядком по τ. Порядок апроксимації по просторовим змінним визначається порядком апроксимації конвективного оператора.

Теорему доведено.

Апроксимація алгоритму II (2.30)-(2.38).

Теорема 2.3. Алгоритм розщеплення (2.30)-(2.38) апроксимує рівняння (2.29), (2.19) з точністю $O(\tau^2+h^m)$, де m вказує на порядок апроксимації оператора L_α за просторовими змінними.

Доведення. Для визначення сумарної апроксимації, в формулу (2.38) послідовно підставляємо значення на попередніх кроках $2n$, $2n+1$ та проведемо низку простих перетворень в (2.30)-(2.38). В результаті одержимо

$$\frac{y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n}}{2\tau}+L_1 y_{ij}^{2n+1}+L_2 y_{ij}^{2n+1}-\varphi_{ij}^{2n+1}=\frac{\partial u}{\partial t}+C(b)u-\Lambda u-qu-f+O(\tau^2+h^m).$$

Тобто наведений алгоритм сумарно апроксимує рівняння (2.18) з похибкою $O(\tau^2+h^m)$, де $m=1$, якщо оператор $C(b)u$ апроксимуємо за формулою

$$C(b)y=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(b_\alpha^-(x)y\right)_{x_\alpha}+b_\alpha^+(x)y_{\bar{x}_\alpha}+\left(b_\alpha^+(x)y\right)_{\bar{x}_\alpha}+b_\alpha^-(x)y_{x_\alpha}\right],$$

або $m=2$ – якщо

$$C(b)y=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(b_\alpha(x)\,y_{\overset{0}{x_\alpha}}+\left(b_\alpha(x)\,y\right)_{\overset{0}{x_\alpha}}\right).$$

Теорему доведено.

Апроксимація алгоритму III (2.39)-(2.47).

Теорема 2.4. ДС-алгоритм (2.39)-(2.47) сумарно апроксимує систему рівнянь (2.18), (2.19) з точністю $O(\tau^2+h^m)$, де m вказує на порядок апроксимації оператора L_α за просторовими змінними.

Доведення. Склавши попарно рівняння (2.39) з (2.42) та (2.40) з (2.41), одержимо

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2}-\tilde{y}_{ij_0}^{2n}}{\tau}+L_1^{2n+1}y_{ij_0}^{2n}+L_1^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2}+2L_2^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}=2\varphi_{ij_0}^{2n+1},\qquad (x_{1i},y_{2j_0},t_{2n+2})\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+2},$$

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2}-\tilde{y}_{ij_0}^{2n}}{\tau}+2L_1^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n}+2L_2^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2}=2\varphi_{ij_0}^{2n+1},\qquad (x_{1i},y_{2j_0},t_{2n+2})\in\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}.$$

Враховуючи лінійність операторів L_1^{2n+1}

$$L_1^{2n+1}y_{ij_0}^{2n}+L_1^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2}=L_1^{2n+1}\left(y_{ij_0}^{2n}+\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2}\right)=2L_1^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}+O(\tau^2),$$

встановлюємо

$$\frac{\tilde{y}_{ij_0}^{2n+2}-y_{ij_0}^{2n}}{\tau}+2L^{2n+1}\tilde{y}_{ij_0}^{2n+1}=2\varphi_{ij_0}^{2n+1},\qquad (x_{1i},y_{2j_0},t_{2n+2})\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}\tag{2.70}$$

Використовуючи формули (2.45)-(2.48) і міркуючи аналогічно, одержуємо

$$\frac{\tilde{y}_{i_0j}^{2n+2}-y_{i_0j}^{2n}}{\tau}+2L^{2n+1}\tilde{y}_{i_0j}^{2n+1}=2\varphi_{i_0j}^{2n+1},\qquad (x_{1i_0},y_{2j},t_{2n+2})\in\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}\tag{2.71}$$

Оскільки розв’язок задачі записується за формулою (2.47), то об’єднавши (2.70) з (2.71), при достатній гладкості коефіцієнтів рівняння і розв’язку задачі, одержуємо

$$\frac{\partial u}{\partial t}+C(b)u-\Lambda u-f-\left(\frac{y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n}}{2\tau}+L\tilde{y}_{ij}^{2n+1}+\varphi_{ij}^{2n+1}\right)=O(\tau^2+h^2).$$

Теорему доведено.

Апроксимація алгоритму IV (2.51)-(2.66).

Теорема 2.5. Алгоритм IV (2.51)-(2.66) має другий порядок апроксимації за часом.

Доведення. Склавши послідовно усі рівняння алгоритму IV, після зведення відповідних коефіцієнтів та використання тотожності

$$\varphi\ t_0+\alpha\tau\ +\varphi\ t_0+\beta\tau\ =2\varphi\left(t_0+\frac{\alpha+\beta}{2}\tau\right)+O\ \tau^2$$

одержимо

$$\frac{y^{2n+8}-y^{2n}}{8\tau}=-\ C_1^{2n+4}+C_2^{2n+4}\ y^{2n+4}+\ \Lambda_1+\Lambda_2\ y^{2n+4}+f^{2n+4}+O\ \tau^2\ .$$

Ця рівність показує, що наша система різницевих рівнянь апроксимує диференціальне рівняння конвекції-дифузії з другим порядком за часом відносно кроку $\tau_1=4\tau$.

Теорему доведено.

2.3.2. Стійкість ДС-алгоритмів I, II, III, IV

Стійкість алгоритму I (2.25)-(2.28).

Дослідження стійкості різницевого алгоритму (теореми 2.6, 2.7) проведемо за два кроки: спочатку покладемо $\varphi_{ij}=0$ й досліджуємо стійкість за початковими даними, а потім враховуємо вплив правої частини.

Запишемо алгоритм розщеплення (2.25)-(2.28) в операторному вигляді. Позначимо $L_1=-C_1+\Lambda_1$, $L_2=-C_2+\Lambda_2$, а під $\vec{y}^n$ будемо мати на увазі вектори з координатами y_{ij}^n ($i=\overline{1,m_1}$, $j=\overline{1,m_2}$). Розглянемо випадок $\alpha=1$

$$\vec{y}^{2n+1}=\ E-\tau L_1\ \vec{y}^{2n} \qquad \text{у вузлах } \Omega_{\tau h}^{1,2n+1}, \tag{2.72}$$

$$E+\tau L_1\ \vec{y}^{2n+1}=\vec{y}^{2n} \qquad \text{у вузлах } \Omega_{\tau h}^{2,2n+1}, \tag{2.73}$$

$$\vec{y}^{2n+2}=\ E-\tau L_1\ \vec{y}^{2n+1} \qquad \text{у вузлах } \Omega_{\tau h}^{1,2n+2}, \tag{2.74}$$

$$E+\tau L_1\ \vec{y}^{2n+2}=\vec{y}^{2n+1} \qquad \text{у вузлах } \Omega_{\tau h}^{2,2n+2}. \tag{2.75}$$

Підставивши (2.72) в (2.75), а (2.73) в (2.74) відповідно, отримаємо

$$\vec{y}^{\,2n+2} = (E+\tau L_1)^{-1}(E-\tau L_1)\,\vec{y}^{\,2n} \quad \text{в} \ \Omega_{\tau h}^{2,2n+2}, \tag{2.76}$$

$$\vec{y}^{\,2n+2} = (E-\tau L_1)(E+\tau L_1)^{-1}\,\vec{y}^{\,2n} \quad \text{в} \ \Omega_{\tau h}^{1,2n+2}. \tag{2.77}$$

З леми 2.1, доведеної в п 2.1.4 випливає, що формули (2.76) і (2.77) еквівалентні.

Аналогічні результати одержимо й для випадку $\alpha = 2$. Отже

$$\vec{y}^{\,2n+4} = (E-\tau L_2)(E+\tau L_2)^{-1}\,\vec{y}^{\,2n+2}. \tag{2.78}$$

Далі з (2.77) і (2.78) запишемо

$$\vec{y}^{\,2n+4} = (E-\tau L_2)(E+\tau L_2)^{-1}(E-\tau L_1)(E+\tau L_1)^{-1}\,\vec{y}^{\,2n}$$

або позначивши $G_\alpha = (E-2\tau L_\alpha)(E+2\tau L_\alpha)^{-1}$, $\alpha = 1,2$ й $G = G_2 \cdot G_1$, одержимо

$$\vec{y}^{\,2n+4} = G\vec{y}^{\,2n}.$$

Тобто

$$\vec{y}^{\,2n+4} = G^n \vec{y}^{\,0}. \tag{2.79}$$

Тут G – оператор переходу із шару $2n$ на шар $2n+4$.

Теорема 2.6. ДС-алгоритм (2.25)-(2.28) безумовно стійкий за початковими даними.

Доведення. Для доведення теореми необхідно показати, що множина операторів $\|G\|^n$ рівномірно обмежена зверху. Введемо банахів простір сіткових функцій B_h. Очевидно, що $\|G\| \le \|G_1\| \cdot \|G_2\|$. Оцінимо $\|G_\alpha\|$, $\alpha = 1,2$.

Лема 2.2. Оператор L_α $(\alpha = 1,2)$ додатньо визначений.

Доведення леми 2.2 випливає з того, що $L_\alpha = -C_\alpha + \Lambda_\alpha + q$. Оскільки C_α – кососиметричний, Λ_α – додатньовизначений, $q > 0$, то

$$(L_\alpha y, y) = -(C_\alpha y, y) + (\Lambda_\alpha y, y) + (qy, y) = (\Lambda_\alpha y, y) + (qy, y) \ge 0.$$

Лему доведено.

Покладемо $\quad \vec{\Phi} = (E+\tau L_\alpha)^{-1}\vec{\varphi}.$

$$\|G_\alpha\|^2 = \sup_{\vec{\varphi}\neq 0}\frac{\left((E-\tau L_\alpha)(E+\tau L_\alpha)^{-1}\vec{\varphi},\ (E-\tau L_\alpha)(E+\tau L_\alpha)^{-1}\vec{\varphi}\right)}{(\vec{\varphi},\vec{\varphi})} =$$

$$=\sup_{\bar{\Phi}\neq 0}\frac{\left((E-L_\alpha)\bar{\Phi},\ (E-L_\alpha)\bar{\Phi}\right)}{\left((E+L_\alpha)\bar{\Phi},\ (E+L_\alpha)\bar{\Phi}\right)} = \sup_{\bar{\Phi}\neq 0}\frac{(\bar{\Phi},\bar{\Phi})+2\tau^2(L_\alpha\bar{\Phi},L_\alpha\bar{\Phi})-2\tau(L_\alpha\bar{\Phi},\bar{\Phi})}{(\bar{\Phi},\bar{\Phi})+2\tau^2(L_\alpha\bar{\Phi},L_\alpha\bar{\Phi})+2\tau(L_\alpha\bar{\Phi},\bar{\Phi})}\le 1.$$

Отже, $\|G\|\le 1$ і стійкість за початковими даними доведена.

Теорему доведено.

Доведення стійкості за правою частиною для більш загального випадку наведемо в теоремі 2.8.

Стійкість алгоритму II (2.30)-(2.38).

Теорема 2.7. ДС-алгоритм (2.30)-(2.38) є безумовно стійким за початковими даними.

Доведення. Оскільки $L_\alpha = -C_\alpha + \Lambda_\alpha + q$, $\alpha = 1,2$, де C_α кососиметричні, а Λ_α додатно-визначені оператори, $q \ge 0$, то $(L_\alpha u, u) \ge 0$. Враховуючи переставну властивість операторів $(E-2\tau L_\alpha)$ та $(E-2\tau L_\alpha)^{-1}$ і використовуючи пари формул (2.30) та (2.38), (2.31) та (2.32), а також (2.34) та (2.37), (2.35) і (2.36) одержимо: $\tilde{y}^{2n+2} = G_1 y^{2n}$ та $\tilde{\tilde{y}}^{2n+2} = G_2 y^{2n}$, де $G_\alpha = (E-2\tau L_\alpha)(E+2\tau L_\alpha)^{-1}$, $\alpha = 1,2$ – оператори переходу з часового шару $2n$ на шар $2n+2$ на відповідних множинах. Враховуючи наведені вище властивості операторів $L_\alpha = -C_\alpha + \Lambda_\alpha + q$ і обчисливши норму оператора за формулою $\|G_\alpha\| = \sup_{\vec{\varphi}\neq 0}\frac{(G_\alpha\varphi, G_\alpha\varphi)}{(\varphi,\varphi)}$, одержимо оцінку $\|G_\alpha\| \le g_\alpha < 1$. тоді з (2.38) випливає

$$\|y^{2n+2}\| \le \frac{1}{2}\left(\|\tilde{y}^{2n+2}\| + \|\tilde{\tilde{y}}^{2n+2}\|\right) = \frac{1}{2}\left(\|G_1\|\|y^{2n}\| + \|G_2\|\|y^{2n}\|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|G_1\| + \|G_2\|\right)\|y^{2n}\| \le \frac{1}{2}\left(g_1^n + g_2^n\right)\|y^0\| \le \|y^0\|.$$

Теорему доведено.

Стійкість алгоритму III (2.39)-(2.47).

Теорема 2.8. ДС-алгоритм розщеплення (2.39)-(2.47) безумовно стійкий.

Доведення. Дослідимо спочатку стійкість алгоритму тільки за початковими даними. Оскільки $L_\alpha = -C_\alpha + \Lambda_\alpha + q \quad (\alpha = 1,2)$, де C_α кососиметричні, а Λ_α додатно-визначений оператор, то $(L_\alpha y^n, y^n) > 0$. Розглянемо випадок $\alpha = 1$. Позначимо через $\tilde{y}^{2n}$ вектори з координатами $\tilde{y}_{ij}^{2n}$ $(i = \overline{1,m_1},\ j = \overline{1,m_2})$ і запишемо рівняння (2.39)-(2.42) у векторній формі

$$\tilde{y}^{2n+1} = (E - \tau L_1^{2n})\, y^{2n} \qquad \text{у вузлах } \Omega_{\tau h}^{1,2n+1}, \tag{2.80}$$

$$(E + \tau L_1^{2n+1})\, \tilde{y}^{2n+1} = y^{2n} \qquad \text{у вузлах } \Omega_{\tau h}^{2,2n+1}, \tag{2.81}$$

$$\tilde{y}^{2n+2} = (E - \tau L_1^{2n+1})\, \tilde{y}^{2n+1} \qquad \text{у вузлах } \Omega_{\tau h}^{2,2n+2}, \tag{2.82}$$

$$(E - \tau L_1^{2n+2})\, \tilde{y}^{2n+2} = \tilde{y}^{2n+1} \qquad \text{у вузлах } \Omega_{\tau h}^{1,2n+2}, \tag{2.83}$$

Підставивши (2.80) в (2.83), а (2.81) в (2.82) відповідно одержимо

$$\tilde{y}^{2n+2} = (E + \tau L_1^{2n+1})^{-1} (E - \tau L_1^{2n+1})\, y^{2n}, \qquad (x_{1i_0}, y_{2j}, t_{2n+1}) \in \Omega_{\tau h}^{2,2n+1},$$

$$\tilde{y}^{2n+2} = (E - \tau L_1^{2n+1}) (E + \tau L_1^{2n+1})^{-1} y^{2n}, \qquad (x_{1i_0}, y_{2j}, t_{2n+2}) \in \Omega_{\tau h}^{2,2n+2},$$

Аналогічний результат маємо і для випадку $\alpha = 2$

$$\tilde{\tilde{y}}^{2n+2} = (E + \tau L_1^{2n+1})^{-1} (E - \tau L_1^{2n+1})\, y^{2n}, \qquad (x_{1i_0}, y_{2j}, t_{2n+1}) \in \Omega_{\tau h}^{2,2n+1},$$

$$\tilde{\tilde{y}}^{2n+2} = (E - \tau L_1^{2n+1}) (E + \tau L_1^{2n+1})^{-1} y^{2n}, \qquad (x_{1i_0}, y_{2j}, t_{2n+2}) \in \Omega_{\tau h}^{2,2n+2}.$$

Легко показати, що оператор $(E - \tau L_\alpha^{2n+1})$ та $(E + \tau L_\alpha^{2n+1})^{-1}$ переставні. Отже, розв'язки різницевих рівнянь можна записати у операторній формі

$$\tilde{y}^{2n+2} = G_1 y^{2n}$$

та

$$\tilde{\tilde{y}}^{2n+2} = G_2 y^{2n},$$

де $G_2 = (E - \tau L_\alpha^{2n+1})(E + \tau L_\alpha^{2n+1})^{-1}$, $\alpha = 1,2$ – оператори переходу з часового шару $2n$ на шар $2n+2$.

Ураховуючи наведені вище властивості операторів $L_\alpha = -C_\alpha + \Lambda_\alpha$ і обчисливши норму оператора за формулою $\|G_\alpha\| = \sup\limits_{\varphi \neq 0} \frac{(G_\alpha \varphi, G_\alpha \varphi)}{(\varphi, \varphi)}$, одержимо оцінку $\|G_\alpha\| \le q < 1$. Тоді з (2.47) випливає

$$\|y^{2n+2}\| \le \frac{1}{2}\left(\|\tilde{y}^{2n+2}\| + \|\tilde{\tilde{y}}^{2n+2}\|\right) = \frac{1}{2}\left(\|G_1\|\|y^{2n}\| + \|G_2\|\|y^{2n}\|\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|G_1\| + \|G_2\|\right)\|y^{2n}\| \le \frac{1}{2}\left(q_1^n + q_2^n\right)\|y^0\| \le \|y^0\|.$$

Отже, $\|G\| = \frac{1}{2}\left(\|G_1\| + \|G_2\|\right) \le 1$ і алгоритм стійкий за початковими даними.

Доведемо тепер безумовну стійкість алгоритму за правою частиною рівняння. Для цього з рівняння (2.39) та (2.42) визначимо вектор $\tilde{y}^{2n+2}$ $(\alpha = 1)$ при $(x_{1i}, y_{2j}, t_{2n+2}) \in \Omega_{\tau h}^{1,2n+2}$

$$\tilde{y}^{2n+2} = \left(E + \tau L_1^{2n+1}\right)^{-1}\left(E - \tau L_1^{2n+1}\right) y^{2n} - \tau\left(E + \tau L_1^{2n+1}\right)^{-1} \varphi^{2n+1}.$$

Оскільки $L_1^{2n+1} > 0$, то $\left\|\left(E + \tau L_1^{2n+1}\right)^{-1}\right\| = q < 1$, отже

$$\|\tilde{y}^{2n+2}\| \le \|G_1\|\|y^{2n}\| + \tau\|\varphi\| \le \|y^{2n}\| + \tau\|\varphi\|_H, \tag{2.84}$$

де $\|\varphi\|_H = \max\limits_n \|\varphi^n\|$.

В точках множини $\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}$ з формул (2.40), (2.41) випливає, що

$$\tilde{y}^{2n+2} = \left(E - \tau L_1^{2n+1}\right)\left(E + \tau L_1^{2n+1}\right)^{-1} y^{2n} - \tau\left(E - \tau L_1^{2n+1}\right)\left(E + \tau L_1^{2n+1}\right)^{-1} \varphi^{2n+1} + \tau \varphi^{2n+1}.$$

Враховуючи далі оцінки для $\|G_1\|$, а також те, що оператори $\left(E - \tau L_1^{2n+1}\right)$ та $\left(E + \tau L_1^{2n+1}\right)^{-1}$ переставні, одержуємо нерівність (2.84). Використовуючи нерівність (2.84) послідовно n разів, приходимо до загальної оцінки

$$\|\tilde{y}^{2n+2}\| \le \|y^0\| + n\tau\|\varphi\|. \tag{2.85}$$

Аналогічно аналізуємо розв'язок $\tilde{\tilde{y}}^{2n+2}$ $(\alpha = 2)$ приходимо до оцінки

$$\|\tilde{\tilde{y}}^{2n+2}\| \le \|y^0\| + n\tau\|\varphi\|.$$

Отже

$$\left\| y^{2n+2} \right\| \le \frac{1}{2}\left(\left\| \tilde{y}^{2n+2} \right\| + \left\| \tilde{\tilde{y}}^{2n+2} \right\| \right) \le \left\| y^{0} \right\| + n\tau \left\| \varphi \right\|,$$

це і доводить стійкість неоднорідного рівняння. Теорему доведено.

Стійкість алгоритму IV (2.51)-(2.66).

Теорема 2.9. Різницевий алгоритм розщеплення (2.51)-(2.66) безумовно стійкий.

Доведення. Позначимо оператори

$$G_{11}^{\gamma} = E - 2\tau\left(-\tilde{C}_1 + \Lambda_1\right), \qquad G_{12}^{\gamma} = E + 2\tau\left(-\tilde{C}_1 + \Lambda_1\right),$$

$$G_{21}^{\gamma} = E - 2\tau\left(-\tilde{C}_2 + \Lambda_2\right), \qquad G_{22}^{\gamma} = E + 2\tau\left(-\tilde{C}_2 + \Lambda_2\right),$$

де індекс γ вказує на номер часового кроку, на якому вказані коефіцієнти оператора конвективного переносу.

Тоді після підстановки (2.51) в (2.54), (2.52) в (2.53) і врахуванням леми 2.1 маємо

$$\vec{y}^{2n+2} = \left(G_{11}^{2n+1}\right)\left(G_{12}^{2n+1}\right)^{-1}\vec{y}^{2n} + 2\tau\left(G_{12}^{2n+1}\right)^{-1}\vec{f}^{2n+1}. \tag{2.86}$$

Виконаємо аналогічні дії з (2.55)-(2.58)

$$\vec{y}^{2n+4} = \left(G_{21}^{2n+3}\right)\left(G_{22}^{2n+3}\right)^{-1}\vec{y}^{2n+2} + 2\tau\left(G_{22}^{2n+1}\right)^{-1}\vec{f}^{2n+3}. \tag{2.87}$$

Для (2.58)-(2.62) та (2.63)-(2.66) – одержимо

$$\vec{y}^{2n+6} = \left(G_{21}^{2n+5}\right)\left(G_{22}^{2n+5}\right)^{-1}\vec{y}^{2n+4} + 2\tau\left(G_{22}^{2n+1}\right)^{-1}\vec{f}^{2n+5}, \tag{2.88}$$

$$\vec{y}^{2n+8} = \left(G_{11}^{2n+7}\right)\left(G_{12}^{2n+7}\right)^{-1}\vec{y}^{2n+6} + 2\tau\left(G_{12}^{2n+1}\right)^{-1}\vec{f}^{2n+7}. \tag{2.89}$$

Отже

$$\vec{y}^{2n+8} = \left(G_{11}^{2n+7}\right)\left(G_{12}^{2n+7}\right)^{-1}\left(G_{21}^{2n+5}\right)\left(G_{22}^{2n+5}\right)^{-1}\left(G_{21}^{2n+3}\right)\left(G_{22}^{2n+3}\right)^{-1}\left(G_{11}^{2n+1}\right)\left(G_{12}^{2n+1}\right)^{-1}\vec{y}^{2n} +$$

$$+2\tau\Big[\left(G_{11}^{2n+7}\right)\left(G_{12}^{2n+7}\right)^{-1}\left(G_{21}^{2n+5}\right)\left(G_{22}^{2n+5}\right)^{-1}\left(G_{21}^{2n+3}\right)\left(G_{22}^{2n+3}\right)^{-1}\left(G_{12}^{2n+1}\right)f^{2n+1} +$$

$$+\left(G_{11}^{2n+7}\right)\left(G_{12}^{2n+7}\right)^{-1}\left(G_{21}^{2n+5}\right)\left(G_{22}^{2n+5}\right)^{-1}f^{2n+3} +$$

$$+\; G_{11}^{2n+7} \left(G_{12}^{2n+7}\right)^{-1} \left(G_{22}^{2n+5}\right)^{-1} f^{2n+7} \Big].$$

Як і в теоремі 2.8 встановлюємо, що

$$\left\| G_{k1}^{\gamma} \left(G_{k2}^{\gamma}\right)^{-1} \right\| \le 1,\; k = 1, 2.$$

Отже

$$\left\| y^{2n+8} \right\| \le \left\| y^{2n} \right\| + 8\tau \max_{k=0,1,2,3} \left\| \overset{1}{f}{}^{2n+2k+1} \right\|.$$

Теорему доведено.

2.3.3. Дисперсійність та дисипативність ДС-алгоритму розщеплення

Для подальшого дослідження різницевого рівняння скористаємося *методом першого диференціального наближення (ПДН)*. Цей метод є важливим інструментом дослідження різницевих схем. Згідно з методом ПДН, усі функції дискретного аргументу, які входять до різницевого рівняння, розвиваються в ряди Тейлора. Ці розвинення підставляються в різницеве рівняння. У рівнянні залишають доданки, які залежать від кроків сітки у нульовому, першому та другому степені, і аналізують якість одержаного рівняння, виходячи з відомих умов, що накладаються на коефіцієнти даного диференціального рівняння. Проведення такого аналізу пов’язано з тим, що виконання розрахунків на ЕОМ допускає використання хоча й досить малих, але все ж таки скінчених кроків сітки. Оцінки похибки апроксимації мають асимптотичний характер і не дають змоги отримати реальну оцінку похибки обчислень, яку необхідно враховувати, аналізуючи схему.

Застосовуємо метод ПДН для дослідження різницевої схеми для рівняння переносу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a \frac{\partial u}{\partial x_2} \right). \tag{2.90}$$

Теорема 2.10. ДС-алгоритм розщеплення (2.39)-(2.47) слабо дисипативний та дисперсійний.

Доведення. Використовуючи формули (2.39) та (2.42) запишемо різницеве рівняння

$$
\begin{aligned}
\frac{y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n}}{\tau} &= -b_{1ij}^{2n+1}\left(\frac{y_{i+1j}^{2n+2}-y_{i-1j}^{2n+2}}{2h_1}+\frac{y_{i+1j}^{2n}-y_{i-1j}^{2n}}{2h_1}\right)+\\
&+\frac{a_{i+1/2\,j}^{2n+1}\;\; y_{i+1j}^{2n+2}-y_{i+1j}^{2n}\;\; -a_{i-1/2\,j}^{2n+1}\;\; y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n}}{h_1^2}+\\
&+\frac{a_{i+1/2\,j}^{2n+1}\;\; y_{i+1j}^{2n}-y_{ij}^{2n}\;\; -a_{i-1/2\,j}^{2n+1}\;\; y_{ij}^{2n}-y_{i-1j}^{2n}}{h_1^2}-\\
&-b_{2ij}^{2n+1}\left(\frac{y_{ij+1}^{2n+2}-y_{ij-1}^{2n+2}}{2h_2}+\frac{y_{ij+1}^{2n}-y_{ij-1}^{2n}}{2h_2}\right)+\\
&+\frac{a_{i\,j+1/2}^{2n+1}\;\; y_{ij+1}^{2n+2}-y_{ij}^{2n+2}\;\; -a_{i\,j-1/2}^{2n+1}\;\; y_{ij}^{2n+2}-y_{ij-1}^{2n+2}}{h_2^2}+\\
&+\frac{a_{i\,j+1/2}^{2n+1}\;\; y_{ij+1}^{2n}-y_{ij}^{2n}\;\; -a_{i\,j-1/2}^{2n+1}\;\; y_{ij}^{2n}-y_{ij-1}^{2n}}{h_2^2}
\end{aligned}
\tag{2.91}
$$

і визначимо головний член похибки апроксимації.

Записавши для y_i^{n+1}, $y_{i\pm1}^{n}$ формули Тейлора в околі точки x_i,t_n, одержимо

$$
y_{ij}^{2n+2}=y_{ij}^{2n+1}+\tau\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\tau^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O\ \tau^4\ ,
$$

$$
y_{ij}^{2n}=y_{ij}^{2n+1}-\tau\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\tau^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O\ \tau^4\ ,
$$

$$
y_{i\pm1j}^{2n+2}=y_{ij}^{2n+1}\pm h_1\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{h_1^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\pm\frac{h_1^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+O\ \tau^4\ ,
$$

$$
\frac{y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n}}{2\tau}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_i^{2n+1}+\frac{\tau^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|_i^{2n+1}+O\ \tau^3\ ,
$$

$$
\frac{y_{i+1j}^{2n+2}-y_{i-1j}^{2n+2}}{2h_1}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i^{2n+2}+\frac{h_1^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_i^{2n+2}+O\ h_1^3\ ,
$$

$$\frac{y_{i+1j}^{2n}-y_{i-1j}^{2n}}{2h_1}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_i^{2n}+\frac{h_1^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_i^{2n}+O\left(h_1^3\right),$$

$$\frac{a_{i+1/2\,j}^{2n+1}\left(y_{i+1j}^{2n+2}-y_{ij}^{2n+2}\right)-a_{i-1/2\,j}^{2n+1}\left(y_{ij}^{2n+2}-y_{i-1j}^{2n+2}\right)}{h_1^2}=\frac{1}{h_1}\left(a_{i+1/2\,j}^{2n+1}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i+1/2\,j}^{2n+2}-a_{i-1/2\,j}^{2n+1}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i-1/2\,j}^{2n+2}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left.\left(a^{2n+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{ij}^{2n+2}+\frac{h_1^2}{4!}\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left.\left(a^{2n+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{ij}^{2n+2}+O\left(h_1^4\right).$$

Підставимо складові в рівняння (2.91)

$$\frac{y_{ij}^{2n+2}-y_{ij}^{2n}}{\tau}+b_{1ij}^{2n+1}\left(\frac{y_{i+1j}^{2n+2}-y_{i-1j}^{2n+2}}{2h_1}+\frac{y_{i+1j}^{2n}-y_{i-1j}^{2n}}{2h_1}\right)+$$

$$+b_{2ij}^{2n+1}\left(\frac{y_{ij+1}^{2n+2}-y_{ij-1}^{2n+2}}{2h_2}+\frac{y_{ij+1}^{2n}-y_{ij-1}^{2n}}{2h_2}\right)-$$

$$-\frac{a_{i+1/2\,j}^{2n+1}\left(y_{i+1j}^{2n+2}-y_{ij}^{2n+2}\right)-a_{i-1/2\,j}^{2n+1}\left(y_{ij}^{2n+2}-y_{i-1j}^{2n+2}\right)}{h_1^2}+$$

$$+\frac{a_{i+1/2\,j}^{2n+1}\left(y_{i+1j}^{2n}-y_{ij}^{2n}\right)-a_{i-1/2\,j}^{2n+1}\left(y_{ij}^{2n}-y_{i-1j}^{2n}\right)}{h_1^2}+$$

$$+\frac{a_{i\,j+1/2}^{2n+1}\left(y_{ij+1}^{2n+2}-y_{ij}^{2n+2}\right)-a_{i\,j-1/2}^{2n+1}\left(y_{ij}^{2n+2}-y_{ij-1}^{2n+2}\right)}{h_2^2}+$$

$$+\frac{a_{i\,j+1/2}^{2n+1}\left(y_{ij+1}^{2n}-y_{ij}^{2n}\right)-a_{i\,j-1/2}^{2n+1}\left(y_{ij}^{2n}-y_{ij-1}^{2n}\right)}{h_2^2}=$$

$$=2\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{ij}^{2n+1}+\frac{\tau^2}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|_{ij}^{2n+1}+O\left(\tau^3\right)+b_{ij}^{2n+1}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{ij}^{2n+1}+\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{ij}^{2n}\right)+$$

$$+b_{ij}^{2n+1}\left(\frac{h_1^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\right|_{ij}^{2n+2}+\frac{h_1^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\right|_{ij}^{2n}\right)+b_{ij}^{2n+1}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{ij}^{2n+2}+\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{ij}^{2n}\right)+$$

$$+b_{ij}^{2n+1}\left(\frac{h_2^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right|_{ij}^{2n+2}+\frac{h_2^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right|_{ij}^{2n}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left.\left(a\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right|_{ij}^{2n+2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left.\left(a\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right|_{ij}^{2n}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left.\left(a\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right|_{ij}^{2n+2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left.\left(a\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right|_{ij}^{2n}+\frac{h_1^2}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left.\left(a\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right|_{ij}^{2n+2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left.\left(a\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right|_{ij}^{2n}\right)+$$

$$+\frac{h_2^2}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\Bigg|_{ij}^{2n+2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\Bigg|_{ij}^{2n}\right)+O\;\, h_1^4+h_2^4\;\, =$$

$$=2\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{ij}^{2n+1}+2b_{ij}^{2n+1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{ij}^{2n+1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{ij}^{2n+1}+2b_{ij}^{2n+1}\frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{ij}^{2n+1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\Bigg|_{ij}^{2n+1}+$$

$$+R_{ij}^{2n+1}+O\;\,\tau^3+\tau^2\;\, h_1^2+h_2^2\;\,+h_1^2+h_2^2\;\,,$$

де головний член похибки

$$R_{ij}^{2n+1}=\frac{\tau^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\bigg|_{ij}^{2n+1}+\frac{h_1^3}{3}b_{1ij}^{2n+1}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\bigg|_{ij}^{2n+1}+\frac{h_2^3}{3}b_{2ij}^{2n+1}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\bigg|_{ij}^{2n+1}+$$

$$+\frac{h_1^3}{3}\left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}a\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\Bigg|_{ij}^{2n+1}+\frac{h_2^3}{3}\left(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3}a\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\Bigg|_{ij}^{2n+1}.$$

Оскільки члени $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^3}$ та $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4}$ $\;\alpha=1,2\;$ присутні в R_{ij}^{2n+1} з множником h_α^2, то це вказує на слабку дисипативність та дисперсійність алгоритму.

Теорему доведено.

Зауваження 2.4. Легко показати, що ДС-алгоритм (2.39)-(2.47) стає дисипативним, якщо конвективний оператор апроксимувати за формулою

$$C\;\, b\;\, y=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\;\, b_\alpha^-\;\, x\;\, y\;\,_{x_\alpha}+b_\alpha^+\;\, x\;\, y_{\bar{x}_\alpha}+\;\, b_\alpha^+\;\, x\;\, y\;\,_{\bar{x}_\alpha}+b_\alpha^-\;\, x\;\, y_{x_\alpha}$$

з першим порядком по h.

Аналогічні результати одержимо для алгоритмів II та IV. Алгоритм I буде дисперсійний і дисипативний з коефіцієнтом, пропорційним h.

2.4. Аналіз побудованих алгоритмів розщеплення на основі ДС-алгоритму

Дослідження ефективності алгоритмів будемо проводити спираючись на вимоги, сформульовані нами в п. 1.2. Нагадаємо, що було визначено дві групи вимог. Перша має обчислювальний характер, а саме:

1. апроксимація диференціального оператора;
2. стійкість обчислювальної різницевої схеми;
3. консерватизм – адекватність різницевої моделі, записаної на сітковій множині закону збереження чи його наслідку;
4. дисипативність та дисперсійність різницевого алгоритму, тобто його властивості збільшувати чи зменшувати штучно виникненні не прогнозовані відхилення.

Друга група стосується безпосередньо побудови внутрішньої структури алгоритму розв’язку, який буде ефективним на багатопроцесорних системах. Вона має також дві підгрупи. Перша пов’язана безпосередньо зі структурою алгоритму і визначається основними концепціями алгоритмічного паралелізму: розпаралелення за окремими рівняннями чи групами рівнянь, розпаралелення за просторовими напрямками, розпаралелення за фізичними процесами, або розпаралелення за декомпозицією структури даних.

В межах побудови кожного можливого вказаного розпаралелення алгоритм може мати багатоярусну структуру з різною висотою та шириною паралельної форми алгоритму. Ці фактори можуть бути обумовленими як внутрішньою структурою алгоритму, так і архітектурою багатопроцесорної обчислювальної системи, наприклад, залежати від кількості доступних процесорів. Такі важливі вимоги до паралельних алгоритмів як рівномірна завантаженість процесорів, масштабованість , локальність – це в основному внутрішні властивості розпаралелених алгоритмів, хоча в певній мірі вони залежать від побудови структури програмної реалізації.

Якщо оцінювати алгоритм ітераційного розв’язування рівняння Пуассона, побудованого в п. 2.1, то з обчислювальної позиції він не має особливих переваг перед багатьма ітераційними алгоритмами другого порядку збіжності. Але при використанні багатопроцесорних систем він має багато переваг. Це одноярусний алгоритм, який легко розпаралелюється за декомпозицією структури даних. Він не потребує додаткових рівнянь для зшивання розв’язку на границях розрізу (декомпозиції) області, має високу масштабованість та локальність. Урівноважити завантаження кожного з процесорів можна шляхом рівномірного розподілу числа вузлових точок по підобластям при декомпозиції.

Оскільки розглядаються рівняння переносу в нестислому середовищі, то повинно виконуватися рівняння нерозривності на кожному з часових кроків. Якщо коефіцієнти оператора конвективного переносу не залежать від часу, то ця умова виконується. У випадку їх залежності – рівняння нерозривності в загальному випадку не виконується. Це змушує нас розглядати два окремі випадки і використовувати в другому з них спеціальну апроксимацію оператора конвективного переносу, запропоновану Г. І. Марчуком [48].

Оскільки, як відомо, алгоритми розщеплення і ДС-алгоритм мають тільки сумарну апроксимацію, то в п. 2.3.1 проведено дослідження цього питання і встановлено, що алгоритм І має перший порядок за часом, а ІІ, ІІІ, ІV – другий. Але перший та третій алгоритми при виконанні тієї ж кількості арифметичних операцій, що і другий, проходять вдвічі більший часовий проміжок. Отже, використання першого та третього алгоритму може бути доцільним, коли нас цікавить швидкий вихід на режим усталення розв'язку. Другий та четвертий алгоритми дають більшу точність на кожному часовому кроці, але довше прямують до стаціонарного режиму.

В дисертаційній роботі також встановлено безумовну стійкість запропонованих чотирьох алгоритмів. Досліджено та обґрунтовано такі характеристики як дисперсійність та дисипативність цих алгоритмів. Що вказує на відповідність різницевої задачі диференціальній моделі.

Переходячи до аналізу можливостей розпаралелення алгоритмів відзначимо, що із запропонованих алгоритмів, алгоритми ІІ та ІІІ є чотириярусними на двох часових кроках. Алгоритм І та ІV – восьмиярусними на чотирьох часових кроках.

Всі чотири алгоритми розпаралелюються за декомпозицією структури даних, є локальними та масштабованими. Особливістю та перевагою їх є те, що вони не вимагають додаткових умов зшивання розв'язків на границях підобласті декомпозиції. Замість цього для проведення обчислень по всій області достатньо зробити по два обміни розв'язків в пригранічних точках між сусідніми процесорами.

Рівномірна завантаженість кожного процесора може достатньо просто балансуватися за рахунок побудови структури програмної реалізації алгоритму. А кількість обмінів між процесорами, яка залежить від їх кількості p, на кожному часовому кроці обчислюється як $2\ \ p-1$.

2.5. Висновки

В другому розділі:

- побудовано і обґрунтовано узагальнення ДС-алгоритму для ітераційного моделювання стаціонарних процесів переносу: проведено апроксимацію диференціального оператора та граничних умов, доведено теорему про збіжність ітераційного процесу;
- побудовано чотири схеми розщеплення для рівнянь конвекції-дифузії при умові нерозривності потоку, серед них: дві для рівнянь з коефіцієнтами конвекції не залежними від часу та дві – з коефіцієнтами залежними від часу, з першим або другим порядком апроксимації для кожного з видів рівнянь;
- проведено дослідження апроксимації, стійкості, дисперсійності та дисипативності побудованих схем розщеплення;
- проведено аналіз можливості використання побудованих алгоритмів на багатопроцесорних системах.

РОЗДІЛ 3
ДВОКРОКОВО-СИМЕТРИЗОВАНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ. ПОБУДОВА І ОБГРУНТУВАННЯ

Третій розділ присвячено побудові та обґрунтуванню чисельного двокроково-симетризованого алгоритму, який є ефективним на багатопроцесорних системах при моделюванні динаміки в'язкої нестислої рідини, записаної у вигляді системи рівнянь Нав'є-Стокса.

В п. 3.1 наведено результати аналізу наукових досліджень коректності постановки задач О. О. Ладиженської, Р. Темама та інших вчених відносно коректності постановки задач для рівнянь Нав'є-Стокса, які безпосередньо стосуються розглянутої в роботі проблеми.

В п. 3.2 представлено розроблений економічний різницевий алгоритм, побудований на основі двокроково-симетризованого алгоритму, для знаходження розв'язку поставленої задачі. Він є модифікацією скінчено-різницевих алгоритмів, які використовуються для розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса.

Також в п. 3.3 для побудованого різницевого алгоритму встановлено основні обчислювальні характеристики: дисперсійність, дисипативність та консервативність.

В цьому розділі показано переваги запропонованого алгоритму перед явними і неявними схемами, які полягають у тому, що він:

– дозволяє обчислювати характеристики динамічного процесу не розв'язуючи на кожному кроці великої системи алгебраїчних рівнянь;

– на двох кроках має сумарну апроксимацію $O(\tau^2 + h^2)$;

– має дисперсійні та дисипативні складові в головному члені похибки, величина яких визначається порядком h^2 і, отже, не можуть суттєво впливати на результат;

– консервативний, на що вказує виконання на сітковій множині наслідку інтегрального закону збереження маси в довільному замкненому об'ємі, що належить області протікання руху в'язкої рідини.

3.1. Основні моделі динаміки в'язкої рідини, які описуються системами рівнянь Нав'є-Стокса

В п. 3.1.1 представлено форми запису моделей динаміки в'язкої стислої та нестислої рідини (в дивергентній та не дивергентній формі). Також наведено умови існування та єдності розв'язку початково-крайової задачі для системи рівнянь Нав'є-Стокса. Зроблено аналіз коректності постановки задачі.

3.1.1. Форми запису рівнянь системи

При моделюванні динамічних процесів в'язкої рідини чи не найбільш загальною є система диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса. Велика кількість процесів характеризується тим, що щільність рідини не суттєво змінюється при зміні тиску. Такі моделі називають *моделями динаміки в'язкої нестислої рідини*. В такому разі, ми одержуємо систему диференціальних рівнянь в *дивергентній формі*, яка складається з двох рівнянь руху (кількості руху)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial\ u^2}{\partial x}-\frac{\partial\ uv}{\partial y}, \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial\ uv}{\partial x}-\frac{\partial\ v^2}{\partial y} \qquad (3.2)$$

та рівняння нерозривності потоку (закон збереження маси) у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \qquad (3.3)$$

Необхідно відзначити, що в цьому разі рівняння руху (3.1), (3.2) мають еквівалентну *недивергентну форму*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}; \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}\,. \tag{3.5}$$

Якщо розглядаємо *модель динаміки в'язкої стислої рідини*, тобто щільність є змінною величиною, то в цій системі рівняння нерозривності записується у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0\,. \tag{3.6}$$

Для замикання систем (3.1)-(3.3) та (3.1), (3.2), (3.6) задаємо початкові значення для функції u, v та граничні значення u, v, P.

Якщо ввести в розгляд функцію вихору ξ

$$\xi=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x},$$

та функцію току φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=u\,; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}=-v\,,$$

то після диференціювання рівняння (3.1) по y, а (3.2) – по x та знаходження різниці між ними, одержуємо систему рівнянь Нав'є-Стокса у вигляді:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}=-u\frac{\partial \xi}{\partial x}-u\frac{\partial \xi}{\partial y}+v\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=\xi\,. \tag{3.8}$$

Форма запису (3.1), (3.2) та (3.7), (3.8) при відповідному заданні граничних і початкових умов є математично еквівалентними, але мають різне фізичне трактування.

Надалі ми будемо розглядати моделі динаміки нестислої в'язкої рідини.

Велика кількість робіт присвячена також методам побудови розв'язку цих початково-крайових задач [142,134,147,148].

3.1.2. Існування та єдність розв'язку початково-крайової задачі для системи рівнянь Нав'є-Стокса

Наукові праці, які присвячено вивченню проблем існування та єдиності розв'язків систем рівнянь Нав'є-Стокса утворюють надзвичайно широке коло. Серед них особливо потрібно відзначити роботи О. О. Ладиженської [39], Р. Темама [40], Ж.-Л. Ліонса [41]. В них проведено достатньо глибоке дослідження таких систем. Зокрема, в роботі Р. Темама [40] доведено теореми про умови про існування та єдність слабкого розв'язку задач.

Тут розглянуто класичну постановку задачі та її слабкий аналог.

У відповідності з [40] введемо позначення:

$$D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad 1 \le i \le n \ ; \qquad\qquad D^j = D^{j_1} ... D^{j_n} = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} ... \partial x_n^{j_n}},$$

де $|j| = j_1 + ... + j_n$. Якщо $|j| = 0$, то D^j – тотожний оператор.

Під $L^2(\Omega)$ будемо розуміти гільбертовий простір дійсних функцій, визначених на Ω, зі скалярним добутком

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx .$$

Простір функцій з $L^2(\Omega)$, всі частинні похідні яких до порядку m включно належать до $L^2(\Omega)$, позначимо $H^m(\Omega)$.

Цей простір є гільбертовим простором зі скалярним добутком

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|j| \le m} (D^j u, D^j v) .$$

Нехай $D(\Omega)$ є простором функцій з класу C^r з компактним носієм, який обмежений $\partial\Omega$. Замикання $D(\Omega)$ в $H^m(\Omega)$ позначимо через $H_0^m(\Omega)$.

Тут і далі вважаємо, що всі добутки просторів оснащені звичайною нормою просторів або еквівалентною нормою. Границі $\partial\,\Omega$ та $\partial\,\overline{\Omega}$ не є нормованими.

Далі введемо такі простори

$Z = \{u \in D(\Omega), \operatorname{div} u = 0\}$ (без топології),

V – замикання Z в $H_0^1(\Omega)$;

H – замикання Z в $L^2(\Omega)$.

Простір H оснащений скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ індукованим з $L^2(\Omega)$, а простір V є гільбертовим із скалярним добутком

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{2} (D_i(u), D_i(v)). \tag{3.9}$$

Простори V та H є основними при дослідженні властивостей системи рівнянь Нав'є-Стокса.

В [40] показано, що простір V вкладений в H і щільний в ньому з неперервним вкладенням. Нехай H' і V' є спряженими просторами до H та V, а I – оператор вкладення V в H. Оператор I' – спряжений до I. Він є неперервним лінійним оператором, що діє з H' в V', та є взаємно-однозначним, оскільки $I(V) = V$ щільне в H. А $I'(H)$ щільне в V', оскільки I – взаємно-однозначний оператор. Отже, H' може бути ототожненим з деяким щільним підпростором в V'. Використовуючи далі теорему Рісса, ототожнимо H на H', та отримаємо включення

$$V \subset H \equiv H' \subset V', \tag{3.10}$$

де кожен простір щільний в наступному та ці включення є неперервними.

Оскільки скалярний добуток в просторі H елементів $f \in H$ та елементів $u \in V$ співпадає із функціоналом f на елементі u в розумінні «двоїстості» між V' та V, то вірна рівність

$$\langle f,u \rangle = (f,u) \quad \forall f \in H, \forall u \in V. \tag{3.11}$$

Отже, для фіксованого $u \in V$ та $\forall v \in V$ білінійна форма відображення $\langle u,v \rangle$ лінійна і неперервна на V. Це означає, що в просторі V існує елемент Au, такий що

$$(Au,v) = \|u,v\| \qquad \forall v \in V. \tag{3.12}$$

В [40] показано, що відображення $u \to Au$ лінійне, неперервне і є ізоморфізмом V на V'.

Перейдемо до *класичного формулювання початково-крайової задачі* для повних рівнянь Нав'є-Стокса. Воно полягає в тому, що потрібно знайти вектор-функцію $\vec{u} = (u_1, u_2)$ та скалярну функцію P, які відображають множину $Q = \Omega \times (0,T)$ в $\mathbb{R}^2$ та $\mathbb{R}$ відповідно, і крім того задовольнять умовам

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{2} u_i D_i \vec{u} = \operatorname{grad} P + \vec{f} \text{ в } Q, \tag{3.13}$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \tag{3.14}$$

$$\vec{u} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.15}$$

$$\vec{u}(x,0) = \vec{u}_0(x) \quad \text{в } \Omega. \tag{3.16}$$

Тут функції $\vec{f}$ та $\vec{u}_0$ визначені відповідно на множинах Q і Ω.

Нехай $\vec{u} \in C^2(Q)$ та $P \in C(\overline{Q})$ є класичними розв'язками задачі (3.13)-(3.16). Тоді $\vec{u} \in L^2(0,T;V)$ і при довільному $\vec{v} = (v_1, v_2) \in V$ маємо

$$\frac{d}{dt}(\vec{u},\vec{v}) + \upsilon((\vec{u},\vec{v})) + b(\vec{u},\vec{u},\vec{v}) = \langle \vec{f},\vec{v} \rangle. \tag{3.17}$$

Тут

$$b(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx, \tag{3.18}$$

для якого

$$b(\vec{u},\vec{v},\vec{v}) = 0, \tag{3.19}$$

при $\vec{u} \in V$ та $\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)$.

Позначимо через $B(\vec{u},\vec{v}) \in V'$ елемент, залежний від $\vec{u} \in V$ та $\vec{v} \in V$, який задовольняє умові

$$\langle B(\vec{u},\vec{v}),\vec{w} \rangle = b(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \qquad \forall \vec{w} \in V. \tag{3.20}$$

Рівність (3.20) буде виконуватися $\forall \vec{v} \in V$ за неперервністю по $\vec{u}$.

Наведені вище твердження (3.17)-(3.20) дозволяють записати класичну постановку задачі знаходження розв’язку системи Нав’є-Стокса (3.13)-(3.16) в *слабкій постановці*.

Нагадаємо, що в роботі Р. Темама [40] доведено теореми про умови про існування та єдність слабкого розв’язку задач.

Оскільки на даний момент підхід до доведення існування та єдності розв’язку класичної задачі (3.13)-(3.16) нам не відомий. То перейдемо до слабкого формулювання цієї задачі, для якої підхід до доведення існування та єдності розв’язку відомий [149].

Задачу (3.13)-(3.16) запишемо в *слабкій постановці*.

Для заданих $\vec{u}_0 \in H$ та $\vec{f} \in L^2(0,T;V')$ знайти функцію $\vec{u} \in L^2(0,T;V')$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt}(\vec{u},\vec{v}) + \upsilon((\vec{u},\vec{v})) + b(\vec{u},\vec{u},\vec{v}) = \langle \vec{f},\vec{v} \rangle,\ \forall \vec{v} \in V. \tag{3.21}$$

Але в цьому разі умова

$$\vec{u}(0) = \vec{u}_0, \tag{3.22}$$

яка відповідає умові (3.16) немає сенсу, оскільки функції з L^2 не визначені в точці. Проте якщо виконується рівняння (3.21), то можна показати, що $\vec{u}$ майже всюди рівна деякій неперервній функції. А отже, (3.22) набуває змісту.

Дійсно, якщо $\vec{u} \in L^2(0,T;V')$, $\vec{u}_0 \in H$ і виконується рівняння (3.21), то у відповідності з (3.11), (3.12) виконується наступна лема.

Лема [40]. Нехай розмірність $n \le 4$, а $\vec{u} \in L^2(0,T;V)$. Тоді функція Bu, визначена рівністю $\langle B\vec{u}(t),\vec{v} \rangle = b(\vec{u}(t),\vec{u}(t),\vec{v})\quad \forall \vec{v} \in V$, майже всюди на $[0,T]$ належить $L^1(0,T;V')$.

Отже, (3.21) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = \langle \vec{f} - \upsilon A\vec{u} - B\vec{u},\vec{v} \rangle\ \forall\ \vec{v} \in V, \tag{3.23}$$

де $\quad \dfrac{d\vec{u}}{dt} \equiv \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \vec{v}\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial y}$ – субстаціонарна похідна.

З леми випливає, що при $A\vec{u} \in L^2(0,T;V')$ виконується $(\vec{f} - \upsilon A\vec{u} - B\vec{u}, \vec{v}) \in L^1(0,T;V')$.

З (3.23) випливає, що

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}' \in L^1(0,T;V'),\ \vec{u}' = \vec{f} - \upsilon A\vec{u} - B\vec{u}.$$

З останньої рівності видно, що $\vec{u}$ майже всюди співпадає з деякою неперервною функцією із $[0,T]$ в V'. Таким чином, умова (3.22) набуває змісту.

Отже, переходом від класичної постановки задачі (3.13)-(3.16) до слабкої постановки (3.21)-(3.22) ми встановили між ними зв’язок. Це дозволяє скористатися теоремою [40], яка показує існування та єдиність розв’язку задачі в слабкій постановці.

Теорема [40]. При $n = 2$ розв’язок задачі (3.21)-(3.22) єдиний. Крім того, вектор-функція $\vec{u}$ майже всюди рівна деякій неперервній функції із $[0,T]$ в H і $\vec{u}(t) \to \vec{u}_0$ в H при $t \to 0$.

Наведені факти надають можливість стверджувати існування та єдність розв’язків початково-крайових задач, які будуть розглянуті в наступних розділах дисертаційної роботи.

3.2. Побудова ефективної при розпаралеленні різницевої схеми для моделювання руху в’язкої нестислої рідини

Серед чисельних методів, які використовуються для розв’язування практичних задач для систем рівнянь Нав’є-Стокса основними є скінчено-різницеві алгоритми та методи скінчених елементів.

Основною складністю при побудові різницевих схем для систем рівнянь Нав’є-Стокса (3.1)-(3.3) є її інтегрування при безпосередньому використанні рівняння нерозривності. Стійкі розрахунки одержані в основному, коли замість рівняння нерозривності, в систему вводилося рівняння Пуассона для тиску [25] або модифікувалося рівняння нерозривності шляхом введення штучної стислості [46]. Оскільки рівняння нерозривності є ключовим в гідродинаміці, то при побудові розв'язку воно має виконуватись (в явному або неявному вигляді).

Подальший аналіз різницевих схем для системи рівнянь Нав'є-Стокса дозволив встановити, що труднощі прямого інтегрування системи рівнянь руху пов'язані не тільки зі складністю апроксимації рівняння нерозривності, але й з необхідністю визначення тиску безпосередньо з рівнянь руху. Складність полягає в необхідності використання операції різницевого диференціювання значень проекцій вектора швидкості, яка є некоректною. Особливість полягає в тому, що похідні від проекцій вектора швидкості мають вищий порядок, ніж порядок похідних від функції тиску.

Досвід проведених обчислювальних експериментів [150-152] для системи рівнянь Нав'є-Стокса, поданої в різних формах запису, та аналіз теоретичних результатів [153] показує, що ефективними для чисельного моделювання процесів динаміки в'язкої нестислої рідини є два типи алгоритмів. Перший тип – двокроково-різницеві схеми [103], в яких використовуються: рівняння кількості руху, а рівняння нерозривності замінюється рівнянням Пуассона для тиску з нелінійною правою частиною. Тут рівняння нерозривності використовується неявно. Другий – це ітераційні алгоритми, в яких використовуються явно: рівняння нерозривності та одне з рівнянь кількості руху, а друге замінюється на рівняння Пуассона для тиску з нелінійною правою частиною [70]. На користь саме такої побудови ітераційного алгоритму свідчить той факт, що при введенні рівняння Пуассона для тиску понижується порядок одержаного співвідношення відносно похідних компонент швидкості, а порядок похідних від тиску стає старшим. Використання рівняння нерозривності в явному вигляді забезпечує виконання закону збереження маси.

При конструюванні ітераційного процесу важливу роль відіграє вибір типу різницевої схеми. Схема має найбільш точно відображати зміст математичної моделі, тобто апроксимувати диференціальну задачу, а також бути дисипативною та консервативною.

Оскільки задача (3.1)-(3.3) – нелінійна, то такий ітераційний процес може бути побудований на основі тришарової чисто неявної різницевої схеми. Такий вибір обумовлений наступним. По-перше, тришарова схема лінеаризує різницеву задачу, на відміну від неявної двошарової різницевої схеми, яка приводить до розв'язування системи нелінійних рівнянь. По-друге, чисто неявні схеми зберігають дисипативні властивості диференціальних рівнянь, що забезпечує достатню швидкість розповсюдження впливу граничних умов в середину області.

В роботі [70] показано ефективність другого типу алгоритмів для розрахунків при послідовному обчисленні. Але його структура не дозволяє достатнього розпаралелення.

Останнім часом з'явилися роботи, пов'язані з побудовою розв'язку систем рівнянь Нав'є-Стокса на багатопроцесорних системах. Зокрема, в роботі [19] запропоновано ітераційний метод знаходження стаціонарного розв'язку для такої системи, а приклад моделювання вихрових потоків в'язкої рідини наведено в роботі [20].

В даному підрозділі для чисельного моделювання процесів динаміки в'язкої нестислої рідини запропоново модифікацію першого типу алгоритмів.

Вона володає такими особливостями:

– дозволяєна кожному часовому кроці одержувати чисельний розв'язок задачі не розв'язуючи систем різницевих рівнянь;
– забеспечує високу точність наближення розв'язку;
– має можливість глибокого розпаралелення скінчено-різницевого алгоритму.

При подальшому розгляді задачі (3.1)-(3.3), за відомою схемою [46,149], перейдемо до еквівалентної задачі (3.1), (3.2) та рівняння Пуассона для тиску з правою частиною, нелінійно залежною від проекцій вектора швидкості. Після диференціювання рівняння (3.1) по x, а рівняння (3.2) – по y та додавання результатів, одержуємо:

$$-\frac{\partial}{\partial t}D+\upsilon\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial^2\ u^2}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\ uv}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\ v^2}{\partial y^2}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right), \qquad (3.24)$$

де $\qquad D \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

В області $G = \Omega \times \; 0 < t < T$, $\Omega = \; x, y \; : 0 < x < 1, \, 0 < y < 1$ введено рівномірну сітку:

$$\omega_{\tau h} = \left\{ x_{1,i}, x_{2,j}, t_n : x_{1,i} = ih_1, x_{2,j} = jh_2, t_n = n\tau; i = \overline{1, m_1}, \, j = \overline{1, m_2}, h_k = \frac{1}{m_k}, \; k = 1, 2 \;, \tau > 0 \right\},$$

сіткові функції $\varphi_{ij}^{k} = \varphi \; x_i, y_j, t_k$ і оператори різницевих похідних другого порядку апроксимації. Розв’язок різницевої задачі будуємо за двокроково-різницевою схемою, описаною в п. 2.1.

У відповідності до поставленої задачі (3.1)-(3.3), оператор $D \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ рівний нулю у довільний момент часу і у довільній точці області. Але, як показано в [46], наявність обчислювальної похибки у значеннях u та v, знайдених на попередньому кроці, вимагає врахування в різницевій схемі похибки (тобто відхилення від нуля), одержаної при обчисленні D_{ij}^{2n}. В той же час, значення D_{ij}^{2n+2} в момент обчислення є ще незбуреними і його потрібно покладати рівним нулю. Це приводить до скінченно-різницевого рівняння:

$$\frac{P_{i-1j}^{2n+1} - 2P_{ij}^{2n+1} + P_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2} + \frac{P_{ij-1}^{2n+1} - 2P_{ij}^{2n+1} + P_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2} = \rho S_{ij}^{2n}, \; i = \overline{1, m_1}, \; j = \overline{1, m_2}, \tag{3.25}$$

де $\qquad S_{ij}^{2n} = \upsilon \Delta D_{ij}^{2n} + U_1^{2n} + U_2^{2n} + U_3^{2n} + D_{ij}^{2n} / \tau, \qquad D_{ij}^{2n} = \frac{u_{i+1j}^{2n} - u_{i-1j}^{2n}}{2h_1} + \frac{v_{ij+1}^{2n} - v_{ij-1}^{2n}}{2h_2},$

$$U_1 = \frac{ {u_{i+1j}^{2n}}^{2} - 2 \, {u_{ij}^{2n}}^{2} + \; {u_{i-1j}^{2n}}^{2} }{h_1^2}, \qquad U_2 = \frac{ {v_{ij+1}^{2n}}^{2} - 2 \, {v_{ij}^{2n}}^{2} + \; {v_{ij-1}^{2n}}^{2} }{h_2^2},$$

$$U_3 = \frac{u_{i+1j+1}^{2n} v_{i+1j+1}^{2n} - u_{i+1j-1}^{2n} v_{i+1j1}^{2n} - u_{i-1j+1}^{2n} v_{i-1j+1}^{2n} + u_{i-1j-1}^{2n} v_{i-1j-1}^{2n}}{2h_1 h_2},$$

$$\Delta D_{ij}^{2n} = \frac{D_{i+1j}^{2n} - 2D_{ij}^{2n} + D_{i-1j}^{2n}}{h_1^2} + \frac{D_{ij+1}^{2n} - 2D_{ij}^{2n} + D_{ij-1}^{2n}}{h_2^2};$$

яке апроксимує (3.24) з похибкою $O \; \tau + h_1^2 + h_2^2$.

Рівняння (3.25) будемо розв'язувати за допомогою ітераційного ДС-алгоритму, запропонованого нами в [27] і описаного в п. 2.1.

Перейдемо до побудови розв'язку системи рівнянь (3.1), (3.2).

Сіткову область $\omega_{\tau h}$ розділимо на дві допоміжні підобласті $\Omega_{\tau h}^{1,n}$ й $\Omega_{\tau h}^{2,n}$. До першої під області віднесемо точки x_{1i}, x_{2j}, t_n такі, що сума індексів $s = i + j + n$ – парна, а інші точки – до другої підобласті. За часовий крок 2τ приймаємо дві складові: непарний півкрок $2n+1$ і парний $2n+2$.

Рівняння збереження кількості руху (3.1) та (3.2) апроксимуємо за схемою, прийнятою в ДС-алгоритмах.

На кроці $2n+1$ $n = 1,2,3...$ спочатку в усіх точках множини $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ для знаходження допоміжних значень функцій u_{ij}^{2n+1} та v_{ij}^{2n+1} використовуємо явні схеми:

$$\frac{u_{ij}^{2n+1} - u_{ij}^{2n}}{\tau} = -\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2 - \left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_1} - \frac{u_{ij+1}^{2n} v_{ij+1}^{2n} - u_{ij-1}^{2n} v_{ij-1}^{2n}}{2h_2} - \frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1} - P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1} + \upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n} - 2u_{ij}^{2n} + u_{i+1j}^{2n}}{h_1^2} + \upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n} - 2u_{ij}^{2n} + u_{ij+1}^{2n}}{h_2^2}, \quad (3.26)$$

$$\frac{v_{ij}^{2n+1} - v_{ij}^{2n}}{\tau} = -\frac{u_{i+1j}^{2n} v_{i+1j}^{2n} - u_{i-1j}^{2n} v_{i-1j}^{2n}}{2h_1} - \frac{\left(v_{ij+1}^{2n}\right)^2 - \left(v_{ij-1}^{2n}\right)^2}{2h_2} - \frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1} - P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2} + \upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n} - 2v_{ij}^{2n} + v_{i+1j}^{2n}}{h_1^2} + \upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n} - 2v_{ij}^{2n} + v_{ij+1}^{2n}}{h_2^2}, \quad (3.27)$$

а на множині точок $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$ – неявні:

$$\frac{u_{ij}^{2n+1} - u_{ij}^{2n}}{\tau} = -\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2 - \left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_1} - \frac{u_{ij+1}^{2n+1} v_{ij+1}^{2n+1} - u_{ij-1}^{2n+1} v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2} - \frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1} - P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1} + \upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+1} - 2u_{ij}^{2n+1} + u_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2} + \upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+1} - 2u_{ij}^{2n+1} + u_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2}, \quad (3.28)$$

$$\frac{v_{ij}^{2n+1}-v_{ij}^{2n}}{\tau}=-\frac{u_{i+1j}^{2n+1}v_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}v_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}-\frac{\left(v_{ij+1}^{2n+1}\right)^2-\left(v_{ij-1}^{2n+1}\right)^2}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+$$
$$+\upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2}. \tag{3.29}$$

Розв’язок задачі на кроці $2n+2$ знаходимо спочатку в усіх точках $\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}$ за явними формулами:

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_1}-\frac{u_{ij+1}^{2n+1}v_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+$$
$$+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2}, \tag{3.30}$$

$$\frac{v_{ij}^{2n+2}-v_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{u_{i+1j}^{2n+1}v_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}v_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}-\frac{\left(v_{ij+1}^{2n+1}\right)^2-\left(v_{ij-1}^{2n+1}\right)^2}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+$$
$$+\upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2}, \tag{3.31}$$

після чого в точках $\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}$:

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+2}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+2}\right)^2}{2h_1}-\frac{u_{ij+1}^{2n+2}v_{ij+1}^{2n+2}-u_{ij-1}^{2n+2}v_{ij-1}^{2n+2}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+$$
$$+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{i+1j}^{2n+2}}{h_1^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{ij+1}^{2n+2}}{h_2^2}, \tag{3.32}$$

$$\frac{v_{ij}^{2n+2}-v_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{u_{i+1j}^{2n+2}v_{i+1j}^{2n+2}-u_{i-1j}^{2n+2}v_{i-1j}^{2n+2}}{2h_1}-\frac{\left(v_{ij+1}^{2n+2}\right)^2-\left(v_{ij-1}^{2n+2}\right)^2}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+$$
$$+\upsilon\frac{v_{i-1j}^{2n+2}-2v_{ij}^{2n+2}+v_{i+1j}^{2n+2}}{h_1^2}+\upsilon\frac{v_{ij-1}^{2n+2}-2v_{ij}^{2n+2}+v_{ij+1}^{2n+2}}{h_2^2}. \tag{3.33}$$

Граничні умови апроксимуються за схемою, запропонованою в п. 2.1.3.

Оскільки в рівняннях (3.26)-(3.33) значення функції тиску P_{ij}^{2n+1} вже визначені з (3.26), а значення u_{ij}^{2n}, v_{ij}^{2n} відомі (обчислені при $n>0$ або відомі при $n=0$), то очевидно, що в точках множини $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ значення u_{ij}^{2n+1} та v_{ij}^{2n+1}

знаходяться явно. Використавши ці значення, явно знайдемо значення u_{ij}^{2n+1} та v_{ij}^{2n+1} на множині $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$. Аналогічно з (3.30), (3.31) та (3.32), (3.33) знаходимо значення u_{ij}^{2n+2} та v_{ij}^{2n+2}.

Проаналізувавши різницеву схему для нестаціонарних рівнянь руху (3.26)-(3.33) та стаціонарного рівняння для тиску (3.25) можна зробити такий висновок: оскільки розв'язок рівняння для тиску знаходяться на непарних часових кроках, а розв'язок рівнянь руху – на парних, то система рівнянь може бути розпаралелена на різних часових кроках. Це дозволяє використати концепцію алгоритмічного паралелізму – розпаралелення за рівняннями системи. Також ефективно на кожному часовому кроці можна провести розпаралелення за декомпозицією структури даних.

3.3. Дисперсійність, дисипативність та консервативність різницевої схеми

Всі алгоритми знаходження наближеного розв'язку мають особливості, які часто проявляються у відмінності поведінки наближеного від поведінки точного розв'язку диференціальної задачі. В різницевих схемах такі особливості приводять до виникнення осциляцій (дисперсійності), підвищення чи пониження в'язкості (дисипативності) та відхилення від виконання закону збереження чи його наслідків на сітковій множині (консервативності).

Пункт 3.3 присвячено вивченню вказаних властивостей для запропонованого вище ДС-алгоритму для системи рівнянь Нав'є-Стокса, записаної в дивергентній формі. Тут за допомогою методу першого диференціального наближення: встановлено порядок асимптотичної сумарної апроксимації алгоритму, наведено оцінку похибки апроксимації розв'язку на грубих сітках, встановлено дисперсійность та дисипативность різницевого алгоритму при побудові чисельного розв'язку, обґрунтовано консервативність алгоритму.

Теорема 3.1. Для задачі (3.1)-(3.3) ДС-алгоритм (3.26)-(3.33) має сумарну похибку апроксимації $O\left(\tau^2+h^2\right)$ і, також, є слабко дисперсійним та слабко дисипативним.

Доведення. Для вставлення дисипативності та дисперсійності наведеного вище алгоритму проведемо аналіз оцінки головного члена похибки апроксимації, скориставшись методом першого диференціального наближення (ПДН).

Розглянемо перше рівняння руху (3.1).

Складемо різницеві рівняння (3.28) та (3.30) в точках множин $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$ та $\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}$ відповідно, отримаємо:

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{2\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_x}-\frac{u_{ij+1}^{2n+1}v_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}+$$
$$+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_x^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{ij+1}^{2n+1}}{h_y^2}, \tag{3.34}$$

Кожен з доданків (3.34) розпишемо в ряд Тейлора в околі точки $(i,j,2n+1)$:

$$u_{ij}^{2n\pm2}=u_{ij}^{2n+1}\pm\tau u_t'+\frac{\tau^2}{2}u_t''\pm\frac{\tau^3}{3}u_t'''+O\left(\tau^4\right),$$

$$u_{i\pm1j}^{2n+1}=u_{ij}^{2n+1}\pm h_x u_x'+\frac{h_x^2}{2}u_x''\pm\frac{h_x^3}{3}u_x'''+O\left(h_x^4\right)$$

та підставимо знайдені розвинення в рівняння (3.34), отримаємо:

$$u_t'+\frac{\tau^2}{3!}u_t'''=-\left[\left(u^2\right)_x'+\frac{h_x^2}{3!}\left(u^2\right)_x'''\right]-\left[\left(uv\right)_y'+\frac{h_y^2}{3!}\left(uv\right)_y'''\right]-\frac{1}{\rho}P_x'+$$
$$+\upsilon\left[u_x''+\frac{h_x^2}{12}u_x^{IV}\right]+\upsilon\left[u_y''+\frac{h_y^2}{12}u_y^{IV}\right],$$

Виділимо в отриманому виразі окремо рівняння (3.1) та залишок:

$$u_t'+\frac{1}{\rho}P_x'-\upsilon\left(u_x''+u_y''\right)+\left(u^2\right)_x'+\left(uv\right)_y'=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}-\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial\left(u\right)^2}{\partial x}+\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial y}=$$

$$=-\frac{\tau^2}{3!}u_t'''-\frac{h_x^2}{3!}\left(u^2\right)_x'''-\frac{h_y^2}{3!}\left(uv\right)_y'''+\upsilon\left(\frac{h_x^2}{12}u_x{}^{IV}+\frac{h_y^2}{12}u_y{}^{IV}\right).$$

Таким чином, головний член похибки на кроці $2n+1$ буде мати вигляд:

$$R_1\left(u\right)=-\frac{\tau^2}{3!}u_t'''-\frac{h_x^2}{3!}\left(u^2\right)_x'''-\frac{h_y^2}{3!}\left(uv\right)_y'''+\upsilon\frac{h_x^2}{12}u_x^{IV}+\upsilon\frac{h_y^2}{12}u_y^{IV}. \tag{3.35}$$

Присутність в головному члені похибки 3-х похідних вказує на дисперсійність різницевого розв'язку, а 4-х – на його дисипативність. Але множники h_x^2 та h_y^2 вказують, що ці характеристики мають слабкий вплив на розрахунковий алгоритм.

Тепер складемо рівняння (3.26) та (3.31):

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{ij}^{2n}}{\tau}+\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_x}-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+2}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+2}\right)^2}{2h_x}-\\
&-\frac{u_{ij+1}^{2n}v_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}v_{ij-1}^{2n}}{2h_y}-\frac{u_{ij+1}^{2n+2}v_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n+2}v_{ij-1}^{2n}}{2h_y}-\frac{2}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}+\\
&+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{i+1j}^{2n}}{h_x^2}+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{i+1j}^{2n+2}}{h_x^2}+\\
&+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{ij+1}^{2n}}{h_y^2}+\upsilon\frac{u_{ij-1}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{ij+1}^{2n+2}}{h_y^2}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

В даному випадку розвинення в ряд Тейлора відбувається в два етапи. Спочатку скористаємося розвиненням за просторовими змінними відносно точок $(i,j,2n)$ та $(i,j,2n+2)$

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{\tau}=-\left.\left(\frac{\partial\left(u\right)^2}{\partial x}+\frac{2h_x^2}{3!}\frac{\partial^3\left(u\right)^2}{\partial x^3}\right)\right|_{ij}^{2n}-\left.\left(\frac{\partial\left(u\right)^2}{\partial x}+\frac{2h_x^2}{3!}\frac{\partial^3\left(u\right)^2}{\partial x^3}\right)\right|_{ij}^{2n+2}+O\left(h_x^3\right)-$$

$$-\left.\left(\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{2h_y^2}{3!}\frac{\partial^3 uv}{\partial y^3}\right)\right|_{ij}^{2n}-\left.\left(\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{2h_y^2}{3!}\frac{\partial^3 uv}{\partial y^3}\right)\right|_{ij}^{2n+2}+O\left(h_y^3\right)+$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2h_x^2}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{2h_y^2}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)\Bigg|_{ij}^{2n}+$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2h_x^2}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{2h_y^2}{4!}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)\Bigg|_{ij}^{2n+2}+O\left(h_x^2+h_y^2\right)-$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{2h_x^2}{3!}\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}\right)\Bigg|_{ij}^{2n+1}+O\left(h_x^3\right),$$

а потім за часом відносно точки $(i,j,2n+1)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\tau^2}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)\Bigg|_{ij}^{2n+1}+O\left(\tau^3\right)=-\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x}\Bigg|_{ij}^{2n+1}-\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial y}\Bigg|_{ij}^{2n+1}+\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{ij}^{2n+1}-$$

$$-\frac{\tau^3}{3!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial y}+\frac{2h_x^2}{3!}\frac{\partial^3\left(u^2\right)}{\partial x^3}+\frac{2h_y^2}{3!}\frac{\partial^3\left(uv\right)}{\partial y^3}-\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-2h_y^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)\Bigg|_{ij}^{2n+1}-$$

$$-\frac{\partial P_{ij}^{2n+1}}{\partial x}+\frac{h_x^2}{3!}\frac{\partial^3 P_{ij}^{2n+1}}{\partial x^3}.$$

Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial y}-\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial P}{\partial x}=0$$

та

$$\frac{1}{3!}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial y}-\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right)=-\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3},$$

то

$$\begin{aligned}R_2\left(u\right)&=-\frac{\tau^2}{3}u_t'''+\tau^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\right]-\frac{h_x^2}{3}\left(u^2\right)_x'''-\\&-\frac{h_y^2}{3}\left(uv\right)_y'''+\upsilon\left(\frac{h_x^2}{6}u_x^{IV}+\frac{h_y^2}{6}u_y^{IV}\right)\end{aligned}\qquad(3.37)$$

буде головним членом похибки цієї пари різницевих рівнянь.

Перейдемо до дослідження рівняння руху (3.2). Провівши аналогічні розрахунки, отримаємо головні члени похибок $R_1(v)$ та $R_2(v)$, відповідні для складених формул (3.29) та (3.31), а також для (3.27) та (3.33). Вони мають вигляд та зміст, аналогічний до (3.35) та (3.37).

Тепер проведемо дослідження впливу головних членів похибки на розв'язок. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial x}$ та $\frac{\partial P}{\partial y}$ визначені на попередньому кроці з рівняння (3.25) з достатньою точністю, то їх вважаємо відомими функціями. Це дозволяє систему (3.1)-(3.3) переписати у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial\ u^{\ 2}}{\partial x}+\frac{\partial\ uv}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\equiv f_1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial\ uv}{\partial x}+\frac{\partial\ v^{\ 2}}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\equiv f_2\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Така задача поставлена коректно, і як відзначено в п. 3.1.2 в двовимірному випадку розв'язок цієї задачі в L_2 єдиний для всіх правих частин із L_2 і початкових значень з деякого гільбертового простору H. Крім того, цей розв'язок майже всюди рівний деякій неперервній функції з часового відрізку $0,T$ в просторі H і $\vec{u}\ t\ \to \vec{u}_0$ в H при $t\to 0$.

Отже, доданок $\tau^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial^2 t}$ в $R_2\ u$ можна вважати похибкою обчислення f_1. Аналогічний висновок робимо для f_2.

Доданки, які містять треті просторові похідні, вказують дисперсійні властивості алгоритму, а відповідні четверті похідні – на дисипативні. Множники h_x^2 та h_y^2 при цих доданках вказують на слабку дисипативність та слабку дисперсійність.

Даний різницевий алгоритм реалізується в два кроки, і хоча на кожному кроці похибка є величиною $O\ \tau+h^2$, проте сумарна апроксимація для розв’язку буде $O\ \tau^2+h^2$.

Теорему доведено.

Для того, щоб показати, що різницева схема, записана на грубих сітках (кроки h_x, h_y та τ не прямують до нуля) адекватна фізичному процесу, потрібно: перейти від диференціального рівняння до інтегрального закону збереження, побудувати відповідний йому аналог різницевого рівняння на сітковій множині та порівняти їх. Якщо ці вирази мають один і той же фізичний зміст (закон збереження або його наслідок), то кажуть, що різницева схема буде консервативною.

Оскільки консервативність різницевого рівняння Пуассона (3.25) досліджена [57], то нам достатньо дослідити консервативність ДС-алгоритмів (3.26)-(3.33).

Інтегральний наслідок рівнянь кількості руху (3.1) та (3.2), тобто рівняння балансу, отримаємо проінтегрувавши рівняння (3.1) та (3.2) по паралелепіпеду зі сторонами $\Delta x,\ \Delta y$, а потім за часом по проміжку Δt:

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial u}{\partial t}dxdydt=-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x}dxdydt-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial\left(uv\right)}{\partial y}dxdydt+$$

$$+\upsilon\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdydt+\upsilon\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dxdydt-\frac{1}{\rho}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\partial P}{\partial x}dxdydt.$$

Або, після інтегрування одержимо балансне рівняння:

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left(u\left(x,y,t_0+\Delta t\right)-u\left(x,y,t_0\right)\right)dxdy=$$

$$=-\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left(u^2\left(x_0+\Delta x,y,t\right)-u^2\left(x_0,y,t\right)\right)dydt-$$

$$-\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left(u\left(x,y_0+\Delta y,t\right)v\left(x,y_0+\Delta y,t\right)-u\left(x,y_0,t\right)v\left(x,y_0,t\right)\right)dxdt+ \qquad (3.38)$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left(\upsilon\frac{\partial u\left(x_0+\Delta x,y,t\right)}{\partial x}-\upsilon\frac{\partial u\left(x_0,y,t\right)}{\partial x}\right)dydt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left(\upsilon\frac{\partial u\left(x,y_0+\Delta y,t\right)}{\partial y}-\upsilon\frac{\partial u\left(x,y_0,t\right)}{\partial y}\right)dxdt-$$

$$-\frac{1}{\rho}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}\left(P\left(x_0+\Delta x,y,t\right)-P\left(x_0,y,t\right)\right)dydt.$$

Ліва частина рівняння є величиною, яка показує накопичення u в визначеній області за проміжок часу Δt. Інтеграли зправа визначають накопичення величини u в області за проміжок часу Δt. Тут два перші з них: за рахунок конвективного переносу через ділянки границі області в напрямку осі Ox – перший, та Oy – другий. Третій і четвертий інтеграли – за рахунок дифузійного процесу вздовж напрямків Ox та Oy. Останні два інтеграли показують величину різниці значень тиску на одній з ділянок границь області. Ця різниця тиску і є основою динамічного процесу. Оскільки інших факторів впливу на процес в даному разі не існує, то рівність правої і лівої частини (3.38) є рівнянням балансу процесу (наслідок закону збереження).

Теорема 3.2. Схема ДС-алгоритму (3.26)-(3.33) є консервативною.

Доведення. Виходячи з означення консервативності покажемо, що для нашого різницевого ДС-алгоритму виконується інтегральні закони збереження (наслідок другого закону Ньютону), які притаманні для рівнянь (3.1) та (3.2).

Проміжки $x_0, x_0+\Delta x$, $y_0, y_0+\Delta y$, $t_0, t_0+\Delta t$ розіб'ємо на M_1, M_2 та N частин довжини h_x, h_y та τ так, що $\Delta x = M_1 h_x$, $\Delta y = M_2 h_y$, $\Delta t = N\tau$ $t_0 = 0,\ x_0 = y_0 = 0$.

Спочатку розглянемо рівняння (3.1) та відповідні різницеві рівняння (3.26), (3.28), (3.30), (3.32). Складемо (3.28) з (3.30) та (3.26) з (3.32):

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{2\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_x}-\frac{u_{ij+1}^{2n+1}v_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}+$$
$$+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_x^2}+\upsilon\frac{u_{ij+1}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{ij-1}^{2n+1}}{h_y^2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}, \tag{3.39}$$

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_x}-\frac{u_{ij+1}^{2n}v_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}v_{ij-1}^{2n}}{2h_y}-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+2}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+2}\right)^2}{2h_x}-$$
$$-\frac{u_{ij+1}^{2n+2}v_{ij+1}^{2n+2}-u_{ij-1}^{2n+2}v_{ij-1}^{2n+2}}{2h_y}+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{i+1j}^{2n}}{h_x^2}+\upsilon\frac{u_{ij+1}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}+ \tag{3.40}$$

$$+\upsilon\frac{u_{i-1j}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{i+1j}^{2n+2}}{h_x^2}+\upsilon\frac{u_{ij+1}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{ij-1}^{2n+2}}{h_y^2}-\frac{2}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}.$$

Запишемо різницеві рівняння у вигляді:

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{2\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+1}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+1}\right)^2}{2h_x}-\frac{v_{ij+1}^{2n+1}u_{ij+1}^{2n+1}-v_{ij-1}^{2n+1}u_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}+$$

$$+\frac{\upsilon}{h_x}\left[\frac{u_{i+1j}^{2n+1}-u_{ij}^{2n+1}}{h_x}-\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}}{h_x}\right]+\frac{\upsilon}{h_y}\left[\frac{u_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij}^{2n+1}}{h_y}-\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}}{h_y}\right]$$

та

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n}}{\tau}=-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{2h_x}-\frac{v_{ij+1}^{2n}u_{ij+1}^{2n}-v_{ij-1}^{2n}u_{ij-1}^{2n}}{2h_y}-\frac{2}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}+$$

$$+\frac{\upsilon}{h_x}\left[\frac{u_{i+1j}^{2n}-u_{ij}^{2n}}{h_x}-\frac{u_{ij}^{2n}-u_{i-1j}^{2n}}{h_x}\right]+\frac{\upsilon}{h_y}\left[\frac{u_{ij+1}^{2n}-u_{ij}^{2n}}{h_y}-\frac{u_{ij}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}}{h_y}\right]-$$

$$-\frac{\left(u_{i+1j}^{2n+2}\right)^2-\left(u_{i-1j}^{2n+2}\right)^2}{2h_x}-\frac{v_{ij+1}^{2n+2}u_{ij+1}^{2n+2}-v_{ij-1}^{2n+2}u_{ij-1}^{2n+2}}{2h_y}+$$

$$+\frac{\upsilon}{h_x}\left[\frac{u_{i+1j}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+2}}{h_x}-\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{i-1j}^{2n+2}}{h_x}\right]+\frac{\upsilon}{h_y}\left[\frac{u_{ij+1}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+2}}{h_y}-\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij-1}^{2n+2}}{h_y}\right].$$

Помножимо їх на $2\tau\cdot 2h_x\cdot 2h_y$, підсумуємо від 1 до $M_1-1,\ M_2-1, N-2$ по всім індексам i,j,n множин $\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}$ та $\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}$ відповідно. Після скорочення проміжних доданків одержимо інтегральні суми, які відповідають інтегралам, одержаним в балансному рівнянні (3.38).

$$\sum_{i=0}^{M_1}\sum_{j=0}^{M_2}\left(u_{ij}^{2N+2\ \tau}-u_{ij}^{0}\right)=-\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{M_2}\left(P_{M_1+1j}^{2k+1}-P_{-1j}^{2k+1}\right)-$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{M_2}\left(\left(u_{M_1+1j}^{2k+1}\right)^2-\left(u_{-1j}^{2k+1}\right)^2\right)+\nu\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{M_2}\left(\frac{u_{M_1+1j}^{2k+1}-u_{M_1-1j}^{2k+1}}{h_x}-\frac{u_{0j}^{2k+1}-u_{-1j}^{2k+1}}{h_x}\right)-$$

$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{M_1}\left(\left(u_{iM_2+1}^{2k+1}\right)^2-\left(u_{i-1}^{2k+1}\right)^2\right)+\nu\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{M_1}\left(\frac{u_{iM_2+1}^{2k+1}-u_{iM_2-1}^{2k+1}}{h_y}-\frac{u_{i0}^{2k+1}-u_{i-1}^{2k+1}}{h_y}\right).$$

Отже, одержана рівність виражає інтегральний закон збереження на сітці , а різницева схема (3.26), (3.28), (3.30), (3.32) є консервативною.

Аналогічно встановлюється консервативність різницевого алгоритму для рівняння (3.2).

Таким чином, схема ДС-алгоритму (3.26)-(3.33) є консервативною.

Теорему доведено.

Наведені тереми свідчать про те, що розроблений нами в п. 3.2 різницевий алгоритм (3.26)-(3.33) розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса є відповідним диференціальній постановці задачі дисертаційного дослідження. А структура побудови свідчить про можливість його розпаралелення за двома з чотирьох концепцій алгоритмічного паралелізму (розпаралелення за рівняннями системи та за декомпозицією даних) та можливість ефективно проводити розрахунки на багатопроцесорних системах.

3.4. Висновки

В цьому розділі наведено обґрунтування чисельного алгоритму, ефективного при моделюванні процесу динаміки в'язкої нестислої рідини, записаної у вигляді системи рівнянь Нав'є-Стокса, на багатопроцесорних системах:

– зроблено короткий аналіз основних підходів до побудови чисельного розв'язку та наведено основні наукові факти, які підтверджують існування та єдність розв'язку дисертаційної задачі;
– розроблено на основі ДС-алгоритму економічну схему знаходження розв'язку поставленої задачі, яка дозволяє обчислювати характеристики процесу, не розв'язуючи на кожному часовому кроці великої системи алгебраїчних рівнянь;
– доведено, що алгоритм сумарно на двох кроках апроксимує поставлену задачу з похибкою $O\left(\tau^2+h^2\right)$;
– за допомогою методу першого диференціального наближення

встановлено, що присутні дисперсійна та дисипативна складові похибки мають множником величину порядку h^2 і не можуть суттєво впливати на точність результату;

– доведено консервативність алгоритму, на що вказує виконання на сітковій множині наслідку інтегрального закону збереження;
– зроблено аналіз можливості ефективного розпаралелення алгоритму.

РОЗДІЛ 4
ДВОКРОКОВО-СИМЕТРИЗОВАНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА. ЕФЕКТИВНІСТЬ ЗАСТОСУВАННЯ НА БАГАТОПРОЦЕСОРНИХ КОМПЛЕКСАХ

В розділі 3 побудовано та обґрунтовано загальний розв'язок системи рівнянь Нав'є-Стокса за допомогою ДС-алгоритму. А також показано, що система рівнянь Нав'є-Стокса, записана у не дивергентній формі

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}; \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\upsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}; \tag{4.2}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}D+\upsilon\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial^2\ u^2}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\ uv}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\ v^2}{\partial y^2}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right), \tag{4.3}$$

де $D\equiv\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$,

є еквівалентною до дивергентного запису системи рівнянь Нав'є-Стокса (3.1)-(3.3).

Оскільки ДС-алгоритм є двокроковим, а система рівнянь (4.1)-(4.3) складається з двох рівнянь параболічного типу (4.1), (4.2) та еліптичного рівняння (4.3), то ми можемо розв'язок двох перших рівнянь знаходити на парних кроках, а розв'язок еліптичного рівняння ітераційним шляхом – на непарних. Це дозволяє нам проводити на розщеплення системи трьох рівнянь на два незалежні блоки, згідно з однією з концепцій алгоритмічного паралелізму – розпаралелення за рівняннями: для визначення тиску та проекцій вектора швидкості.

В даному розділі 4 запропоновано алгоритм реалізації розроблених методів, який ефективний при використанні на багатопроцесорних комплексах з MIMD-архітектурою.

Зокрема, запропоновано реалізації на багатопроцесорних комплексах: в п. 4.1 – ітераційного алгоритму розв'язку рівняння Пуассона, а у п. 4.2 – узагальненої схеми ДС-алгоритму для знаходження розв'язку системи рівнянь Нав'є-Стокса та принципи її ефективного використання. Ці алгоритми дозволяють реалізувати більш глибоке розпаралелення задачі за однією з концепцій алгоритмічного паралелізму – за декомпозицією структури даних.

В п. 4.3 проведено серію тестових обчислень та зроблено аналіз ефективності запропонованої схеми розпаралелення.

4.1. Розпаралелений ДС-алгоритм для побудови розв'язку системи рівнянь Нав'є-Стокса

Досвід використання обчислювальних алгоритмів показує, що досить часто навіть високоефективні на послідовних обчислювальних системах чисельні методи виявляються мало або зовсім не ефективними на багатопроцесорних [120]. В роботі [23] запропоновано ДС-алгоритм для розв'язування початково-крайових задач для систем Нав'є-Стокса, який добре зарекомендував себе при одно поточному обчисленні. Дослідження обчислювальних характеристик алгоритму висвітлено в нашій роботі [25] та пунктах 3.2, 3.3.

В підрозділах 4.1 та 4.2 основну увагу приділено аналізу ефективності запропонованих алгоритмів при реалізації на багатопроцесорних системах.

Як відомо [120,123], основною характеристикою ефективності паралельних процесів $E_p = \frac{S_p}{p}$ є його прискорення по відношенню до однопроцесорного режиму $S_p = \frac{T_{посл}}{T_{p\ пар}}$. Де $T_{посл}$ – час виконання алгоритму на послідовному комп'ютері, $T_{p\ пар}$ – час виконання на p паралельних.

Це досягається рівномірністю та завантаженістю процесорів, а також мінімізацією комунікаційних обмінів. Ефективність алгоритму також визначають чотири концепції алгоритмічного паралелізму:

1) розпаралелення системи за рівняннями,

2) розпаралелення системи за просторовими напрямками,

3) розпаралелення системи за декомпозицією структури даних,

4) розпаралелення системи за фізичними процесами.

В п. 4.1, 4.2 побудовано алгоритм моделювання динаміки в'язкої нестислої рідини, в якому реалізовано першу та третю концепції.

4.1.1. ДС-алгоритм для побудови розв'язку рівняння Пуассона

Розроблений метод побудови ітераційного ДС-алгоритму, який наведено в п. 2.1, використаємо для знаходження розв'язку краєвої задачі для рівняння Пуассона. Вводимо допоміжну циліндричну область $\Omega = G \times \left[0, N\tau\right]$, де $G = \left\{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\right\}$ – область визначення функції тиску, а $\left[0, N\tau\right]$ – проміжок зміни значень ітераційного параметра τ. Покриваємо цю область рівномірною сіткою

$$\omega_{i,j}^{n} = \left\{ x_i, y_j, t_n : x_i = x_0 + ih_x, y_j = y_0 + jh_y, t_n = n\tau; i = \overline{1, m_x}; j = \overline{1, m_y}; n > 0 \right\},$$

яку розбиваємо на дві сіткові підобласті: $\Omega_{\tau h}^{1,n}$, де індекси точок задовольняють умову, що $i + j + n$ – парне число, та $\Omega_{\tau h}^{2,n}$, куди входить решта точок. На цих областях запишемо рівняння (2.5)-(2.8), у яких у відповідності до різницевого рівняння (3.25), записаного в скалярному вигляді, оператор A_h замінимо різницевим оператором Лапласа, а праву частину φ_{ij} функцією

$$S_{ij}^{2n} = \upsilon \Delta D_{ij}^{2n} + U_1^{2n} + U_2^{2n} + U_3^{2n} + D_{ij}^{2n} / \tau, \qquad D_{ij}^{2n} = \frac{u_{i+1j}^{2n} - u_{i-1j}^{2n}}{2h_1} + \frac{v_{ij+1}^{2n} - v_{ij-1}^{2n}}{2h_2},$$

$$U_1 = \frac{\left(u_{i+1j}^{2n}\right)^2 - 2\left(u_{ij}^{2n}\right)^2 + \left(u_{i-1j}^{2n}\right)^2}{h_1^2}, \qquad U_2 = \frac{\left(v_{ij+1}^{2n}\right)^2 - 2\left(v_{ij}^{2n}\right)^2 + \left(v_{ij-1}^{2n}\right)^2}{h_2^2},$$

$$U_3 = \frac{u_{i+1j+1}^{2n} v_{i+1j+1}^{2n} - u_{i+1j-1}^{2n} v_{i+1j1}^{2n} - u_{i-1j+1}^{2n} v_{i-1j+1}^{2n} + u_{i-1j-1}^{2n} v_{i-1j-1}^{2n}}{2h_1 h_2},$$

$$\Delta D_{ij}^{2n}=\frac{D_{i+1j}^{2n}-2D_{ij}^{2n}+D_{i-1j}^{2n}}{h_1^2}+\frac{D_{ij+1}^{2n}-2D_{ij}^{2n}+D_{ij-1}^{2n}}{h_2^2}.$$

Далі, після простих перетворень одержимо, що на ітераційному кроці $2n+1$ в усіх точках множини $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ значення тиску обчислюється за явною формулою

$$P_{ij}^{2n+1}=P_{ij}^{2n}+\frac{\tau}{\rho}\left(\frac{P_{i+1j}^{2n}-2P_{ij}^{2n}+P_{i-1j}^{2n}}{h_x^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{P_{ij+1}^{2n}-2P_{ij}^{2n}+P_{ij-1}^{2n}}{h_y^2}\right)+\tau S_{ij}^{2n}, \tag{4.4}$$

а потім проводяться обчислення значень тиску в усіх точках $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$

$$P_{ij}^{2n+1}=\left[P_{ij}^{2n}+\frac{\tau}{\rho}\left(\frac{P_{i+1j}^{2n+1}+P_{i-1j}^{2n+1}}{h_x^2}+\frac{P_{ij+1}^{2n+1}+P_{ij-1}^{2n+1}}{h_y^2}\right)\right]\times$$
$$\times\left(1+\frac{2\tau}{\rho h_x^2}+\frac{2\tau}{\rho h_y^2}\right)^{-1}. \tag{4.5}$$

На кроці $2n+2$ для $\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}$ та $\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}$ маємо аналогічні формули

$$P_{ij}^{2n+2}=P_{ij}^{2n+1}+\frac{\tau}{\rho}\left(\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-2P_{ij}^{2n+1}+P_{i-1j}^{2n+1}}{h_x^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-2P_{ij}^{2n+1}+P_{ij-1}^{2n+1}}{h_y^2}\right)+\tau S_{ij}^{2n}, \tag{4.6}$$

$$P_{ij}^{2n+2}=\left[P_{ij}^{2n+1}+\frac{\tau}{\rho}\left(\frac{P_{i+1j}^{2n+2}+P_{i-1j}^{2n+2}}{h_x^2}+\frac{P_{ij+1}^{2n+2}+P_{ij-1}^{2n+2}}{h_y^2}\right)\right]\times$$
$$\times\left(1+\frac{2\tau}{\rho h_x^2}+\frac{2\tau}{\rho h_y^2}\right)^{-1}. \tag{4.7}$$

В цих формулах τ є релаксаційним параметром, а n вказує на номер ітераційного кроку.

Однією з умов припинення ітераційного процесу є виконання нерівності:

$$\left\|P^{2n+2}-P^{2n}\right\|<\varepsilon, \tag{4.8}$$

де ε – задана точність знаходження розв'язку задачі.

Іншою умовою є оцінка відносної похибки

$$\left\| \frac{P^{2n+2} - P^{2n}}{P^{2n+2}} \right\| < \varepsilon_1 . \qquad (4.9)$$

Більш точною, але й складнішою в реалізації, є оцінка абсолютної величини нев’язки розв’язку

$$\delta = \left\| AP^{2n+2} - f \right\| < \varepsilon$$

або її відносне значення

$$\left\| \frac{AP^{2n+2} - f}{P^{2n+2}} \right\| < \varepsilon_1 .$$

Норму в цих формулах розуміємо як рівномірну.

Оскільки різницевий оператор Лапласа задовольняє доведену у п. 2.1 теорему 2.1, то ітераційний процес (4.4)-(4.7) буде збіжним при довільному початковому наближенні.

В кожній внутрішній точці множини $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ значення функції тиску визначається за явною формулою (4.4). Знайдені на $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ значення дозволяють явно обчислювати розв'язок в кожній точці множини $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$ за формально неявною різницевою схемою (4.5).

Аналогічні дії на $2n+2$ ітераційному кроці виконуються за формулами (4.6), (4.7).

У граничних і приграничних вузлах сіткової області обчислення функції P_{ij}^{2n+1} проводяться інакшим чином. Якщо на границі чи її ділянці задано умови першого роду, то у приграничних точках розв’язок знаходиться за загальною схемою. Якщо на границі задано умови третього роду, наприклад,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + cP = d$$

(при $d = 0$ – другого), то обчислення значень розв’язку проводимо за формулами (2.10), (2.11) або (2.12) побудованими в п. 2.1.

Наведені вище факти нам дозволяють розпаралелювати схему ітераційного процесу для рівняння Пуассона за декомпозицією структури даних.

4.1.2. Розпаралелення ітераційного алгоритму для рівняння Пуассона

Обчислення функції тиску P реалізовано на багатопроцесорній обчислювальній системі MIMD-архітектури з використанням платформи алгоритмічної мови MPI.

Програмна реалізація ДС-розрахунків на такій обчислювальній системі складається з 5 основних блоків:

Блок A. Підготовка вхідної інформації: встановлення кількості робочих процесорів p, обчислення кроків сітки h_x, h_y, введення розмірів області, введення релаксаційного параметру τ та точності розв’язку ε.

Блок B. Обчислення граничних умов та введення початкового наближення.

Блок C. Обчислення тиску P на багатопроцесорній системі.

Блок D. Оцінка точності наближення розв’язку.

Блок E. Вихід із системи.

Блоки A, B і E є загальними блоками для всього ітераційного алгоритму. Вони виконуються на одному з процесорів p_0. Блоки C та D реалізуються на визначеній кількості з p процесорів. На кожен з цих процесорів подаються відповідні програмні інструкції та масиви даних, одержані за допомогою декомпозиції структури даних. Декомпозицію даних потрібно проводити так, щоб навантаження (розміри масивів даних) на всі процесори було рівномірним.

Наприклад, область Ω є прямокутною, а для проведення процесу розпаралелення (4.4), (4.5) використовується група з p процесорів. Увесь масив даних, який складається з m_x стовпчиків, кожен з яких має m_y елементів розбиваємо на окремі потоки. Ці потоки будуємо так, що перший містить стовпчики від 1 до m_1+1, другий від m_1 до m_2+1, а останній від m_{p-1} до m_x

$m_k - m_{k-1} = const \; \forall \; \overline{k=1,p}$. Вказана в блоці 3 послідовність обчислень дозволяє кожному з p процесорів проводити обчислення тиску у внутрішніх точках своєї області незалежно від інших.

Для проведення наступної ітерації k-му блоку потрібно мати додаткову інформацію про розв'язок в стовпчиках $m_k - 1$ та $m_k + 2$, які належать сусіднім блокам $k-1$ та $k+1$. Оскільки ці стовпчики є внутрішніми для блоків $k-1$ та $k+1$, то їх значення є обчисленими p_{k-1} та p_{k+1} процесорами і можуть бути передані процесору p_k. Тобто, для проведення обчислень в усій області достатньо, щоб кожен з процесорів мав можливість зробити по два обміни інформацією (стовпчиками) з сусідніми. Введення в систему додаткового процесора призводить до нових двох обмінів.

Обчислення за формулами (4.6), (4.7) проводяться аналогічно до попереднього.

Перевагою даного алгоритму розпаралелення є те, що замість, як правило складної ітераційної операції зшивання розв'язків на границі двох сусідніх областей, достатньо провести обмін розв'язками між сусідніми стовпчиками.

Блок D проводить перевірку виконання умови точності ітераційного процесу за формулами (4.8), (4.9).

4.1.3. Обчислення проекцій вектора швидкості

Зупинимося на питаннях побудови ефективної реалізації алгоритму, представленого формулами (3.26)-(3.33) на багатопроцесорних системах.

Як показано в п. 3.2 система рівнянь (3.26)-(3.33) має ту особливість, що функція тиску визначається з рівняння Пуассона на непарних $2n+1$ часових кроках, де права частина рівняння є функцією відомих значень проекції вектора швидкості на кроці $2n$. Система рівнянь (3.26)-(3.33) визначає значення функцій u та v на парних $2n+2$ кроках.

Оскільки алгоритм побудови паралельного процесу для обчислення тиску детально представлено в п. 4.1.2, то в даному пункті ми зупинимося на визначенні компонент вектора швидкості на багатопроцесорних комплексах.

Для побудови різницевого алгоритму з двох можливих форм запису рівнянь руху (дивергентна, недивергентна) оберемо несиметричну недивергентну форму, яка є більш складною при обчисленні.

Тоді систему рівнянь (3.26)-(3.33) запишемо у вигляді: на кроці $2n+1$ спочатку в усіх точках множини $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ для знаходження допоміжних значень функцій u_{ij}^{2n+1} та v_{ij}^{2n+1} використаємо схеми

$$\begin{aligned}\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{ij}^{2n}}{\tau} &= -u_{ij}^{2n+1}\frac{u_{i+1j}^{2n}-u_{i-1j}^{2n}}{2h_1}-v_{ij}^{2n+1}\frac{u_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+\\ &+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{u_{i-1j}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{i+1j}^{2n}}{h_1^2}+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{u_{ij-1}^{2n}-2u_{ij}^{2n}+u_{ij+1}^{2n}}{h_2^2},\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{v_{ij}^{2n+1}-v_{ij}^{2n}}{\tau} &= -u_{ij}^{2n+1}\frac{v_{i+1j}^{2n}-v_{i-1j}^{2n}}{2h_1}-v_{ij}^{2n+1}\frac{v_{ij+1}^{2n}-v_{ij-1}^{2n}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+\\ &+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{v_{i-1j}^{2n}-2v_{ij}^{2n}+v_{i+1j}^{2n}}{h_1^2}+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{v_{ij-1}^{2n}-2v_{ij}^{2n}+v_{ij+1}^{2n}}{h_2^2},\end{aligned} \tag{4.11}$$

а потім в точках $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$:

$$\begin{aligned}\frac{u_{ij}^{2n+1}-u_{ij}^{2n}}{\tau} &= -u_{ij}^{2n+1}\frac{u_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}-v_{ij}^{2n+1}\frac{u_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+\\ &+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{u_{i-1j}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{u_{ij-1}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2},\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{v_{ij}^{2n+1}-v_{ij}^{2n}}{\tau} &= -u_{ij}^{2n+1}\frac{v_{i+1j}^{2n+1}-v_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}-v_{ij}^{2n+1}\frac{v_{ij+1}^{2n+1}-v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+\\ &+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{v_{i-1j}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{v_{ij-1}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Розв’язок задачі на наступному часовому шарі знаходимо спочатку в усіх точках $\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}$ за явними формулами:

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-u_{ij}^{2n+1}\frac{u_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}-v_{ij}^{2n+1}\frac{u_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+$$
$$+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{u_{i-1j}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{u_{ij-1}^{2n+1}-2u_{ij}^{2n+1}+u_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2}, \tag{4.14}$$

$$\frac{v_{ij}^{2n+2}-v_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-u_{ij}^{2n+1}\frac{v_{i+1j}^{2n+1}-v_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}-v_{ij}^{2n+1}\frac{v_{ij+1}^{2n+1}-v_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+$$
$$+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{v_{i-1j}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{i+1j}^{2n+1}}{h_1^2}+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{v_{ij-1}^{2n+1}-2v_{ij}^{2n+1}+v_{ij+1}^{2n+1}}{h_2^2}, \tag{4.15}$$

після чого в точках $\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}$:

$$\frac{u_{ij}^{2n+2}-u_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-u_{ij}^{2n+1}\frac{u_{i+1j}^{2n+2}-u_{i-1j}^{2n+2}}{2h_1}-v_{ij}^{2n+1}\frac{u_{ij+1}^{2n+2}-u_{ij-1}^{2n+2}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_1}+$$
$$+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{u_{i-1j}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{i+1j}^{2n+2}}{h_1^2}+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{u_{ij-1}^{2n+2}-2u_{ij}^{2n+2}+u_{ij+1}^{2n+2}}{h_2^2}, \tag{4.16}$$

$$\frac{v_{ij}^{2n+2}-v_{ij}^{2n+1}}{\tau}=-u_{ij}^{2n+1}\frac{v_{i+1j}^{2n+2}-v_{i-1j}^{2n+2}}{2h_1}-v_{ij}^{2n+1}\frac{v_{ij+1}^{2n+2}-v_{ij-1}^{2n+2}}{2h_2}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_2}+$$
$$+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{v_{i-1j}^{2n+2}-2v_{ij}^{2n+2}+v_{i+1j}^{2n+2}}{h_1^2}+\upsilon_{ij}^{2n+1}\frac{v_{ij-1}^{2n+2}-2v_{ij}^{2n+2}+v_{ij+1}^{2n+2}}{h_2^2}. \tag{4.17}$$

Граничні умови апроксимуємо за схемою, запропонованою в п. 2.1.

Оскільки u_{ij}^{2n}, та v_{ij}^{2n} – відомі, а P_{ij}^{2n+1} вже визначені за алгоритмом, описаним в п. 4.1.1, то легко показати, що в точках множини $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ значення u_{ij}^{2n+1} та v_{ij}^{2n+1} є розв'язками сукупності $\frac{1}{2}m_x m_y$ систем лінійних рівнянь другого порядку.

4.2. Алгоритм побудови розв'язку для системи рівнянь Нав'є-Стокса на багатопроцесорних системах

Програмна реалізація алгоритму побудови розв'язку системи рівнянь динаміки в'язкої нестислої рідини складається з семи блоків.

Блок 1. Введення вхідних даних.

Блок 2. Введення початкових та граничних даних.

Блок 3. Ітераційне обчислення значень тиску P на кроці $(2n+1)$, $n=0,1...$.

Блок 4. Обчислення значень u та v на $(2n+1)$ кроці для сіток $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$ та $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$ (предиктор).

Блок 5. Обчислення значень u та v на $(2n+2)$ кроці для $\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}$ та $\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}$ (розв'язок).

Блок 6. Перевірка умов закінчення розрахунку.

Блок 7. Виведення отриманих даних.

В кожному з цих блоків програмно реалізуємо вказані функції.

Блок 1. Вводимо розміри області a, b; кількість вузлів сітки по x – m_x та по y – m_y; кількість процесорів p та задаємо крок сітки $h_x = \dfrac{a}{m_x}$, $h_y = \dfrac{b}{m_y}$,.τ. Обраховуємо розмір масивів $M = m_x \times m_y$ для запису початкових значень P, u, v.

Блок 2. Вводимо початкові дані u^0, v^0, граничні – для функцій P, u, v та коефіцієнти рівняння.

Блок 3. Ітераційно визначаємо тиск P на кроці $(2n+1)$. Тут процес обчислення проводиться відповідно до блоків А-Е, описаних в п. 4.1.2. Початкове наближення функції P на першому кроці $n=0$ задаємо довільно, але узгоджено з заданими граничними умовами. Різницеве рівняння (3.25) розв'язуємо використовуючи ітераційний процес, запропонований в [24] та в п. 4.1.1. Покладаючи s номером ітерації, а τ_1 ітераційним параметром, обчислення тиску для кожного часового кроку $(2n+1)\tau$ проводимо за формулами:

на границі $P^{2s+1}\big|_{\partial\omega_{\tau h}} = P(x,y,(2n+1)\tau)\big|_{\partial\omega_{\tau h}}$,

на множині $\Omega_{\tau h}^{1,2s+1}$:

$$P_{ij}^{2s+1}=P_{ij}^{2s}\left(1-2\tau_1\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)\right)+\frac{\tau}{h_x^2}\left(P_{i+1j}^{2s}+P_{i-1j}^{2s}\right)+\frac{\tau}{h_y^2}\left(P_{ij+1}^{2s}+P_{ij-1}^{2s}\right)-\tau_1\varphi_{ij}\,, \qquad (4.18)$$

для $\Omega_{\tau h}^{2,2s+1}$:

$$P_{ij}^{2s+1}=\left[1\Big/\left(1+2\tau_1\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)\right)\right]\left[P_{ij}^{2s}+\frac{\tau}{h_x^2}\left(P_{i+1j}^{2s+1}+P_{i-1j}^{2s+1}\right)+\frac{\tau}{h_y^2}\left(P_{ij+1}^{2s+1}+P_{ij-1}^{2s+1}\right)-\tau_1\varphi_{ij}\right]. \qquad (4.19)$$

Далі обчислюємо граничні умови $P^{2s+2}\big|_{\partial\omega_{\tau h}}=P\left(x,y,\left(2n+2\right)\tau\right)\big|_{\partial\omega_{\tau h}}$ і для $\Omega_{\tau h}^{1,2s+2}$:

$$P_{ij}^{2s+2}=P_{ij}^{2s+1}\left(1-2\tau_1\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)\right)+\frac{\tau}{h_x^2}\left(P_{i+1j}^{2s+1}+P_{i-1j}^{2s+1}\right)+\frac{\tau}{h_y^2}\left(P_{ij+1}^{2s+1}+P_{ij-1}^{2s+1}\right)-\tau_1\varphi_{ij}\,, \qquad (4.20)$$

а для $\Omega_{\tau h}^{2,2s+2}$:

$$P_{ij}^{2s+2}=\left[1\Big/\left(1+2\tau_1\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)\right)\right]\left[P_{ij}^{2s+1}+\frac{\tau}{h_x^2}\left(P_{i+1j}^{2s+2}+P_{i-1j}^{2s+2}\right)+\frac{\tau}{h_y^2}\left(P_{ij+1}^{2s+2}+P_{ij-1}^{2s+2}\right)-\tau_1\varphi_{ij}\right]. \qquad (4.21)$$

Якщо виконується умова $\left\|P^{2s+2}-P^{2s+1}\right\|\geq\varepsilon$, збільшуємо значення s і повторюємо обчислення за формулами (4.18)-(4.21), де

$$\varphi_{ij}=2\frac{u_{i+1j}^{2n}-u_{i-1j}^{2n}}{2h_x}\,\frac{v_{ij+1}^{2n}-v_{ij-1}^{2n}}{2h_y}-2\frac{u_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}}{2h_y}\,\frac{v_{i+1j}^{2n}-v_{i-1j}^{2n}}{2h_x}+\psi_{1x}'^{\,2n+1}+\psi_{2y}'^{\,2n+1} \qquad \forall\, s\in N\,.$$

Інакше – завершуємо обчислення, а значення P^{2s+2}, обчислені за формулами (4.20)-(4.21) приймаємо за розв'язок.

Блок 4. Цей блок має аналогічну до попереднього структуру та розпадається на окремі блоки для обчислення u та v. Значення u та v на $(2n+1)$ кроці у відповідності до [23] обчислюємо в точках множини $\Omega_{\tau h}^{1,2n+1}$:

$$u_{ij}^{2n+1}=\frac{a_{12}^{2n}\left(ij\right)F_2^{2n}\left(ij\right)-a_{22}^{2n}\left(ij\right)F_1^{2n}\left(ij\right)}{a_{21}^{2n}\left(ij\right)a_{12}^{2n}\left(ij\right)-a_{11}^{2n}\left(ij\right)a_{22}^{2n}\left(ij\right)}\,, \qquad (4.22)$$

$$v_{ij}^{2n+1}=\frac{a_{21}^{2n}\left(ij\right)F_1^{2n}\left(ij\right)-a_{11}^{2n}\left(ij\right)F_2^{2n}\left(ij\right)}{a_{21}^{2n}\left(ij\right)a_{12}^{2n}\left(ij\right)-a_{11}^{2n}\left(ij\right)a_{22}^{2n}\left(ij\right)}\,, \qquad (4.23)$$

де

$$a_{11}^{2n}\ ij\ =\left(1+\frac{\tau}{2h_x}\ u_{i+1j}^{2n}-u_{i-1j}^{2n}\ \right),\qquad a_{12}^{2n}\ ij\ =\frac{\tau}{2h_y}\ u_{ij+1}^{2n}-u_{ij-1}^{2n}\ ,$$

$$a_{21}^{2n}\ ij\ =\frac{\tau}{2h_x}\ v_{i+1j}^{2n}-v_{i-1j}^{2n}\ ,\qquad a_{22}^{2n}\ ij\ =1+\frac{\tau}{2h_y}\ v_{ij+1}^{2n}-v_{ij-1}^{2n}\ ,$$

$$F_1^{2n}\ ij\ =u_{ij}^{2n}+\tau\left(Lu_{ij}^{2n}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}\right),$$

$$F_2^{2n}\ ij\ =v_{ij}^{2n}+\tau\left(Lv_{ij}^{2n}-\frac{1}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}\right),$$

при
$$Lu_{ij}^{2n}=\nu_{ij}^{2n+1}\left(\frac{u_{i-1j}^{2n}-u_{ij}^{2n}+u_{i+1j}^{2n}}{h_x^2}+\frac{u_{ij-1}^{2n}-u_{ij}^{2n}+u_{ij+1}^{2n}}{h_y^2}\right),$$

а в точках $\Omega_{\tau h}^{2,2n+1}$ –

$$u_{ij}^{2n+1}=\frac{b_{12}^{2n+1}\ ij\ \Phi_2^{2n+1}\ ij\ -b_{22}^{2n+1}\ ij\ \Phi_1^{2n+1}\ ij}{b_{21}^{2n+1}\ ij\ b_{12}^{2n+1}\ ij\ -b_{11}^{2n+1}\ ij\ b_{22}^{2n+1}\ ij},\tag{4.24}$$

$$v_{ij}^{2n+1}=\frac{b_{21}^{2n+1}\ ij\ \Phi_1^{2n+1}\ ij\ -b_{11}^{2n+1}\ ij\ \Phi_2^{2n+1}\ ij}{b_{21}^{2n+1}\ ij\ b_{12}^{2n+1}\ ij\ -b_{11}^{2n+1}\ ij\ b_{22}^{2n+1}\ ij}.\tag{4.25}$$

Тут

$$b_{11}^{2n+1}=1+\frac{\tau}{2h_x}\ u_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}\ +2\tau\upsilon_{ij}^{2n+1}\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right),$$

$$b_{12}^{2n+1}=\frac{\tau}{2h_y}\ u_{ij+1}^{2n+1}-u_{ij-1}^{2n+1}\ ,\qquad b_{21}^{2n+1}=\frac{\tau}{2h_x}\ v_{i+1j}^{2n+1}-v_{i-1j}^{2n+1}\ ,$$

$$b_{22}^{2n+1}=1+\frac{\tau}{2h_y}\ v_{ij+1}^{2n+1}-v_{ij-1}^{2n+1}\ +2\tau\upsilon_{ij}^{2n+1}\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right),$$

$$\Phi_1^{2n+1}=u_{ij}^{2n}+\tau\upsilon_{ij}^{2n+1}\left(\frac{u_{i-1j}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}}{h_x^2}+\frac{u_{ij-1}^{2n+1}+u_{ij+1}^{2n+1}}{h_y^2}\right)-\frac{\tau}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x},$$

$$\Phi_2^{2n+1}=v_{ij}^{2n}+\tau\upsilon_{ij}^{2n+1}\left(\frac{v_{i-1j}^{2n+1}+v_{i+1j}^{2n+1}}{h_x^2}+\frac{v_{ij-1}^{2n+1}+v_{ij+1}^{2n+1}}{h_y^2}\right)-\frac{\tau}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}.$$

Блок 5. На $2n+2$ часовому кроці для обчислення значень кожної з функцій u та v використовуємо свої блоки. На множині $\Omega_{\tau h}^{1,2n+2}$:

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{2n+2} = {} & u_{ij}^{2n+1}\left(1-\frac{\tau}{2h_x}\left(u_{i+1j}^{2n+1}-u_{i-1j}^{2n+1}\right)-2\tau\nu_{ij}^{2n+1}\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)\right)+ \\
& +u_{ij-1}^{2n+1}\left(\frac{\tau v_{ij}^{2n+1}}{2h_y}+\frac{\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{h_y^2}\right)+u_{ij+1}^{2n+1}\left(-\frac{\tau v_{ij}^{2n+1}}{2h_y}+\frac{\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{h_y^2}\right)+ \\
& +\frac{\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{h_x^2}\left(u_{i-1j}^{2n+1}+u_{i+1j}^{2n+1}\right)-\frac{\tau}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x},
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{ij}^{2n+2} = {} & v_{ij}^{2n+1}\left(1-\frac{\tau}{2h_y}\left(v_{ij+1}^{2n+1}-v_{ij-1}^{2n+1}\right)-2\tau\nu_{ij}^{2n+1}\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)\right)+ \\
& +v_{i-1j}^{2n+1}\left(\frac{\tau u_{ij}^{2n+1}}{2h_x}+\frac{\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{h_x^2}\right)+v_{i+1j}^{2n+1}\left(-\frac{\tau u_{ij}^{2n+1}}{2h_x}+\frac{\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{h_x^2}\right)+ \\
& +\frac{\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{h_y^2}\left(v_{ij-1}^{2n+1}+v_{ij+1}^{2n+1}\right)-\frac{\tau}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y},
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

а на $\Omega_{\tau h}^{2,2n+2}$ –

$$
\begin{aligned}
u_{ij}^{2n+2} = {} & \left[1\Big/\left(1+\frac{2\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{h_x^2}+\frac{2\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{h_y^2}\right)\right]\left[u_{ij}^{2n+1}\left(1-\frac{\tau}{2h_x}\left(u_{i+1j}^{2n+2}-u_{i-1j}^{2n+2}\right)\right)+\right. \\
& -\frac{\tau v_{ij}^{2n+1}}{2h_y}\left(u_{ij+1}^{2n+2}-u_{ij-1}^{2n+2}\right)+\frac{\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{h_x^2}\left(u_{i-1j}^{2n+2}+u_{i+1j}^{2n+2}\right)+ \\
& \left.+\frac{\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{2h_y^2}\left(u_{ij-1}^{2n+2}+u_{ij+1}^{2n+2}\right)-\frac{\tau}{\rho}\frac{P_{i+1j}^{2n+1}-P_{i-1j}^{2n+1}}{2h_x}\right],
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{ij}^{2n+2} = {} & \left[1\Big/\left(1+\frac{2\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{h_x^2}+\frac{2\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{h_y^2}\right)\right]\left[v_{ij}^{2n+1}\left(1-\frac{\tau}{2h_y}\left(v_{ij+1}^{2n+2}-v_{ij-1}^{2n+2}\right)\right)+\right. \\
& -\frac{\tau u_{ij}^{2n+1}}{2h_x}\left(v_{i+1j}^{2n+2}-v_{i-1j}^{2n+2}\right)+\frac{\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{h_x^2}\left(v_{i-1j}^{2n+2}+v_{i+1j}^{2n+2}\right)+ \\
& \left.+\frac{\tau\nu_{ij}^{2n+1}}{2h_y^2}\left(v_{ij-1}^{2n+2}+v_{ij+1}^{2n+2}\right)-\frac{\tau}{\rho}\frac{P_{ij+1}^{2n+1}-P_{ij-1}^{2n+1}}{2h_y}\right].
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Блок 6 перевіряє умови припинення процесу. В даній задачі такими умовами є:

1. умова усталення розв'язку $\left\|u^{2n+2}-u^{2n}\right\|<\varepsilon$ або $\left\|\dfrac{u^{2n+2}-u^{2n}}{u^{2n+2}}\right\|<\varepsilon_1$,

2. умова досягнення певного значення часу протікання процесу $(2n+2)\tau \geq T$.

Блок 7 задає формат виводу розрахунків, в розрахунках участі не приймає.

4.3. Аналіз ефективності запропонованого алгоритму при реалізації на багатопроцесорних комплексах

В цьому підрозділі досліджуємо ефективність використання алгоритму побудови розв'язку для системи рівнянь Нав'є-Стокса при реалізації на багатопроцесорних комплексах, який наведений п. 4.2. Зокрема, проводимо аналіз результатів чисельних розрахунків залежності числа процесорів від кількості обчислювальної інформації та кількості між процесорних обмінів.

4.3.1. Аналіз чисельного розв'язку для рівняння Пуассона

Метою аналізу є встановлення ефективності використання ітераційного алгоритму (4.4)-(4.7) на багатопроцесорних системах. Для цього проводимо дослідження прискорення паралельного алгоритму в залежності від величини співвідношення $\frac{T_{обч.}}{T_{обм.}}$, де $T_{обч.}$ – затрачений час на розрахунок задачі, а $T_{обм.}$ – затрачений час на обмін інформацією між процесорами.

При чисельному дослідженні використовуємо, наведені в п. 1.3.2, формули якості паралельних алгоритмів: прискорення паралельного алгоритму $S_p = \frac{T_{посл.}}{T_p}$ та його ефективності $E_p = \frac{S_p}{p}$.

Алгоритм (4.4)-(4.7) протестовано на задачі, яка має відомий розв'язок:

$$P^*(x,y,t) = \frac{\rho}{\alpha}\left(e^{1-t}e^{\alpha}\cos(\alpha x) + a_0\right), \text{ де } a_0 = e^{1+\alpha} + 2.$$

При заданих $\rho = 1$, $\alpha = \pi/8$, $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$.

Обрахунки проводилися на одно-, дво-, чотири- та восьмипроцесорних системах. Кількість кроків сіткової області збільшуємо змінній x: від квадратної області $\left[a=1/8, b=1/8\right]$ до прямокутної $\left[a=1, b=1/8\right]$.

Розглядаємо та порівнюємо два варіанти розпаралелення: по рядках та по стовпчиках сітки. Результати обчислень, тобто час, затрачений на ітераційний процес (в сек.), подано в двох таблицях при заданій точності $\varepsilon=10^{-3}$. В таблиці 1 наведено час обчислень у випадку розпаралелення по рядках сітки, а в таблиці 2 – по стовпчиках.

Таблиця 1. Час обчислень по рядках сітки.

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p=1$	0.51	1.03	2.08	4.09
$p=2$	0.313619	0.59009	1.09243	2.1036
$p=4$	0.229222	0.36051	0.619823	1.13963
$p=8$	0.204046	0.287079	0.40393	0.66449

Таблиця 2. Час обчислень по стовпчиках сітки.

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p=1$	0.51	1.03	2.08	4.09
$p=2$	0.304761	0.575044	1.08253	2.10326
$p=4$	0.231546	0.37624	0.652423	1.20673
$p=8$	0.202196	0.285215	0.459706	0.767203

Дані в таблицях 1 і 2 відрізняється у зв’язку з тим, що кількість інформації, якою обмінюються процесори є різною. В обох випадках кількість обмінів між процесорами становить 2, 6 та 14 відповідно для двох, чотирьох та восьми процесорів. Але розміри масивів обміну в першому випадку незмінні, а в другому – збільшуються вдвічі при обчисленні кожного наступного стовпчика.

Прискорення алгоритму S_p та його ефективність E_p для першого випадку наведено в таблицях 3, 4, а для другого – в таблицях 5, 6.

Таблиця 3. Значення S_p при обчисленні по рядках сітки.

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p=2$	1.63	1.75	1.90	1.95
$p=4$	2.22	2.86	3.36	3.59
$p=8$	2.50	3.59	5.15	6.16

Таблиця 4. Значення E_p при обчисленні по рядках сітки.

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p=2$	0.82	0.88	0.95	0.97
$p=4$	0.56	0.72	0.84	0.89
$p=8$	0.31	0.45	0.64	0.77

Таблиця 5. Значення S_p при обчисленні по стовпчиках сітки.

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p=2$	1.67	1.79	1.92	1.95
$p=4$	2.20	2.74	3.19	3.39
$p=8$	2.52	3.61	4.53	5.33

Таблиця 6. Значення E_p при обчисленні по стовпчиках сітки.

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p=2$	0.84	0.90	0.96	0.97
$p=4$	0.55	0.69	0.80	0.85
$p=8$	0.32	0.45	0.57	0.67

Результати, наведені в таблицях показують, що прискорення S_p та ефективність E_p багатопроцесорних систем більше проявляється при зростанні розмірності задачі. Отже, вибір кількості процесорів залежить від розмірності задачі.

Відзначимо, що характеристики прискорення та ефективності суттєво залежать від кількості інформації, якою обмінюються процесори під час розрахунку. Дійсно, якщо T_p наближено подамо як суму $T_{обч.}$ та $T_{обм.}$, нехтуючи іншими складовими процесу, то прискорення можна записати у вигляді $S_p = \frac{T_{посл.}}{T_p} = \frac{T_{посл.}}{T_{обч.} + T_{обм.}}$. Оскільки всі члени відношення додатні, а $T_{обч.}$ залежить лише від розмірності задачі, то можемо зробити висновок, що прискорення буде зростаючою функцією при спаданні кількості $T_{обм.}$. А отже загальне прискорення обчислень зростає.

При рівномірному завантаженні кожного з процесорів системи, величина $T_{обч.}$ набуватиме мінімального значення. А отже, це також дає змогу збільшити прискорення обчислень.

Враховуючи, що кількість арифметичних операцій алгоритму може бути достатньо легко підрахована, а отже може бути оцінена величина $T_{обч.}$ для обраної обчислювальної техніки. Кількість між процесорних обмінів визначається формулою $2p-1$, що дозволяє оцінити конфігурацію багатопроцесорної системи.

Даним аналізом можна скористатися при проектуванні архітектури багатопроцесорної системи, враховуючи умови конкретної задачі. Це може бути рекомендацією до вибору характеристик обчислювальної техніки.

4.3.2. Аналіз чисельного розв'язку для системи рівнянь Нав'є-Стокса на багатопроцесорних комплексах

Метою аналізу є встановлення ефективності використання чисельного алгоритму побудови розв'язку для системи рівнянь Нав'є-Стокса, описаного в пункті 4.2, на багатопроцесорних системах. Під основною характеристикою ефективності ми розуміємо величину прискорення обчислення розв'язку при заданій точності. Для дослідження ефективності проводимо обчислювальний експеримент.

Для обрахунків використовуємо систему з MIMD-архітектурою. Така архітектура забезпечує передачу багатьох потоків команд та багатьох потоків даних так, що кожен процесор виконує команди своїх підпрограм та обробляє свої масиви даних.

Розпишемо детальніше алгоритм, наведений в п. 4.2.

Тут блоки 1 та 2 є підготовчими для обчислювальних блоків 3-5. А для обчислення значень на поточному кроці використовуємо потоки початкових або відомих значень функцій тиску P та проекцій вектора швидкості u та v, обчислених на попередньому кроці. Функції P, u та v обчислюються за формулами (4.18)-(4.29) незалежно одна від одної. Таким чином, можна застосувати одну з концепцій алгоритмічного паралелізму – розпаралелення за рівняннями.

Для поглиблення процесу розпаралелення використовуємо окремі групи з p процесорів при обчисленні кожного з блоків. Масиви значень функцій P, u та v складаються з m_x стовпчиків, кожен з яких має m_y елементів. Для обчислення цих значень ми масиви даних розбиваємо на p окремих потоків однакової ширини так, що перший містить стовпчики від 1 до m_1+1, другий від m_1 до m_2+1, а останній від m_{p-1} до m_x. Потоки для кожного з процесорів формуються у вигляді горизонтальних смуг, де перший містить стрічки з номерами від 1 до m_1+1, другий – від m_1 до m_2+1, а останній – від m_{p-1} до m_y. Наведена в блоці 3 послідовність обчислень дозволяє кожному з p процесорів проводити операції незалежно від інших.

Аналогічно реалізуються процеси розпаралелення для блоків 4 та 5.

Особливістю даного підходу є те, що алгоритм не потребує зшивання розв'язків. В даному разі на границях потоків даних відбувається обмін між сусідніми процесорами прикордонними стовпчиками. Переданий стовпчик є початковим для подальших розрахунків.

Така особливість мінімізує кількість комунікаційних зв'язків. Затрати часу на розрахунок значень функцій u_{ij}, v_{ij}, P_{ij} в одному вузлі, а отже і одного елемента стовпчика для кожного процесора, однакові. В такому разі бажано, щоб кількість елементів в кожному з масивів, що припадає на один процесор, була однакова. Тобто щоб $m_k - m_{k-1} = k = \mathrm{const}\ \ \forall\ k = \overline{1,p}$ та $kp = m_x$.

Тестування алгоритму. При тестуванні покладаємо

$$\psi_1(x,y,t) = 0, \qquad \psi_2(x,y,t) = \alpha e^{2-2t} e^{2\alpha y}, \qquad \rho = 1.$$

Тоді точний розв'язок задачі (4.1)-(4.3) має вигляд:

$$u^*(x,y,t) = -e^{1-t} e^{\alpha y} \sin(\alpha x),$$

$$v^*(x,y,t) = e^{1-t} e^{\alpha y} \cos(\alpha x),$$

$$P^*(x,y,t) = \frac{\rho}{\alpha}\left(e^{1-t} e^{\alpha y} \cos(\alpha x) + e^{1+\alpha} + 1\right).$$

Приймемо $\alpha = \pi/8$, $a = b = 1/8$, $t > 0$, ε - точність, τ_1 - параметр ітераційного процесу.

Порівняння одержаних результатів з точними значеннями розв'язку показали, що при $\varepsilon = 10^{-3}$, $\tau_1 = 10^{-3}$ на 1600 часових кроках.

Максимальна абсолютна похибка становить $(u, v, P) = (0.000405, 0.000437, 0.01)$, а максимальна відносна похибка (%) – відповідно $(u, v, P) = (0.0069, 0.00496, 0.0254)$. Доцільно відмітити високу практичну швидкість збіжності ітераційного алгоритму [24]. В процесі обчислення встановлено, що на кожному кроці, починаючи з другого, розв'язок задовольняє задану точність $\varepsilon = 10^{-3}$ переважно за одну ітерацію (2 кроки ДС-алгоритму).

Тестування проведено для двох груп варіантів, в яких кількість часових кроків відповідно рівна 1600 та 16000. Результати тестування для першої групи (N=1600) наведено в таблицях 7,8, а другої (N=16000) в таблицях 13,14. В кожній з груп розглянуто два варіанти розпаралелення: по рядках та по стовпчиках сітки. В першому розрахунок проводимо для чотирьох областей: 40x40, 80x40, 160x40, 320x40 вузлових точок. Обчислюємо починаючи з квадратної області зі стороною a до прямокутної зі збільшенням горизонтальної сторони від двох до восьми раз. Відповідно на одно-, дво-, чотири- та восьмипроцесорних системах. Областю обчислення кожного з процесорів є вертикальні сіткові смуги. При збільшенні області кроки сітки не змінюємо, а збільшуємо кількість точок розбиття по x.

Затрачений час на розв'язування задачі з порозпареленням по рядках для N=1600 наведено в таблиці 7.

Таблиця 7. Час обчислень по рядках сітки (N=1600).

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p=1$	1.18	1.68	3.5	7.38
$p=2$	0.907569	1.1665	2.00183	3.91243
$p=4$	0.698148	0.682298	1.05686	1.90533
$p=8$	0.667001	0.509744	0.740436	1.27268

В другому варіанті при розпаралеленні по стовпчиках – області залишаються тими же, але кожному процесору виділяється горизонтальна смуга постійної ширини, а довжина смуги є змінною. Затрачений час на обчислення наведено у таблиці 8.

Таблиця 8. Час обчислень по стовпчиках сітки (N=1600).

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p=1$	1.18	1.68	3.5	7.38
$p=2$	1.00045	1.07261	1.99539	3.74008
$p=4$	0.829162	0.739025	1.26495	2.3099
$p=8$	1.06393	1.70293	1.0464	1.51764

В таблицях 9, 10 наведено час розрахунків для цих двох варіантів для N=16000.

Таблиця 9. Час обчислень по рядках сітки (N=16000).

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p=1$	10.98	16.85	34.05	70.96
$p=2$	10.6	13.25	23.93	41.48
$p=4$	9.19	6.96	12.80	21.43
$p=8$	8.396	5.35	7.62	14.67

Таблиця 10. Час обчислень по стовпчиках сітки (N=16000).

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p=1$	10.98	16.85	34.05	70.96
$p=2$	10.6	12.93	21.75	41.05
$p=4$	8.73	7.41	14.61	24.63
$p=8$	8.34	6.75	10.11	18.18

Порівняння результатів з таблиці 7,9 та таблиць 8,10 показує, що збільшення числа елементів обміну суттєво збільшує час розрахунку. Використовуючи дані таблиць визначимо прискорення $S_p = \frac{T_{посл}}{T_p}$ та ефективність алгоритму $E_p = \frac{S_p}{p}$ в кожному з цих варіантів при N=1600.

Таблиця 11. Значення S_p при обчисленні по рядках сітки (N=1600).

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p=2$	1.30	1.44	1.75	1.89
$p=4$	1.69	2.46	3.31	3.87
$p=8$	1.77	3.29	4.73	5.80

Таблиця 12. Значення E_p при обчисленні по рядках сітки (N=1600).

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p = 2$	0.65	0.72	0.86	0.95
$p = 4$	0.42	0.62	0.83	0.97
$p = 8$	0.22	0.41	0.59	0.73

Таблиця 13. Значення S_p при обчисленні по стовпчиках сітки (N=1600).

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p = 2$	1.18	1.57	1.75	1.97
$p = 4$	1.42	2.27	2.77	3.19
$p = 8$	1.11	0.99	3.34	4.86

Таблиця 14. Значення E_p при обчисленні по стовпчиках сітки (N=1600).

К-ть проц. \ Сітка	40x40	80x40	160x40	320x40
$p = 2$	0.59	0.79	0.88	0.99
$p = 4$	0.36	0.57	0.69	0.80
$p = 8$	0.14	0.12	0.42	0.61

Як видно з таблиць, прискорення та ефективність алгоритму суттєво залежить від відношення часу чисто обчислювальних процесів системи до часу комунікаційних процесів.

Аналогічні результати для прискорення та ефективності одержано у випадку N=16000.

Результати тестування показали високу ефективність запропоновано підходу, а саме його швидкодію та точність, і підтвердили зроблені раніше теоретичні висновки. Таким чином, при розв'язуванні системи рівнянь Нав'є-Стокса на сітковій області з кількістю невідомих $12 \cdot 10^3$, затрачений час на обрахунок при N=1600 спадає від 7.38 до 1.27 секунди (при збільшенні числа процесорів від двох до восьми), а при N=16000 – спадає від 70.96 до 14.67

секунди. Тобто прискорення зростає, а ефективність (навантаження на один процесор) спадає. Середнє значення прискорення на восьми процесорній системі становить 5.35, а ефективність 0.67. При цьому абсолютна похибка на всьому часовому відрізку не перевищує $u, v, P = 0.000405, 0.000437, 0.01$.

4.4. Висновки

В розділі 4 розроблено модифікацію ДС-алгоритму, адаптовану до розв'язування систем рівнянь Нав'є-Стокса з використанням багатопроцесорних обчислювальних комплексів з MIMD-архітектурою на платформі програмування MPI.

Для цього:

- вперше побудовано різницевий ітераційний алгоритм обчислення функції тиску;
- модифіковано ДС-алгоритм розв'язування системи рівнянь Нав'є-Стокса для його застосування на багатопроцесорних системах;
- вперше розроблено алгоритм розпаралелення запропонованої модифікації;
- на основі тестування проведено аналіз якості алгоритму та розроблено рекомендації щодо вибору топології системи (кількості процесорів, комунікаційних зв'язків, тощо) в залежності від складності потоку даних.

ВИСНОВКИ

Дисертація є завершеною науковою роботою, в якій розв’язується важлива сучасна проблема математичного моделювання на багатопроцесорних системах, пов’язана з побудовою ефективних чисельних алгоритмів для моделювання складних процесів динаміки в’язкої нестислої рідини та суміжних з нею питань конвективного та дифузійного переносу субстанцій різного роду.

В роботі встановлені додаткові вимоги до алгоритмів чисельного моделювання процесів динаміки в’язкої нестислої рідини з урахуванням аналізу методів розпаралелення алгоритмів. Також запропоновано нові обчислювальні алгоритми, які базуються на ідеї двокроково-симетризованого алгоритму (ДС-алгоритму), що дозволяє не розв’язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Всі алгоритми обґрунтовано і реалізовано при розв’язуванні задач переносу та системи рівнянь Нав’є-Стокса.

При цьому отримані такі нові наукові результати:

– *вперше* побудовано і обґрунтовано узагальнення ДС-алгоритму для ітераційного моделювання стаціонарних процесів переносу;
– *вперше* розроблено та досліджено алгоритми розщеплення системи рівнянь конвекції-дифузії на базі ДС-алгоритму;
– обґрунтовано стійкість, дисипативність та дисперсійність побудованих ДС-алгоритмів розщеплення;
– *набув подальшого розвитку* ДС-алгоритм розв’язування системи рівнянь Нав’є-Стокса, записаної у дивергентній формі;
– обґрунтовано консервативність, дисипативність та дисперсійність побудованого ДС-алгоритму розв’язування системи рівнянь Нав’є-Стокса;

– *вперше* розроблено і обґрунтовано алгоритм розпаралелення побудованого для системи рівнянь Нав'є-Стокса на багатопроцесорних системах та зроблено аналіз її ефективності.

Окремі наукові результати, одержані в роботі, були впроваджені у 2015-2016 н. р. у навчальний процес кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні спеціальних курсів: для магістрів 1 року навчання «Чисельне моделювання динаміки систем», для бакалаврів 4 року навчання «Чисельне моделювання процесів гідродинаміки» та для бакалаврів 3 року навчання «Методи оптимізації для систем із розподіленими параметрами».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Мак-Кормак, Р.В. Численный метод решения уравнений вязких течений / Р.В. Мак-Кормак // Аэрокосмическая техника. – 1983. – Т. 1, №4. – С. 114–123.

[2] Браиловская, И.Ю. Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа / И.Ю. Браиловская // ДАН СССР. – 1965. – Т. 160, №5. – С. 1042–1045.

[3] Лакс, П. Об устойчивости конечно-разностных аппроксимаций гиперболических уравнений с переменными коэффициентами / П. Лакс // Математика (сб. переводов). – 1962. – Т.6, № 3. – С. 25–46.

[4] Allen, J.S. Numerical solutions of the compressible Navier-Stokes equations for the laminar near wake / J.S. Allen, S.J. Chen // Phis. Fluids. – 1970. – Vol. 13, no. 1. – P. 37–52.

[5] DuFort, E. C. Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations / E.C. DuFort, S.P.Frankel // Math. – Tables and Other Aids to Compitation. – 1953. – Vol. 7. – P. 135–152.

[6] Аменова, Ф.С. О решении не самосопряженных вспомагагательных разностных уравнений для тепловой конвекции в переменных «функция тока – вихрь» / Ф.С. Аменова // Вестник НИА РК. – Альматы. – 2015. – № 1(55). – С. 61–66.

[7] Данаев, Н.Т. Исследование сходимости итерационных алгоритмов численного решения задач тепловой конвекции в переменных «функція тока – вихрь скорости» / Н.Т. Данаев, Ф.С. Аменова // Сиб. журн. индустр. матем. – 2014. – Т. 17, № 3(59). – С. 48–58.

[8] Волков, К.Н. Реализация схемы расщепления на разнесенной сетке для расчета нестационарных течений в'язком несжимаемой жидкости / К.Н. Волков // Вычислительные методы и программирование. – Москва : 2006. – С. 269–282.

[9] Иванов, В.Г. Численное решение уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока–вихрь» / В.Г. Иванов // Нац. исслед. Томский гос. ун-т. – Томск. – 2012. – С. 1–3.

[10] Ковеня, В.М. Об одном алгоритме решения уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости / В.М. Ковеня // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, № 2. – С. 39–51.

[11] Мартыненко, С.И. Совершенствование вычислительных алгоритмов для решения уравнений Навье-Стокса на структурированных сетках / С.И. Мартыненко // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. – Сер. Естественные науки: Научно-теоретический и прикладной журнал широкого профиля. – 2008. – № 2. – С. 78–94.

[12] Белоцерковский, О.М. Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов / О. М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1971. – Т. 11, № 1. – С. 182–207.

[13] Гущин, В.А. Метод расщепления для решения задач динамики неоднородной в’язком несжимаемой жидкости / В.А. Гущин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1981. – № 21(4). – С. 1003–1017.

[14] Харлоу, Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики. / Ф.Х. Харлоу // Вычислительные методы в гидродинамике. – Москва : Мир. – 1967. – С. 316–342.

[15] Harlow, F.H. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface / F.H. Harlow, J.E. Welch // Physics of Fluids. – 1965. – Vol. 8, no. 12. – P. 347–393.

[16] Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Пантакар // М.: Энергоатомиздат. – 1984. – 152 с.

[17] Patankar, S.V. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows / S.V. Patankar, S.B. Spalding // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1972. – Vol. 15. – P. 1787–1806.

[18] Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н. Яненко // Новосибирск : Наука. – 1967. – 196 с.

[19] Деги, Д.В. Численное решение уравнений Нав'є-Стокса на компьютерах с параллельной архитектурой / Д.В. Деги, А.В. Старченко // Вестник томского государственного университета. – Серия: Математика и механика. – Томск : НГУ. – 2012. – № 2 (18). – С. 88–98.

[20] Старченко, А.В. Параллельная реализация численного метода решения системы уравнений Навье-Стокса при моделирования крупных вихрей турбулентных течений / А.В. Старченко, Е.А. Данилко // Вестник новосибирского государственного университета. – Серия: Информационные технологии. – Новосибирск : НГУ. – 2009. – Т. 7., № 2. – С. 49–61.

[21] Бруяцкий, Е.В. Метод чисельного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление / Е.В. Бруяцкий, А.Г. Костин, Е.И. Никифорович, Н.В. Розумнюк // Прикладная гидромеханика. – Киев: 2008. – Том 10, № 2. – С. 13–24.

[22] Грищенко, О.Ю. Чисельне моделювання і оптимізація динамічних і релаксаційних процесів: Дисертація доктора фіз.-мат. наук: 01.05.02 / О.Ю. Грищенко // Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка – Київ : 2003. – 301 арк. – Бібліогр.: арк. 297.

[23] Грищенко, О.Ю. Модифікація ДС-алгоритму розв'язування початково-крайових задач для системи рівнянь Нав'є-Стокса / О.Ю. Грищенко, П.І. Довбня // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2011. – № 3 (106). – С. 19–26.

[24] Марцафей, А.С. Застосування чисельного ДС-алгоритму для ітераційного моделювання стаціонарних процесів переносу / А.С. Марцафей // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – – 2009. – № 3(99). – С. 63–69.

[25] Марцафей, А.С. Обгрунтування ДС-алгоритмів при моделюванні ізотермічних потоків нестислої рідини / А.С. Марцафей // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2014. – № 3(117). – С. 66–75.

[26] Грищенко, О.Ю. ДС-алгоритм розпаралелювання різницевих схем для задач перенесення із коефіцієнтами залежними від часу / О.Ю. Грищенко, А.С. Марцафей // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2010. – № 4(104). – С. 17–25.

[27] Gryshchenko, A.Yu. A two-step splitting algorithm in heat and mass transfer problems / A.Yu. Gryshchenko, A.S. Martsafei // Cybernetics Analysis. – 2011. – Vol. 47, no. 6. – P. 941–947. (Translated from Kibernetika i Sistemny Analiz. – 2011. – No. 6. – P. 125–131.)

[28] Грищенко, О.Ю. Розпаралелювання різницевих схем на основі ДС-алгоритму / О.Ю. Грищенко, А.С. Марцафей, В.С. Федорова // Доповіді Національної академії наук України. – 2011. – № 7. – С. 32–36.

[29] Грищенко, О.Ю. Ефективність застосування ДС-алгоритму для системи рівнянь Нав'є-Стокса на багатопроцесорних комплексах / О.Ю. Грищенко, А.С. Марцафей, В.В. Оноцький, О.В. Попов // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2016. – № 1(121). – С. 28–36.

[30] Грищенко, О. Ю. Двокроковий різницевий алгоритм для еліптичних рівнянь другого порядку / О.Ю. Грищенко, А.С. Марцафей // III Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені І. І. Ляшка, 11-12 вересня 2009 р.: матеріали конференції. – Київ, 2009. – С. 34.

[31] Грищенко, О. Ю. Чисельне моделювання процесу проявлення оптичних голограм / О.Ю. Грищенко, А.С. Марцафей // XVI Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», 8-9 жовтня 2009 р.: матеріали конференції. – Львів, 2009. – С. 72–73.

[32] Грищенко, О. Ю. Різницева схема розщеплення, побудована на основі ДС-алгоритму / О.Ю. Грищенко, А.С. Марцафей, В.С. Федорова // Праці міжнародної молодіжної математичної школи «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII)», 22-29 вересня 2011 р. – Кацивелі, 2011. – С. 45–46.

[33] Грищенко, О.Ю. Розпаралелені ДС-алгоритми для задач тепло-масопереносу / О.Ю. Грищенко, А.С. Марцафей // VI Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені І. І. Ляшка, 5-6 вересня 2013 р.: матеріали конференції. – Київ, 2013. – С. 104–106.

[34] Грищенко, О. Ю. Чисельне моделювання процесу рельєфографії / О.Ю. Грищенко, А.С. Марцафей // Праці міжнародної наукової конференції «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL)», 30 вересня - 4 жовтня 2013р.: праці конференції. – Кацивелі, 2013. – С. 81–82.

[35] Марцафей, А. С. Економічний ДС-алгоритм розв'язування нелінійних початково-крайових задач тепломасопереносу / А.С. Марцафей // Праці міжнародної наукової конференції «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XL)», 30 вересня - 4 жовтня 2013 р.: праці конференції. – Кацивелі, 2013. – С. 167–168.

[36] Марцафей, А.С. Обгрунтування використання ДС-алгоритму для рівнянь Нав'є-Стокса / А.С. Марцафей // Матеріали міжнародної математичної конференції «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-ліття від дня народження ч.-к. НАН України Положого Г. М., 23-24 квітня 2014 р.: матеріали конференції. – Київ, 2014. – С.88.

[37] Марцафей, А.С. Побудова алгоритмів ефективних при моделюванні на багатопроцесорних комплексах / А.С. Марцафей // XXVI International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2015), August 24 - 28, 2015: abstracts. – Odessa, 2015. – P. 112.

[38] Марцафей, А.С. Ефективні алгоритми розпаралелювання для процесів конвекції-дифузії / А.С. Марцафей // VIII Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені І. І. Ляшка, 8-9 жовтня 2016.: матеріали конференції. – Київ, 2016. – С. 61.

[39] Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская // – М.: Наука, 1970. – 288 с.

[40] Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный аналіз / Р. Темам // Москва : Наука, 1981. – 408 с.

[41] Лионс, Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс // Москва : Мир, 1972. – 588 с.

[42] Солонников, В.А. Об оценках решений нестационарной задачи Стокса в анизотропных пространствах С. Л. Соболева и об оценках резольвенты оператора Стокса / В.А. Солонников // Успехи математических наук. – 2003. – Т. 58, № 2. – С. 123–156.

[43] Солонников, В.А. О дифференциальных свойствах первуй краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье-Стокса / В.А. Солонников // Труды МИ АН СССР. – 1964. – Т. 73. – С. 221–291.

[44] Солонников, В.А. О краевой задаче для стационарной системы уравнений Нав’є-Стокса / В.А. Солонников, В.Е. Скадилов // Труды МИАН им. Стеклова. – 1973. – Т. 125. – С. 196–210.

[45] Ковеня, В.М. Метод расщепления в задачах газовой динамики / В.М. Ковеня, Н.Н. Яненко // Новосибирск: Наука. – 1981. – 304 с.

[46] Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч // Москва : Мир. – 1980. – 616 с.

[47] Гущин, В.А. Метод расщепления для решения задачи динамики неоднородной вязкой несжимаемой жидкости / В.А. Гущин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1981. – Т. 21, № 4. – С. 1003–1017.

[48] Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук // Москва : Наука. – 1989. – 608 с.

[49] Кобельков, Г.М. Симметричные аппроксимации уравнений Навье-Стокса / Г.М. Кобельков // Москва : Мат. Сб. – 2002. – Т. 193, № 7. – С. 87–108.

[50] Михайлов, А.С. Глобальная разрешимость 3-х мерных уравнений Навье-Стокса с равномерно большой начальной завихренностью / А.С. Михайлов, В.П. Николаенко // Успехи мат. наук. – 2003. – Т.58, № 2, С. 79–110.

[51] Браиловская, И.Ю. Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа / И.Ю. Браиловская // ДАН СССР. – 1965. – Т. 160, № 5. – С. 1042–1045.

[52] Браиловская, И.Ю. Явные разностные методы для расчета отрывных течений вязкого сжимаемого газа.//Некоторые применения метода сеток в газовой динамике / И.Ю. Браиловская // Москва : Изд-во при МГУ. – 1971. – № 4. – С. 6–85.

[53] Браиловская, И.Ю. Разностный метод численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемой жидкости // Вкн. Вычислительные методы и программирование / И.Ю. Браиловская // Москва : Изд-во ЛГУ. – 1967. – № 7. – С. 3–15.

[54] Отелбаєв, М. Существование сильного решения уравнения Навье-Стокса / М. Отелбаєв // Математический журнал. – 2013. – Т. 13, № 4(50). – С. 5–104.

[55] Ладыженская, О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость / О.А. Ладыженская // УМН. – 2003. – Т. 58, № 2(50). – С. 45–78.

[56] Ладыженская, О.А. Решение «в целом» краевой задачи Навье-Стокса в случае двух пространственных переменных / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников // Доклади АН СССР. – 1958. – Т. 123, № 3. – С. 427–429.

[57] Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский // Москва : Наука. – 1983. – 616 с.

[58] Самарский, А.А. Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин // М.: Наука. – 1973. - 415 с.

[59] Самарский, А.А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич // Москва : Эдиториал УРСС. – 1999. – 348 с.

[60] Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич // Москва : УРСС. – 2003. – 784с.

[61] Марчук, Г.И. Методы расщепления / Г.И. Марчук // Москва : Наука. – 1989. – 320 с.

[62] Вабищевич, П.Н. Численное решение задачи идентификации младшего коэффициента эллиптического уравнения / П.Н. Вабищевич // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, №7. – С. 943–948.

[63] Вабищевич, П.Н. Математическое моделирование / П.Н. Вабищевич // Москва : МГУ. – 1993. – 152с.

[64] Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н. Яненко // Новосибирск: Наука. – 1967. – 196 с.

[65] Яненко, Н.Н. Метод слабой аппроксимации для произвольного расщепления / Н.Н. Яненко // Aplicall Malem. – Praha. – 1968. – No. 13. – P. 148–161.

[66] Яненко, Н.Н. О методах расчета задач газовой динамики с большими деформациями / Н.Н. Яненко, Н.Н. Анучина, В.Е. Петренко, Ю.И. Шокин // Численные методы механики сплошной среды. – 1970. – Т. 1, № 1. – С. 40–62.

[67] Ляшко, І.І. Економічний чисельний алгоритм для одного класу нелінійних крайових задач / І.І. Ляшко, О.Ю. Грищенко, В.М. Склеповий, В.В. Оноцький // Доповіді НАН України. – № 3. – 2003. – С. 68–72.

[68] Ляшко, И.И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко // Київ : Наукова думка. – 1973. – 264 с.

[69] Гладкий, А.В. Алгоритмизация и численный расчет фильтрационных схем / А.В. Гладкий, И.И. Ляшко, Г.Е. Мистецкий // Київ : Виша школа. – 1981. – 288 с.

[70] Lyashko, I.I. Simulation of Hydrodynamics and Termal Phisics of Relieffographic Processes / I.I. Lyashko , O.Yu. Gristhenko, N.Z. Prokhur, O.P. Tsymbalyuk // J. of Math. Sciences. – Vol.69, no. 6. – 1994. – P. 1449–1454.

[71] Ляшко, И.И. Об одной разностной схеме нелинейной фильтрации тяжелой несжимаемой жидкости / И.И. Ляшко, А.Е. Грищенко, В.Н. Склеповой // Вычислительная и прикладная математика. – Киев : 1981. – №. 44. – С. 126–137.

[72] Ляшко, И.И. Вариационно-разностная схема для нелинейной фильтрации / И.И. Ляшко, А.Е. Грищенко, В.Н. Склеповой // В кн. Вариационно-разностные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. - Новосибирск: Наука. – 1982. – С. 91–98.

[73] Ляшко, І.І. Побудова стійких схем розв’язування змішаної задачі для еволюційного узагальнення просторових рівнянь Нав’є-Стокса / І.І. Ляшко , Н.З. Прохур // Доповіді АН УРСР, сер А. – 1985. - №12. - С. 14–16.

[74] Ляшко, И.И. Неравновесное расширение газов в коротких соплах с учетом электронно-химической кинетики / И.И. Ляшко, Л.А. Максименко, В.П. Сухенко // Доклади АН УССР. Сер. А. – 1983. - № 12. - С. 37.

[75] Ляшко, И.И. Численное моделирование процессов массопереноса / И.И. Ляшко, В.Ф. Демченко, Л.И. Демченко // Киев : УМК ВО Киевский университет. – 1988. – 164 с.

[76] Ляшко, И.И. Вопросы автоматизированого расчета задач на ЭВМ / И.И. Ляшко, И.В. Сергиенко, Г.Е. Мистецкий, В.В. Скопецкий // Київ : Наукова думка. – 1977. – 288 с.

[77] Дейнека, В.С. Математические модели и методы решения задач с разрывными решениями / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий // Київ : Наукова думка. – 1995. – 262с.

[78] Сергиенко, И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека // Київ : Наукова думка. – 1991. – 432 с.

[79] Згуровский, М.З. Численное моделирование распределения загрязнения в окружающей среде / М.З. Згуровский, В.В. Скопецкий, В.К. Хрущ, Н.Н. Беляев // Київ : Наукова думка. – 1997. – 347 с.

[80] Ляшко, С.И. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса / С.И. Ляшко, Д.А. Клюшин, А.С. Тригуб // Київ : Наукова думка. – 1988. – 238 с.

[81] Грищенко, О.Ю. Чисельне моделювання процесів релаксаційної газової динаміки / О.Ю. Грищенко, С.І. Ляшко, О.І. Молодцов // Київ : ІЗМН Віпол. – 1997. - 222 с.

[82] Ляшко, С.И. О разрешимости смешанных краевых задач с операторными коэффициентами / С.И. Ляшко // Успехи математических наук. – 1987. – Т. 42, № 255. – С. 191–192.

[83] Ляшко, С.И. Импульсное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами / С.И. Ляшко // ДАН СССР. – 1984. – Т. 276, № 2. – С. 285–287.

[84] Ляшко, С.И. Некоторые вопросы импульсно-точечного управления псевдопараболическими системами / С.И. Ляшко // Украинский математический журнал. – 1985. – Т. 37, № 3. – С. 470–475.

[85] Ляшко, С.И. О регуляризации задачи импульсно-точечного управления псевдопараболическими системами / С.И. Ляшко // Кибернетика и вычислительная техника. – 1986. – № 71. – С. 25–27.

[86] Ляшко, С.И. Дифференцируемость регуляризованного критерия качества при импульсно-точечном управлении псевдопараболическими системами / С.И. Ляшко // Кибернетика. – 1988. – №3. – С. 64–66.

[87] Башуцкая, Т.В. Об одном подходе в численном моделировании динамики реагирующих газов в соплах / Т.В. Башуцкая, А.Е. Грищенко,

В.Н. Склеповой // Вычислительная и прикладная математика. – Киев : 1986. – №.58. – С. 89–95.

[88] Грищенко, О.Ю. Алгоритм розв’язування нелінійних крайових задач / О.Ю. Грищенко, О.В. Ляшко // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1987. - № 9 – С. 15–18.

[89] Грищенко, О.Ю. Чисельне моделювання процесів релаксаційної газової динаміки / О.Ю. Грищенко, С.І. Ляшко, О.І. Молодцов // Київ : ІЗМН Віпол. – 1997. - 222 с.

[90] Gristhenko, O.Yu. Modeling an Optimal Temperature Field in a Thermoplastic Medium / O.Yu. Gristhenko, L.I. Potapenko, O.B. Stelya // J. of Math. Sciences. – 2001 - Vol. 107, no. 2. - P. 3719–3721.

[91] Грищенко, О.Ю. Дисипативність двокрокових симетризованих алгоритмів для гіперболічних рівнянь переносу / О.Ю. Грищенко, В.В. Оноцький // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. - 2000. - №. 4. – С. 173–181.

[92] Грищенко, О.Ю. Про один ітераційний алгоритм розв’язування початково-крайової задачі для системи рівнянь Нав’є-Стокса / О.Ю. Грищенко, В.І. Ляшко, Л.І. Потапенко // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. - 2001. - № 1. – С. 180–185.

[93] Грищенко, О.Ю. Дослідження одного чисельного алгоритму нелінійної моделі переносу / О.Ю. Грищенко // Обчислювальна та прикладна математика. – 1997. - № 1(81) – С. 25–32.

[94] Gristhenko, O. Yu. On a numerical algorithm for the modeling of processes in the development of a holographic relief image / O.Yu. Gristhenko // J. of Math. Sciences. – 2001. - Vol. 104, no. 6. - P. 1604–1608.

[95] Gristhenko, O. Yu. A class of numerical algorithms, conservative at stabilization, for modeling transport processes / O.Yu. Gristhenko // J. of Math. Sciences. – 2002. - Vol. 109, no. 4. - P. 1708–1714.

[96] Грищенко, О.Ю. ДС-різницеві алгоритми розв’язування крайових задач для параболічних рівнянь другого порядку / О.Ю. Грищенко // Вісник

Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2000. – №.1. – С. 227–231.

[97] Грищенко, О.Ю. ДС-алгоритм з різницями проти потоку для консервативних рівнянь першого порядку / О.Ю. Грищенко // Вісник Київського університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2002. - № 2. – С 192–196.

[98] Ляшко, И.И. Численное решение задач проявления скрытого изображения в термопластических системах / И.И. Ляшко, А.Е. Грищенко, М.А. Заболотный, Л.И. Потапенко // В сб. Фундаментальные основы оптической памяти и среды. – Киев : Киевский университет. – 1985. - № 16. – С. 85–93.

[99] Грищенко, О.Ю. Про один алгоритм чисельного дослідження процесу візуалізації рельєфографії / О.Ю. Грищенко // Обчислювальна та прикладна математика. – 1997. - №1 (81). – С. 33–39.

[100] Грищенко, О.Ю. Про один чисельний алгоритм розв'язування задач для систем гіперболічних рівнянь першого порядку / О.Ю. Грищенко // Обчислювальна та прикладна математика. – 1997. – № 2 (82). – С. 24–29.

[101] Грищенко, О.Ю. Безумовно стійкі ДС-алгоритми для моделювання процесів переносу / О.Ю. Грищенко // Теорія обчислень, збірник наукових праць Міжнародної конференції, Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. – 1999. – С. 132–136.

[102] Грищенко, О.Ю. ДС-різницеві алгоритми для крайових задач переносу з правими частинами, лінійно залежними від розв'язку / О.Ю. Грищенко // Волинський математичний вісник. - 1999.- №. 6. – С. 53–56.

[103] Gristhenko, O.Yu. On an Algorithm for a Numerical Study of the Visualisation of Holographic Relief / O.Yu Gristhenko.// J. of Math. Sciences. - Kluwer Academic Press / Plenum Publishers. – 2000. - Vol. 102, no. 1. - P. 3749–3755.

[104] Бабенко, К.И. Основы численного анализа / Бабенко К. И. // Москва, Ижевск НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2002. – 848 с.

[105] Бабенко, К.И. О численном решении краевой задачи для уравнений Навье-Стокса / К.И. Бабенко, Н.Д. Введенская // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1972. – Т. 12, № 5. – С. 1343–1349.

[106] Белоцерковский, О.М. Метод разщепления в применении к решению задач динамики в'язкой несжимаемой жидкости / О.М. Белоцерковский, В.А. Гущин, В.В. Щенников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – М.: 1975. – Т. 15. – С. 197–207.

[107] Белоцерковский, О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О.М. Белоцерковский // Москва : Наука. – 1984. – 520 с.

[108] Годунов, С.К. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах / С.К. Годунов, Г.П. Прокопов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1972. – Т. 12, № 2. – С. 429-440.

[109] Ильин, В. П. О расщеплении разностных уравнений параболического и эллиптического типов. / В.П. Ильин // Сиб. матем. журн. – 1965. – №6. – С. 1425–1428.

[110] Самарский, А.А. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. / А.А. Самарский // Москва: Наука. – 1982. – 319 с.

[111] Самарский, А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов // Учебное пособие. – Изд. 3-е, доп. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1992. – 424 с.

[112] Самарский, А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин // Москва : Наука. – Изд.3-е, доп.– 1992. – 423 с.

[113] Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко // Изд. 2-е, переработ. и дополн. – Москва : Наука. – 1987. – 687 с.

[114] Ковеня, В.М. Об одном алгоритме решения уравнений Навье-Стокса в'язком несжимаемой жидкости / В.М. Ковеня // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11, № 4. – С. 39-51.

[115] Пасконов, В.М. Численное моделирование процессов тепло- и масообмена / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов // Москва : Наука. – 1984. – 228 с.

[116] Douglas, J. Alternating direction methods for three space variables / J. Douglas // Numerische Math. – Vol. 4. – P. 41–63.

[117] Самарский, А.А. Экономичные разностные схемы для систем уравнений параболического типа / А.А. Самарский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1964. – Т. 4, № 5. – С. 292-296.

[118] Яненко, Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н.Н. Яненко // Новосибирск : Наука. – 1967. – 194 с.

[119] Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко // Изд. 2-е, перераб и доп. – Москва : Наука. – 1978. – с. 687.

[120] Воеводин, В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах / В.В. Воеводин // Москва : Наука. – 1986. – 296 с.

[121] Молчанов, И.Н. Введение в алгоритмы параллельных вычислений / И.Н. Молчанов // Київ : Наукова думка. – 1990. – 128 с.

[122] Ортега, Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем / Дж. Ортега // Москва: Мир. – 1991. – 368 с.

[123] Хіміч, О.М. Ефективність двовимірних блочно-циклічних паралельних алгоритмів / О.М. Хіміч, В.В. Полянко // Матеріали 6-ї міжнар. наук.-практ. конф. з програмування УкрПРОГ’2008. – Проблеми програмування, спец. вип.– 2008. – № 2 (3). – С. 145–149.

[124] Глушков, В.М. Резервы оптимизации вичислений / В.М. Глушков, В.В. Иванов, В.С. Михалевич и др. // Препринт АН УССР, Институт кибернетики. – Киев. – 1977. – С. 77–67.

[125] Глушков, В.М. Человек и вычислительная техника // В.М. Глушков В.И. Барановицкий, А.М. Довигало и др. // Київ : Наукова думка. – 1971. – 294 с.

[126] Лаевский, Ю.М. Метод конечных элементов (основы теории, задачи) / Ю.М. Лаевский // Новосибирский государственный университет. – Новосибирск. – 1999. – 166 с.

[127] Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон // Москва : Мир. – 1972. – 418 с.

[128] Годунов, С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенький // Изд. 2-е, перераб. и доп. – Москва : Наука. – 1977. – 440 с.

[129] Коновалов, А.А. Метод дробных шагов решения задачи Коши для многомерного уравнения колебаний / А.А. Коновалов // ДАН СССР. – 1962. – Т. 147, №1. – С. 25–27.

[130] Химич, А.Н. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики / А.Н. Химич, И.Н. Молчанов, А.В. Попов, Т.В. Чистякова, М.Ф. Яковлев // Київ : Наукова думка. – 2008. – 247 с.

[131] Ковеня, В.М. Методи расщепления для численного решения многомерных задач газовой динамики / В.М. Ковеня // Сибирский журнал вычислительной метематики. – 2000. – Т. 3, № 3. – С. 271–280.

[132] Miguel, O. Operator split methods for the numerical solution of the elastoplastic dynamic problem / O. Miguel, P. Pinsky, R. Taylor // Division of Structural Engineering and Structural Mechanics. – USA. – 1983. – Vol. 39, No. 2. – P. 137-157. – DOI : 10.1016/0045-7825(83)90018-X.

[133] Chorin, A.J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. // Math of computation. – 1968. – 22, № 104.

[134] Кузнецов, Б.Г. Численное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах сложной геометри при задании перепадов давления / Б.Г. Кузнецов, Н.П. Мошкин, Ш. Смагулов // Численные методы механіки сплошной среды. – Новосибирск. – 1983. – Т. 14, № 5. – С. 87-99.

[135] Gentry, R.A. An Eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems / R.A. Gentry, R.E. Martin, B.J. Daly // J. of Comput. Phis. – 1966. - Vol. 1. - P. 87–118.

[136] Sheldon, J.V. Iterative methods for the solution of elliptic partial differential equations / J.V. Sheldon // Mathematical methods for digital computers. – New York: J. Wiley and Sons, Inc. – P. 144–156.

[137] Скала, С.М. Решение уравнений Навье–Стокса для нестационарного обтекания кругового цилиндра / С.М. Скала, Р. Гордон // РТК. – 1967. – Т. 6, № 5. - С. 56–57.

[138] Scala, S.M. Reflection of a shock wave at a surface / S.M. Scala, R. Gordon // Phys. Fluids. – 1966. – Vol. 9. – P. 1158–1667.

[139] Gourlay, A.R. Hopscotch a fast second-order partical differential equation solver / A.R. Gourlay // J. Inst. Math. Appl. – 1970. – Vol. 6. – P. 375–390.

[140] Грищенко, О.Ю. Дослідження одного чисельного алгоритму нелінійної моделі переносу / О.Ю. Грищенко // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 1997. – № 1 (81) – С. 25–32.

[141] Грищенко, О.Ю Про збіжність одного двокрокового алгоритму для еліптичних операторів другого порядку / О.Ю. Грищенко // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2004. – № 2 (91). – С. 58–61.

[142] Грищенко, О.Ю. ДС-різницеві алгоритми розв'язування крайових задач для параболічних рівнянь другого порядку / О.Ю. Грищенко // Вісник Київського університету. Серія: фіз-мат. науки. – № 1. – 2000. – С. 227–231.

[143] Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский // Москва : Наука. – 1971. – 552 с.

[144] Саульев, В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток / В.К. Саульев // Москва : ГИФМЛ. – 1960. – 324 с.

[145] Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон // Москва : Мир. – 1972. – 418 с.

[146] Хейгеман, Л. Прикладные итерационные методы / Л. Хейгеман, Д. Янг // Москва : Мир. – 1976. – 448с.

[147] Алгазин, С.Д. Чисельные алгоритмы классической математической физики / С.Д. Алгазин // Москва : Диалог МИФИ. – 2010. – 240 с.

[148] Leray, J. Etude de diverses equations integrals nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique / J. Leray // J. Math. Pures Appl. – Vol. 12. – 1933. – P. 1–82.

[149] Андерсон, Д. Вычислительная гидродинамика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер // Москва : Мир. – Т. 1. – 1990.–386 с.

[150] Бруяцкий, Е.В. Метод численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление / Е.В. Бруяцкий, А.Г. Костин, Е.И. Никифорович, Н.В. Розюмнюк // Прикладна гідромеханіка. – 2008. – Т. 10, № 2. – С. 13–23.

[151] Тиллабоев, Е. К. Об одном из методов решения уравнения Навье–Стокса / Е.К. Тиллабоев, М.Г. Дадамирзаев, Б.Х. Абдулхафизов // Молодой ученый. – 2015. – №6. – С. 7–12.

[152] Овчинникова, К.Д. Один паралельнiй алгоритм численного решения задачи конвекции-диффузии / К.Д. Овчинникова // Сборник материалов Девятой международной конференции-семинара «Высокопроизводительные вычисления на кластерных системах», 2-3 ноября 2009 г. – Владимир, 2009. – С. 297–301.

[153] Ковеня, В.М. Разностные методы решениямногомерных задач: Курс лекций / В.М. Ковеня // Новосибирск: Новосибирский государственный университет. – 2004. – 146 с.

Додаток А

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з наукової роботи
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

_______________ проф. В. С. Мартинюк
17 травня 2016 р.

ДОВІДКА

про використання у навчальному процесі результатів дисертаційної роботи Марцафей Анни Сергіївни «Чисельне моделювання гідродинамічних процесів з використанням багатопроцесорних систем», представленої на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Наукові результати, одержані в процесі написання дисертаційної роботи Марцафей А. С. «Чисельне моделювання гідродинамічних процесів з використанням багатопроцесорних систем», впроваджені у 2014-2016 н. р. в навчальний процес кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні нормативного та спеціальних курсів: для магістрів 1 року навчання «Чисельне моделювання динаміки систем», для бакалаврів 4 року навчання «Чисельне моделювання процесів гідродинаміки» та для бакалаврів 3 року навчання «Теорія різницевих схем».

Заст. декана з наукової роботи
факультету кібернетики
к. ф.-м. н. — О.А.Капустян

Завідувач кафедри обчислювальної математики
д. ф.-м. н., професор — С. І. Ляшко

Лектор нормативного курсу
«Чисельне моделювання динаміки систем»»,
та спеціальних курсів
«Чисельне моделювання процесів гідродинаміки»,
«Теорія різницевих схем»

д. ф.-м. н., професор — О. Ю. Грищенко