Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

**Остапенко Віталій Іванович**

УДК 519.21

# ДИСЕРТАЦІЯ
# Оцінки функціоналів від гармонізованих стохастичних процесів

01.01.05 – Теорія ймовірностей і математична статистика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

____________________________________

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник: **Моклячук Михайло Павлович**, доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2017

# АНОТАЦІЯ

**Остапенко В. І. Оцінки функціоналів від гармонізованих стохастичних процесів.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 «Теорія ймовірностей і математична статистика». – Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київ, 2017.

У дисертаційній роботі досліджуються задачі оптимального лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень випадкових гармонізованих послідовностей та процесів. Задачі досліджено у випадках спектральної визначеності, коли відомий явний вигляд спектральної щільності, та спектральної невизначеності, коли спектральні щільності послідовностей та процесів невідомі, а задані лише класи допустимих спектральних щільностей.

Серед сучасних напрямків розвитку теорії стохастичних процесів важливе місце посідає напрямок, що присвячений задачам оцінки стохастичних процесів. Симетричні $\alpha$-стійкі гармонізовані процеси є узагальненням стаціонарних процесів, зокрема у випадку $\alpha = 2$ гармонізовані процеси є стаціонарними випадковими процесами.

У роботі коротко наводяться результати спектральної теорії для гармонізованих послідовностей та процесів. Суттєвою відмінністю від стаціонарних процесів є відсутність властивості лінійності за другим аргументом коваріації між сумісними симетричними $\alpha$-стійкими випадковими величинами.

Отримані результати базуються на ізоморфізмі між простором гармонізованих симетричних $\alpha$-стійких величин та простором інтегрованих функцій в степені $\alpha$.

Традиційні методи розв'язання задач оцінки функціоналів суттєво використовують припущення, що вигляд спектральних щільностей стохастичних послідовностей та процесів точно відомий. Однак, у реальних задачах на практиці такою інформацією дослідник часто не володіє. Одним із способів подолання такого ускладнення може стати заміна припущення про відому спе-

ктральну щільність на припущення про відомий клас допустимих спектральних щільностей $D$. У такому разі доцільніше шукати оцінки, що є оптимальними одразу для всіх щільностей із класу $D$. Такі оцінки називаються мінімаксними, оскільки вони мінімізують максимальне значення похибки.

Сформульовано та розв'язано задачі оцінювання функціоналів від невідомих значень гармонізованих послідовностей. Серед задач оцінок функціоналів розглянуто задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації гармонізованих послідовностей. Функціонали, що розглядаються мають вигляд лінійних перетворень від невідомих значень випадкового процесу.

У випадку спектральної визначеності, коли відома спектральна щільність послідовності, знайдено формули та співвідношення для самої оцінки функціоналів від гармонізованих послідовностей, її похибки та спектральної характеристики для задачі екстраполяції (прогнозування).

Також досліджено задачу інтерполяції, пошук оцінки для пропущених значень. У цьому випадку на основі припущення про відому спектральну щільність знайдено співвідношення для оцінки, похибки, спектральної характеристики. Для фіксованих числових значень параметрів були знайдені числові значення похибки та спектральної характеристики.

Для задачі фільтрації на основі відомої спектральної щільності знайдено співвідношення для визначення оцінки, спектральної характеристики та похибки оцінки.

У випадку спектральної невизначеності для задачі екстраполяції, інтерполяції, фільтрації гармонізованих випадкових послідовностей, виведені співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики для деяких класів допустимих спектральних щільностей.

Досліджено задачі оцінки функціоналів від невідомих значень гармонізованих випадкових процесів. Розглянуто задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації у двох випадках: спектральної визначеності та спектральної невизначеності. У випадку спектральної визначеності виведені співвідношення для обчислення оцінки функціонала від невідомих значень гармонізованих процесів, значення похибки оцінки та спектральної характеристики.

Коли у задачах оцінки функціоналу від гармонізованого процесу спектральна щільність невідома, а задано лише клас допустимих спектральних щільностей, застосований мінімаксний підхід. Для мінімаксної задачі екстраполяції, інтерполяції, фільтрації знайдено співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики для деяких класів допустимих спектральних щільностей.

**Ключові слова**: гармонізована послідовність, гармонізований процес, оптимальна оцінка, спектральна характеристика, мінімаксна (робастна) оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

## ABSTRACT

**Ostapenko V.I. Estimates of functionals from harmonizable processes.**– Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality – 01.01.05 Probability theory and mathematical statistics. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, MES of Ukraine, Kyiv, 2017.

The work is devoted to investigation of the problem of optimal linear estimation of functionals of unknown values of harmonizable sequences and processes. The solutions to the extrapolation, interpolation and filtering problems are proposed under the condition of spectral certainty as well as under the condition of spectral uncertainty. Problems of estimating functionals from unknown values of harmonizable sequences are formulated and solved. Among problems of functional evaluations, the problems of extrapolation, interpolation and filtration for harmonizable sequences are considered. In the classical approach, when spectral density is known, we find formulas and relation for estimates of functionals from harmonizable sequences, their error and spectral characteristics.

Among the modern trends of the progress of the theory of stochastic processes, estimations of stochastic processes are very important. Symmetric $\alpha$-stable harmoni-

zable processes are a generalization of stationary processes. In particular, in the case of $\alpha = 2$, the harmonizable processes are stationary random processes.

The results of the spectral theory for harmnizable sequences and processes are summarized briefly. An essential difference from the case with stationary processes is the absence of the linearity property by the second argument of the covariation between join symmetric $\alpha$-stable random values.

The obtained results are based on isomorphism between the space of harmonizable symmetric $\alpha$-stable variables and the space of integrable functions in the power $\alpha$.

Classically, the solution to the problems of estimation of functionalities is based on the assumption that the form of spectral densities of stochastic sequences and processes is exactly known. However, in real problems in practice, researcher does not have such information often. One way to overcome such a complication may be to replace the assumption of a known spectral density on the assumption of a known class of admissible spectral densities $D$. In this case, it is more appropriate to work with estimates that are optimal for all densities of the class $D$. Such estimates are called minimax, since they minimize the maximum error value.

In the case of spectral certainty, when the spectral density of a sequence is known, we find formulas and relations for the estimation of functionals from harmonizable sequences, its errors and the search for a spectral characteristic for the problem of extrapolation (prediction).

Also investigated the problem of interpolation, the search for an estimation for missed values. In this case, based on the assumption of a known spectral density, formulas and relations for estimation, error of estimation, spectral characteristic are found. For fixed numerical values of parameters, numerical values of error and spectral characteristics were found.

For a filtration problem based on known spectral density, a formula for estimation, spectral characteristic and estimation error are found.

In the case of spectral uncertainty for the extrapolation, interpolation problem of harmonizable random sequences, the relations that determine the least favorable spectral densities, the minimax spectral characteristics for the some class of spectral densities were found.

The problems of estimation functionals from unknown values of harmonizable random processes are investigated. In the case of spectral certainty, formulas that determine the spectral characteristics and values of errors of estimates of functionals are obtained.

For a minimax extrapolation, interpolation, filtration problem, relations were found for the least favorable spectral densities and the minimax spectral characteristics for a class.

The main results presented in the dissertation work are the following:

— found estimation of functional in problem of extrapolation $\alpha$-stable, harmonizable random processes in discrete and continuous time in the case of known and unknown spectral density;

— found estimation of functional in problem of interpolation $\alpha$-stable, harmonizable random processes in discrete and continuous time in the case of known and unknown spectral density;

— found estimation of functional in problem of filtration $\alpha$-stable, harmonizable random processes in discrete and continuous time in the case of known and unknown spectral density.

Results described in PhD Thesis have theoretical significance for stochastic calculus and practical application to the problems of system analysis, signal processing, econometrics.

**Keywords**: harmonizable sequence, harmonizable process, optimal estimate, spectral characteristic, mean square error, minimax-robust estimate, least favorable spectral density, minimax-robust spectral characteristic.

## Список публікацій здобувача

*Статті у наукових фахових виданнях*


1. *Moklyachuk M. P.* Minimax extrapolation problem for harmonizable stable processes with noise observations / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics and Mathematics. — 2016. – №1. – P. 15-23.
2. *Моклячук М. П.* Мінімаксна фільтрація гармонізованих випадкових послідовностей / М. П. Моклячук, В. І. Остапенко // Науковий вісник Ужгородського університету: Серія Математика і Інформатика – 2016. – №1(28). – С. 80-89.
3. *Моклячук М. П.* Мінімаксна фільтрація гармонізованих випадкових процесів / М. П. Моклячук, В. І. Остапенко // Науковий вісник Ужгородського університету: Серія Математика і Інформатика – 2016. – №2(29). – С. 130-139.
4. *Moklyachuk M. P.* Minimax interpolation of harmonizable sequences / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2016. – № 92. – P. 135-146.
5. *Moklyachuk M. P.* Minimax Interpolation Problem for Harmonizable Stable Sequences with Noise Observations / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Journal of Applied Mathematics and Statistics. — 2015. – №1. – P. 21 - 42.


*Тези наукових доповідей*


6. *Moklyachuk M. P.* Interpolation Problem for Harmonizable Stable Sequences / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 4th International Scientific Conference of Students and Young Scientists, Kyiv:Bukrek, Ukraine: Coference materials. – 2014. — P. 151-157.
7. *Moklyachuk M. P.* Minimax Interpolation Problem for Harmonizable Stable Sequences / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Proceedings of the

International Conference Probability, Reliability and Stochastic Optimization, Kyiv. — 2015. – P. 43.

8. *Moklyachuk M. P.* Extrapolation Problem for Harmonizable Stable Stochastic Sequences / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Proceedings of the International Conference Stochastic Processes in Abstract Spaces, Kyiv — 2015. — P. 38.

9. *Моклячук М. П.* Мінімаксна інтерполяція гармонізованих $\alpha-$ стійких процесів зі спостереженнями із шумом / М. П. Моклячук, В. І. Остапенко // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Івано-Франківськ — 2017. — С. 42.

10. *Остапенко В. І.* Задача мінімаксної екстраполяції гармонізованих процесів / В. І. Остапенко // XV Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2017», Математика, Статистика та Механіка, Прикладна математика та комп'ютерні науки, Київ — 2017. — С. 70-71.

# ЗМІСТ

# ВСТУП

**Актуальність теми.** Останнім часом зростає інтерес до досліджень нестаціонарних випадкових процесів. Задачі пов'язані із оцінками гармонізованих $\alpha$-стійких випадкових послідовностей та процесів розглядали С. Камбаніс [47], М. Масані [83], С. Раджупут [103], Й. Хосойа [63], А. Верон [115]. Розподіли, що пов'язані із стійкими процесами часто з'являються у різноманітних моделях економіки, біології та теорії обробки сигналів [15]. Актуальність гармонізованих процесів пов'язана із можливим застосуванням до теорії обробки сигналів [44] та задач системного аналізу [50].

Класично, задачі оцінювання невідомих значень випадкових процесів базуються на припущенні, що спектральні щільності процесів точно відомі. Такий підхід можна простежити у роботах А. М. Колмогорова, Н. Вінера, А. Яглома, С. Камбаніса, Е. Масрі, А. Верона та ін. Також варто відзначити мінімаксний підхід, що полягає у заміні припущення про відому спектральну щільність на припущення про відомий клас допустимих спектральних щільностей, що використовується у роботах К. Кассама та Х. Пура, У. Гренандера, М. Моклячука, О. Масютки, І. Голіченко, М. Луза та ін. Вперше такий підхід був запропонований У. Гренандером у 1957 році і стосувався пошуку оптимальної оцінки лінійного функціонала від невідомих значень стаціонарного процесу. Разом із зростанням кількості прикладних задач оцінювання невідомих значень процесів зростала потреба у розвитку запропонованого методу оцінювання. Досить детальний огляд робастних методів обробки сигналів, розроблених до 1985 року, міститься в оглядовій статті С. А. Кассама та Г. В. Пура.

У дисертаційній роботі досліджуються задачі оптимального лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень випадкових гармонізованих послідовностей та процесів. Задачі розв'язано у випадках спектральної визначеності та спектральної невизначеності, коли спектральні щільності гармонізованих послідовностей та процесів невідомі, а задані лише класи допустимих щільностей.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана в рамках державної бюджетної науково-дослідної теми № 11БФ038-02 "Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей" (номер державної реєстрації 0111U006561) і № 16БФ038-02 «Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем» (номер державної реєстрації 0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт "Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів".

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є розв'язання задач оптимального лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень гармонізованих послідовностей та процесів. Досліджуються задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації гармонізованих послідовностей та процесів. Задачею дослідження є виведення формул для обчислення похибок та спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів за умови, що спектральна структура процесів відома, та встановлення співвідношень для знаходження найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних (робастних) спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів в умовах спектральної невизначеності, коли задано лише класи допустимих щільностей.

**Об'єктом дослідження** є стохастичні гармонізовані послідовності та процеси.

**Предметом дослідження** є задачі оптимального лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень гармонізованих стохастичних послідовностей та процесів.

**Методи дослідження.** У роботі використовуються положення спектральної теорії гармонізованих послідовностей та процесів для знаходження оптимальних оцінок та значень похибок оцінок. Спектральні характеристики оптимальних оцінок в умовах спектральної визначеності знаходяться, використовуючи метод проекції в $L^p$ просторі. В умовах спектральної невизначеності використовуються методи оптимізації для розв'язання екстремальних задач.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Усі результати, отримані в дисертації, є новими. Основні з них наступні:

— знайдено оцінки функціоналів для задачі екстраполяції гармонізованих $\alpha$-стійких симетричних випадкових процесів у дискретному та неперервному часі у випадку відомої і невідомої спектральної щільності;

— знайдено оцінки функціоналів для задачі інтерполяції гармонізованих $\alpha$-стійких симетричних випадкових процесів у дискретному та неперервному часі у випадку відомої і невідомої спектральної щільності;

— знайдено оцінки функціоналів для задачі фільтрації гармонізованих $\alpha$-стійких симетричних випадкових процесів у дискретному та неперервному часі у випадку відомої і невідомої спектральної щільності.

**Практичне значення отриманих результатів.** Розділ теорії стохастичних процесів розширений новими підходами та методами розв'язання задач оцінювання функціоналів від $\alpha$-стійких гармонізованих випадкових процесів. Отримані формули для знаходження похибок та спектральних характеристик оцінок у задачах інтерполяції, екстраполяції, фільтрації функціоналів від $\alpha$-стійких гармонізованих випадкових процесів у випадку відомої та невідомої спектральної щільності. Були отримані розв'язки задач інтерполяції, екстраполяції, фільтрації для деяких класів спектральних щільностей при застосуванні мінімаксного підходу.

**Особистий внесок здобувача.** Усі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. За результатами дисертації опубліковано п'ять робіт у фахових виданнях. Всі роботи підготовані у співавторстві з науковим керівником, професором Моклячуком М.П. В роботах співавтору належать постановка задач, загальне керівництво роботою та обговорення результатів.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації доповідались та обговорювалися на:

— Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, м. Київ, 25-27 квітня 2013;

— Міжнародна наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Теоретичні та прикладні аспекти кібернетики", Київ, 21-24 листопада 2014;

— Міжнародна конференція ймовірність, надійність та стохастична оптимізація, Київ, 7-10 квітня 2015;

— Міжнародна конференція стохастичні процеси в абстрактних просторах, Київ, 14-16 жовтня 2015;

— засіданні наукового семінару кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, 2016);

— Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Ворохта, 22 - 25 лютого 2017;

— XV Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2017», Математика, Статистика та Механіка, Прикладна математика та комп'ютерні науки, м.Київ, квітень 2017;

— засідання наукового семінару кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Наконечного О. Г. (м. Київ, 2017);

— засідання наукового семінару кафедри теоретичної та прикладної статистики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка під керівництвом проф. Єлейка Я. І. (м. Львів, 2017).

**Публікації.** За результатами дисертаційної роботи опубліковано:

— 5 статей [93] - [95], [32], [33] у фахових виданнях, серед яких 4 статті [93], [32], [33], [94] у наукових фахових виданнях України, з яких 1 стаття [94] надруковано у журналі, який включено до наукометричної бази Scopus, і 1 стаття [95] у фаховому іноземному виданні;

— 5 тез доповідей на наукових конференціях [96] - [98], [34], [36].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається з анотації, вступу, 3 розділів, які містять підрозділи, висновків, списку використаних джерел, який містить 124 найменувань та додатку. Повний обсяг роботи становить 142 сторінки, в тому числі 116 сторінок основного тексту.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, темами, планами, встановлено мету, задачі, предмет, об'єкт та методи дослідження, коротко викладені основні результати роботи, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих в роботі результатів та особистий внесок здобувача, наведено список публікацій здобувача.

**У першому розділі** наводиться огляд літератури, пов'язаної з темою дисертаційної роботи та спорідненими питаннями, а також коротко аналізується зміст основних робіт, в яких вивчаються проблеми, що досліджуються в дисертації.

У першому підрозділі **другого розділу** наведено означення гармонізованої стохастичної послідовності та викладено основні питання спектральної теорії таких послідовностей.

У другому підрозділі **другого розділу** розв'язано задачу оптимального лінійного оцінювання функціоналів

$$A\xi \ = \ \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_j = \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{i\theta}) dZ^{\xi}(\theta),$$

$$A(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ij\theta},$$

що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \ldots,$ гармонізованої симетричної $\alpha$-стійкої випадкової послідовності $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ за спостереженнями послідовності $\{\xi_k + \eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ у точках часу $k = -1, -2, \ldots$. Послідовності $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності $f(\theta) > 0$ та $g(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) + g(\theta))^{-1/(\alpha-1)} d\theta < \infty. \tag{1}$$

Із ізоморфізму між просторами $H(\xi + \eta)$ та $L^{\alpha}(f + g)$ маємо, що оптимальна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi$ має вигляд

$$\hat{A}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left( dZ^{\xi}(\theta) + dZ^{\eta}(\theta) \right). \tag{2}$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оцінки визначається з рівняння

$$\left( A(e^{i\theta}) - h(\theta) \right)^{<\alpha-1>} f(\theta) - (h(\theta))^{<\alpha-1>} g(\theta) = \overline{C(e^{i\theta})}, \tag{3}$$

$$C(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{ij\theta},$$

де $c_j$ невідомі коефіцієнти, що визначаються із рівнянь

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta k} \ h(\theta) d\theta = 0, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{4}$$

Похибка оптимальної оцінки функціонала обчислюється за наступною формулою

$$\left\|A\xi-\hat{A}\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha}=\int_{-\pi}^{\pi}\left|A(e^{i\theta})-h(\theta)\right|^{\alpha}f(\theta)d\theta+\int_{-\pi}^{\pi}|h(\theta)|^{\alpha}g(\theta)d\theta. \tag{5}$$

**Теорема 0.1.** *Нехай $\{\xi_k, k\in\mathbb{Z}\}$ та $\{\eta_k, k\in\mathbb{Z}\}$ є взаємно незалежними гармонізованими симетричними $\alpha$-стійкими випадковими послідовностями, які мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності $f(\theta)>0$ та $g(\theta)>0$, що задовольняють умову мінімальності* (2.18). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty}a_j\xi_j$, що залежить від невідомих значень послідовності $\xi_j, j=0,1,\ldots,$ за спостереженнями послідовності $\{\xi_k+\eta_k, k\in\mathbb{Z}\}$ у точках часу $k=-1,-2,\ldots,$ обчислюється за формулою* (2). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ оцінки визначається формулою* (3), *де невідомі коефіцієнти $c_j$ визначається із системи рівнянь* (4). *Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою* (5).

Як наслідок із попередньої теореми маємо наступні результати для випадку спостереження без шуму.

Оптимальна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi$ має форму

$$\hat{A}\xi=\int_{-\pi}^{\pi}h(\theta)dZ^{\xi}(\theta). \tag{6}$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала обчислюється за формулою

$$h(\theta)=A(e^{i\theta})-\left(\overline{C(e^{i\theta})}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>}(f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \tag{7}$$

де невідомі коефіцієнти $c_j$, $j=0,1,\ldots,$ визначаються із наступної системи рівнянь

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta k}\left[\left[\sum_{j=0}^{\infty}a_je^{ij\theta}\right]-\left[\sum_{j=0}^{\infty}\overline{c}_je^{-ij\theta}\right]^{<\frac{1}{\alpha-1}>}[f(\theta)]^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right]d\theta=0, \tag{8}$$

$$k=0,1,\ldots$$

Похибка оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\| A_N\xi - \hat{A}\xi \right\|_\alpha^\alpha = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \left( \overline{C(e^{i\theta})} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^\alpha f(\theta) d\theta. \tag{9}$$

**Наслідок 0.1.** *Нехай* $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ *гармонізована симетрична* $\alpha$*-стійка випадкова послідовність, що має абсолютно неперервну спектральну міру і спектральну щільність* $f(\theta) > 0$, *що задовольняє умову мінімальності* (2.18) *при* $g(\theta) = 0$. *Оптимальна лінійна оцінка* $\hat{A}\xi$ *функціоналу* $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\xi_j$, *що залежить від невідомих значень* $\xi_j, j = 0, 1, \ldots$, *послідовності за спостереженнями послідовності* $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ *точках часу* $k = -1, -2, \ldots$, *має форму* (2.14). *Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}\xi$ *функціоналу обчислюється за формулою* (2.15), *де невідомі коефіцієнти* $c_j$, $j = 0, 1, \ldots$, *визначаються системою рівнянь* (2.16). *Похибка оптимальної лінійної оцінки функціоналу визначається формулою* (2.17).

У наступних підрозділах 2.2.3 та 2.2.4 було застосовано дані теореми до стаціонарних послідовностей та отримано відомі результати для оцінки функціоналів, спектральних щільностей та похибок оцінок.

**Означення 0.1.** Для даного класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральні щільності $f_0(\theta) \in D_f$, $g_0(\theta) \in D_g$ називають найменш сприятливими в класі $D = D_f \times D_g$ для оптимальної лінійної оцінки $A\xi$, якщо має місце наступне співвідношення

$$\Delta(f_0, g_0) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f, g); f, g).$$

**Означення 0.2.** Для даного класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ оптимальної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$ називається мінімаксною (робастною) для оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$, якщо виконуються наступні співвідношення:

$$h^0 \in H_D = \bigcap_{(f,g) \in D_f \times D_g} L^\alpha(f + g),$$

$$\min_{h\in H_D}\max_{(f,g)\in D}\Delta\left(h;f,g\right)=\max_{(f,g)\in D}\Delta\left(h^0;f,g\right).$$

Використовуючи метод множників Лагранжа і субдиференціали функціоналів описуємо співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності в деяких спеціальних класах спектральних щільностей. Найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\theta)$, $g_0(\theta)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0=h(f_0,g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta\left(h;f,g\right)$ на множині $H_D\times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta\left(h;f_0,g_0\right)\geqslant\Delta\left(h^0;f_0,g_0\right)\geqslant\Delta\left(h^0;f,g\right)$$

$$\forall h\in H_D,\forall f\in D_f,\forall g\in D_g$$

справедливо, якщо $h^0=h(f_0,g_0)$ та $h(f_0,g_0)\in H_D$, де $(f_0,g_0)$ є розв'язком задачі оптимізації з обмеженнями

$$\max_{(f,g)\in D_f\times D_g}\Delta\left(h(f_0,g_0);f,g\right)=\Delta\left(h(f_0,g_0);f_0,g_0\right),\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\Delta\left(h(f_0,g_0);f,g\right)&=\left\|A\xi-\hat{A}\xi\right\|_\alpha^\alpha\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\left|A(e^{i\theta})-h^0(\theta)\right|^\alpha f(\theta)d\theta+\int_{-\pi}^{\pi}\left|h^0(\theta)\right|^\alpha g(\theta)d\theta.\end{aligned}\tag{11}$$

Підсумовуючи отримані формули і введені позначення, приходимо до висновку, що такі леми справедливі

**Лема 0.1.** *Нехай $\{\xi_k,k\in\mathbb{Z}\}$ та $\{\eta_k,k\in\mathbb{Z}\}$ є взаємно незалежними гармонізованими симетричними $\alpha$-стійкими випадковими послідовностями, що мають абсолютно неперервні спектральні міри і спектральні щільності $f_0(\theta)>0$ та $g_0(\theta)>0$, які задовольняють умову мінімальності* (2.18)*. Нехай спектральні щільності $(f_0,g_0)\in D_f\times D_g$ дають розв'язок задачі оптимізації із обмеженнями* (2.29)*. Спектральні щільності $(f_0,g_0)$ є найменш сприятливими спектральними щільностями в класі $D_f\times D_g$ та $h^0=h(f_0,g_0)$ є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$, що залежить від невідомих* *значень послідовності* $\xi_j, j = 0, 1, \dots,$ *за спостереженнями послідовності* $\{\xi_k + \eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ *у точках часу* $k = -1, -2, \dots,$ *якщо* $h^0 = h(f_0, g_0) \in H_D$.

**Лема 0.2.** *Нехай* $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ *є гармонізованою симетричною* $\alpha$*-стійкою випадковою послідовністю, що має абсолютно неперервну спектральну міру та спектральну щільність* $f_0(\theta) > 0$*, що задовольняє умову мінімальності* (2.18) *при* $g(\theta) = 0$*. Нехай спектральна щільність* $f_0 \in D_f$ *дає розв'язок задачі оптимізації з обмеженнями*

$$\max_{f \in D_f} \Delta\left(h(f_0); f\right) = \Delta\left(h(f_0); f_0\right), \tag{12}$$

$$\Delta\left(h(f_0); f\right) = \left\|A\xi - \hat{A}\xi\right\|_\alpha^\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\left(C^0(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} \left(f_0(\theta)\right)^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right|^\alpha f(\theta) d\theta. \tag{13}$$

*Спектральна щільність* $f_0$ *є найменш сприятливою спектральною щільністю* $D_f$ *та* $h^0 = h(f_0)$ *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}\xi$ *функціонала* $A\xi$*, що залежить від невідомих значень* $\xi_j, j = 0, 1, \dots,$ *послідовності за спостереженнями послідовності* $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ *у точках часу* $k = -1, -2, \dots,$ *якщо* $h^0 = h(f_0) \in H_D$.

Далі розв'язано задачу мінімаксного (робастного) оцінювання функціонала $A\xi$ у випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\theta)$ належать класу допустимих спектральних щільностей $D_f^\beta \times D_g^\varepsilon$:

$$D_f^\beta = \left\{ f(\theta) \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta))^\beta d\theta = P_1 \right.\right\},$$

$$D_g^\varepsilon = \left\{ g(\theta) \left| g(\theta) = (1-\varepsilon) g_1(\theta) + \varepsilon w(\theta), \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\theta = P_2 \right.\right\}.$$

У третьому підрозділі **другого розділу** досліджено задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$

$$A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j \xi_j = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta}) dZ(\theta),$$

$$A_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{N} a_j e^{ij\theta},$$

що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \dots, N$, гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ за спостереженнями послідовності $\xi_n$ в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$.

Оптимальну оцінку $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ шукаємо у вигляді

$$\hat{A}_N\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) dZ(\theta). \tag{14}$$

Спектральна характеристика обчислюється із наступних рівнянь

$$h(\theta) = A_N(e^{i\theta}) - \left(C_N(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \tag{15}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta k}\ h(\theta) d\theta = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N. \tag{16}$$

Похибка оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\| A_N\xi - \hat{A}_N\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(C_N(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta. \tag{17}$$

Справедлива наступна теорема.

**Теорема 0.2.** *Нехай гармонізована симетрична $\alpha$–стійка, $HS\alpha S$, стохастична послідовність $\{\xi(n), n \in \mathbb{Z}\}$ має абсолютно неперервну спектральну міру $\mu(\theta)$, що має спектральну щільність $f(\theta) > 0$, яка задовольняє умову* (2.18) *при $g(\theta) = 0$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j\xi_j$, що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \dots, N$, послідовності $\xi_n$ за спостереженнями послідовності $\xi_n$ в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$ обчислюється за формулою* (2.59). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд* (2.61), *де невідомі коефіцієнти $c_j, j = 0, \dots, N$, визначаються з рівняння* (2.62). *Варіація оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою* (2.64).

Розглянутий приклад задачі оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_1\xi = a_0\xi_0 + a_1\xi_1,$$

що залежить від невідомих значень $\xi_0, \xi_1$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$, з $\alpha = \frac{4}{3}$ та спектральною щільністю $f(\theta) = |e^{i\theta} + d|^{-\frac{4}{3}}, -1 < d < 1$, за спостереженнями послідовності в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.

Розглянутий приклад задачі оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_N\xi \ = \ \sum_{j=0}^{N} a_j\xi_j,$$

що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \dots, N$, гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n$ з $\alpha = \frac{4}{3}$ та спектральною щільністю $f(\theta)$ за спостереженнями послідовності в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$.

У підрозділах 2.3.3 - 2.3.5 розв'язано задачу мінімаксного (робастного) оцінювання функціонала $A_N\xi$ у тому випадку, коли спектральна щільність $f(\lambda)$ належать множинам допустимих спектральних щільностей:

$$D_0 = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = P \right\},$$

$$D_M^- = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\theta) cos(m\theta) d\theta = r_m, m = 0, \dots, M \right\},$$

$$D_\beta = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta))^\beta \, d\theta = P \right\}, \quad \beta \neq \frac{-1}{\alpha - 1}, \beta \neq 1.$$

У четвертому підрозділі **другого розділу** досліджена задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів

$$A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a_k\xi_{-k} = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta}) dZ(\theta),$$

$$A_N(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-ik\theta},$$

що залежить від невідомих значень гармонізованої $\alpha-$стійкої послідовності $\xi_k$ за спостереженнями послідовності $\xi_n+\eta_n, n\in\mathbb{Z}$ у моменти часу $n=0,-1,-2,\dots$

Оцінка має наступний вигляд

$$\hat{A}_N\xi=\int\limits_{-\pi}^{\pi}h(\theta)\left(dZ^{\xi}(\theta)+dZ^{\eta}(\theta)\right). \tag{18}$$

Спектральна характеристика визначається із співвідношення

$$\left(A_N(e^{i\theta})-h(\theta)\right)^{<\alpha-1>}f(\theta)-(h(\theta))^{<\alpha-1>}g(\theta)=\overline{C(e^{i\theta})}, \tag{19}$$

$$C(e^{i\theta})=\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{i(k+1)\theta},$$

де $c_k$ – невідомі коефіцієнти, які визначаються із умови

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n}h(\theta)d\theta=0, \quad n=1,2,\dots. \tag{20}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_N\xi-A_N\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|A_N(e^{i\theta})-h(\theta)\right|^{\alpha}f(\theta)d\theta+\int\limits_{-\pi}^{\pi}|h(\theta)|^{\alpha}g(\theta)d\theta. \tag{21}$$

**Теорема 0.3.** *Нехай $\xi_n, n\in\mathbb{Z}$ та $\eta_n, n\in\mathbb{Z}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні послідовності, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta),\nu(\theta)$ із спектральними щільностями $f(\theta)>0, g(\theta)>0$ відповідно, які задовольняють умову мінімальності* (2.18). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi=\int_{-\pi}^{\pi}A_N(e^{i\theta})dZ^{\xi}(\theta)$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n$ за спостереженнями послідовності $\xi_n+\eta_n$ у точках $n=0,-1,-2,\dots$ обчислюється за формулою* (18). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається із рівнянь* (19), *де невідомі коефіцієнти $c_k, k=1,2,\dots$, визначаються рівняннями* (20). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (21).

У підрозділах 2.4.4, 2.4.5 розв'язано задачу мінімаксного (робастного) оцінювання функціонала $A_N\xi$ у тому випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать множинам допустимих спектральних щільностей:

$$D_f^0 = \left\{ f(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \leqslant P_1 \right\},$$

$$D_g^0 = \left\{ g(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) \leqslant P_2 \right\};$$

$$D_u^v = \left\{ f(\theta) | u(\theta) \leqslant f(\theta) \leqslant v(\theta), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda \leqslant P_1 \right\},$$

$$D_\epsilon = \left\{ g(\theta) | g(\theta) = (1-\epsilon) g_1(\theta) + \epsilon \omega(\theta), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \leqslant P_2 \right\}.$$

У першому підрозділі **третього розділу** наведено означення випадкового гармонізованого процесу та викладено основні положення спектральної теорії таких процесів.

У другому підрозділі **третього розділу** розв'язано задачу оптимального оцінювання лінійних функціоналів

$$A^{extr}\xi = \int_0^\infty a(t)\xi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^{extr}(\theta) dZ^\xi(\theta),$$

$$A^{extr}(\theta) = \int_0^\infty a(t) e^{it\theta} dt,$$

що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$-процесу $\xi(t), t > 0$, за спостереженнями процесу $\{\xi(t) + \eta(t), t < 0\}$, де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ є гармонізованими симетричними $\alpha$-стійкими стохастичними процесами.

Розглядаємо задачу для взаємно незалежних гармонізованих симетричних $\alpha$-стійких випадкових процесів $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ та $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$, що мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності $f(\theta) > 0$ і $g(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(f(\theta)+g(\theta))^{\frac{1}{\alpha-1}}} d\theta < \infty, \tag{22}$$

для ненульової функції експоненціального типу

$$\gamma(\theta) = \int_{0}^{\infty} \alpha(t) e^{it\theta} dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\theta < \infty.$$

Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}^{extr}\xi$ функціоналу $A^{extr}\xi$ має вигляд

$$\hat{A}^{extr}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \left( dZ^{\xi}(\theta) + dZ^{\eta}(\theta) \right). \tag{23}$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оцінки визначається рівняннями

$$\begin{gathered} \left( A^{extr}(\theta) - h(\theta) \right)^{<\alpha-1>} f(\theta) - (h(\theta))^{<\alpha-1>} g(\theta) = \\ = \overline{C^{extr}(\theta)}, \quad C^{extr}(\theta) = \int_{0}^{\infty} c(t) e^{it\theta} dt, \end{gathered} \tag{24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t} h(\theta) d\theta = 0, t < 0. \tag{25}$$

Похибка оптимальної лінійної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\| \hat{A}^{extr}\xi - A^{extr}\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| A^{extr}(\theta) - h(\theta) \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)|^{\alpha} g(\theta) d\theta. \tag{26}$$

**Теорема 0.4.** *Нехай $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ та $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ є взаємно незалежними гармонізованими симетричними $\alpha$-стійкими стохастичними процесами, що мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності $f(\theta) > 0$ та $g(\theta) > 0$, що задовольняють умові мінімальності*

(22). *Оптимальна лінійна оцінка* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала* $A^{extr}\xi = \int_0^\infty a(t)\xi(t)dt$ *що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t > 0$, *процесу* $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ *за спостереженнями процесу* $\{\xi(t)+\eta(t), t < 0\}$ *обчислюється за формулою* (3.8). *Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *оцінки визначається рівняннями* (3.10) *та* (3.11). *Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою* (3.12).

Як наслідок із попередньої теореми отримаємо наступні результати у випадку спостережень без шуму. Оцінка має вигляд

$$\hat{A}^{extr}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)dZ^{\xi}(\theta). \tag{27}$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}^{extr}\xi$ функціонала визначається формулами

$$h(\theta) = A^{extr}(\theta) - \left(\overline{C^{extr}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \tag{28}$$

де $C^{extr}(\theta)$ визначається умовою

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t} h(\theta)d\theta = 0, t < 0. \tag{29}$$

Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою

$$\left\|\hat{A}^{extr}\xi - A^{extr}\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\left(\overline{C^{extr}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right|^{\alpha} f(\theta)d\theta. \tag{30}$$

**Наслідок 0.2.** *Нехай* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *є гармонізований симетричний* $\alpha$*-стійкий стохастичний процес, що має абсолютно неперервну спектральну міру та спектральну щільність* $f(\theta) > 0$, *що задовольняє умові мінімальності* (22) *при* $g(\theta) = 0$. *Оптимальна лінійна оцінка* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала* $A^{extr}\xi$, *що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t > 0$, *процесу* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$, *за спостереженнями процесу* $\{\xi(t), t < 0\}$ *має наступний вигляд* (3.14).

*Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала обчислюється за формулою* (3.15), *де* $C^{extr}(\theta)$ *визначається умовою* (3.16). *Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою* (3.17).

Якщо ж відомо лише клас допустимих спектральних щільностей, доцільно використовувати мінімаксний (робастний) метод оцінювання функціоналів.

У підрозділі 3.2.6 - 3.2.9 розв'язано задачу мінімаксного (робастного) оцінювання функціонала $A\xi$ у тому випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ належать класам допустимих спектральних щільностей:

$$D_1 = \left\{ f(\theta) : \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta = \gamma \right\};$$

$$D_f^{\beta} = \left\{ \{f(\theta)| \int_{-\infty}^{\infty} (f(\lambda))^{\beta} d\lambda = P_1\} \right\};$$

$$D_f^0 = \left\{ \{f(\theta)| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta \leqslant P_1\} \right\},$$

$$D_g^0 = \left\{ \{g(\theta)| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) d\theta \leqslant P_2\} \right\};$$

$$D_{2\epsilon_1} = \left\{ \{f(\theta)| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant \epsilon_1\} \right\},$$

$$D_{1\epsilon_2} = \left\{ \{g(\theta)| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda \leqslant \epsilon_2\} \right\}.$$

У третьому підрозділі **третього розділу** досліджена задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів

$$A_T^{int}\xi = \int_0^T a(t)\xi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} A_T^{int}(\theta) dZ^{\xi}(\theta),$$

$$A_T^{int}(\theta) = \int\limits_0^T a(t) e^{it\theta} dt,$$

що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ стохастичного процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$, де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні процеси.

Задачу досліджено у тому випадку, коли взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta)$ та $\nu(\theta)$ відповідно та спектральні щільності $f(\theta) > 0$, $g(\theta) > 0$ задовольняють умову мінімальності (22).

Оцінку функціонала шукаємо у вигляді

$$\hat{A}_T^{int}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \left( dZ^{\xi}(\theta) + dZ^{\eta}(\theta) \right). \tag{31}$$

Така оцінка визначається спектральною характеристикою $h(\theta)$, що належить підпростору $L_\alpha^T(f+g)$ простору $L_\alpha(f+g)$, породженому функціями $e^{it\theta}$ при $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$. Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$ мінімізує значення $||A_T^{int}\xi - \hat{A}_T^{int}\xi||_\alpha$.

Найкращим наближенням величини $A_T^{int}\xi$ у просторі $H^T(\xi+\eta)$ є проекція $\hat{A}_T^{int}\xi$ на цей простір, що визначається наступним чином:

$$[\xi(t) + \eta(t), A_T^{int}\xi - \hat{A}_T^{int}\xi]_\alpha = 0, \forall t \in \mathbb{R} \setminus [0;T].$$

Отримуємо такі співвідношення, що визначають спектральну характеристику оптимальної оцінки функціонала

$$\left(A_T(\theta) - h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} f(\theta) - \left(h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} g(\theta) = \overline{C_T^{int}(\theta)}, \tag{32}$$

$$C_T^{int}(\theta) = \int\limits_0^T c(t) e^{it\theta} dt,$$

де $c(t), t \in [0;T]-$ невідома функція, яка визначається з умови

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t} h(\theta) d\theta = 0, t \in [0;T]. \tag{33}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi\right\|_\alpha^\alpha = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |A_T(\theta) - h(\theta)|^\alpha f(\theta)d\theta + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)|^\alpha g(\theta)d\theta. \qquad (34)$$

Отже, маємо наступну теорему.

**Теорема 0.5.** *Нехай* $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ *та* $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ *взаємно незалежні гармонізовані* $\alpha$*-стійкі,* $HS\alpha S$*, стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри* $\mu(\theta), \nu(\theta)$ *та спектральні щільності* $f(\theta) > 0$*,* $g(\theta) > 0$ *відповідно, що задовольняють умову мінімальності* (22)*. Оптимальна лінійна оцінка* $\hat{A}_T^{int}\xi$ *функціонала* $A_T^{int}\xi$*, що залежить від невідомих значень* $HS\alpha S$ *процесу* $\xi(t)$ *за спостереженнями процесу* $\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0; T]$ *обчислюється за формулою* (31)*. Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *визначається із рівнянь* (32), (33)*. Похибка оцінки обчислюється за формулою* (34)*.*

Як наслідок із попередньої теореми отримаємо наступні результати у випадку спостережень без шуму.

Оптимальна оцінка функціонала має вигляд

$$\hat{A}_T^{int}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\theta)dZ^\xi(\theta). \qquad (35)$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки обчислюється за формулою

$$h(\theta) = A_T(\theta) - \left(\overline{C_T^{int}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \qquad (36)$$

$$C_T^{int}(\theta) = \int\limits_0^T c(t)e^{i\theta}d\theta,$$

де $c(t), t \in [0; T]-$ невідома функція, що знаходиться з умови

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}h(\theta)d\theta = 0, t \in [0; T]. \qquad (37)$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\| \hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi \right\|_\alpha^\alpha = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \left( \overline{C_T^{int}(\theta)} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^\alpha f(\theta) d\theta. \qquad (38)$$

**Наслідок 0.3.** *Нехай гармонізований $\alpha-$стійкий, $HS\alpha S$, стохастичний процес $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ має абсолютно неперервну спектральну міру $\mu(\theta)$, яка має спектральну щільність $f(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності мінімальності* (22) *при $g(\theta) = 0$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ - процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$ обчислюється за формулою* (3.56)*. Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається рівняннями* (3.57), (3.58)*. Похибка оцінки обчислюється за формулою* (3.59)*.*

У підрозділі 3.3.4 - 3.3.5 наведено результати для стаціонарних процесів для задачі інтерполяції.

У підрозділі 3.3.6 - 3.3.9 розв'язані задачі мінімаксного (робастного) оцінювання лінійного функціонала $A\xi$ у тому випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать класам допустимих спектральних щільностей:

$$D_u^v = \left\{ f(\theta) | v(\theta) \leqslant f(\theta \leqslant u(\theta)), \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) = P_1 \right\};$$

$$D_f^0 = \{ f(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda \leqslant P_1 \},$$

$$D_g^0 = \{ g(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda \leqslant P_2 \};$$

$$D_{2\epsilon_1} = \{ f(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant \epsilon_1 \}.$$

У четвертому підрозділі **третього розділу** досліджена задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів

$$A_T\xi = \int\limits_0^T a(t)\xi(-t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_T(\theta)dZ(\theta),$$

$$A_T(\theta) = \int\limits_0^T a(t)e^{-it\theta}dt,$$

що залежить від невідомих значень гармонізованого $\alpha-$стійкого процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$ у моменти часу $t<0$.

Оптимальна оцінка функціонала має вигляд

$$\hat{A}_T\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\left(dZ^{\xi}(\theta) + dZ^{\eta}(\theta)\right). \tag{39}$$

Спектральна характеристика визначається із рівності

$$(A_T(\theta) - h(\theta))^{<\alpha-1>} f(\theta) - (h(\theta))^{<\alpha-1>} g(\theta) = \overline{C(\theta)}, \tag{40}$$

$$C(\theta) = \int\limits_0^{\infty} c(t)e^{it\theta}dt,$$

де $c(t)$ – невідома функція, яка визначаються із умови

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}h(\theta)d\theta = 0, \quad t>0. \tag{41}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\|A_T\xi - \hat{A}_T\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |A_T(\theta)-h(\theta)|^{\alpha} f(\theta)d\theta + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)|^{\alpha} g(\theta)d\theta. \tag{42}$$

**Теорема 0.6.** *Нехай $\xi(t), t\in\mathbb{R}$ та $\eta(t), t\in\mathbb{R}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри із спектральними щільностями $f(\theta)>0, g(\theta)>0$ відповідно, які задовольняють умову мінімальності* (22). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi = \int_{-\infty}^{\infty} A_T(\theta)dZ^{\xi}(\theta)$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$*

*у точках* $t < 0$ *обчислюється за формулою* (3.85). *Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *визначається із рівнянь* (3.87), *де невідома функція* $c(t), t > 0$, *визначаються рівняннями* (3.88). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (3.89).

У підрозділі 3.4.4, 3.4.5 розв'язані задачі мінімаксного (робастного) оцінювання лінійного функціонала $A\xi$ у тому випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать класам:

$$D_u^v = \big\{f(\theta)|v(\theta) \leqslant f(\theta \leqslant u(\theta)), \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) = P_1\big\};$$

$$D_{1\epsilon_2} = \{g(\theta)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|d\lambda \leqslant \epsilon_2\},$$

$$D_{2\epsilon_1} = \{f(\theta)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant \epsilon_1\}.$$

**Подяка. Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Моклячуку Михайлу Павловичу за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу та підтримку в роботі.**

# РОЗДІЛ 1
# ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Гармонізовані стохастичні процеси є узагальненням стаціонарних процесів.

Гармонізовані процеси вперше зустрічаються у роботах М. Лоєва [75], [76]. Властивості, пов'язані з інтегральним представленням, вивчалися в статтях М. Лоєва [77] і Ю. Розанова [41]. Їх особлива роль у теорії стохастичних процесів була продемонстрована М. Рао [106].

У статті С. Камбаніса [47] наводяться основні означення та властивості гармонізованої стохастичної послідовності та демонструється побудова випадкового інтегралу за комплеснозначним симетричним $\alpha-$стійким випадковим процесом $Z = \{Z(t) : -\infty < t < \infty\}$ з незалежними приростами.

Робота С. Камбаніса та Р. Солтані [49] містить результати дослідження розкладу Вольда для стійких процесів. Наводяться теореми, що характеризують регулярність, сингулярність гармонізованих процесів. Для випадку дискретного часу побудовані лінійні прогнози для гармонізованої послідовності, а також з'ясовується неможливість побудувати розклад рухомого середнього для незалежного приросту гармонізованої послідовності.

Х. Крамер у своїй статті [54] досліджує регулярні комплексно-значні випадкові процеси використовуючи спеціальну характеристику – спектральну кратність. Вводиться число N, що називається повною спектральною кратністю процесу і є найменшим числом, для якого таке представлення існує. Показано, що кратність однозначно визначається відповідною кореляційною функцією і що завжди можна знайти гармонізований процес, що має задану кратність. У статті З. Піранашвілі [99] розглядається питання, пов'язані з аналітичністю випадкових процесів та їх різні форми представлення, формула Котельникова, тощо.

У роботі М. Мельмана [85] досліджуються основні властивості гармонізованих процесів, розглядаються процеси, що породжуються гармонізованими стохастичними процесами. Зокрема, породжені процеси також можуть бути гармонізовані. Вводиться n-й момент векторної міри і досліджуються співвідношення, що поєднують гармонізовані процеси з їх відповідними векторними мірами. Також, подано результати, що стосуються певного(не класичного) розкладу рухомого середнього; вводиться поняття похідної від гармонізованих процесів.

У статті М. Рао [107] досліджується загальні властивості деяких класів випадкових процесів, а саме гармонізованих процесів, процесів Крамера та процесів Карунена.

Також окремі властивості досліджувалися у працях А. Яглома [123], [124], А. Хансена та Л. Шарфа [62], Л. Шарфа та ін. [108].

Стаття К. Лі та М. Розенблата [74] присвячена спектральним оцінкам нестаціонарних, зокрема гармонізованих процесів, де були запропоновані консистентні оцінки.

Задачу екстраполяції гармонізованих випадкових послідовностей та процесів досліджену як розв'язок екстремальних задач у $L^p-$просторі можна знайти в роботах С. Раджпута та К. Сандберга [103]. Автори пропонують розв'язання дуальних екстремальних задач в просторі Харді $H^p$ і застосування цих результатів до задач лінійного прогнозування для гармонізованого процесу як в дискретному так і в неперервному випадку.

А. Солтані та Б. Тарамі у своїй статті [109] розглядали гармонізований симетричний $\alpha$-стійкий процес у неперервному часі. Використовуючи коваріації, можна сконструювати гільбертовий простір із елементів процесу і далі застосувати гаусівську техніку пошуку оцінки прогнозу та побудови розкладу рухомого середнього, як для стаціонарних процесів.

Стаття за авторством Р. Ченга, А. М'яме, М. Пурахмаді [52] наводить розв'язки для екстремальної задачі $\inf_f \int_0^{2\pi} |1 - f|^p w d\lambda$, де $f$ пробігає множини тригонометричних поліномів із частотами:

$$S_1 = \{\ldots, -3, -2, -1\} \bigcup \{1, 2, 3, \ldots, n\},$$

$$S_2 = \{\ldots, -3, -2, -1\} \setminus \{-n\}$$

або

$$S_2 = \{\ldots, -3, -2, -1\} \bigcup \{n\}.$$

Ці результати також можуть бути застосовані для обчислення екстраполяції гармонізованих стохастичних послідовностей.

У статті М. Пурахмаді [100] розв'язано задачу інтерполяції одного спостереження гармонізованої симетричної $\alpha-$стійкої стохастичної послідовності. Також було показано, що гармонізована симетрична $\alpha-$стійка стохастична послідовність із спектральною щільністю $f$ мінімальна тоді і тільки тоді, коли $f > 0, f^{\frac{-1}{\alpha-1}} \in L$. Робота містить формули для підрахунку оцінки інтерполяції та значення похибки.

Класичний підхід до задач інтерполяції, екстраполяції та фільтрації випадкових процесів розроблено на працях А. Колмогорова [71], Н. Вінера [116], А. Яглома [123]. Він базується на припущенні, що спектральні щільності процесів відомі. Однак, це часто не відповідає практичним реаліям. Повною інформацією про спектральні щільності процесів дослідник часто не володіє. У такій ситуації доводиться знаходити оцінки спектральних щільностей параметричними чи непараметричними методами, або підбирати такі щільності виходячи з інших міркувань. І далі проводити аналіз з цими оцінками щільностей, вважаючи їх істинними. Такий підхід, як показали К. Вастола та Г. Пур [68] є не завжди доцільним та може призвести до значної похибки оцінки.

Тому краще шукати мінімаксні оцінки для спектральних щільностей деякого класу, тобто такі оцінки, що мінімізують максимальне значення похибки. Ці ідеї можна простежити у роботах Л. Бреймана, С. Чена [45]. Численні результати з мінімаксного (робастного) оцінювання можна простежити в роботах С. Касама та Г. Пура [68].

Ю. Франке та Г. Пур [60], [58], [59] запропонували методи розв'язання задач екстраполяція та інтерполяція стаціонарних випадкових процесів на основі опуклого аналізу.

У. Гренандера можна відзначити першим, хто сформулював та розв'язав задачу екстраполяції для стаціонарних процесів методами опуклої оптимізації [61]. Він сформулював задачу як гру двох гравців $Y$ та $P$, де перший гравець обирає процес $\{y(t), t \in \mathbb{Z}\}$, а другий за спостереженнями процесу $y(t)$ при $t \leqslant 0$ будує прогноз $py$ лінійного функціоналу $Ay = \int\limits_0^1 a(t)y(t)dt$. Випадковість задана з ймовірнісними характеристиками

$$Ey(t) = 0,\ Ey^2(t) = 1.$$

Гравець $Y$ прагне до найбільшого значення виграшу $E(Ay - py)^2$, а $P$ – навпаки, прагне мінімізувати виграш першого гравця. У. Гренандер показав, що задача

$$\max_y \min_p E(Ay - py)^2 = \min_p \max_y E(Ay - py)^2 = \nu$$

має сідлову точку. Ціна гри та значення $py$ визначаються заданою функцією $a(t)$, $t \in (0, 1)$. Схожі задачі розглянуто в роботі М. Моклячука [23].

Задачі пов'язані із оцінками інтерполяції, екстраполяції для гармонізованих випадкових послідовностей та процесів буди розглянуті А. Вероном [115] та М. Пурахмаді [100] С. Камбанісом [47], С. Камбанісом та Е. Масрі [48], Й. Хосойа [63].

У роботах М. Моклячука [30] було розглянуто мінімаксні (робастні) оцінки для стаціонарних випадкових послідовностей та процесів. У роботах М. Моклячука та О. Масютки [91] розглянуті мінімаксні (робастні) оцінки для стаціонарних векторнозначних випадкових послідовностей та процесів. У роботах І. Дубовецької [9], [11] розглянуті мінімаксні (робастні) оцінки для періодично-корельованих послідовностей. У роботах І. Дубовецької та М. Моклячука [56], [13], І. Голіченко та М. Моклячука [7] розглянуті мінімаксні (робастні) оцінки для задач інтерполяції, екстраполяції, фільтрації для періодично-корельованих випадкових процесів. У роботах М. Луза та М. Моклячука [79]-[81] розглянуто мінімаксні (робастні) оцінки для задач інтерполяції, екстраполяції, фільтрації для стохастичних процесів із стаціонарними приростами.

# РОЗДІЛ 2
# ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ГАРМОНІЗОВАНИХ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

У цьому розділі подані результати дослідження задач лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень гармонізованих послідовностей. Задачі досліджено у випадку спектральної визначеності, коли вигляд спектральних щільностей точно відомий, та у випадку спектральної невизначеності, коли задано лише класи допустимих спектральних щільностей. За умови спектральної визначеності знайдено формули та співвідношення для обчислення похибок оцінок, спектральних характеристик оптимальних лінійних оцінок функціоналів. У випадку спектральної невизначеності встановлено співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності у заданих класах допустимих щільностей та відповідні мінімаксні спектральні характеристики оцінок. Отримані результати дослідження задач оцінювання невідомих значень від функціоналів від гармонізованих послідовностей опубліковано у роботах [32], [94], [95].

## 2.1. Гармонізовані симетричні $\alpha-$стійкі випадкові послідовності

У даному підрозділі наведено основні означення, властивості та твердження теорії гармонізованих послідовностей, які опубліковані у роботах [100], [47], [48], [49].

**Означення 2.1 (Симетрична $\alpha$-стійка випадкова величина).** Дійсна випадкова величина $\xi$ називається симетричною $\alpha$-стійкою, $S\alpha S$, якщо її характеристична функція має вигляд $Eexp(it\xi) = exp(-c|t|^{\alpha})$, де $c \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$.

Дійсні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ сумісно симетричні $\alpha$-стійкі, $S\alpha S$, якщо всі лінійні комбінації $\sum_{k=1}^{n} a_k\xi_k$ є симетричними $\alpha$-стійкими, $S\alpha S$, або, що еквівалентно, коли характеристична функція вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ має вигляд

$$\phi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = Eexp(i\sum t_k\xi_k) = exp\{-\int |\sum t_k x_k|^{\alpha} d\Gamma_{\vec{\xi}}(\vec{x})\},$$

де $t_1, \ldots, t_n$– дійсні числа, а $\Gamma_{\vec{\xi}}(\cdot)$ – це міра, що визначена на одиничній сфері $S_n \in R^n$.

Комплекснозначні випадкові величини сумісно симетричні $\alpha$-стійкі, $S\alpha S$, якщо їх дійсні та уявні частини є сумісно симетричними $\alpha$-стійкими [47], [49].

**Означення 2.2 (Симетрична $\alpha$-стійка стохастична послідовність).** Стохастична послідовність $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ називається симетричною $\alpha$-стійкою, $S\alpha S$, стохастичною послідовністю, якщо всі лінійні комбінації $\sum_{k=1}^{n} a_k\xi_k$ є $S\alpha S$ випадковими величинами.

Для сумісно $S\alpha S$ випадкових величин $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ та $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ коваріація $\xi$ та $\eta$ визначається за формулою

$$[\xi, \eta]_{\alpha} = \int_{S_4} (x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2)^{<\alpha-1>} d\Gamma_{\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2}(x_1, x_2, y_1, y_2),$$

де $z^{<\beta>} = |z|^{\beta-1}\bar{z}$ з комплексними числами $z$ та $\beta > 0$.

Коваріація не обов'язково симетрична та лінійна за другим аргументом [115]. Для сумісно $S\alpha S$ випадкових величин $\xi, \xi_1, \xi_2, \eta$ маємо

$$[\xi_1 + \xi_2, \eta]_{\alpha} = [\xi_1, \eta]_{\alpha} + [\xi_2, \eta]_{\alpha},$$

$$|[\xi, \eta]_{\alpha}| \leqslant ||\xi||_{\alpha} ||\eta||_{\alpha}^{\alpha-1}. \tag{2.1}$$

Функція $||\xi||_{\alpha} = [\xi, \xi]_{\alpha}^{1/\alpha}$ є нормою в лінійному просторі $S\alpha S$ випадкових величин, що еквівалентна збіжності за ймовірністю. Зазначимо, що $||\cdot||_{\alpha}$ не обов'язково є звичайною $L^{\alpha}$ нормою.

Наведемо найпростіші властивості функції $z^{<\beta>}$, що випливають із означення $z^{<\beta>} = |z|^{\beta-1}\bar{z}$.

**Лема 2.1.** *Нехай $z, x, y$ – комплексні числа та нехай $\beta > 0$. Тоді справджуються наступні властивості:*

— $|z|^{<\beta>} = z \cdot z^{<\beta-1>}$,

— $\left||z|^{<\beta>}\right| = |z|^{<\beta>}$ ,

— *якщо* $z^{<\beta>} = v, z = v^{<1/\beta>} = |v|^{(1-\beta)/\beta}\bar{v}$,

— $z^{<1>} = \bar{z}$,

— *якщо* $z \neq 0$, *то* $z^{<\alpha>}z^{<\beta>} = \frac{\bar{z}}{|z|}z^{<\alpha+\beta>}$,

— *якщо* $z \neq 0$, *то* $\frac{z^{<\alpha>}}{z^{<\beta>}} = \frac{z}{|z|}z^{<\alpha-\beta>}$,

— $(cz)^{<\alpha>} = c^\alpha z^{<\alpha>}, c \in \mathbb{R}$,

— $(z^{<\alpha>})^{<\beta>} = \bar{z}^{<\alpha\beta>}$,

— $(xy)^{<\alpha>} = x^{<\alpha>}y^{<\alpha>}$,

— $(z^\alpha)^{<\beta>} = (z^{<\beta>})^\alpha$,

— $(z^{<\alpha>})^\beta = (z^\beta)^{<\alpha>}$,

— $|z^{<\alpha>}|^\beta = |z|^{\alpha\beta}$,

— $(x+y)^{<\alpha>} = \bar{x}|x+y|^{\alpha-1} + \bar{y}|x+y|^{\alpha-1}$.

Розглянемо комплеснозначний $S\alpha S$ випадковий процес $Z = \{Z(t) : -\infty < t < \infty\}$ з незалежними приростами. Спектральна міра процесу $Z$ визначається за формулою $\mu\{(s,t]\} = \|Z(t) - Z(s)\|_\alpha^\alpha$. Для всіх $f \in L^\alpha(\mu)$ можна визначити інтеграли $\int f(t)dZ(t)$, що мають такі властивості [47], [49]:

$$\left\|\int fdZ\right\|_\alpha^\alpha = \int |f|^\alpha d\mu,$$

$$\left[\int fdZ, \int gdZ\right]_\alpha = \int f(g)^{<\alpha-1>}d\mu.$$

**Означення 2.3 (Гармонізована симетрична $\alpha$-стійка стохастична послідовність).** Симетрична $\alpha$-стійка, $S\alpha S$, стохастична послідовність $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ називається гармонізованою, $HS\alpha S$, якщо існує $S\alpha S$ процес $Z = \{Z(\theta); \theta \in [-\pi, \pi]\}$ з незалежними приростами і скінченна міра $\mu$ такі, що послідовність $\xi_n$ допускає спектральний розклад (може бути записана у вигляді)

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}dZ(\theta), n \in \mathbb{Z},$$

а її коваріація має спектральний розклад

$$[\xi_n, \xi_m]_\alpha = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\mu(\theta), m, n \in \mathbb{Z}.$$

Зауважимо, що $HS\alpha S$ стохастична послідовність не обов'язково стаціонарна. Проте при $\alpha = 2$ стохастична $HS\alpha S$ послідовність стаціонарна і гаусівська.

Розглядатимо $HS\alpha S$ послідовності лише для $1 < \alpha \leqslant 2$.

Позначимо через $H(\xi)$ замкнутий за нормою $\| \cdot \|_\alpha$ лінійний многовид, породжений всіма значеннями $HS\alpha S$ послідовності $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Із спектрального розкладу $HS\alpha S$ послідовності $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ випливає, що відображення $\xi_n \leftrightarrow e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$, можна розширити до ізоморфізму між просторами $H(\xi)$ та $L^\alpha(\mu)$ [100]. При такому ізоморфізмі кожному елементу $\eta \in H(\xi)$ відповідає єдиний елемент $h \in L^\alpha(\mu)$ і при цьому $\eta = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) dZ(\theta)$.

Для кожного замкнутого лінійного підпростору $M \subseteq L^\alpha(\mu)$ та $h \in L^\alpha(\mu)$ існує єдиний елемент підпростору $M$, що знаходиться на мінімальній відстані від $h$. Такий елемент називається проекцією $h$ на $M$ або найкращою апроксимацією елемента $h$ в $M$. Ця проекція позначається $P_M h$ та визначається єдиним чином з умови [100].

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \left(h(\theta) - P_M h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} d\mu(\theta) = 0 \quad \forall g \in M. \tag{2.2}$$

Аналогічно, для $HS\alpha S$ стохастичної послідовності $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ та замкнутого лінійного підпростору $H^N(\xi)$ простору $H(\xi)$ існує єдиний елемент $\hat{\xi}_n$ підпростору $H^N(\xi)$ який мінімізує відстань до $\xi_n$ та визначається єдиним чином з умови

$$\left[\eta, \xi_n - \hat{\xi}_n\right]_\alpha = 0 \quad \forall \eta \in H^N(\xi). \tag{2.3}$$

Оскільки коваріація лінійна за першим аргументом із останнього співвідношення отримаємо, що

$$||\xi_n - \hat{\xi}_n||_\alpha^\alpha = \left[\xi_n, \xi_n - \hat{\xi}_n\right]_\alpha - \left[\hat{\xi}_n, \xi_n - \hat{\xi}_n\right]_\alpha = \left[\xi_n, \xi_n - \hat{\xi}_n\right]_\alpha. \tag{2.4}$$

Це співвідношення відіграє основну роль при характеризації мінімальних $HS\alpha S$ стохастичних послідовностей $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ та розв'язанні задачі оптимального лінійного оцінювання невідомих функціоналів від невідомих значень гармонізованих послідовностей.

## 2.2. Задача екстраполяції гармонізованих випадкових послідовностей

У цьому підрозділі розглядається задача оптимального оцінювання лінійного функціонала

$$A\xi \; = \; \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_j = \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{i\theta}) dZ^{\xi}(\theta),$$

$$A(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ij\theta},$$

що залежить від невідомих значень випадкового процесу $\xi_j, j = 0, 1, \ldots,$ гармонізованої симетричної $\alpha$-стійкої випадкової послідовності $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ за спостереженнями послідовності $\{\xi_k + \eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ у точках часу $k = -1, -2, \ldots.$

**2.2.1. Класичний підхід.** Розглядається задача для взаємно незалежних гармонізованих симетричних $\alpha$-стійких випадкових послідовностей $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$, які мають абсолютно неперервні спектральні міри і спектральні щільності $f(\theta) > 0$ та $g(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності [19], [41], [100], [115].

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) + g(\theta))^{-1/(\alpha-1)} d\theta < \infty. \tag{2.5}$$

Будемо вважати, що послідовність $\{a_j : j = 0, 1, \ldots\}$, що визначає функціонал $A\xi$ задовольняє умови

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \left| a_j \right|^2 < \infty. \tag{2.6}$$

Перша умова гарантує, що функціонал $A\xi$ має скінченний другий момент. Друга умова забезпечує компактність в $\ell_2$ операторів, які будуть визначені нижче.

Визначимо $H^{-}(\xi+\eta)$ замкнутий за нормою $||\cdot||_\alpha$ лінійний многовид, що породжений значеннями гармонізованої симетричної $\alpha$-стійкої випадкової послідовності $\xi_k+\eta_k, k=-1,-2,\dots$ в просторі $H(\xi+\eta)$ породженому всіма значеннями $HS\alpha S$ послідовності $\{\xi_k+\eta_k, k\in\mathbb{Z}\}$.

Оптимальна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi$ є проекцією $A\xi$ на многовид $H^{-}(\xi+\eta)$. Ця оцінка визначається співвідношеннями

$$[\zeta, A\xi-\hat{A}\xi]_\alpha=0, \quad \forall\zeta\in H^{-}(\xi+\eta),$$

або еквівалентно, рівняннями

$$[\xi_k+\eta_k, A\xi-\hat{A}\xi]_\alpha=0, \quad \forall k=-1,-2,\dots. \tag{2.7}$$

Із ізоморфізму між просторами $H(\xi+\eta)$ та $L^\alpha(f+g)$ маємо, що оптимальна оцінка $\hat{A}\xi$ of функціоналу $A\xi$ має вигляд

$$\hat{A}\xi=\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left(dZ^{\xi}(\theta)+dZ^{\eta}(\theta)\right). \tag{2.8}$$

Ця оцінка визначається такою спектральною характеристикою $h(\theta)$, що належить підпростору $L^{\alpha}_{-}(f+g)$ із простору $L^\alpha(f+g)$ породженому функціями $e^{ik\theta}, k=-1,-2,\dots$. Із умов (2.8) випливає, що спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки задовольняє наступні рівняння

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta k}\left[\left(A(e^{i\theta})-h(\theta)\right)^{<\alpha-1>}f(\theta)-(h(\theta))^{<\alpha-1>}g(\theta)\right]d\theta=0,\ k=-1,-2,\dots. \tag{2.9}$$

З цих рівнянь маємо, що спектральна характеристика $h(\theta)$ оцінки визначається рівняннями

$$\left(A(e^{i\theta})-h(\theta)\right)^{<\alpha-1>}f(\theta)-(h(\theta))^{<\alpha-1>}g(\theta)=\overline{C(e^{i\theta})}, \tag{2.10}$$

$$C(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{ij\theta},$$

де $c_j$ невідомі коефіцієнти. Невідомі коефіцієнти $c_j$ визначаються із умови належності $h(\theta)$ підпростору $L_{-}^{\alpha}(f+g)$, що дає наступну систему рівнянь

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta k}\ h(\theta)d\theta = 0, \quad k = 0, 1, \dots. \tag{2.11}$$

Похибка оптимальної оцінки функціонала обчислюється за наступною формулою

$$\left\|A\xi - \hat{A}\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\pi}^{\pi} \left|A(e^{i\theta}) - h(\theta)\right|^{\alpha} f(\theta)d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |h(\theta)|^{\alpha} g(\theta)d\theta. \tag{2.12}$$

Маємо, що справедлива наступна теорема.

**Теорема 2.1.** *Нехай $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ є взаємно незалежними гармонізованими симетричними $\alpha$-стійкими випадковими послідовностями, які мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності $f(\theta) > 0$ та $g(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності* (2.5)*. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\xi_j$, що залежить від невідомих значень послідовності $\xi_j, j = 0, 1, \dots,$ за спостереженнями послідовності $\{\xi_k + \eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ у точках часу $k = -1, -2, \dots,$ що обчислюється за формулою* (2.8)*. Спектральна характеристика $h(\theta)$ оцінки визначається формулою* (2.10)*, де невідомі коефіцієнти $c_j$ визначається із системи рівнянь* (2.11)*. Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою* (2.12)*.*

**2.2.2. Спостереження без шуму.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\xi_j = \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{i\theta})dZ^{\xi}(\theta), \quad A(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ij\theta},$$

що залежить від невідомих значень гармонізованої симетричної $\alpha$-стійкої випадкової послідовності $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$, за спостереженнями послідовності $\xi_k$ у точках часу $k = -1, -2, \ldots$.

Нехай $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ гармонізована симетрична $\alpha$-стійка випадкова послідовність, що має абсолютно неперервну спектральну міру і спектральну щільність $f(\theta) > 0$, яка задовольняє умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta))^{-1/(\alpha-1)} d\theta < \infty. \tag{2.13}$$

Оптимальна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi$ має вигляд

$$\hat{A}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) dZ^{\xi}(\theta). \tag{2.14}$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала обчислюється за формулою

$$h(\theta) = A(e^{i\theta}) - \left(\overline{C(e^{i\theta})}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \tag{2.15}$$

$$C(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{ij\theta},$$

де невідомі коефіцієнти $c_j$, $j = 0, 1, \ldots$, визначаються із наступної системи рівнянь

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta k} \left( \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ij\theta} \right) - \left( \sum_{j=0}^{\infty} \bar{c}_j e^{-ij\theta} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right) d\theta = 0, k = 0, 1, \ldots \tag{2.16}$$

Похибка оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\| A\xi - \hat{A}\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(\overline{C(e^{i\theta})}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta. \tag{2.17}$$

Як наслідок, із теореми 2.1 маємо такий наслідок.

**Наслідок 2.1.** *Нехай $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ гармонізована симетрична $\alpha$-стійка випадкова послідовність, що має абсолютно неперервну спектральну міру і спектральну щільність $f(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності* (2.13)*. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_j$, що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \dots,$ послідовності за спостереженнями послідовності $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ у точках часу $k = -1, -2, \dots,$ має вигляд* (2.14)*. Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціоналу обчислюється за формулою* (2.15)*, де невідомі коефіцієнти $c_j$, $j = 0, 1, \dots$ визначаються системою рівнянь* (2.16)*. Похибка оптимальної лінійної оцінки функціоналу обчислюється за формулою* (2.17)*.*

### 2.2.3. Стаціонарні послідовності.

Розглянемо задачу в окремому випадку, коли $\alpha = 2$. У цьому випадку гармонізовані симетричні $\alpha$-стійкі випадкові послідовності $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$, $\{\eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ є стаціонарними послідовностями і задача приймає вигляд задачі оптимального оцінювання лінійного функціоналу $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_j$, що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \dots,$ стаціонарної випадкової послідовності за спостереженнями стаціонарної послідовності $\{\xi_k + \eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ у точках часу $k = -1, -2, \dots$.

Припускаємо, що стаціонарні випадкові послідовності $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ мають спектральні щільності $f(\theta) > 0$ та $g(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) + g(\theta))^{-1} d\theta < \infty. \tag{2.18}$$

Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi$ має форму (2.8), де спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки та похибка оцінки визначається рівняннями (2.10), (2.12), та приймають вигляд

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \frac{A(e^{i\theta}) f(\theta) - C(e^{i\theta})}{f(\theta) + g(\theta)} = \\ &= A(e^{i\theta}) - \frac{A(e^{i\theta}) g(\theta) + C(e^{i\theta})}{f(\theta) + g(\theta)}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\Delta(h;f,g) = \left\|A\xi - \hat{A}\xi\right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A(e^{i\theta})g(\theta) + C(e^{i\theta})\right|^2}{(f(\theta)+g(\theta))^2} f(\theta)d\theta$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A(e^{i\theta})f(\theta) - C(e^{i\theta})\right|^2}{(f(\theta)+g(\theta))^2} g(\theta)d\theta. \tag{2.20}$$

Невідомі коефіцієнти $c_j$, $j = 0,1,\ldots$, визначаються системою рівнянь (2.11), яка має вигляд в цьому випадку

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(A(e^{i\theta})\frac{f(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} - \frac{C(e^{i\theta})}{f(\theta)+g(\theta)}\right) e^{-ik\theta}d\theta = 0, \quad k = 0,1,\ldots$$

З цієї системи рівнянь отримуємо наступні рівняння

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(j-k)\theta}f(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)}d\theta - \sum_{j=0}^{\infty} c_j \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(j-k)\theta}}{f(\theta)+g(\theta)}d\theta = 0, \quad k = 0,1,\ldots \tag{2.21}$$

Позначимо $\mathbf{B}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ оператори в просторі $\ell_2$, які визначаються матрицями з елементами

$$B_{k,j} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\theta}\frac{1}{f(\theta)+g(\theta)}d\theta;$$

$$R_{k,j} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\theta}\frac{f(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)}d\theta;$$

$$Q_{k,j} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\theta}\frac{f(\theta)g(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)}d\theta;$$

$$k,j = 0,1,2,\ldots$$

За допомогою введених позначень можна записати рівняння (2.21) у формі

$$\sum_{j=0}^{\infty} R_{k,j}a_j = \sum_{j=0}^{\infty} B_{k,j}c_j, \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Ці рівняння можуть бути представлені в матричній формі

$$\mathbf{Ra} = \mathbf{Bc},$$

де $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$, $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots)$. Невідомі коефіцієнти $c_j, j = 0, 1, \dots$ визнаються розв'язком рівняння і може бути представлено у вигляді

$$c_j = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra})_j,$$

де $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra})_j$ є $j$-ий елемент вектора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra}$.

Спектральна характеристика і похибка оптимальної оцінки визначаються за формулами [91], [92], [7].

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \frac{A(e^{i\theta})f(\theta) - \sum\limits_{j=0}^{\infty}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra})_j e^{ij\theta}}{f(\theta)+g(\theta)} = \\ &= A(e^{i\theta}) - \frac{A(e^{i\theta})g(\theta) + \sum\limits_{j=0}^{\infty}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra})_j e^{ij\theta}}{f(\theta)+g(\theta)}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} \Delta(h; f, g) = \left\| A\xi - \hat{A}\xi \right\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| A(e^{i\theta})g(\theta) + \sum\limits_{j=0}^{\infty}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra})_j e^{ij\theta}\right|^2}{(f(\theta)+g(\theta))^2} f(\theta)d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| A(e^{i\theta})f(\theta) - \sum\limits_{j=0}^{\infty}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra})_j e^{ij\theta}\right|^2}{(f(\theta)+g(\theta))^2} g(\theta)d\theta \\ &= \langle \mathbf{Ra}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ra}\rangle + \langle \mathbf{Qa}, \mathbf{a}\rangle, \end{aligned} \tag{2.23}$$

Таким чином, наступна теорема вірна.

**Теорема 2.2.** *Нехай $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ є взаємно незалежними стаціонарними випадковими послідовностями, що мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності $f(\theta) > 0$ та $g(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності (2.5) із $\alpha = 2$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_j$, що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \dots,$ послідовності за спостереженнями послідовності*

$\{\xi_k+\eta_k, k\in\mathbb{Z}\}$ *у точках часу* $k=-1,-2,\ldots$, *обчислюється за формулою* (2.8). *Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *оптимальної оцінки обчислюється за формулою* (2.22). *Похибка оптимальної оцінки визначається формулою* (2.23).

**2.2.4. Стаціонарні послідовності. Спостереження без шуму.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi \ = \ \sum_{j=0}^{\infty} a_j\xi_j = \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{i\theta})dZ^{\xi}(\theta), \quad A(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ij\theta},$$

що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0,1,\ldots$, стаціонарної випадкової послідовності за спостереженнями послідовності $\xi_k$ у точках часу $k = -1,-2,\ldots$. Припустимо, що стаціонарна випадкова послідовність $\{\xi_k, k\in\mathbb{Z}\}$ має спектральну щільність $f(\theta)>0$, що задовольняє умову мінімальності (2.13) із $\alpha=2$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi$ має вигляд (2.14), де спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$ обчислюється за формулою

$$h(\theta) = A(e^{i\theta}) - \left(\sum_{j=0}^{\infty}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a})_j e^{ij\theta}\right)(f(\theta))^{-1}. \tag{2.24}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\|A\xi-\hat{A}\xi\right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a})_j e^{ij\theta}\right|^2 f^{-1}(\theta)d\theta =< \mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{a}}>, \tag{2.25}$$

де $\mathbf{B}$ оператор у просторі $\ell_2$, що визначається наступною матрицею

$$B(k,j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\theta)e^{i(j-k)\theta}d\theta, \quad k,j=0,1,\ldots.$$

Спектральна щільність $f(\theta)>0$ стаціонарної послідовності $\{\xi_k, k\in\mathbb{Z}\}$ задовольняє умову мінімальності (2.13) із $\alpha=2$. Тому функція $f^{-1}(\theta)$ допускає наступну факторизацію

$$\frac{1}{f(\theta)} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p e^{ip\theta} = \left|\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j e^{-ij\theta}\right|^2 = \left|\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j e^{-ij\theta}\right|^{-2}. \tag{2.26}$$

Позначимо $\mathbf{\Psi}$ та $\mathbf{\Phi}$ лінійний оператор у просторі $\ell_2$, що визначається елементами матриці $\mathbf{\Psi}_{i,j} = \psi_{i-j}$, $\mathbf{\Phi}_{i,j} = \varphi_{i-j}$, $0 \leqslant j \leqslant i$, де $\mathbf{\Psi}_{i,j} = 0$, $\mathbf{\Phi}_{i,j} = 0$, $0 \leqslant i < j$. Можна показати, що $\mathbf{\Psi\Phi} = \mathbf{\Phi\Psi} = I$. Оператор $\mathbf{B}$ може бути представлений у формі $\mathbf{B} = \mathbf{\Psi}'\overline{\mathbf{\Psi}}$. Оператор $\mathbf{B}^{-1}$ може бути записаний у формі $\mathbf{B}^{-1} = \overline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}'$.

Як наслідок, можемо вивести формулу (2.25), що має наступний вигляд

$$\left\|A\xi - \hat{A}\xi\right\|_2^2 = \langle \mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle = \langle \overline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{\Phi}'\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle = \langle \mathbf{\Phi}'\vec{\mathbf{a}}, \mathbf{\Phi}'\vec{\mathbf{a}} \rangle = \langle \mathbf{A}\vec{\varphi}, \mathbf{A}\vec{\varphi} \rangle = \|\mathbf{A}\vec{\varphi}\|^2, \tag{2.27}$$

де лінійний оператор $\mathbf{A}$ в просторі $\ell_2$, що визначається матрицею $\mathbf{A}_{i,j} = a_{i-j}$, $i, j = 0, 1, \ldots,$ і вектор $\vec{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ визначається елементами $\varphi_j, j = 0, 1, \ldots$ із розкладу факторизації (2.26).

Таким чином, наступна теорема вірна.

**Теорема 2.3.** *Нехай $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ стаціонарна випадкова послідовність, що має абсолютно неперервну спектральну міру і спектральну щільність $f(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності* (2.13) *із $\alpha = 2$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\xi_j$, що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \ldots,$ послідовності $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ за спостереженнями послідовності $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ у точках часу $k = -1, -2, \ldots$ має вигляд* (2.14), *де спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціоналу обчислюється за формулою* (2.24). *Похибка оцінки визначається за формулою* (2.25) *або в іншому вигляді* (2.27).

**Приклад 2.1.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\xi_j,$$

що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \ldots,$ стаціонарної випадкової послідовності за спостереженнями послідовностями $\xi_k$ у точка $k = -1, -2, \ldots$. Припустимо, що стаціонарна стохастична послідовність $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ має спектральну щільність

$$f(\theta) = |1 - \alpha e^{-i\theta}|^{-2}, |\alpha| < 1.$$

Функція $f^{-1}(\theta) = |1 - \alpha e^{-i\theta}|^2$ допускає наступну факторизацію

$$f^{-1}(\theta) = b_{-1}e^{-i\theta} + b_0 + b_1 e^{i\theta} = \left|\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{-ij\theta}\right|^2 = \left|\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j e^{-ij\theta}\right|^{-2},$$

де $b_0 = 1+|\alpha|^2$, $b_{-1} = -\alpha$, $b_1 = -\bar{\alpha}$, $b_p = 0, |p| > 1$ є коефіцієнтами Фур'є функції $f^{-1}(\theta)$; $\psi_0 = 1, \psi_1 = -\alpha, \psi_j = 0, j > 1$; $\varphi_j = \alpha^j, j \geqslant 0$; $b_p = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_k \overline{\psi}_{k+p}$, $p \geqslant 0$, і $b_{-p} = \overline{b_p}$, $p \geqslant 0$.

Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi$ має форму (2.14), де спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$ обчислюється за формулою

$$h(\theta) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ij\theta}\right) - \left(\sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a})_j e^{ij\theta}\right)\left(b_{-1}e^{-i\theta} + b_0 + b_1 e^{i\theta}\right), \tag{2.28}$$

Використовуючи співвідношення $B^{-1} = \overline{\Phi}\Phi'$ знайдемо, що матриця $(B)^{-1}$ має наступну форму

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots \\ \overline{\alpha} & \overline{\alpha}\alpha + 1 & \overline{\alpha}\alpha^2 + \alpha & \overline{\alpha}\alpha^3 + \alpha^2 & \dots \\ \overline{\alpha^2} & \overline{\alpha^2}\alpha + \overline{\alpha} & \overline{\alpha^2}\alpha^2 + \overline{\alpha}\alpha + 1 & \overline{\alpha^2}\alpha^3 + \overline{\alpha}\alpha^2 + \alpha & \dots \\ \overline{\alpha^3} & \overline{\alpha^3}\alpha + \overline{\alpha^2} & \overline{\alpha^3}\alpha^2 + \overline{\alpha^2}\alpha + \overline{\alpha} & \overline{\alpha^3}\alpha^3 + \overline{\alpha^2}\alpha^2 + +\overline{\alpha}\alpha + 1 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}.$$

Розглянемо задачу при умові $a_j = 0, j \geqslant 3$. У цьому випадку коефіцієнти $c(j) = \left(\mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}}\right)_j, j = 0, 1, 2, \dots$ мають наступний вигляд

$$c_0 = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2,$$

$$c_1 = a_0\overline{\alpha} + a_1(\overline{\alpha}\alpha + 1) + a_2(\overline{\alpha}\alpha^2 + \alpha),$$

$$c_2 = a_0\overline{\alpha^2} + a_1(\overline{\alpha^2}\alpha + \overline{\alpha}) + a_2(\overline{\alpha^2}\alpha^2 + \overline{\alpha}\alpha + 1),$$

$$c_j = a_0\overline{\alpha^j} + a_1(\overline{\alpha^j}\alpha + \overline{\alpha^{j-1}}) + a_2(\overline{\alpha^j}\alpha^2 + \overline{\alpha^{j-1}}\alpha + \overline{\alpha^{j-2}}), j \geqslant 3.$$

Спектральна характеристика $h_2(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_2\xi$ функціонала $A_2\xi = a_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ обчислюється за формулою

$$h_2(\theta) = \left(a_0 + a_1 e^{i\theta} + a_2 e^{i2\theta}\right) - \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{ij\theta}\right)\left(b_{-1}e^{-i\theta} + b_0 + b_1 e^{i\theta}\right) =$$

$$= -c_0 b_{-1} e^{-i\theta} = \left(a_0\alpha + a_1\alpha^2 + a_2\alpha^3\right) e^{-i\theta}.$$

Похибка оцінки обраховується за формулою

$$\left\|A_2\xi - \hat{A}_2\xi\right\|_2^2 = \langle \mathbf{A}\vec{\varphi}, \mathbf{A}\vec{\varphi}\rangle = \langle \mathbf{B}^{-1}\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}}\rangle =$$

$$= a_0^2 + a_0 a_1(\alpha+\overline{\alpha}) + a_1^2(1+\alpha^2) + a_0 a_2(\alpha^2+\overline{\alpha^2}) + a_1 a_2(\alpha+\overline{\alpha})(1+\alpha^2) + a_2^2(1+\alpha^2+\alpha^4).$$

**2.2.5. Мінімаксний підхід.** Значення похибки

$$\Delta\left(h(f,g); f, g\right) := \left\|\hat{A}\xi - A\xi\right\|_\alpha^\alpha$$

та спектральної характеристики $h(f,g) := h(\theta)$ оптимальної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$ можна розрахувати за пропонованими формулами тільки в тому випадку, коли точно знаємо спектральні щільності $f(\theta)$ та $g(\theta)$ від гармонізованої симетричної $\alpha$-стійкої випадкової послідовності $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$, та $\{\eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$. Однак, як правило, ми не маємо точних значень спектральних щільностей стохастичних послідовностей, в той час як набір $D = D_f \times D_g$ допустимих спектральних щільностей нам зазвичай відомий. У цьому випадку можемо застосувати мінімаксний метод оцінки для задачі екстраполяції. Цей метод дає оцінку, що мінімізує максимум похибки для всіх спектральних щільностей множини $D = D_f \times D_g$ допустимих спектральних щільностей одночасно [30], [92], [7].

**Означення 2.4.** Для даного класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральні щільності $f_0(\theta) \in D_f$, $g_0(\theta) \in D_g$ називають найменш сприятливими в класі $D = D_f \times D_g$ для оптимальної лінійної оцінки $A\xi$, якщо має місце наступне співвідношення

$$\Delta\left(f_0, g_0\right) = \Delta\left(h\left(f_0, g_0\right); f_0, g_0\right) = \max_{(f,g)\in D_f\times D_g} \Delta\left(h\left(f, g\right); f, g\right).$$

**Означення 2.5.** Для даного класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ оптимальної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$ називається мінімаксною (робастною) для оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$, якщо виконуються наступні співвідношення:

$$h^0 \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D_f\times D_g} L^\alpha(f+g),$$

$$\min_{h\in H_D} \max_{(f,g)\in D} \Delta(h; f, g) = \max_{(f,g)\in D} \Delta\left(h^0; f, g\right).$$

Зауважмо, що найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\theta)$, $g_0(\theta)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f_0, g_0) \geqslant \Delta\left(h^0; f_0, g_0\right) \geqslant \Delta\left(h^0; f, g\right)$$

$$\forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, де $(f_0, g_0)$ є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\max_{(f,g)\in D_f\times D_g} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}\Delta(h(f_0, g_0); f, g) &= \left\| A\xi - \hat{A}\xi \right\|_\alpha^\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| A(e^{i\theta}) - h^0(\theta) \right|^\alpha f(\theta)d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \left| h^0(\theta) \right|^\alpha g(\theta)d\theta.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Задача оптимізації із обмеженнями (2.29) еквівалентна задачі безумовної оптимізації

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \delta(f, g\,|D_f \times D_g) \to \inf, \tag{2.31}$$

де $\delta(f, g\,|D_f \times D_g)$ є індикаторною функцією множини $D = D_f \times D_g$. Розв'язок $(f_0, g_0)$ задачі (2.31) характеризується умовою $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$, де $\partial\Delta_D(f_0, g_0)$ є субдиференціалом опуклого функціоналу $\Delta_D(f, g)$ у точці $(f_0, g_0)$. Ця умова дозволяє знайти найменш сприятливі спектральні щільності в деяких спеціальних класах спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ [38].

Звернемо увагу, що форма (2.30) функціонала $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ є зручною для застосування методу множників Лагранжа для знаходження розв'язку задачі (2.29). Використовуючи метод множників Лагранжа і субдиференціал індикаторної функції множини, описуємо співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності в деяких спеціальних класах спектральних щільностей.

Підсумовуючи отримані формули і введені позначення, приходимо до висновку, що справедливі такі леми.

**Лема 2.2.** *Нехай* $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ *та* $\{\eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ *є взаємно незалежними гармонізованими симетричними* $\alpha$*-стійкими випадковими послідовностями, що мають абсолютно неперервні спектральні міри і спектральні щільності* $f_0(\theta) > 0$ *та* $g_0(\theta) > 0$*, які задовольняють умову мінімальності* (2.5)*. Нехай спектральні щільності* $(f_0, g_0) \in D_f \times D_g$ *дають розв'язок задачі оптимізації із обмеженнями* (2.29)*. Спектральні щільності* $(f_0, g_0)$ *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класі* $D_f \times D_g$ *та* $h^0 = h(f_0, g_0)$ *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}\xi$ *функціонала* $A\xi$*, що залежить від невідомих значень послідовності* $\xi_j, j = 0, 1, \ldots,$ *за спостереженнями послідовності* $\{\xi_k + \eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ *у точках часу* $k = -1, -2, \ldots,$ *якщо* $h^0 = h(f_0, g_0) \in H_D$*.*

**Лема 2.3.** *Нехай* $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ *є гармонізованою симетричною* $\alpha$*-стійкою випадковою послідовністю, що має абсолютно неперервну спектральну міру та спектральну щільність* $f_0(\theta) > 0$*, що задовольняє умову мінімальності* (2.13)*. Нехай спектральна щільність* $f_0 \in D_f$ *дає розв'язок задачі оптимізації з обмеженнями*

$$\max_{f \in D_f} \Delta\left(h(f_0); f\right) = \Delta\left(h(f_0); f_0\right), \tag{2.32}$$

$$\Delta\left(h(f_0);f\right)=\left\|A\xi-\hat{A}\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\left(C^0(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>}\left(f_0(\theta)\right)^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right|^{\alpha}f(\theta)d\theta. \quad (2.33)$$

*Спектральна щільність $f_0$ є найменш сприятливою спектральною щільністю $D_f$ та $h^0=h(f_0)$ є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$, що залежить від невідомих значень $\xi_j, j=0,1,\ldots,$ послідовності за спостереженнями послідовності $\{\xi_k, k\in\mathbb{Z}\}$ у точках часу $k=-1,-2,\ldots,$ якщо $h^0=h(f_0)\in H_D$.*

**Лема 2.4.** *Нехай $\{\xi_k, k\in\mathbb{Z}\}$ та $\{\eta_k, k\in\mathbb{Z}\}$ є взаємно незалежними стаціонарними випадковими послідовностями, що мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності $f_0(\theta)>0$ та $g_0(\theta)>0$, що задовольняють умову мінімальності (2.5) із $\alpha=2$. Нехай спектральні щільності $(f_0,g_0)\in D_f\times D_g$ дають розв'язок задачі оптимізації з обмеженнями*

$$\max_{(f,g)\in D_f\times D_g}\Delta\left(h(f_0,g_0);f,g\right)=\Delta\left(h(f_0,g_0);f_0,g_0\right), \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}\Delta\left(h(f_0,g_0);f,g\right)&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|A(e^{i\theta})g_0(\theta)+\sum\limits_{j=0}^{\infty}((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\mathbf{a})_je^{ij\theta}\right|^2}{(f_0(\theta)+g_0(\theta))^2}f(\theta)d\theta\\&+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|A(e^{i\theta})f_0(\theta)-\sum\limits_{j=0}^{\infty}((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\mathbf{a})_je^{ij\theta}\right|^2}{(f_0(\theta)+g_0(\theta))^2}g(\theta)d\theta.\end{aligned} \quad (2.35)$$

*Спектральні щільності $(f_0,g_0)$ є найменш сприятливими спектральними щільностями в класі $D_f\times D_g$ та $h^0=h(f_0,g_0)$ – мінімаксна спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$, що залежить від невідомих значень послідовності $\xi_j, j=0,1,\ldots,$ за спостереженнями послідовностями $\{\xi_k+\eta_k, k\in\mathbb{Z}\}$ у точках часу $k=-1,-2,\ldots,$ якщо $h^0=h(f_0,g_0)\in H_D$.*

**Лема 2.5.** *Нехай $\{\xi_k, k\in\mathbb{Z}\}$ є стаціонарною випадковою послідовністю, що має абсолютно неперервну спектральну міру та спектральну щільність*

*$f_0(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності (2.13) із $\alpha = 2$. Нехай спектральна щільність $f_0 \in D_f$ дає розв'язок задачі оптимізації з обмеженнями*

$$\max_{f \in D_f} \Delta\left(h(f_0); f\right) = \Delta\left(h(f_0); f_0\right), \tag{2.36}$$

$$\Delta\left(h(f_0); f\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{a})_j e^{ij\theta} \right|^2 f_0^{-2}(\theta) f(\theta) d\theta. \tag{2.37}$$

*Спектральна щільність $f_0$ є найменш сприятливою спектральною щільністю в класі $D_f$ та $h^0 = h(f_0)$ є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$, що залежить від невідомих значень послідовності $\xi_j, j = 0, 1, \ldots$, за спостереженнями послідовності $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ у точках часу $k = -1, -2, \ldots$, якщо $h^0 = h(f_0) \in H_D$.*

**2.2.6. Найменш сприятливі щільності в класі $D_f^\beta \times D_g^\varepsilon$.** Розглянемо задачу оптимального оцінювання лінійного функціонала $A\xi$, що залежить від невідомих значень випадкової послідовності $\xi_j, j = 0, 1, \ldots$, за спостереженнями послідовності $\{\xi_k + \eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ у точках часу $k = -1, -2, \ldots$, де $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ є взаємно незалежними гармонізованими симетричними $\alpha$-стійкими випадковими послідовностями, що мають спектральні щільності $f(\theta) > 0$ та $g(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності (2.5) для класу допустимих спектральних щільностей $D = D_f^\beta \times D_g^\varepsilon$, де

$$D_f^\beta = \left\{ f(\theta) \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(\theta))^\beta d\theta = P_1 \right. \right\},$$

$$D_g^\varepsilon = \left\{ g(\theta) \left| g(\theta) = (1-\varepsilon) g_1(\theta) + \varepsilon w(\theta), \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\theta = P_2 \right. \right\}.$$

Припускаємо, що спектральні щільності $f_0 \in D_f^\beta$, $g_0 \in D_g^\varepsilon$ та функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, визначені рівняннями

$$h_f(f_0, g_0) = \left| A(e^{i\theta}) - h^0(\theta) \right|^\alpha, \tag{2.38}$$

$$h_g(f_0,g_0)=\left|h^0(\theta)\right|^{\alpha}, \tag{2.39}$$

$$\left(A(e^{i\theta})-h^0(\theta)\right)^{<\alpha-1>}f_0(\theta)-\left(h^0(\theta)\right)^{<\alpha-1>}g_0(\theta)=C^0(e^{i\theta}), \tag{2.40}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta k}\;h^0(\theta)d\theta=0,\quad k=0,1,\ldots \tag{2.41}$$

обмежені. За цих умов функціонал

$$\begin{aligned}\Delta\left(h(f_0,g_0);f,g\right)&=\left\|A\xi-\hat{A}\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha}\\&=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|A(e^{i\theta})-h^0(\theta)\right|^{\alpha}f(\theta)d\theta+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|h^0(\theta)\right|^{\alpha}g(\theta)d\theta.\end{aligned} \tag{2.42}$$

є лінійним та неперервним в просторі $L_1\times L_1$ і ми можемо застосувати метод множників Лагранжа для знаходження найменш сприятливих щільностей $f_0\in D_f^{\beta}$, $g_0\in D_g^{\varepsilon}$. Маємо, що спектральні щільності задовольняють рівняння

$$\left|A(e^{i\theta})-h^0(\theta)\right|^{\alpha}=\gamma_1\left(f_0(\theta)\right)^{\beta-1}, \tag{2.43}$$

$$\left|h^0(\theta)\right|^{\alpha}=\left(\varphi_1(\theta)+\gamma_2\right), \tag{2.44}$$

де $\varphi_1(\theta)\leqslant 0$ і $\varphi_1(\theta)=0$ якщо $g_0(\theta)\geqslant(1-\varepsilon)g_1(\theta)$; $\gamma_1$, $\gamma_2$ є множниками Лагранжа, що визначаються із наступних рівнянь:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f_0(\theta))^{\beta}d\theta=P_1,\quad\int\limits_{-\pi}^{\pi}g_0(\theta)d\theta=P_2.$$

Таким чином, наступне твердження справедливо.

**Теорема 2.4.** *Нехай спектральні щільності $f_0\in D_f^{\beta}$, $g_0\in D_g^{\varepsilon}$ задовольняють умову мінімальності* (2.5) *і нехай функції $h_f(f_0,g_0)$, $h_g(f_0,g_0)$ визначені формулами* (2.38), (2.39), (2.40), (2.41) *обмежені. Спектральні щільності $f_0(\theta)$ і $g_0(\theta)$ є найменш сприятливими в класі $D=D_f^{\beta}\times D_g^{\varepsilon}$ для лінійної оцінки функціонала $A\xi$, якщо вони задовольняються рівняння* (2.43), (2.44) *і визначають розв'язок задачі оптимізації* (2.29). *Мінімаксна спектральна характеристика $h(f_0,g_0)$ оптимальної функціонала $A\xi$ визначається формулою* (2.40), (2.41).

**2.2.7. Найменш сприятливі спектральні щільності. Спостереження без шуму.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_j$, що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \ldots$, за спостереженнями послідовності $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ у точках часу $k = -1, -2, \ldots$, де $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ є гармонізованою симетричною $\alpha$-стійкою випадковою послідовністю, що має спектральну щільність $f_0(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності (2.13) в класі допустимих спектральних щільностей $D_f^\beta$. Припустимо, що спектральна щільність $f_0 \in D_f^\beta$ та функція $h_f(f_0)$ визначена рівнянням

$$h_f(f_0) = \left| \left(C^0(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} \qquad (2.45)$$

є обмеженими. За цих умов функціонал (2.33) є лінійним та неперервним у просторі $L_1$ і ми можемо застосувати метод множників Лагранжа для знаходження розв'язку задачі оптимізації з обмеженнями (2.32). Отримуємо, що найменш сприятлива щільність $f_0 \in D_f^\beta$ задовольняє рівнянню

$$\left| \left(C^0(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} = \gamma_1 \left(f_0(\theta)\right)^{\beta-1}, \qquad (2.46)$$

де $\gamma_1$ множники Лагранжа. З цього рівняння ми знаходимо, що найменш сприятливий щільність має вигляд

$$f_0(\theta) = C \left| \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{-ij\theta} \right|^{\frac{\alpha}{\alpha+(\alpha-1)(\beta-1)}}. \qquad (2.47)$$

Невідомі константи визначаються з задачі оптимізації (2.32) і з умови

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\theta))^\beta d\theta = P_1.$$

У випадку $\beta = 1$ найменш сприятлива щільність має вигляд

$$f_0(\theta) = C \left| \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{-ij\theta} \right|. \qquad (2.48)$$

Наступне твердження справедливо.

**Теорема 2.5.** *Нехай спектральна щільність $f_0 \in D_f^\beta$ задовольняє умову мінімальності* (2.13) *і нехай функція $h_f(f_0)$, що визначається формулою* (2.45) *обмежена. Найменш сприятлива спектральна щільність $f_0(\theta) \in D_f^\beta$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$ у вигляді* (2.47) *є щільність, яка визначає розв'язок задачі оптимізації* (2.32). *Мінімаксна спектральна характеристика $h(f_0)$ оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ визначається формулою* (2.15).

**2.2.8. Найменш сприятливі спектральні щільності. Стаціонарні послідовності.** Розглянемо задачу оптимального оцінювання лінійного функціонала $A\xi$, що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \dots,$ випадкової послідовності $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ за спостереженнями послідовності $\{\xi_k + \eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ у точках часу $k = -1, -2, \dots,$ де $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ є взаємно незалежними випадковими послідовностями, що мають спектральні щільності $f(\theta) > 0$ та $g(\theta) > 0$ та задовольняють умову мінімальності (2.5) із $\alpha = 2$ для класу допустимих спектральних щільностей $D = D_f^\beta \times D_g^\varepsilon$.

Припустимо, що спектральні щільності $f_0 \in D_f^\beta$, $g_0 \in D_g^\varepsilon$ і функція $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, визначені рівняннями

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{\left| A(e^{i\theta}) g_0(\theta) + \sum\limits_{j=0}^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1} \mathbf{R}^0 \mathbf{a})_j e^{ij\theta} \right|^2}{(f_0(\theta) + g_0(\theta))^2}, \tag{2.49}$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{\left| A(e^{i\theta}) f_0(\theta) - \sum\limits_{j=0}^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1} \mathbf{R}^0 \mathbf{a})_j e^{ij\theta} \right|^2}{(f_0(\theta) + g_0(\theta))^2} \tag{2.50}$$

обмежені. За цих умов функціонал (2.35) є лінійним та неперервним в просторі $L_1 \times L_1$, і ми можемо застосувати метод множників Лагранжа для знаходження розв'язку задачі оптимізації з обмеженнями (2.34), і отримуємо, що найменш сприятливим щільностям $f_0 \in D_f^\beta$, $g_0 \in D_g^\varepsilon$, що задовольняють рівняння

$$\left| A(e^{i\theta})g_0(\theta) + \sum_{j=0}^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\mathbf{a})_j e^{ij\theta} \right|^2 = \gamma_1 (f_0(\theta) + g_0(\theta))^2 (f_0(\theta))^{\beta-1}, \quad (2.51)$$

$$\left| A(e^{i\theta})f_0(\theta) - \sum_{j=0}^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\mathbf{a})_j e^{ij\theta} \right|^2 = (f_0(\theta) + g_0(\theta))^2 (\varphi_1(\theta) + \gamma_2), \quad (2.52)$$

де $\varphi_1(\theta) \leqslant 0$ і $\varphi_1(\theta) = 0$ якщо $g_0(\theta) \geqslant (1-\varepsilon)g_1(\theta)$; $\gamma_1$, $\gamma_2$ є множниками Лагранжа, що визначаються рівняннями

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\theta))^{\beta} d\theta = P_1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} g_0(\theta) d\theta = P_2.$$

Таким чином, наступне твердження справедливо.

**Теорема 2.6.** *Нехай спектральні щільності* $f_0 \in D_f^{\beta}$, $g_0 \in D_g^{\varepsilon}$ *задовольняють умові мінімальності* (2.5) *із* $\alpha = 2$ *і нехай функції* $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, *що визначаються формулами* (2.49), (2.50) *обмежені. Спектральні щільності* $f_0(\theta)$, $g_0(\theta)$ *є найменш сприятливими в класі* $D = D_f^{\beta} \times D_g^{\varepsilon}$ *для оптимальної лінійної оцінки* $A\xi$, *якщо вони задовольняють рівняння* (2.51), (2.52) *і визначають розв'язок задачі оптимізації з обмеженнями* (2.29). *Мінімаксна спектральна характеристика* $h(f_0, g_0)$ *оптимальної лінійної функціонала* $A\xi$ *визначається формулою* (2.22).

**2.2.9. Найменш сприятливі спектральні щільності. Стаціонарні послідовності. Спостереження без шуму.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\xi$, що залежить від невідомих значень послідовності $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ за спостереженнями послідовності у точках часу $k = -1, -2, \ldots$, де стаціонарна випадкова послідовність $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$, має спектральну щільність $f(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності (2.13) із $\alpha = 2$ з класу допустимих спектральних щільностей $D_f^{\beta}$. Припустимо, що спектральна щільність $f_0 \in D_f^{\beta}$ і функція $h_f(f_0)$ визначена рівнянням

$$h_f(f_0) = \left| \sum_{j=0}^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{a})_j e^{ij\theta} \right|^2 f_0^{-2}(\theta), \quad (2.53)$$

обмежені.

За цих умов функціонал (2.37) є лінійним та неперервним в просторі $L_1$ і ми можемо застосувати метод множників Лагранжа для знаходження розв'язку задачі оптимізації з обмеженнями (2.36) і отримуємо, що найменш сприятлива щільність $f_0 \in D_f^\beta$, задовольняє рівнянню

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{a})_j e^{ij\theta}\right|^2 f_0^{-2}(\theta) = \gamma_1 \left(f_0(\theta)\right)^{\beta-1}, \tag{2.54}$$

де $\gamma_1$ є множник Лагранжа яка визначається з умов

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\theta))^\beta d\theta = P_1.$$

Таким чином, наступне твердження справедливо.

**Теорема 2.7.** *Нехай спектральна щільність $f_0 \in D_f^\beta$, що задовольняє умову мінімальності* (2.13) *із $\alpha = 2$ і нехай функція $h_f(f_0)$, що визначена формулою* (2.53) *є обмеженою. Спектральна щільність $f_0(\theta)$ є найменш сприятливою в класі $D_f^\beta$ для оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$, якщо вона задовольняє рівняння* (2.54) *і визначає розв'язок задачі оптимізації з обмеженнями* (2.29)*. Мінімаксна спектральна характеристика $h(f_0)$ оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ визначається формулами* (2.24)*.*

У випадку $\beta = 1$ множина допустимих спектральних щільностей $D = D_f$ має форму

$$D_f = \left\{ f(\theta) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = P \right. \right\}.$$

Стаціонарні послідовності зі спектральною щільністю у класі $D_f$ мають скінченну дисперсію $E|\xi_j|^2 = P$ і можуть бути представлені у вигляді суми регулярної послідовності і сингулярної послідовності. Найменш сприятлива спектральна щільність в класі $D_f$ є щільність регулярної послідовності, так як сингулярна послідовність має нульове значення середньої квадратичної похибки екстраполяції. Спектральні щільності $D_f$ регулярних послідовностей допускають факторизацію

$$f(\theta) = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j e^{-ij\theta} \right|^2, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j|^2 = P, \tag{2.55}$$

і ми можемо використовувати задачу оптимізації, щоб знайти найменш сприятливу спектральну щільність в класі $D_f$

$$\|\mathbf{A}\vec{\varphi}\|^2 \to \max, \quad \|\vec{\varphi}\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j|^2 = P, \tag{2.56}$$

де лінійний оператор $\mathbf{A}$ в просторі $\ell_2$ визначається матрицею із елементами $\mathbf{A}_{i,j} = a_{i-j}$, $i, j = 0, 1, \dots$, і вектор $\vec{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ визначається із $\varphi_j$, $j = 0, 1, \dots$ факторизації (2.55). Розв'язок задачі оптимізації (2.56) являє собою власний вектор $\vec{\varphi}^0 = (\varphi_0^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots)$ що визначається найбільшим власним значенням $\nu^0$ лінійного оператора $\mathbf{A}$.

Подамо даний результат у вигляді теореми

**Теорема 2.8.** *Спектральна щільність $f_0(\theta)$ є найменш сприятливою в класі $D_f$ для оптимальної лінійної оцінки функціонала $A\xi$, якщо вона має вигляд* (2.55), *де $\vec{\varphi}^0 = (\varphi_0^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots)$ є власним вектором лінійного оператора $\mathbf{A}$, що відповідає найбільшому значенню оператора $\nu^0$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_j$ має форму*

$$\hat{A}\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left[ \sum_{u=-\infty}^{-1} \varphi_{j-u}^0 \varepsilon_u \right],$$

*де $\varepsilon_u$ стандартна стаціонарна послідовність з ортогональними значеннями (послідовність "білого шуму"), послідовність $\{\varphi_u^0 : u = 0, 1, \dots\}$ однозначно визначається через координати власного вектора оператора $\mathbf{A}$, що відповідає найбільшому власному числу $\nu^0$ і задовольняє умову $E\|\xi_j\|^2 = P$.*

**Приклад 2.2.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціоналу

$$A_1\xi = \xi(0) + 2\xi(1),$$

що залежить від невідомих значень $\xi(0)$, $\xi(1)$ стаціонарної послідовності $\xi(j)$, що задовольняє умови

$$E\xi(j) = 0, \quad E\left|\xi(j)\right|^2 \leqslant P,$$

побудовано за спостереженнями послідовності $\xi(j)$ у точках $j = -1, -2, \ldots$. Власні числа оператора $\mathbf{A}_1$ рівні $(1 \pm \sqrt{17})/2$. Таким чином найбільше власне число оператора $\nu_1 = (1 + \sqrt{17})/2$. Власний вектор, що відповідає власному значенню $\nu_1 = (1 + \sqrt{17})/2$ має вигляд $\vec{\varphi} = \{\varphi(0), \varphi(1)\}$, де

$$\varphi(0) = \sqrt{1/2 + 1/2\sqrt{17}}, \quad \varphi(1) = \sqrt{1/2 - 1/2\sqrt{17}}.$$

Найменш сприятлива щільність в класі $D_f$ для оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_1\xi$ має вигляд

$$f(\theta) = P\left|\varphi_0 + \varphi_1 e^{-ij\theta}\right|^2, \quad \left|\varphi_0\right|^2 + \left|\varphi_1\right|^2 = 1.$$

Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_1\xi$ функціонала $A_1\xi$ має вигляд

$$\hat{A}_1\xi = \sqrt{P}\varphi(1)\ \varepsilon(-1) = \sqrt{P}\sqrt{1/2 - 1/2\sqrt{17}}\ \varepsilon(-1).$$

Середньо-квадратична похибка оцінки функціонала $A_1\xi$ не перевищує $(9 + \sqrt{17})/2$.

## 2.3. Задача інтерполяції гармонізованих випадкових послідовностей.

У даному підрозділі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_N\xi \ = \ \sum_{j=0}^{N} a_j\xi_j = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta})dZ(\theta),$$

$$A_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{N} a_j e^{ij\theta},$$

що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \dots, N$, гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ за спостереженнями послідовності $\xi_n$ в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$.

**2.3.1. Класичний підхід.** Розглядаються гармонізовані симетричні $\alpha$–стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні послідовності з абсолютно неперервною спектральною мірою $\mu(\theta)$, що має спектральну щільність $f(\theta) > 0$, яка задовольняє умову мінімальності [71, 100, 115]

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta))^{-1/(\alpha-1)} d\theta < \infty. \tag{2.57}$$

Позначимо через $H^N(\xi)$ замкнуту в $||\cdot||_\alpha$ нормі лінійну оболонку породжену значеннями гармонізованої симетричної $\alpha$–стійкої, $HS\alpha S$, стохастичної послідовності $\xi_n$ при $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$ у просторі $H(\xi)$, що породжений усіма значеннями $HS\alpha S$ послідовності $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Оптимальна оцінка $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ – це проекція елемента $A_N\xi$ на підпростір $H^N(\xi)$. Ця проекція визначається умовами

$$[\eta, A_N\xi - \hat{A}_N\xi]_\alpha = 0, \quad \forall \eta \in H^N(\xi),$$

або, що еквівалентно, умовами

$$[\xi_k, A_N\xi - \hat{A}_N\xi]_\alpha = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}. \tag{2.58}$$

Із співвідношень ізоморфізму між просторами $H(\xi)$ та $L^\alpha(f)$ випливає, що оптимальну оцінку $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ слід шукати у вигляді

$$\hat{A}_N\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) dZ(\theta). \tag{2.59}$$

Така оцінка визначається спектральною характеристикою $h(\theta)$ оцінки, що належить підпростору $L^\alpha_N(\mu)$ простору $L^\alpha(\mu)$, який породжений функціями

$e^{ik\theta}, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0, 1, \dots, N\}$. Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки визначається рівняннями

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta k} \left(A_N(e^{i\theta}) - h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} f(\theta)d\theta = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}. \tag{2.60}$$

Із цих рівнянь випливає співвідношення

$$\left(A_N(e^{i\theta}) - h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} f(\theta) = C_N(e^{i\theta}), \quad C_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta},$$

де $c_j, j = 0, 1, \dots, N$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти. З останнього співвідношення випливає, що спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(\theta) = A_N(e^{i\theta}) - \left(C_N(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}. \tag{2.61}$$

Невідомі коефіцієнти $c_j, j = 0, 1, \dots, N$, визначаються з умови $h(\theta) \in L_N^{\alpha}(f)$, яка задає систему рівнянь

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta k}\ h(\theta)d\theta = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N. \tag{2.62}$$

Ці рівняння мають вигляд

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta k} \left( \left( \sum_{j=0}^{N} a_j e^{ij\theta} \right) - \left( \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right) d\theta = 0, \tag{2.63}$$
$$k = 0, 1, \dots, N.$$

Похибка оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\| A_N\xi - \hat{A}_N\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(C_N(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} f(\theta)d\theta. \tag{2.64}$$

Отже справедлива наступна теорема.

**Теорема 2.9.** *Нехай гармонізована симетрична $\alpha$–стійка, $HS\alpha S$, стохастична послідовність $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ має абсолютно неперервну спектральну міру $\mu(\theta)$, що має спектральну щільність $f(\theta) > 0$, яка задовольняє умову мінімальності* (2.57). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j\xi_j$, що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \ldots, N$, послідовності $\xi_n$ за спостереженнями послідовності $\xi_n$ в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$ обчислюється за формулою* (2.59). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд* (2.61), *де невідомі коефіцієнти $c_j, j = 0, \ldots, N$, визначаються рівняннями* (2.63). *Варіація оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою* (2.64).

**Приклад 2.3.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_0\xi = a\xi_0$, що залежить від невідомого значення $\xi_0$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ за спостереженнями послідовності $\xi_n$ в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

У цьому випадку спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(\theta) = a - c^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}.$$

Варіація оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_0\xi - A_0\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|c^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{-\frac{1}{\alpha-1}}\right|^{\alpha} f(\theta)d\theta,$$

де константа $c$ – це розв'язок рівняння

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(a - c^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{-\frac{1}{\alpha-1}}\right) d\theta = 0,$$

$$c = \frac{(2\pi a)^{<\alpha-1>}}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta))^{-\frac{1}{\alpha-1}} d\theta\right)^{<\alpha-1>}}.$$

Отже, при $\alpha = 2$ отримуємо результат А.М. Колмогорова.

**Приклад 2.4.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_1\xi = a_0\xi_0 + a_1\xi_1$, що залежить від невідомих значень $\xi_0, \xi_1$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$, з $\alpha = \frac{4}{3}$ та спектральною щільністю $f(\theta) = |e^{i\theta} + d|^{-\frac{4}{3}}, -1 < d < 1$, за спостереженнями послідовності в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.

У цьому випадку спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(\theta) = a_0 + a_1 e^{i\theta} - \left(c_0 + c_1 e^{-i\theta}\right)^{<3>} |e^{i\theta} + d|^4. \tag{2.65}$$

Тут

$$\begin{aligned} &\left(c_0 + c_1 e^{-i\theta}\right)^{<3>} = \left(c_0 + c_1 e^{-i\theta}\right) \left(\overline{c_0} + \overline{c_1} e^{i\theta}\right)^2 = \\ &b_{-1} e^{-i\theta} + b_0 + b_1 e^{i\theta} + b_2 e^{2i\theta}, \end{aligned} \tag{2.66}$$

де

$$b_{-1} = \overline{c_0}^2 c_1,\ b_0 = c_0 \overline{c_0}^2 + 2\overline{c_0} c_1 \overline{c_1},\ b_1 = 2c_0 \overline{c_0 c_1} + c_1 \overline{c_1}^2,\ b_2 = c_0 \overline{c_1}^2, \tag{2.67}$$

та

$$|e^{i\theta} + d|^4 = r_{-2} e^{-2i\theta} + r_{-1} e^{-i\theta} + r_0 + r_1 e^{i\theta} + r_2 e^{2i\theta}, \tag{2.68}$$

де

$$r_{-2} = d^2,\ r_{-1} = 2d + 2d^3,\ r_0 = 1 + 4d^2 + d^4,\ r_1 = 2d + 2d^3,\ r_2 = d^2. \tag{2.69}$$

Аналізуючи співвідношення (2.66) – (2.69) знаходимо, що спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(\theta) = h_{-3} e^{-3i\theta} + h_{-2} e^{-2i\theta} + h_{-1} e^{-i\theta} + h_0 + h_1 e^{i\theta} + h_2 e^{2i\theta} + h_3 e^{3i\theta} + h_4 e^{4i\theta},$$

де

$$h_{-3} = -b_{-1} r_{-2},\ h_{-2} = -b_{-1} r_{-1} - b_0 r_{-2},\ h_{-1} = -b_{-1} r_0 - b_0 r_{-1} - b_1 r_{-2},$$

$$h_0 = a_0 - b_{-1} r_1 - b_0 r_0 - b_1 r_{-1} - b_2 r_{-2},\ h_1 = a_1 - b_{-1} r_2 - b_0 r_1 - b_1 r_0 - b_2 r_{-1},$$

$$h_2 = -b_0r_2 - b_1r_1 - b_1r_0,\ h_3 = -b_1r_2 - b_2r_1,\ h_4 = -b_2r_2.$$

Умова (2.62) виконується, коли

$$\begin{aligned} h_0 &= a_0 - b_{-1}r_1 - b_0r_0 - b_1r_{-1} - b_2r_{-2} = 0, \\ h_1 &= a_1 - b_{-1}r_2 - b_0r_1 - b_1r_0 - b_2r_{-1} = 0. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Рівності (2.67) та (2.69) задають систему рівнянь, що визначають невідомі коефіцієнти $c_0, c_1$.

Розглянемо задачу для $a_0 = 1, a_1 = 1, d = 0.5$. У цьому випадку невідомі коефіцієнти обчислюються із зазначених рівнянь. Вони такі: $c_0 \approx 0.44$, $c_1 \approx 0.44$. Спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(\theta) = h_{-3}e^{-3i\theta} + h_{-2}e^{-2i\theta} + h_{-1}e^{-i\theta} + h_2e^{2i\theta} + h_3e^{3i\theta} + h_4e^{4i\theta},$$

де

$$h_{-3} \approx -0.02,\ h_{-2} \approx -0.17,\ h_{-1} \approx -0.57,\ h_2 \approx -0.57,\ h_3 \approx -0.17,\ h_4 \approx -0.02.$$

Варіація оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_1\xi - A_1\xi\right\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} \approx \int_{-\pi}^{\pi} \left|\left(0.44 + 0.44e^{i\theta}\right)^{<3>} \left|e^{i\theta} + 0.5\right|^4\right|^{\frac{4}{3}} \left(\left|e^{i\theta} + 0.5\right|^{-\frac{4}{3}}\right) d\theta \approx 5.57.$$

Відповідні результати для $\alpha = 2$ та $f(\theta) = |e^{i\theta} + 0.5|^{-2}$ такі: $c_0 = \frac{4}{7}$, $c_1 = \frac{4}{7}$,

$$\left\|\hat{A}_1\xi - A_1\xi\right\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\left(\frac{4}{7} + \frac{4}{7}e^{-i\theta}\right)^{<1>} \left|e^{i\theta} + 0.5\right|^2\right|^2 \left(\left|e^{i\theta} + 0.5\right|^{-2}\right) d\theta = \frac{16\pi}{7}.$$

**Приклад 2.5.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j\xi_j$, що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \ldots, N$, гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n$ з $\alpha = \frac{4}{3}$ та спектральною щільністю $f(\theta)$ за спостереженнями послідовності в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$.

У цьому випадку спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(\theta)=\sum_{k=0}^{N}a_ke^{ik\theta}-\left(\sum_{k=0}^{N}c_ke^{-ik\theta}\right)^{<3>}(f(\theta))^{-3}. \tag{2.71}$$

Скориставшись розкладами у ряди Фур'є

$$\left(\sum_{k=0}^{N}c_ke^{-ik\theta}\right)^{<3>}=\left(\sum_{k=0}^{N}c_ke^{-ik\theta}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}\overline{c}_ke^{ik\theta}\right)^{2}=\sum_{k=-N}^{2N}b_ke^{ik\theta}$$

та

$$(f(\theta))^{-3}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}r_ke^{ik\theta},\quad r_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta))^{-3}e^{-ik\theta}d\theta,$$

матимемо

$$h(\theta)=\sum_{k=0}^{N}a_ke^{ik\theta}-\left(\sum_{k=-N}^{2N}b_ke^{ik\theta}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}r_ke^{ik\theta}\right). \tag{2.72}$$

Щоб вивести систему рівнянь для обчислення невідомих коефіцієнтів $c_0,c_1,\dots,c_N$ визначимо $(N+1)\times(2N+1)$ матрицю $\mathbf{C}_N$ з елементами $C_{k,j}=c_{N+k-j}$ при $k\leqslant j\leqslant N+k$ та $C_{k,j}=0$ при $k>j$ та $j>N+k$, де $k=0,1,\dots,N$, $j=0,1,\dots,2N$. Як результат добутку $\vec{\alpha}=\vec{c}\,\mathbf{C}_N$ вектора $\vec{c}=(\overline{c}_0,\overline{c}_1,\dots,\overline{c}_N)$ на матрицю $\mathbf{C}_N$ ми отримаємо $2N+1$ вектор $\vec{\alpha}=(\alpha_{-N},\dots,\alpha_N)$. Аналогічно тому, як була визначена матриця $\mathbf{C}_N$, визначимо $(N+1)\times(3N+1)$ матрицю $\Lambda_N$ з елементами $\Lambda_{k,j}=\alpha_{-N-k+j}$ при $k\leqslant j\leqslant 2N+k$ та $\Lambda_{k,j}=0$ при $k>j$ та $j>2N+k$, де $k=0,1,\dots,N$, $j=0,1,\dots,3N$. Як результат добутку $\vec{b}=\vec{c}\,\Lambda_N$ вектора $\vec{c}$ на матрицю $\Lambda_N$ ми отримаємо $3N+1$ вектор $\vec{b}=(b_{-N},\dots,b_{2N})$.

Інше рівняння ми отримаємо із умови (2.62) скориставшись виглядом спектральної характеристики (2.72). Матимемо $\vec{a}=\vec{b}\,\mathbf{R}$, де $\vec{a}=(a_0,a_1,\dots,a_N)$, $\mathbf{R}$ – це $(3N+1)\times(N+1)$ матриця з елементами $\{R_{k,j}\}_{k=0,j=0}^{3N,N}$, $R_{k,j}=r_{N-k+j}$, побудована з коефіцієнтів Фур'є $r_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta))^{-3}e^{-ik\theta}d\theta$ функції $(f(\theta))^{-3}$. Вказані рівняння

$$\vec{\alpha}=\vec{c}\,\mathbf{C}_N,\quad \vec{b}=\vec{c}\,\Lambda_N,\quad \vec{a}=\vec{b}\,\mathbf{R}$$

визначають невідомі коефіцієнти $c_0, c_1, \dots, c_N$.

У частинному випадку $N = 1$ та $f(\theta) = |e^{i\theta} + d|^{-\frac{4}{3}}$ матимемо

$$h(\theta) = \sum_{k=0}^{1} a_k e^{ik\theta} - \left( \sum_{k=-1}^{2} b_k e^{ik\theta} \right) \left( \sum_{k=-2}^{2} r_k e^{ik\theta} \right)$$

та рівняння

$$b_{-1} = \overline{c_0}^2 c_1,\ b_0 = c_0 \overline{c_0}^2 + 2\overline{c_0} c_1 \overline{c_1},\ b_1 = 2c_0 \overline{c_0} \overline{c_1} + c_1 \overline{c_1}^2,\ b_2 = c_0 \overline{c_1}^2$$

$$a_0 - b_{-1} r_1 - b_0 r_0 - b_1 r_{-1} - b_2 r_{-2} = 0,\ a_1 - b_{-1} r_2 - b_0 r_1 - b_1 r_0 - b_2 r_{-1} = 0,$$

що співпадають з рівняннями (2.67), (2.70).

**2.3.2. Мінімаксний підхід.** Величина похибки $\Delta(h(f); f) := \left\| \hat{A}_N \xi - A_N \xi \right\|_\alpha^\alpha$ та спектральна характеристика $h(f) := h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N \xi$ визначаються вказаними формулами лише у тому випадку, коли відома спектральна щільність $f(\theta)$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$. Якщо ж задано лише множину $D$ допустимих спектральних щільностей, то застосовується мінімаксний підхід до задачі оцінювання функціонала, тобто визначається оцінка, яка мінімізує значення похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із класу $D$ [30].

**Означення 2.6.** Для заданого класу спектральних щільностей $D$ спектральна щільність $f_0 \in D$ називається найменш сприятливою в $D$ для оптимальної лінійної оцінки $A_N \xi$, якщо виконується наступне співвідношення:

$$\triangle(f_0) = \triangle(h(f_0); f_0) = \max_{f \in D} \triangle(h(f); f).$$

Позначимо через $L_-^\alpha(f)$ підпростір функцій в $L^\alpha(f)$, який породжений $\{e^{i\lambda k}, k < 0\}$, а через $L_N^\alpha(f)$ підпростір, що породжений $\{e^{i\lambda k}, k > N\}$.

**Означення 2.7.** Для заданого класу спектральних щільностей $D$ спектральна характеристика $h^0(f)$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0 \in H_D = \bigcap_{f \in D} L_-^\alpha(f) \oplus L_N^\alpha(f),$$

$$\min_{h \in H_D} \max_{f \in D} \triangle(h; f) = \max_{f \in D} (h^0; f).$$

Найменш сприятлива спектральна щільність $f_0(\theta)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ утворюють сідлову точку функції $\triangle(h; f)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\triangle(h; f_0) \geqslant \triangle(h^0; f_0) \geqslant \triangle(h^0; f) \quad \forall f \in D, \forall h \in H_D$$

виконуються коли $h^0 = h(f_0)$ та $h(f_0) \in H_D$, де $f_0$ – розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\tilde{\triangle}(f) = -\triangle(h(f_0); f) \to \inf, \quad f \in D, \tag{2.73}$$

$$\triangle(h(f_0); f) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left( \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta. \tag{2.74}$$

Така задача на умовний екстремум еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\tilde{\triangle}_D(f) = \tilde{\triangle}(f) + \delta(f|D) \to \inf,$$

де $\delta(f|D)$ – індикаторна функція множини $D$. Розв'язок $f_0$ цієї задачі на безумовний екстремум характеризується умовою $0 \in \partial \tilde{\triangle}_D(f_0)$ [30], де $\partial \tilde{\triangle}_D(f_0)$ – субдиференціал опуклого функціонала $\tilde{\triangle}_D(f_0)$.

Вигляд (2.74) функціонала $\triangle(h(f_0); f)$ зручний для застосування методу невизначених множників Лагранжа до розв'язання задачі на умовний екстремум (2.73). Користуючись методом Лагранжа та виглядом субдиференціалів індикаторних функцій $\delta(f|D)$ множин $D$ спектральних щільностей, ми знайдемо співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності для конкретних класів щільностей.

**2.3.3. Найменш сприятливі щільності в класі $D_0$.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$ у тому випадку, коли спектральна щільність $f(\theta)$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$, невідома, а задано лише множину $D_0$ допустимих спектральних щільностей, де

$$D_0 = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = P \right\}.$$

Застосувавши метод невизначених множників Лагранжа до розв'язання задачі на умовний екстремум (2.73), отримаємо співвідношення

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\left|\left(\sum_{j=0}^{N}c_je^{-ij\theta}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>}(f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right|^{\alpha}-\lambda\right)f(\theta)d\theta=0.$$

З леми Лагранжа випливає, що

$$\left|\left(\sum_{j=0}^{N}c_je^{-ij\theta}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>}(f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right|^{\alpha}=\lambda.$$

Із цього співвідношення можемо зробити висновок, що найменш сприятлива спектральна щільність у класі $D_0$ має вигляд

$$f_0(\theta)=C\left|\sum_{j=0}^{N}c_je^{-ij\theta}\right|. \tag{2.75}$$

Отже, наступне твердження вірне.

**Теорема 2.10.** *Спектральна щільність* (2.75)*, що задовольняє умову мінімальності* (2.57)*, рівняння* (2.63) *та умову $f_0\in D_0$, тобто $\int_{-\pi}^{\pi}f_0(\theta)d\theta=P$, є найменш сприятливою спектральною щільністю у класі $D_0$ для оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$. Мінімаксна спектральна характеристика $h(f_0)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi$ обчислюється за формулою* (2.61) *при $f(\theta)=f_0(\theta)$.*

**2.3.4. Найменш сприятливі щільності в класі $D_\beta$.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$ у тому випадку, коли спектральна щільність $f(\theta)$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n$ невідома, проте задано множину допустимих спектральних щільностей

$$D_\beta=\left\{f:\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(\theta))^{\beta}\,d\theta=P\right\},\quad \beta\neq\frac{-1}{\alpha-1},\beta\neq 1.$$

Застосувавши метод невизначених множників Лагранжа до розв'язання задачі на умовний екстремум (2.73), отримаємо співвідношення

$$\left| \left( \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} = \lambda \left( f_0(\theta) \right)^{\beta-1},$$

яке можна записати у вигляді

$$\left| \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (f_0(\theta))^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}} = \lambda \left( f_0(\theta) \right)^{\beta-1}.$$

Із цього співвідношення можемо зробити висновок, що найменш сприятлива спектральна щільність у класі $D_\beta$ має вигляд

$$f_0(\theta) = C \left| \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right|^{\frac{-\alpha}{-\alpha-(\alpha-1)(\beta-1)}}. \tag{2.76}$$

Отже, справджується така теорема.

**Теорема 2.11.** *Спектральна щільність* (2.76), *що задовольняє умову мінімальності* (2.57), *рівняння* (2.63) *та умову* $f_0 \in D_\beta$, *тобто* $\int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\theta))^{\beta} d\theta = P$, *є найменш сприятливою спектральною щільністю у класі* $D_\beta$ *для оптимального лінійного оцінювання функціонала* $A_N\xi$. *Мінімаксна спектральна характеристика* $h(f_0)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_N\xi$ *обчислюється за формулою* (2.61) *при* $f(\theta) = f_0(\theta)$.

**2.3.5. Найменш сприятливі щільності в класі $D_M^-$.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$ у тому випадку, коли спектральна щільність $f(\theta)$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n$ невідома, а задано множину допустимих спектральних щільностей

$$D_M^- = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\theta) cos(m\theta) d\theta = r_m, m = 0, \dots, M \right\},$$

де $r_m$, $m = 0, \dots, M$ – строго позитивна послідовність дійсних чисел. За цієї умови проблема моментів має розв'язки і множина $D_M^-$ містить нескінченну кількість щільностей.

Застосувавши метод невизначених множників Лагранжа до розв'язання задачі на умовний екстремум (2.73), отримаємо співвідношення

$$\left| \left( \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} = \left( \sum_{m=0}^{M} \lambda_m cos(m\theta) \right) (f_0(\theta))^{-2},$$

де $\lambda_j, j = 0, \ldots, M$ – множники Лагранжа. Вираз $\left(\sum_{m=0}^{M} \lambda_m cos(m\theta)\right)$ можна подати у вигляді [122]

$$\left( \sum_{m=0}^{M} \lambda_m cos(m\theta) \right) = \left| \sum_{m=0}^{M} p_m e^{im\theta} \right|^2.$$

Із отриманих співвідношень можемо зробити висновок, що найменш сприятлива спектральна щільність у класі $D_M^-$ має вигляд ($1 < \alpha < 2$)

$$f_0(\theta) = \left| \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \left| \sum_{m=0}^{M} p_m e^{im\theta} \right|^{2\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}. \tag{2.77}$$

Отже справджується така теорема.

**Теорема 2.12.** *Спектральна щільність* (2.77), *що задовольняє умову мінімальності* (2.57), *рівняння* (2.63), *та умову* $f_0 \in D_M^-$, *тобто* $\int_{-\pi}^{\pi} f_0^{-1}(\theta) cos(m\theta) d\theta = r_m, m = 0, \ldots, M$, *є найменш сприятливою спектральною щільністю у класі* $D_M^-$ *для оптимального лінійного оцінювання функціонала* $A_N\xi$. *Мінімаксна спектральна характеристика* $h(f_0)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_N\xi$ *обчислюється за формулою* (2.61) *при* $f(\theta) = f_0(\theta)$.

## 2.4. Задача фільтрації гармонізованих випадкових послідовностей

У даному підрозділі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a_k \xi_{-k} = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta}) dZ(\theta), \quad A_N(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-ik\theta},$$

що залежить від невідомих значень гармонізованої $\alpha-$стійкої послідовності $\xi_k$ за спостереженнями послідовності $\xi_n + \eta_n, n \in \mathbb{Z}$ у моменти часу $n = 0, -1, -2, \dots$, де $\xi_n$ та $\eta_n$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі стохастичні послідовності.

**2.4.1. Класичний підхід.** Задачу досліджуватимемо у тому випадку, коли взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні послідовності $\xi_n$ та $\eta_n$ мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta)$ та $\nu(\theta)$ відповідно, та спектральні щільності $f(\theta) > 0$, $g(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) + g(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} d\theta < \infty. \tag{2.78}$$

Позначимо через $H^-(\xi + \eta)$ замкнуту за нормою $|| \cdot ||_\alpha$ лінійну оболонку породжену випадковими величинами $\{\xi_n + \eta_n; n = 0, -1, -2, \dots\}$.

Виходячи із співвідношення ізоморфізму між просторами $H(\xi)$ та $L_\alpha(f + g)$ будемо шукати оцінку у вигляді

$$\hat{A}_N \xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left( dZ^\xi(\theta) + dZ^\eta(\theta) \right). \tag{2.79}$$

Така оцінка визначається спектральною характеристикою $h(\theta)$, що належить підпростору $L_\alpha^-(f + g)$ простору $L_\alpha(f + g)$ породженому функціями $e^{in\theta}$ при $n = 0, -1, \dots$. Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки $\hat{A}_N \xi$ функціонала $A_N \xi$ мінімізує значення $||A_N \xi - \hat{A}_N \xi||_\alpha$. Найкращим наближенням значення величини $A_N \xi$ у просторі $H^-(\xi + \eta)$ є проекція $\hat{A}_N \xi$ на цей простір, що визначається наступним чином:

$$[\xi_n + \eta_n, A_N \xi - \hat{A}_N \xi]_\alpha = 0, n = 0, -1, -2, \dots$$

Скориставшись спектральним розкладом коваріації гармонізованого процесу, отримаємо наступне співвідношення

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n}\left[\left(A_N(e^{i\theta})-h(\theta)\right)^{<\alpha-1>}f(\theta)-(h(\theta))^{<\alpha-1>}g(\theta)\right]d\theta=0, \tag{2.80}$$

$n=0,-1,-2,\dots$

Із отриманого співвідношення маємо таке рівняння для визначення спектральної характеристики

$$\left(A_N(e^{i\theta})-h(\theta)\right)^{<\alpha-1>}f(\theta)-(h(\theta))^{<\alpha-1>}g(\theta)=\overline{C(e^{i\theta})}, \tag{2.81}$$

$$C(e^{i\theta})=\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{i(k+1)\theta},$$

де $c_k$ – невідомі коефіцієнти, які визначаються із умови

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n}h(\theta)d\theta=0, \quad n=1,2,\dots. \tag{2.82}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_N\xi-A_N\xi\right\|_\alpha^\alpha=\int_{-\pi}^{\pi}\left|A_N(e^{i\theta})-h(\theta)\right|^\alpha f(\theta)d\theta+\int_{-\pi}^{\pi}|h(\theta)|^\alpha g(\theta)d\theta. \tag{2.83}$$

Отже, маємо наступну теорему.

**Теорема 2.13.** *Нехай $\xi_n, n\in\mathbb{Z}$ та $\eta_n, n\in\mathbb{Z}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні послідовності, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta),\nu(\theta)$ із спектральними щільностями $f(\theta)>0, g(\theta)>0$ відповідно, які задовольняють умову мінімальності* (2.78). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi=\int_{-\pi}^{\pi}A_N(e^{i\theta})dZ^\xi(\theta)$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n$ за спостереженнями послідовності $\xi_n+\eta_n$ у точках $n=0,-1,-2,\dots$ обчислюється за формулою* (2.79). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається із рівнянь* (2.81), *де невідомі коефіцієнти $c_k, k=1,2,\dots,$ визначаються рівняннями* (2.82). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (2.83).

**2.4.2. Фільтрація гармонізованих $\alpha$-стійких послідовностей. $\alpha = 2$.** Розглянемо задачу оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ послідовності $\xi_k$, для $\alpha = 2$. У цьому випадку взаємно незалежні $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ та $\eta_n, n \in \mathbb{Z}$ є стаціонарними.

Спектральна характеристика оцінки, що визначається із рівняння (2.81), матиме вигляд

$$\begin{aligned} h(\theta) &= A_N(e^{i\theta}) - \frac{A_N(e^{i\theta})g(\theta) + C(e^{i\theta})}{f(\theta) + g(\theta)}, \\ C(e^{i\theta}) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{i(k+1)\theta}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Невідомі коефіцієнти $c_k$ визначаються із рівнянь

$$\sum_{j=0}^{N} a_j \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(j-n)\theta} f(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k-n+1)\theta}}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.85}$$

Визначимо оператори у просторі $\ell_2$, що задані матрицями $(\mathbf{B})_{k,j} = B_{k,j}, k, j \geqslant 0$; $(\mathbf{Q})_{k,j} = Q_{k,j}, k \geqslant 1, j \geqslant 0$; $(\mathbf{R})_{k,j} = R_{k,j}, k, j \geqslant 0$, утвореними з коефіцієнтів Фур'є

$$B_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\theta} \frac{1}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta;$$

$$Q_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j+k)\theta} \frac{f(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta;$$

$$R_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\theta} \frac{f(\theta)g(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta.$$

Рівняння (2.85), що визначають невідомі коефіцієнти $c_k$, можна записати у вигляді:

$$\mathbf{Qa} = \mathbf{Bc}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Qa},$$

де вектори $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_N, 0, \ldots)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots)$.

Похибку оцінки функціонала можемо обчислити за формулою

$$\left\|\hat{A}_N\xi - A_N\xi\right\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{A_N(e^{i\theta})g(\theta) + C(e^{i\theta})}{f(\theta)+g(\theta)}\right|^2 f(\theta)d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{A_N(e^{i\theta})f(\theta) - C(e^{i\theta})}{f(\theta)+g(\theta)}\right|^2 g(\theta)d\theta = \langle \mathbf{Qa}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Qa}\rangle + \langle \mathbf{Ra}, \mathbf{a}\rangle. \tag{2.86}$$

Сформулюємо результат у вигляді леми.

**Лема 2.6.** *Нехай $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ та $\eta_n, n \in \mathbb{Z}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, $\alpha = 2$, стохастичні послідовності, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta), \nu(\theta)$ із спектральними щільностями $f(\theta) > 0, g(\theta) > 0$ відповідно, які задовольняють умову мінімальності* (2.78) *при $\alpha = 2$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ послідовності $\xi_k$ за спостереженнями послідовності $\xi_n+\eta_n$ в точках $n = 0, -1, -2, \ldots$ обчислюється за формулою* (2.79). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається із рівняння* (2.84), *де невідомі коефіцієнти $c_k, k = 1, 2, \ldots,$ визначається рівнянням* (2.85). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (2.86).

**2.4.3. Мінімаксний підхід.** Розв'язання задачі оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\xi$, знаходження похибки $\Delta(h(f,g); f,g) := \left\|\hat{A}_N\xi - A_N\xi\right\|_\alpha^\alpha$, спектральної характеристики $h(f,g) := h(\theta)$ використовувало знання спектральної щільності $f$ та $g$. Знайдемо оцінку, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх спектральних щільностей з деякого класу $D = D_f \times D_g$ [92], для цього зробимо припущення, що щільності $f$ та $g$ належить класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$.

**Означення 2.8.** Для заданого класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральні щільності $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$ називається найменш сприятливими в $D = D_f \times D_g$ для оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_N\xi$ функціонала

$A_N\xi$, якщо виконується наступне співвідношення:

$$\triangle(f_0, g_0) = \triangle(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f,g)\in D=D_f\times D_g} \triangle(h(f, g); f, g).$$

**Означення 2.9.** Для заданого класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0 \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D_f\times D_g} L_\alpha(f+g),$$

$$\min_{h\in H_D} \max_{(f,g)\in D_f\times D_g} \triangle(h; f, g) = \max_{(f,g)\in D} (h^0; f, g).$$

Найменш сприятлива щільність $f_0(\theta)$, $g_0(\theta)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку $\Delta\left(h; f, g\right)$ на множині $H_D \times D$.

Маємо нерівності сідлової точки

$$\Delta\left(h; f_0, g_0\right) \geqslant \Delta\left(h^0; f_0, g_0\right) \geqslant \Delta\left(h^0; f, g\right)$$

$$\forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

при умові $h^0 = h(f_0, g_0)$ і $h(f_0, g_0) \in H_D$, де $(f_0, g_0)$ - розв'язок обмеженої екстремальної задачі

$$\max_{(f,g)\in D_f\times D_g} \Delta\left(h(f_0, g_0); f, g\right) = \Delta\left(h(f_0, g_0); f_0, g_0\right), \tag{2.87}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\triangle}(f, g) = -\triangle(h(f_0, g_0); f, g) = \\ -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\theta} - h^0(\theta)\right|^\alpha f(\theta)d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|h^0(\theta)\right|^\alpha g(\theta)d\theta \to \inf, \\ (f, g) \in D = D_f \times D_g.\end{gathered} \tag{2.88}$$

Зауважимо, що задача на умовний екстремум (2.88) еквівалентна до задачі на безумовний екстремум [38]

$$\tilde{\triangle}_D(f, g) = \tilde{\triangle}(f, g) + \delta(f, g|D_f \times D_g) \to \inf,$$

де $\delta(f,g|D_f \times D_g)$ – індикаторна функція множини $D$. Розв'язок характеризується умовою $0 \in \partial\tilde{\triangle}_D(f_0,g_0)$, де $\partial\tilde{\triangle}_D(f_0,g_0)$ - субдиференціал опуклого функціонала $\tilde{\triangle}(f_0,g_0)$.

**2.4.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_f^0 \times D_g^0$.** Розглянемо наступний клас спектральних щільностей $D_f^0 \times D_g^0$. Нехай $f_0(\theta) \in D_f^0, g_0(\theta) \in D_g^0$, де

$$D_f^0 = \left\{ f(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \leqslant P_1 \right\},$$

$$D_g^0 = \left\{ g(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) \leqslant P_2 \right\}.$$

Також припустимо, що функції

$$h_f(f_0,g_0) = \left| \sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\theta} - h^0(\theta) \right|^{\alpha}, \tag{2.89}$$

$$h_g(f_0,g_0) = \left| h^0(\theta) \right|^{\alpha} \tag{2.90}$$

обмежені. Із попередніх припущень випливає, що $\Delta\left(h(f_0,g_0); f,g\right)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$.

Виходячи із цих умов функціонал

$$\tilde{\triangle}(f,g) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\theta} - h^0(\theta) \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| h^0(\theta) \right|^{\alpha} g(\theta) d\theta$$

обмежений в просторі $L_1 \times L_1$. Із умови $0 \in \partial\triangle_D(f_0,g_0), D = D_f^0 \times D_g^0$, отримуємо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$\left| \sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\theta} - h^0(\theta) \right|^{\alpha} = \alpha_1(f_0(\theta) + g_0(\theta)) \tag{2.91}$$

$$\left| h^0(\theta) \right|^{\alpha} = \alpha_2(f_0(\theta) + g_0(\theta)), \tag{2.92}$$

де константи $\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0$.

Зауважимо $\alpha_1 \neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta) = P_1.$$

А також $\alpha_2 \neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g_0(\theta) = P_2.$$

**Теорема 2.14.** *Нехай $f_0(\theta) \in D_f^0, g_0(\theta) \in D_g^0$ задовольняють умову мінімальності* (2.78). *Нехай функції $h_f, h_g$ визначені рівностями* (2.89), (2.90) *обмежені. Спектральні щільності $f_0(\theta), g_0(\theta)$ є найменш сприятливі в класі $D = D_f^0 \times D_g^0$ для оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta})dZ^{\xi}(\theta)$, $A_N(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\theta}$, якщо $f_0(\theta), g_0(\theta)$ є розв'язком системи рівнянь* (2.91), (2.92) *та визначає розв'язок екстремальної задачі* (2.87). *Спектральна характеристика $h(f_0, g_0)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ визначається рівняннями* (2.81), (2.82).

**2.4.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_u^v \times D_\epsilon$.** Розглянемо задачу для стаціонарного випадку із шумом $\alpha = 2$. Нехай $f_0(\theta) \in D_u^v, g_0(\theta) \in D_\epsilon$, де

$$D_u^v = \left\{ f(\theta) | u(\theta) \leqslant f(\theta) \leqslant v(\theta), \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)d\lambda \leqslant P_1 \right\},$$

$$D_\epsilon = \left\{ g(\theta) | g(\theta) = (1-\epsilon)g_1(\theta) + \epsilon\omega(\theta), \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)d\lambda \leqslant P_2 \right\}.$$

Також нехай

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{\left|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\theta} g_0(\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^0 e^{i\theta(k+1)}\right|}{f_0(\theta) + g_0(\theta)}, \tag{2.93}$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{\left|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\theta} f_0(\theta) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k^0 e^{i\theta(k+1)}\right|}{f_0(\theta) + g_0(\theta)} \tag{2.94}$$

обмежені.

Маємо, що $\Delta\left(h(f_0, g_0); f, g\right)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$.

Виходячи із цих умов функціонал

$$\begin{aligned} \tilde{\triangle}(f,g) = &- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{A_N(e^{i\theta})g_0(\theta)+C(e^{i\theta})}{f_0(\theta)+g_0(\theta)}\right|^2 f(\theta)d\theta \\ &- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{A_N(e^{i\theta})f_0(\theta)-C(e^{i\theta})}{f_0(\theta)+g_0(\theta)}\right|^2 g(\theta)d\theta \end{aligned} \tag{2.95}$$

обмежений в просторі $L_1 \times L_1$. Із умови $0 \in \partial\triangle_D(f_0, g_0), D = D_f^0 \times D_g^0$, отримуємо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$\left|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\theta} g_0(\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^0 e^{i\theta(k+1)}\right|^{\alpha} = (f_0(\theta)+g_0(\theta))^{\alpha}(\gamma_1(\theta)+\gamma_2(\theta)+\alpha_1^{-1}), \tag{2.96}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\theta} f_0(\theta) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k^0 e^{i\theta(k+1)}\right|^{\alpha} = (f_0(\theta)+g_0(\theta))^{\alpha}(\phi(\theta)+\alpha_2^{-1}), \tag{2.97}$$

де константи $\gamma_1 \leqslant 0$ та $\gamma_1 = 0, f^0(\theta) \geqslant v(\theta)$;

$\gamma_2 = 0, f^0(\theta) \leqslant u(\theta)$; $\phi(\theta) \leqslant 0, \phi(0) = 0$ якщо $g_0(\theta) \geqslant (1-\epsilon)g_1(\theta)$.

**Теорема 2.15.** *Нехай $f_0(\theta) \in D_u^v, g_0(\theta) \in D_\epsilon$ задовольняють умову мінімальності* (2.78)*. Нехай функції $h_f, h_g$ визначені* (2.93), (2.94) *обмежені. Спектральні щільності $f_0(\theta), g_0(\theta)$ найменш сприятливі в класі $D = D_u^v \times D_\epsilon$ для оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta})dZ^{\xi}(\theta)$, $A_N(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\theta}$, якщо $f_0(\theta), g_0(\theta)$ є розв'язком системи рівнянь* (2.96), (2.97) *та визначає розв'язок екстремальної задачі* (2.87)*. Спектральна характеристика $h(f_0, g_0)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ визначається рівняннями* (2.81), (2.82).

### Висновки до розділу 2

Розділ 2 присвячений задачам екстраполяції, інтерполяції та фільтрації лінійних функціоналів від невідомих значень гармонізованих послідовностей. Задачі розв'язано за умови спектральної визначеності, коли задані спектральні щільності послідовностей, та за умови спектральної невизначеності, коли відомо лише деяку множину допустимих спектральних щільностей.

Для задачі екстраполяції знайдено співвідношення для обчислення значень похибок та спектральних характеристик оцінок функціонала

$$A\xi \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} a_j\xi_j = \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{i\theta})dZ^{\xi}(\theta),$$

$$A(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ij\theta},$$

що залежить від невідомих значень випадкового процесу $\xi_j, j = 0, 1, \dots,$ гармонізованої симетричної $\alpha$-стійкої випадкової послідовності $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ за спостереженнями послідовності $\{\xi_k+\eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ у точках часу $k = -1, -2, \dots,$ де $\xi_n$ та $\eta_n$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі стохастичні послідовності. Застосовано мінімаксний метод оцінювання найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик оцінок функціонала для деяких класів спектральних щільностей.

Для задачі інтерполяції без шуму знайдено формули для обчислення похибок та знайдено явний вигляд спектральної характеристики оцінки функціонала

$$A_N\xi \;=\; \sum_{j=0}^{N} a_j\xi_j = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta})dZ(\theta),$$

$$A_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{N} a_j e^{ij\theta},$$

що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0, 1, \dots, N,$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ за спостереженнями послідовності $\xi_n$ в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, N\}$. А також застосовано мінімаксний метод для пошуку найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик.

Для задачі фільтрації знайдено співвідношення для обчислення значень похибок та спектральних характеристик оцінок функціонала

$$A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a_k \xi_{-k} = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta}) dZ(\theta), \quad A_N(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-ik\theta},$$

що залежить від невідомих значень гармонізованої $\alpha-$стійкої послідовності $\xi_k$ за спостереженнями послідовності $\xi_n + \eta_n, n \in \mathbb{Z}$ у моменти часу $n = 0, -1, -2, \ldots,$ де $\xi_n$ та $\eta_n$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі стохастичні послідовності. Для випадку спектральної невизначеності знайдено співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності в деяких заданих класах допустимих спектральних щільностей та мінімаксні спектральні характеристики.

# РОЗДІЛ 3
# ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ГАРМОНІЗОВАНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

У цьому розділі подані результати дослідження задач лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень гармонізованих процесів. Задачі досліджено у випадку спектральної визначеності, коли вигляд спектральних щільностей точно відомий, та у випадку спектральної невизначеності, коли задано лише класи допустимих спектральних щільностей. За умови спектральної визначеності знайдено формули та співвідношення для обчислення похибок оцінок, спектральних характеристик оптимальних лінійних оцінок функціоналів. У випадку спектральної невизначеності встановлено співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності у заданих класах допустимих щільностей та відповідні мінімаксні спектральні характеристики оцінок. Отримані результати дослідження задач оцінювання невідомих значень від функціоналів від гармонізованих процесів опубліковано у роботах [93], [33].

## 3.1. Гармонізовані симетричні $\alpha-$стійкі випадкові процеси

**Означення 3.1 (Симетрична $\alpha$-стійка випадкова величина).** Дійсна випадкова величина $\xi$ називається симетричною $\alpha$-стійкою, $S\alpha S$, якщо її характеристична функція має вигляд $Eexp(it\xi) = exp(-c|t|^{\alpha})$, для деякого $c \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$.

**Означення 3.2 (Симетричний $\alpha$-стійкий стохастичний процес).** Стохастичний процес $\{\xi = \xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ називається симетричним $\alpha$-стійким, якщо будь-які скінченновимірні розподіли $(\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_d)), t_1, t_2, \ldots, t_d \in \mathbb{R}, d \geqslant 1$ мають симетричний $\alpha$-стійкий розподіл.

Коваріація $S\alpha S$ величин $X = X_1 + iX_2$ та $Y = Y_1 + iY_2$ $(1 < \alpha \leqslant 2)$ визначається за формулою

$$[X, Y]_\alpha = \int\limits_{S_4} (x_1 + ix_2) \times \\ \times (y_1 + iy_2)^{<\alpha-1>} d\Gamma_{X_1,X_2,Y_1,Y_2}(x_1, x_2, y_1, y_2), \tag{3.1}$$

де $z^{<\beta>} = |z|^{\beta-1}\bar{z}, \beta > 0$. Коваріація не є симетричною та не є лінійною за другим аргументом. Для сумісно $S\alpha S$ розподілених випадкових величин $\xi, \xi_1, \xi_2, \eta$ маємо такі властивості:

$$[\xi(t_1) + \xi(t_2), \eta]_\alpha = [\xi(t_1), \eta]_\alpha + [\xi(t_2), \eta]_\alpha,$$

$$|[\xi, \eta]_\alpha| \leqslant ||\xi||_\alpha ||\eta||_\alpha^{\alpha-1} \tag{3.2}$$

де $||\xi||_\alpha = [\xi, \xi]_\alpha^{1/\alpha}$ є нормою у лінійному просторі, що породжений $S\alpha S$ випадковими величинами, яка еквівалентна збіжності за ймовірністю. Зауважимо, що $||\cdot||_\alpha$ може не співпадати зі стандартною нормою в $L_\alpha$.

**Означення 3.3 (Гармонізований симетричний $\alpha$-стійкий стохастичний процес).** Симетричний $\alpha$-стійкий стохастичний $SaS$ процес $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ є гармонізованим $HS\alpha S$ процесом, якщо існує такий $SaS$ стохастичний процес $Z = \{Z(\theta); \theta \in (-\infty, \infty)\}$ з незалежними приростами та скінченою спектральною мірою $\mu$, що процес $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ допускає спектральне зображення

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} dZ(\theta), t \in \mathbb{R}.$$

Коваріація процесу допускає спектральне зображення

$$[\xi(t), \xi(s)]_\alpha = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)\theta} d\mu(\theta),\ t, s \in \mathbb{R}.$$

Будемо вивчати гармонізовані симетричні $\alpha$-стійкі процеси $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ за умови $1 < \alpha \leqslant 2$. Побудуємо спектральну міру $S\alpha S$ процесу із незалежними приростами $Z = \{Z(\theta) : -\infty < \theta < \infty\}$ у наступний спосіб $\mu\{(s, t]\} =$

$\|Z(t) - Z(s)\|_\alpha^\alpha$. Для всіх $f \in L_\alpha(\mu)$ можна визначити інтеграл $\int f(\theta)dZ(\theta)$, що має такі властивості [47]:

$$\left\|\int f(\theta)dZ(\theta)\right\|_\alpha^\alpha = \int |f(\theta)|^\alpha d\mu(\theta), \tag{3.3}$$

$$\left[\int f(\theta)dZ(\theta), \int g(\theta)dZ(\theta)\right]_\alpha = \int f(\theta)\left(g(\theta)\right)^{<\alpha-1>} d\mu(\theta). \tag{3.4}$$

Для замкнутого лінійного підпростору $M \subseteq L_\alpha(\mu)$ та $f \in L_\alpha(\mu)$ існує єдиний елемент з $M$, який мінімізує відстань до $f$ і називається проекцією $f$ на $M$ або найкращою апроксимацією $f$ на $M$, що позначається $P_M f$. Проекція $P_M f$ єдиним чином визначається співвідношенням

$$\int g(\theta)\left(f(\theta) - P_M f(\theta)\right)^{<\alpha-1>} d\mu(\theta) = 0, g \in M. \tag{3.5}$$

Позначимо через $H(\xi)$ замкнутий за нормою $||\cdot||_\alpha$ лінійний многовид, породжений всіма значеннями процесу $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$.

Для $HS\alpha S$ стохастичного процесу $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ і замкнутої підмножини $N \subseteq H(\xi)$ існує єдиний елемент $\hat{\xi}(t) \in N$, який мінімізує відстань до $\xi(t)$ і визначається співвідношенням

$$\left[\eta, \xi(t) - \hat{\xi}(t)\right]_\alpha = 0, \forall \eta \in N. \tag{3.6}$$

## 3.2. Задача екстраполяції гармонізованих випадкових процесів

У даному підрозділі досліджується задача оптимального оцінювання лінійного функціонала

$$A^{extr}\xi = \int_0^\infty a(t)\xi(t)dt = \int_{-\infty}^\infty A^{extr}(\theta)dZ^\xi(\theta),$$

$$A^{extr}(\theta) = \int_0^\infty a(t)e^{it\theta}dt,$$

що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$-процесу $\xi(t), t > 0$, за спостереженнями процесу $\{\xi(t) + \eta(t), t < 0\}$, де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ є гармонізованими симетричними $\alpha$-стійкими стохастичними процесами.

**3.2.1. Класичний підхід($A\xi$).** Розглядаємо задачу для взаємно незалежних гармонізованих симетричних $\alpha$-стійких випадкових процесів $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ та $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$, що мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності $f(\theta) > 0$ і $g(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(f(\theta)+g(\theta))^{\frac{1}{\alpha-1}}} d\theta < \infty \tag{3.7}$$

для деякої ненульової функції експоненціального типу $\gamma(\theta) = \int_0^\infty \alpha(t) e^{it\theta} dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\theta < \infty$.

Позначимо $H^-(\xi+\eta)$ замкнутий за нормою $||\cdot||_\alpha$ лінійний многовид породжений значеннями гармонізованого симетричного $\alpha$-стійкого стохастичного процесу $\xi(t)+\eta(t), t<0$, в просторі $H(\xi+\eta)$, який породжений всіма значеннями процесу $\{\xi(t)+\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$.

Як випливає зі співвідношення між просторами $H(\xi+\eta)$ та $L_\alpha(f+g)$ оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}^{extr}\xi$ функціоналу $A^{extr}\xi$ має вигляд

$$\hat{A}^{extr}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \left( dZ^\xi(\theta) + dZ^\eta(\theta) \right). \tag{3.8}$$

Ця оцінка визначається спектральною характеристикою $h(\theta)$ із $L_\alpha^-(f+g)$, що є підпростором $L_\alpha(f+g)$ породженого експонентами $e^{it\theta}$ при $t<0$.

Оптимальна оцінка $\hat{A}^{extr}\xi$ функціоналу $A^{extr}\xi$ є проекцією величини $A^{extr}\xi$ на підпростір $H^-(\xi+\eta)$, що визначається співвідношенням

$$[\zeta, A^{extr}\xi - \hat{A}^{extr}\xi]_\alpha = 0, \quad \forall \zeta \in H^-(\xi+\eta),$$

або, еквівалентно, співвідношенням

$$[\xi(t)+\eta(t), A^{extr}\xi - \hat{A}^{extr}\xi]_\alpha = 0, \quad \forall t<0. \tag{3.9}$$

З цих рівнянь випливає, що спектральна характеристика $h(\theta)$ оцінки визначається рівнянням

$$\left(A^{extr}(\theta)-h(\theta)\right)^{<\alpha-1>}f(\theta)-(h(\theta))^{<\alpha-1>}g(\theta)=\overline{C^{extr}(\theta)},$$
$$C^{extr}(\theta)=\int\limits_{0}^{\infty}c(t)e^{it\theta}dt \tag{3.10}$$

та задовольняє умови

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\theta t}h(\theta)d\theta=0, t<0. \tag{3.11}$$

Похибка оптимальної лінійної оцінки функціонала визначається формулою

$$\left\|\hat{A}^{extr}\xi-A^{extr}\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|A^{extr}(\theta)-h(\theta)\right|^{\alpha}f(\theta)d\theta+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|h(\theta)|^{\alpha}g(\theta)d\theta. \tag{3.12}$$

Маємо, що вірна наступна теорема.

**Теорема 3.1.** *Нехай* $\{\xi(t), t\in\mathbb{R}\}$ *та* $\{\eta(t), t\in\mathbb{R}\}$ *є взаємно незалежними гармонізованими симетричними $\alpha$-стійкими стохастичними процесами, що мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності* $f(\theta)>0$ *та* $g(\theta)>0$, *що задовольняють умові мінімальності* (3.7). *Оптимальна лінійна оцінка* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала* $A^{extr}\xi=\int_0^\infty a(t)\xi(t)dt$, *що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t>0$, *процесу* $\xi(t), t\in\mathbb{R}$ *за спостереженнями процесу* $\{\xi(t)+\eta(t), t<0\}$ *обчислюється за формулою* (3.8). *Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *оцінки визначається рівняннями* (3.10) *та* (3.11). *Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою* (3.12).

**3.2.2. Спостереження без шуму.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A^{extr}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S-$ процесу $\xi(t), t>0$, за спостереженнями процесу $\{\xi(t), t<0\}$.

Нехай $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ є гармонізованим симетричним $\alpha$-стійким стохастичним процесом, що має абсолютно неперервну міру та спектральну щільність $f(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(f(\theta))^{\frac{1}{\alpha-1}}} d\theta < \infty, \tag{3.13}$$

для деякої ненульової функції експоненціального типу

$$\gamma(\theta) = \int_{0}^{\infty} \alpha(t) e^{it\theta} dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\theta < \infty.$$

Позначимо через $H^{-}(\xi)$ замкнутий за нормою $||\cdot||_{\alpha}$ лінійний многовид породжений значеннями $HS\alpha S$ процесу $\xi(t), t < 0$, в просторі $H(\xi)$, який породжений всіма значеннями $HS\alpha S$ процесу $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$.

Із побудови $H(\xi)$ та $L_{\alpha}(f)$ випливає, що оптимальну оцінку$\hat{A}^{extr}\xi$ функціонала $A^{extr}\xi$ можна побудувати у наступному вигляді

$$\hat{A}^{extr}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) dZ^{\xi}(\theta). \tag{3.14}$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}^{extr}\xi$ функціонала визначається формулами

$$h(\theta) = A^{extr}(\theta) - \left(\overline{C^{extr}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \tag{3.15}$$

де $C^{extr}(\theta) = \int_{0}^{\infty} c(t) e^{it\theta} dt$ та умовою

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t} h(\theta) d\theta = 0, t < 0. \tag{3.16}$$

Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою

$$\left\|\hat{A}^{extr}\xi - A^{extr}\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\left(\overline{C^{extr}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right|^{\alpha} f(\theta) d\theta. \tag{3.17}$$

Із теореми 3.1 наслідком випливає наслідок.

**Наслідок 3.1.** *Нехай* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *є гармонізований симетричний* $\alpha$-*стійкий стохастичний процес, що має абсолютно неперервну спектральну міру та спектральну щільність* $f(\theta) > 0$, *що задовольняє умові мінімальності* (3.13). *Оптимальна лінійна оцінка* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала* $A^{extr}\xi$, *що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t > 0$, *процесу* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$, *за спостереженнями процесу* $\{\xi(t), t < 0\}$ *має вигляд* (3.14). *Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала обчислюється за формулою* (3.15), *де* $C^{extr}(\theta)$ *визначається умовою* (3.16). *Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою* (3.17).

**3.2.3. Стаціонарні процеси.** Розглянемо задачу оптимального оцінювання функціонала $A^{extr}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S-$процесу $\xi(t), t > 0$, за спостереженнями процесу $\{\xi(t) + \eta(t), t < 0\}$, де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ є взаємно незалежними гармонізованими симетричними $\alpha$-стійкими стохастичними процесами у випадку $\alpha = 2$.

Будемо вважати, що стаціонарі процеси $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ та $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ мають спектральні щільності $f(\theta) > 0$ та $g(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності (3.7) із $\alpha = 2$.

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки може бути представлена в одній із наступних форм

$$h(\theta) = \frac{A^{extr}(\theta)f(\theta) - C^{extr}(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)}, \tag{3.18}$$

$$h(\theta) = A^{extr}(\theta) - \frac{A^{extr}(\theta)g(\theta) + C^{extr}(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)}. \tag{3.19}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{A}^{extr}\xi - A^{extr}\xi \right\|_2^2 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A^{extr}(\theta)g(\theta) + C^{extr}(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} \right|^2 f(\theta)d\theta \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A^{extr}(\theta)f(\theta) - C^{extr}(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} \right|^2 g(\theta)d\theta = \\ & = \langle \mathbf{Bc}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{Ra}, \mathbf{a} \rangle, \end{aligned} \tag{3.20}$$

де

$$c(t) = \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Da}\right)(t), t \geqslant 0, \tag{3.21}$$

Оператори $\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{R}$ визначаються за формулами:

$$(\mathbf{Bc})(t) = \int_0^{\infty} c(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{1}{f(\theta)+g(\theta)} d\theta du;$$

$$(\mathbf{Dc})(t) = \int_0^{\infty} c(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{f(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} d\theta du;$$

$$(\mathbf{Rc})(t) = \int_0^{\infty} c(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{f(\theta)g(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} d\theta du.$$

Таким, чином наступна теорема вірна.

**Теорема 3.2.** *Нехай* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *та* $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ *є взаємно незалежними стаціонарними стохастичними процесами, що мають абсолютно неперервні міри та спектральні щільності* $f(\theta) > 0$ *та* $g(\theta) > 0$*, що задовольняють умову мінімальності* (3.7) *із* $\alpha = 2$*. Оптимальна лінійна оцінка* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала* $A^{extr}\xi$*, що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t > 0$ *процесу* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$*, за спостереженнями процесу* $\{\xi(t) + \eta(t), t < 0\}$*, визначається формулою* (3.8)*. Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *оцінки обчислюються за формулою* (3.18) *або* (3.19)*. Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою* (3.20)*.*

**3.2.4. Стаціонарні процеси. Спостереження без шуму.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A^{extr}\xi$, що залежить від невідомих значень $\xi(t), t > 0$, стаціонарного стохастичного процесу $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ за спостереженнями процесу $\xi(t), t < 0$. Припустимо, що стаціонарний процес $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ має спектральні щільності $f(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності (3.13) із $\alpha = 2$.

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}^{extr}\xi$ функціонала $A^{extr}\xi$ визначається за формулою

$$h(\theta) = A^{extr}(\theta) - C^{extr}(\theta) \left(f(\theta)\right)^{-1}, \tag{3.22}$$

Похибку оцінки можна порахувати наступною формулою

$$\left\| \hat{A}^{extr}\xi - A^{extr}\xi \right\|_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| C^{extr}(\theta) \left(f(\theta)\right)^{-1} \right|^2 f(\theta) d\theta. \tag{3.23}$$

Тут

$$C^{extr}(\theta) = \int\limits_{0}^{\infty} c(t) e^{i\theta} d\theta,$$

$$c(t) = \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}\right)(t), t \geqslant 0, \tag{3.24}$$

$$(\mathbf{B}\mathbf{c})(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} c(u) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(f(t)\right)^{-1} dt du.$$

Таким, чином вірна наступна теорема.

**Теорема 3.3.** *Нехай $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ стаціонарний стохастичний процес, що має абсолютно неперервну спектральну міру спектральну щільність $f(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності* (3.13) *з $\alpha = 2$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}^{extr}\xi$ функціонала $A^{extr}\xi$, що залежить від невідомих значень $\xi(t), t > 0$, процесу $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ за спостереженнями процесу $\{\xi(t), t < 0\}$ має вигляд* (3.14), *де спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки обчислюється за формулою* (3.22). *Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається за формулою* (3.23).

**3.2.5. Мінімаксний підхід.** Отримані формули для розрахунку помилки

$$\Delta\left(h(f,g);f,g\right):=\left\|\hat{A}^{extr}\xi-A^{extr}\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha}$$

і спектральної характеристики $h(f,g):=h(\theta)$ оптимальної оцінки $\hat{A}^{extr}\xi$ функціонала $A^{extr}\xi$ можуть бути застосовані тільки в тому випадку, коли точно відомі спектральні щільності процесів. Однак, як правило, ми не маємо точних значень спектральних щільностей процесів, у той час як часто знаємо набір $D=D_f\times D_g$ допустимих спектральних щільностей. У цьому випадку ми можемо застосувати мінімаксний підхід до оцінки функціонала $A^{extr}\xi$. Цей метод знаходить оцінку, що мінімізує максимум похибки для всіх спектральних щільностей із множини $D=D_f\times D_g$ допустимих спектральних щільностей одночасно [92].

**Означення 3.4.** Для даного класу спектральних щільностей $D=D_f\times D_g$ спектральні щільності $f_0(\theta)\in D_f$, $g_0(\theta)\in D_g$ називають найменш сприятливими в класі $D=D_f\times D_g$ для оптимальної лінійної оцінки функціонала $A^{extr}\xi$, якщо виконується наступне співвідношення

$$\Delta\left(f_0,g_0\right)=\Delta\left(h\left(f_0,g_0\right);f_0,g_0\right)=\max_{(f,g)\in D_f\times D_g}\Delta\left(h\left(f,g\right);f,g\right). \tag{3.25}$$

**Означення 3.5.** Для даного класу спектральних щільностей $D=D_f\times D_g$ спектральна характеристика $h^0=h(f_0,g_0)$ оптимальної оцінки $\hat{A}^{extr}\xi$ функціонала $A^{extr}\xi$ називається мінімаксною (робастною) для оптимальної лінійної оцінки функціонала $A^{extr}\xi$, якщо виконується наступне співвідношення

$$h^0\in H_D=\bigcap_{(f,g)\in D_f\times D_g}L^{\alpha}(f+g),$$

$$\min_{h\in H_D}\max_{(f,g)\in D}\Delta\left(h;f,g\right)=\max_{(f,g)\in D}\Delta\left(h^0;f,g\right).$$

Найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\theta)$, $g_0(\theta)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0=h(f_0,g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta\left(h;f,g\right)$ на множині $H_D\times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta\left(h;f_0,g_0\right)\geqslant\Delta\left(h^0;f_0,g_0\right)\geqslant\Delta\left(h^0;f,g\right)$$

$$\forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

справджуються, якщо $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, де $(f_0, g_0)$ є розв'язком оптимізаційної задачі без обмежень

$$\max_{(f,g)\in D_f\times D_g} \Delta\left(h(f_0, g_0); f, g\right) = \Delta\left(h(f_0, g_0); f_0, g_0\right), \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\Delta\left(h(f_0, g_0); f, g\right) &= \left\|A^{extr}\xi - \hat{A}^{extr}\xi\right\|_\alpha^\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|A^{extr}(\theta) - h^0(\theta)\right|^\alpha f(\theta)d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|h^0(\theta)\right|^\alpha g(\theta)d\theta.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Задача оптимізації з обмеженнями (3.26) еквівалентна до оптимізаціної задачі без обмежень

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \delta(f, g\,|D_f \times D_g) \to \inf, \tag{3.28}$$

де $\delta(f, g\,|D_f \times D_g)$ індикаторна функція множини $D = D_f \times D_g$. Розв'язок $(f_0, g_0)$ задачі (3.28) характеризується умовою $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$, де $\partial\Delta_D(f_0, g_0)$ субдиференціал функціонала $\Delta_D(f, g)$ в точці $(f_0, g_0)$. Ця умова дозволяє знайти найменш сприятливі спектральні щільності в деяких спеціальних класів спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ [30].

Зауважимо, що форма функціонала $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ зручна для застосування методу множників Лагранжа для знаходження розв'язку задачі (3.26). У наступній частині запропоновано співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності в деяких спеціальних класів спектральних щільностей. На підставі поданих визначень і отриманих формул приходимо до висновку, що справедливі наступні твердження.

**Лема 3.1.** *Нехай* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *та* $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ *є взаємно незалежними гармонізованими симетричними* $\alpha$*-стійкими стохастичними процесами, що мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності* $f_0(\theta) > 0$ *та* $g_0(\theta) > 0$*, що задовольняють умову мінімальності* (3.7)*. Нехай спектральні щільності* $(f_0, g_0) \in D_f \times D_g$ *дають розв'язок* *задачі оптимізації з обмеженнями* (3.26). *Спектральні щільності* $(f_0, g_0)$ *є найменш сприятливими спектральними щільностями* $D_f \times D_g$ *та* $h^0 = h(f_0, g_0)$ *мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала* $A^{extr}\xi$ *що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t > 0$, *процесу* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *за спостереженнями процесу* $\{\xi(t)+\eta(t), t < 0\}$ *якщо* $h^0 = h(f_0, g_0) \in H_D$.

**Наслідок 3.2.** *Нехай* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *є гармонізованим симетричним* $\alpha$-*стійким стохастичним процесом, що має абсолютно неперервну спектральну міру та щільність* $f_0(\theta) > 0$, *що задовольняє умову мінімальності* (3.13). *Нехай спектральна щільність* $f_0 \in D_f$ *дає розв'язок задачі оптимізації з обмеженнями*

$$\max_{f \in D_f} \Delta\left(h(f_0); f\right) = \Delta\left(h(f_0); f_0\right), \tag{3.29}$$

$$\Delta\left(h(f_0); f\right) = \left\| A^{extr}\xi - \hat{A}^{extr}\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(C^{extr^0}(\theta)\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta. \tag{3.30}$$

*Спектральна щільність* $f_0$ *є найменш сприятливою спектральною щільністю в класі* $D_f$ *та* $h^0 = h(f_0)$ *є мінімаксною спектральною характеристикою оцінки* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала* $A^{extr}\xi$, *що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t > 0$, *процесу* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$, *за спостереженнями процесу* $\{\xi(t), t < 0\}$ *якщо* $h^0 = h(f_0) \in H_D$.

**Лема 3.2.** *Нехай* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *та* $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ *є взаємно незалежними стаціонарними стохастичними процесами, що має абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності* $f_0(\theta) > 0$ *та* $g_0(\theta) > 0$, *що задовольняють умови мінімальності* (3.7) *із* $\alpha = 2$. *Нехай спектральні щільності* $(f_0, g_0) \in D_f \times D_g$ *дають розв'язок задачі оптимізації з обмеженнями*

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta\left(h(f_0, g_0); f, g\right) = \Delta\left(h(f_0, g_0); f_0, g_0\right), \tag{3.31}$$

$$\Delta\left(h(f_0,g_0);f,g\right)=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|A^{extr}(\theta)g_0(\theta)+\int\limits_{0}^{\infty}((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\mathbf{a})(t)e^{it\theta}dt\right|^2}{(f_0(\theta)+g_0(\theta))^2}\times f(\theta)d\theta+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|A^{extr}(\theta)f_0(\theta)-\int\limits_{0}^{\infty}((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\mathbf{a})(t)e^{it\theta}dt\right|^2}{(f_0(\theta)+g_0(\theta))^2}\times g(\theta)d\theta. \tag{3.32}$$

*Спектральні щільності* $(f_0,g_0)$ *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класі* $D_f\times D_g$ *та* $h^0=h(f_0,g_0)$ *є мінімаксною спектральною характеристикою оцінки* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала* $A^{extr}\xi$*, що залежить від невідомих значень* $\xi(t),t>0$*, процесу* $\{\xi(t),t\in\mathbb{R}\}$ *за спостереженнями процесу* $\{\xi(t)+\eta(t),t<0\}$ *при* $h^0=h(f_0,g_0)\in H_D$*.*

**Наслідок 3.3.** *Нехай* $\{\xi(t),t\in\mathbb{R}\}$ *стаціонарним стохастичним процесом із абсолютно неперервною спектральною мірою та спектральну щільністю* $f_0(\theta)>0$*, що задовольняє умову мінімальності* (3.13) *із* $\alpha=2$*. Нехай спектральна щільність* $f_0\in D_f$ *дає розв'язок задачі оптимізації з обмеженнями*

$$\max_{f\in D_f}\Delta\left(h(f_0);f\right)=\Delta\left(h(f_0);f_0\right), \tag{3.33}$$

$$\Delta\left(h(f_0);f\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{a})(t)e^{it\theta}dt\right|^2 f_0^{-2}(\theta)f(\theta)d\theta. \tag{3.34}$$

*Спектральна щільність* $f_0$ *є найменш сприятливою спектральною щільністю в класі* $D_f$ *та* $h^0=h(f_0)$ *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала* $A^{extr}\xi$*, що залежить від невідомих значень* $\xi(t),t>0$*, процесу* $\{\xi(t),t\in\mathbb{R}\}$ *за спостереженнями процесу* $\{\xi(t),t<0\}$ *якщо* $h^0=h(f_0)\in H_D$*.*

**3.2.6. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_f^0 \times D_g^0$.** Розглянемо задачу для класу $D_f^0 \times D_g^0$, де

$$D_f^0 = \left\{ f(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta \leqslant P_1 \right\},$$

$$D_g^0 = \left\{ g(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) d\theta \leqslant P_2 \right\}.$$

Нехай $f_0(\theta) \in D_f^0, g_0(\theta) \in D_g^0$ і нехай функції

$$h_f(f_0, g_0) = \left| \int_0^{\infty} a(t) e^{it\theta} dt - h^0(\theta) \right|^{\alpha}, \tag{3.35}$$

$$h_g(f_0, g_0) = \left| h^0(\theta) \right|^{\alpha} \tag{3.36}$$

обмежені.

За цих умов маємо, що функціонал

$$\begin{aligned} \tilde{\triangle}(f, g) = &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} a(t) e^{it\theta} dt - h^0(\theta) \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| h^0(\theta) \right|^{\alpha} g(\theta) d\theta. \end{aligned} \tag{3.37}$$

є лінійно обмеженим у просторі $L_1 \times L_1$.

Із умови $0 \in \partial \triangle_D(f_0, g_0)$, для $D = D_f^0 \times D_g^0$ випливає, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівнянням

$$\left| \int_0^{\infty} a(t) e^{it\theta} dt - h^0(\theta) \right|^{\alpha} = \alpha_1 (f_0(\theta) + g(\theta)) \tag{3.38}$$

$$\left| h^0(\theta) \right|^{\alpha} = \alpha_2 (f_0(\theta) + g(\theta)), \tag{3.39}$$

де $\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0$ є константами, $\alpha_1 \neq 0$, якщо

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(\theta) d\theta = P_1;$$

$\alpha_2 \neq 0$, якщо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_0(\theta) d\theta = P_2.$$

Маємо, що вірне наступне твердження.

**Теорема 3.4.** *Нехай спектральні щільності $f_0(\theta) \in D_f^0, g_0(\theta) \in D_g^0$ задовольняють умову мінімальності* (3.7)*. Нехай функції $h_f, h_g$, що визначені* (3.35), (3.36) *є обмеженими. Спектральні щільності $f_0(\theta), g_0(\theta)$ є найменш сприятливими спектральними щільностями $D = D_f^0 \times D_g^0$ для оптимальної екстраполяції функціонала $A^{extr}\xi$, якщо $f_0(\theta), g_0(\theta)$ дають розв'язок системи рівнянь* (3.38), (3.39) *і визначають розв'язок задачі оптимізації* (3.26)*. Спектральні характеристики $h(f_0, g_0)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}^{extr}\xi$ функціонала $A^{extr}\xi$ визначаються рівняннями* (3.10), (3.11)*.*

**3.2.7. Найменш сприятливі спектральні щільності для класу $D_1$. Спостереження без шуму.** Розглянемо задачу для класу спектральних щільностей

$$D_1 = \left\{ f(\theta) : \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta = \gamma \right\}.$$

Використовуючи метод множників Лагранжа отримуємо

$$f_0(\theta) = \lambda \left| \overline{C^{extr^0}(\theta)} \right|. \tag{3.40}$$

$$h(f_0) = A^{extr}(\theta) + \left( \overline{C^{extr^0}(\theta)} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{-\frac{1}{\alpha-1}}. \tag{3.41}$$

Наступна теорема є справедливою.

**Теорема 3.5.** *Нехай спектральні щільність $f_0 \in D_1$ задовольняє умову мінімальності* (3.13) *із $\alpha = 2$. Найменш сприятлива спектральна щільність $D_1$ оптимальної оцінки функціонала $A^{extr}\xi$ є щільність* (3.40)*, які визначають розв'язок задачі оптимізації* (3.29)*. Мінімаксна спектральна характеристика оптимальної оцінки $\hat{A}^{extr}\xi$ функціонала $A^{extr}\xi$ визначається формою* (3.41) *та* (3.16)*.*

**3.2.8. Найменш сприятливі спектральні щільності для класу $D_{2\epsilon_1}\times D_{1\epsilon_2}$. Стаціонарні процеси.** Розглянемо задачу для класу $D_{2\epsilon_1}\times D_{1\epsilon_2}$, де

$$D_{2\epsilon_1}=\left\{f(\theta)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\theta)-f_1(\theta)|^2d\theta\leqslant\epsilon_1\right\},$$

$$D_{1\epsilon_2}=\left\{g(\theta)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\theta)-g_1(\theta)|d\theta\leqslant\epsilon_2\right\}.$$

Нехай функції

$$h_f(f_0,g_0)=\frac{\left|A^{extr}(\theta)g_0(\theta)+\int_0^{\infty}\left((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a}\right)(t)e^{it\theta}dt\right|^2}{(f_0(\theta)+g_0(\theta))^2},\tag{3.42}$$

$$h_g(f_0,g_0)=\frac{\left|A^{extr}(\theta)f_0(\theta)-\int_0^{\infty}\left((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a}\right)(t)e^{it\theta}dt\right|^2}{(f_0(\theta)+g_0(\theta))^2}\tag{3.43}$$

обмежені. Із умови $0\in\partial\triangle_D(f_0,g_0), D=D_f^0\times D_g^0$, маємо, що найменш сприятливі спектральні щільності визначаються рівнянням

$$\begin{gathered}\left|A^{extr}(\theta)g_0(\theta)+\int\limits_0^{\infty}\left((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a}\right)(t)e^{it\theta}dt\right|^2=\\=\alpha_1(f_0(\theta)+g_0(\theta))^2(f_0(\theta)-f_1(\theta))\end{gathered}\tag{3.44}$$

$$\begin{gathered}\left|A^{extr}(\theta)f_0(\theta)-\int\limits_0^{\infty}\left((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a}\right)(t)e^{it\theta}dt\right|^2=\\=\alpha_2(f_0(\theta)+g_0(\theta))\Psi(\theta),\end{gathered}\tag{3.45}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\theta)-f_1(\theta)|^2d\theta=\epsilon_1\tag{3.46}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\theta)-g_1(\theta)|d\theta=\epsilon_2\tag{3.47}$$

$|\Psi(\theta)|<1, \Psi(\theta)=sign(g_0(\theta)-g_1(\theta))$, якщо $g_0(\theta)\neq g_1(\theta)$, $\alpha_1,\alpha_2$ є константами.

Таким чином, наступне твердження справедливо.

**Теорема 3.6.** *Нехай* $f_0(\theta) \in D_{2\epsilon_1}, g_0(\theta) \in D_{1\epsilon_2}$ *задовольняє умову мінімальності* (3.7). *Нехай функції* $h_f, h_g$ *визначаються* (3.42), (3.43) *є обмежені. Спектральні щільності* $f_0(\theta), g_0(\theta)$ *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класі* $D = D_{2\epsilon_1} \times D_{1\epsilon_2}$ *для оптимальної екстраполяції функціонала* $A^{extr}\xi = \int_0^\infty a(t)\xi(t)dt$, *якщо* $f_0(\theta), g_0(\theta)$ *є розв'язком рівняння* (3.44), (3.45), (3.46), (3.47) *і визначають розв'язок задачі оптимізації* (3.31). *Спектральна характеристика* $h(f_0, g_0)$ *для оптимальної оцінки* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала* $A^{extr}\xi$ *визначається рівняннями* (3.19).

**3.2.9. Найменш сприятливі спектральні щільності $D_f^\beta$. Стаціонарні процеси. Спостереження без шуму.** Розглянемо задачу для класу $D_f^\beta$, де

$$D_f^\beta = \left\{ f(\theta) | \int_{-\infty}^{\infty} (f(\theta))^\beta d\theta = P_1 \right\}.$$

Із умови $0 \in \partial\triangle_D(f_0, g_0), D = D_f^\beta$ найменш сприятлива спектральна щільність задовольняє рівняння

$$\left| \int_0^\infty \left((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{a}\right)(t) e^{i\theta} d\theta \right|^2 f_0^{-2}(\theta) = \gamma_1 (f_0(\theta))^{\beta-1}, \tag{3.48}$$

де $\gamma_1$ визначається із умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(\theta)^\beta d\theta = P_1. \tag{3.49}$$

Таким чином, наступне твердження справедливо.

**Теорема 3.7.** *Нехай спектральна щільність* $f_0 \in D_f^\beta$ *задовольняє умову мінімальності* (3.13) *із* $\alpha = 2$. *Найменш сприятлива спектральна щільність* $D_f^\beta$ *для оптимальної оцінки функціонала* $A^{extr}\xi$ *визначається рівняннями* (3.48) *і задачею оптимізації* (3.33). *Мінімаксний спектральна характеристика* $h(f_0)$ *визначається рівнянням* (3.22).

## 3.3. Задача інтерполяції гармонізованих випадкових процесів.

У даному розділі досліджується задача оптимальної лінійної оцінки функціонала

$$A_T^{int}\xi = \int_0^T a(t)\xi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} A_T^{int}(\theta)dZ^{\xi}(\theta),$$

$$A_T^{int}(\theta) = \int_0^T a(t)e^{it\theta}dt,$$

що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ стохастичного процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t), t \in \mathbb{R}\setminus[0;T]$, де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні процеси.

**3.3.1. Класичний підхід.** Задачу вивчатимемо у тому випадку, коли взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta)$ та $\nu(\theta)$ відповідно, та спектральні щільності $f(\theta)>0$, $g(\theta)>0$, що задовольняють умову мінімальності:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(f(\theta)+g(\theta))^{\frac{1}{\alpha-1}}}d\theta < \infty \tag{3.50}$$

для деякої ненульової функції експоненціального типу

$$\gamma(\theta) = \int_0^T \alpha(t)e^{it\theta}dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}d\theta < \infty.$$

Позначимо через $H^T(\xi+\eta)$ замкнуту за нормою $||\cdot||_\alpha$ лінійну оболонку породжену всіма значеннями випадкових величин $\{\xi(t)+\eta(t); t\in\mathbb{R}\setminus[0;T]\}$. Виходячи із співвідношення ізоморфізму між $H(\xi+\eta)$ та $L_\alpha(f+g)$ будемо шукати оцінку функціонала у вигляді

$$\hat{A}_T^{int}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\left(dZ^{\xi}(\theta)+dZ^{\eta}(\theta)\right). \tag{3.51}$$

Така оцінка визначається спектральною характеристикою $h(\theta)$, що належить підпростору $L_\alpha^T(f+g)$ простору $L_\alpha(f+g)$, породженому функціями $e^{it\theta}$ при $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$. Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$ мінімізує значення $||A_T^{int}\xi - \hat{A}_T^{int}\xi||_\alpha$.

Найкращим наближенням величини $A_T^{int}\xi$ у просторі $H^T(\xi+\eta)$ є проекція $\hat{A}_T^{int}\xi$ на цей простір, що визначається наступним чином:

$$[\xi(t)+\eta(t), A_T^{int}\xi - \hat{A}_T^{int}\xi]_\alpha = 0, \forall t \in \mathbb{R} \setminus [0;T].$$

Із зазначених міркувань отримуємо такі співвідношення, що визначають спектральну характеристику оптимальної оцінки функціонала

$$(A_T(\theta) - h(\theta))^{<\alpha-1>} f(\theta) - (h(\theta))^{<\alpha-1>} g(\theta) = \overline{C_T^{int}(\theta)}, \tag{3.52}$$

$$C_T^{int}(\theta) = \int\limits_0^T c(t) e^{it\theta} dt,$$

де $c(t), t \in [0;T]-$ невідома функція, яка визначається з умови

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t} h(\theta) d\theta = 0, t \in [0;T]. \tag{3.53}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} &\left\| \hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi \right\|_\alpha^\alpha = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |A_T(\theta) - h(\theta)|^\alpha f(\theta) d\theta + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)|^\alpha g(\theta) d\theta. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Отже, маємо наступну теорему

**Теорема 3.8.** *Нехай $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha$-стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta), \nu(\theta)$ та спектральні щільності $f(\theta) > 0$, $g(\theta) > 0$ відповідно, що задовольняють умову мінімальності* (3.50). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих* *значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t), t \in \mathbb{R}\setminus[0;T]$ обчислюється за формулою* (3.51). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається із рівнянь* (3.52), (3.53). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (3.54).

**3.3.2. Спостереження без шуму.** Досліджено задачу оптимальної лінійної оцінки функціонала

$$A_T^{int}\xi = \int_0^T a(t)\xi(t)dt,$$

що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t), t \in \mathbb{R}\setminus[0;T]$ без шуму.

Розглянемо $HS\alpha S$ процес із абсолютно неперервною спектральною мірою $\mu(\theta)$, яка має спектральну щільність $f(\theta)>0$, що задовольняє умову мінімальності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(f(\theta))^{\frac{1}{\alpha-1}}}d\theta < \infty, \tag{3.55}$$

для деякої ненульової функції експоненціального типу $\gamma(\theta)$.

Оптимальна оцінка функціонала має вигляд

$$\hat{A}_T^{int}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)dZ^{\xi}(\theta). \tag{3.56}$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки обчислюється за формулою

$$h(\theta) = A_T(\theta) - \left(\overline{C_T^{int}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \tag{3.57}$$

$$C_T^{int}(\theta) = \int_0^T c(t)e^{i\theta}d\theta,$$

де $c(t), t \in [0;T]-$ невідома функція, що знаходиться з умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}h(\theta)d\theta = 0, t \in [0;T]. \tag{3.58}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi\right\|_\alpha^\alpha =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\overline{C_T^{int}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^\alpha f(\theta) d\theta. \tag{3.59}$$

Маємо наступну лему

**Лема 3.3.** *Нехай гармонізований $\alpha-$стійкий, $HS\alpha S$, стохастичний процес $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ має абсолютно неперервну спектральну міру $\mu(\theta)$, яка має спектральну щільність $f(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності* (3.55)*. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ - процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$ обчислюється за формулою* (3.56)*. Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається рівняннями* (3.57)*,* (3.58)*. Похибка оцінки обчислюється за формулою* (3.59)*.*

**3.3.3. Стаціонарний випадок,** $\alpha = 2$. Розглянемо задачу у спеціальному випадку $\alpha = 2$. У цьому випадку взаємно незалежні $HS\alpha S$ процеси $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ є стаціонарними. Розглянемо задачу оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$.

Маємо, що спектральна характеристика задовольняє співвідношення

$$\left(A_T^{int}(\theta) - h(\theta)\right)^{<1>} f(\theta) - (h(\theta))^{<1>} g(\theta) = \overline{C_T^{int}(\theta)},$$
$$C_T^{int}(\theta) = \int_0^T c(t) e^{it\theta} dt.$$

Отже, спектральну характеристику можна обчислити за однією із формул

$$h(\theta) = \frac{A_T^{int}(\theta) f(\theta) - C_T^{int}(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)}, \tag{3.60}$$

$$h(\theta) = A_T^{int}(\theta) - \frac{A_T^{int}(\theta) g(\theta) + C_T^{int}(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)}. \tag{3.61}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}
&\left\| \hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi \right\|_2^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A_T^{int}(\theta)g(\theta) + C_T^{int}(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} \right|^2 f(\theta)d\theta \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A_T^{int}(\theta)f(\theta) - C_T^{int}(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} \right|^2 g(\theta)d\theta \\
&= \langle \mathbf{B}_T\mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{R}_T\mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle,
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Функція $c(t), 0 \leqslant t \leqslant T$ визначається за формулою

$$c(t) = \left(\mathbf{B}_T^{-1}\mathbf{D}_T\mathbf{a}\right)(t), 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$\mathbf{B}_T, \mathbf{D}_T, \mathbf{R}_T$ оператори дія яких визначаться за формулами:

$$(\mathbf{B}_T\mathbf{c})(t) = \int_0^T c(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{1}{f(\theta)+g(\theta)} d\theta du,$$

$$(\mathbf{D}_T\mathbf{c})(t) = \int_0^T c(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{f(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} d\theta du,$$

$$(\mathbf{R}_T\mathbf{c})(t) = \int_0^T c(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{f(\theta)g(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} d\theta du.$$

**Теорема 3.9.** *Нехай $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, $\alpha = 2$, стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta), \nu(\theta)$ та спектральні щільності $f(\theta) > 0, g(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності* (3.50). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$ обчислюється за формулою* (3.51). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається із рівняння* (3.60) *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (3.62).

**3.3.4. Стаціонарні процеси, $\alpha = 2$. Спостереження без шуму.** Розглянемо задачу оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t), t \in \mathbb{R}\backslash[0;T]$ при $\alpha = 2$. Спектральна характеристика приймає наступний вигляд

$$h(\theta) = A_T^{int}(\theta) - C_T^{int}(\theta)\left(f(\theta)\right)^{-1},$$
$$C_T^{int}(\theta) = \int_0^T c(t)e^{i\theta}d\theta. \tag{3.63}$$

Похибка оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi\right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|C_T^{int}(\theta)\left(f(\theta)\right)^{-1}\right|^2 f(\theta)d\theta, \tag{3.64}$$

де $c(t)$ визначається із наступного рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}\left(A_T^{int}(\theta) - C_T^{int}(\theta)\left(f(\theta)\right)^{-1}\right)d\theta = 0, t \in [0;T], \tag{3.65}$$

$$c(t) = \left(\mathbf{B}_T^{-1}\mathbf{a}\right)(t), 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.66}$$
$$(\mathbf{B}_T\mathbf{c})(t) = \int_0^T c(u)\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)\right)^{-1}dtdu.$$

Отже, маємо наступну теорему

**Теорема 3.10.** *Нехай стаціонарний стохастичний процес $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ має абсолютно неперервну спектральну міру $\mu(\theta)$, яка має спектральну щільність $f(\theta) > 0, \alpha = 2$, що задовольняє умову мінімальності* (3.55). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$ обчислюється за формулою* (3.56). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ має вигляд* (3.63), *де невідома функція $c(t), t \in [0;T]$, визначається рівнянням* (3.66). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (3.64).

**3.3.5. Мінімаксний підхід.** Величина похибки

$$\Delta(h(f,g); f,g) := \left\| \hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi \right\|_\alpha^\alpha$$

та спектральна характеристика $h(f,g) := h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T^{int}\xi$ обчислюються за вказаними формулами за умови, що нам відомі спектральні щільності $f$ та $g$. Якщо ж щільності $f$ та $g$ невідомі, проте можна вказати класи допустимих спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ використаємо мінімаксний підхід до задачі оцінювання функціонала і знайдемо оцінку, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх спектральних щільностей з даного класу $D = D_f \times D_g$ [30].

**Означення 3.6.** Для заданого класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральні щільності $f_0 \in D_f$, $g_0 \in D_g$ називаються найменш сприятливими в $D = D_f \times D_g$ для оптимальної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, якщо виконується наступне співвідношення:

$$\begin{aligned} &\triangle(f_0, g_0) = \triangle(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \\ &= \max_{(f,g)\in D = D_f \times D_g} \triangle(h(f,g); f,g). \end{aligned} \tag{3.67}$$

**Означення 3.7.** Для заданого класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо виконуються співвідношення

$$h^0 \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D_f \times D_g} L_\alpha(f+g),$$

$$\min_{h\in H_D} \max_{(f,g)\in D_f \times D_g} \triangle(h; f,g) = \max_{(f,g)\in D} (h^0; f,g).$$

Найменш сприятливі щільності $f_0(\theta)$, $g_0(\theta)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta\left(h; f,g\right)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta\left(h; f_0, g_0\right) \geqslant \Delta\left(h^0; f_0, g_0\right) \geqslant \Delta\left(h^0; f,g\right)$$

$$\forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

справджуються при умові, що $h^0 = h(f_0, g_0)$ і $h(f_0, g_0) \in H_D$, де $(f_0, g_0)$ - розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\tilde{\triangle}(f, g) \to \inf, \quad (f, g) \in D = D_f \times D_g, \tag{3.68}$$

$$\tilde{\triangle}(f, g) = -\triangle(h(f_0, g_0); f, g) =$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^T a(t)e^{it\theta}dt - h^0(\theta)\right|^{\alpha} f(\theta)d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|h^0(\theta)\right|^{\alpha} g(\theta)d\theta.$$

Зауважимо, що задача на умовний екстремум еквівалентна до задачі на безумовний екстремум [92]

$$\tilde{\triangle}_D(f, g) = \tilde{\triangle}(f, g) + \delta(f, g|D_f \times D_g) \to \inf,$$

де $\delta(f, g|D_f \times D_g)$ – індикаторна функція множини $D$. Розв'язок характеризується умовою $0 \in \partial\tilde{\triangle}_D(f_0, g_0)$, де $\partial\tilde{\triangle}_D(f_0, g_0)$ - субдиференціал опуклого функціонала $\tilde{\triangle}(f_0, g_0)$ [92].

Підсумуємо наведені формули та означення у наступних лемах.

**Лема 3.4.** *Нехай* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *та* $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ *взаємно незалежні гармонізовані симетричні $\alpha$-стійкі стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри і спектральні щільності* $f_0(\theta) > 0$ *та* $g_0(\theta) > 0$, *що задовольняють умову мінімальності* (3.50). *Нехай спектральні щільності* $(f_0, g_0) \in D_f \times D_g$ *є розв'язком екстремальної задачі* (3.68). *Спектральні щільності* $(f_0, g_0)$ *є найменш сприятливими в класі* $D_f \times D_g$ *і* $h^0 = h(f_0, g_0)$ *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}_T^{int}\xi$ *функціонала* $A_T^{int}\xi$, *що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t \in [0; T]$, *процесу* $\xi(t)$ *за спостереженнями* $\{\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0; T]\}$, *якщо* $h^0 = h(f_0, g_0) \in H_D$.

**Лема 3.5.** *Нехай* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *гармонізований симетричний $\alpha$-стійкий стохастичний процес, який має абсолютно неперервну спектральну міру і спектральну щільність* $f_0(\theta) > 0$, *що задовольняє умові мінімальності*

(3.50). *Нехай спектральна щільність $f_0 \in D_f$ є розв'язком екстремальної задачі*

$$\max_{f \in D_f} \Delta\left(h(f_0); f\right) = \Delta\left(h(f_0); f_0\right), \tag{3.69}$$

$$\begin{gathered}\Delta\left(h(f_0); f\right) = \frac{1}{2\pi}\left\|A_T^{int}\xi - \hat{A}_T^{int}\xi\right\|_\alpha^\alpha = \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\overline{C^0{}_T(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>}(f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right|^\alpha f(\theta)d\theta.\end{gathered} \tag{3.70}$$

*Спектральна щільність $f_0$ є найменш сприятливою в класі $D_f$ і $h^0 = h(f_0)$ є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $\xi(t), t \in [0;T]$ процесу за спостереженнями $\{\xi(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]\}$, якщо $h^0 = h(f_0) \in H_D$.*

**Лема 3.6.** *Нехай $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ та $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ взаємно незалежні стаціонарні процеси, що мають абсолютно неперервні міри із спектральними щільностями $f_0(\theta) > 0$, $g_0(\theta) > 0$ відповідно, які задовольняють умову мінімальності (3.50) при $\alpha = 2$. Нехай $(f_0, g_0) \in D_f \times D_g$ розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta\left(h(f_0, g_0); f, g\right) = \Delta\left(h(f_0, g_0); f_0, g_0\right), \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}\Delta\left(h(f_0, g_0); f, g\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|A_T^{int}(\theta)g_0(\theta) + \int_0^T((\mathbf{B}_T^0)^{-1}\mathbf{D}_T^0\mathbf{a})(t)e^{it\theta}dt\right|^2}{(f_0(\theta)+g_0(\theta))^2}f(\theta)d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|A_T^{int}(\theta)f_0(\theta) - \int_0^T((\mathbf{B}_T^0)^{-1}\mathbf{D}_T^0\mathbf{a})(t)e^{it\theta}dt\right|^2}{(f_0(\theta)+g_0(\theta))^2}g(\theta)d\theta.\end{aligned} \tag{3.72}$$

*Спектральні щільності $(f_0, g_0)$ є найменш сприятливими в класі $D_f \times D_g$ і $h^0 = h(f_0, g_0)$ є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $\xi(t), t \in [0;T]$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями $\{\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]\}$, якщо $h^0 = h(f_0, g_0) \in H_D$.*

**Лема 3.7.** *Нехай* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *стаціонарний випадковий процес, що має абсолютно неперервну спектральну міру та спектральну щільність* $f_0(\theta) > 0$, *що задовольняє умові мінімальності* (3.55) *при* $\alpha = 2$. *Нехай* $f_0 \in D_f$ *- розв'язок екстремальної задачі*

$$\max_{f \in D_f} \Delta\left(h(f_0); f\right) = \Delta\left(h(f_0); f_0\right), \tag{3.73}$$

$$\Delta\left(h(f_0); f\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^T ((\mathbf{B}_T^0)^{-1}\mathbf{a})(t) e^{it\theta} dt \right|^2 f_0^{-2}(\theta) f(\theta) d\theta. \tag{3.74}$$

*Спектральна щільність* $f_0$ *є найменш сприятливою в класі* $D_f$ *та* $h^0 = h(f_0)$ *є спектральною характеристикою оптимальної оцінки* $\hat{A}_T^{int}\xi$ *функціонала* $A_T^{int}\xi$, *що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t \in [0;T]$ *процесу за спостереженнями* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]\}$ *якщо* $h^0 = h(f_0) \in H_D$.

**3.3.6. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_u^v \times D_\epsilon$.** Розглянемо задачу для класу $D_u^v \times D_\epsilon$.

$$D_u^v = \left\{ f(\theta) | v(\theta) \leqslant f(\theta \leqslant u(\theta)), \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) = P_1 \right\},$$

$$D_\epsilon = \left\{ g(\theta) | g(\theta) = (1-\epsilon) g_1(\theta) + \epsilon\omega(\theta), \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) = P_2 \right\},$$

де спектральні щільності $v(\theta), u(\theta), g_1(\theta)$ відомі та фіксовані, а щільності $v(\theta), u(\theta)$ обмежені.

Нехай $f_0(\theta) \in D_u^v, g_0(\theta) \in D_\epsilon$. Припустимо, що функції

$$h_f(f_0, g_0) = \left| \int_0^T a(t) e^{it\theta} dt - h^0(\theta) \right|^\alpha, \tag{3.75}$$

$$h_g(f_0, g_0) = \left| h^0(\theta) \right|^\alpha \tag{3.76}$$

обмежені. За таких умов функціонал

$$\tilde{\triangle}(f, g) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^T a(t) e^{it\theta} dt - h^0(\theta) \right|^\alpha f(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| h^0(\theta) \right|^\alpha g(\theta) d\theta$$

обмежений у просторі $L_1 \times L_1$.

Із умови $0 \in \partial\triangle_D(f_0, g_0), D = D_u^v \times D_\epsilon$, отримуємо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$\left| \int_0^T a(t)e^{it\theta}dt - h^0(\theta) \right|^\alpha = (f_0(\theta) + g_0(\theta))(\gamma_1(\theta) + \gamma_2(\theta) + \alpha_1^{-1}) \qquad (3.77)$$

$$\left| h^0(\theta) \right|^\alpha = (f_0(\theta) + g_0(\theta))(\phi(\theta) + \alpha_2^{-1}), \qquad (3.78)$$

де $\gamma_1(\theta) \geqslant 0$, $\gamma_1(\theta) = 0$, якщо $f_0(\theta) \geqslant v(\theta)$;
$\gamma_2(\theta) \leqslant 0$, $\gamma_2(\theta) = 0$, якщо $f_0(\theta) \leqslant u(\theta)$;
$\phi(\theta) \leqslant 0, \phi(\theta) = 0$, якщо $g_0(\theta) \geqslant (1 - \epsilon)g_1(\theta)$.

**Теорема 3.11.** *Нехай $f_0(\theta) \in D_f^0, g_0(\theta) \in D_g^0$ задовольняють умову мінімальності* (3.50). *Нехай функції $h_f, h_g$, що визначені за формулами* (3.75), (3.76) *обмежені. Спектральні щільності $f_0(\theta), g_0(\theta)$ найменш сприятливі в класі $D = D_u^v \times D_\epsilon$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_T^{int}\xi$, якщо $f_0(\theta), g_0(\theta)$ є розв'язком рівнянь* (3.77), (3.78) *та визначають розв'язок екстремальної задачі* (3.68). *Спектральна характеристика $h(f_0, g_0)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$ визначається рівняннями* (3.52), (3.53).

**3.3.7. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_\beta$. Спостереження без шуму.** Розглянемо задачу для множини спектральних щільностей

$$D_\beta = \left\{ f(\theta) : \int_{-\infty}^{\infty} (f(\lambda))^\beta \, d\lambda = \gamma \right\},$$

де $\beta-$ деяке фіксоване дійсне число,

$$\beta \neq \frac{-1}{\alpha - 1}, \beta \neq 1.$$

Скористаємося методом невизначених множників Лагранжа. Матимемо

$$\left| \overline{C0_T^{int}(\theta)} \right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (f_0(\theta))^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}} = \lambda \, (f_0(\theta))^{\beta-1}.$$

Отже найменш сприятлива щільність має вигляд

$$f_0(\theta) = \lambda^{\frac{\alpha-1}{-\alpha-(\alpha-1)(\beta-1)}} \left|\overline{C0^{int}_T(\theta)}\right|^{\frac{-\alpha}{-\alpha-(\alpha-1)(\beta-1)}}. \tag{3.79}$$

**Теорема 3.12.** *Нехай спектральна щільність $f_0 \in D_\beta$ задовольняє умову мінімальності* (3.55) *при $\alpha = 2$. Найменш сприятливою щільністю в класі $D_\beta$ для оптимальної лінійної оцінки функціонала $A^{int}_T\xi$ є щільність* (3.79), *яка визначає розв'язок екстремальної задачі* (3.69). *Спектральна характеристика $h(f_0)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}^{int}_T\xi$ функціонала $A^{int}_T\xi$ визначається із співвідношень* (3.57) *та* (3.58).

**3.3.8. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D^0_f \times D^0_g$. Стаціонарні процеси.** Розглянемо задачу для класу $D^0_f \times D^0_g$.

$$D^0_f = \{f(\theta)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\lambda \leqslant P_1\},$$

$$D^0_g = \{g(\theta)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)d\lambda \leqslant P_2\}.$$

Припустимо, що функції

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{\left|A(e^{i\theta})g_0(\theta) + \int_0^T \left((\mathbf{B}^0_T)^{-1}\mathbf{D}^0_T\mathbf{a}\right)(t)e^{it\theta}dt\right|^2}{(f_0(\theta) + g_0(\theta))^2}, \tag{3.80}$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{\left|A(e^{i\theta})f_0(\theta) - \int_0^T \left((\mathbf{B}^0_T)^{-1}\mathbf{D}^0_T\mathbf{a}\right)(t)e^{it\theta}dt\right|^2}{(f_0(\theta) + g_0(\theta))^2}, \tag{3.81}$$

обмежені.

Із умови $0 \in \partial\triangle_D(f_0, g_0), D = D^0_f \times D^0_g$, отримуємо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$\begin{gathered}\left|A(\theta)g_0(\theta) + \int\limits_0^T \left((\mathbf{B}^0_T)^{-1}\mathbf{D}^0_T\mathbf{a}\right)(t)e^{it\theta}dt\right| = \\ = \alpha_1(f_0(\theta) + g_0(\theta)),\end{gathered} \tag{3.82}$$

$$\left| A(\theta) f_0(\theta) - \int\limits_0^T \left((\mathbf{B}_T^0)^{-1} \mathbf{D}_T^0 \mathbf{a}\right)(t) e^{it\theta} dt \right| = \qquad (3.83)$$
$$= \alpha_2 (f_0(\theta) + g_0(\theta)),$$

де $\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0$. Зауважимо, що $\alpha_1 \neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(\theta) d\theta = P_1,$$

а також $\alpha_2 \neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_0(\theta) d\theta = P_2.$$

**Теорема 3.13.** *Нехай* $f_0(\theta) \in D_{2\epsilon_1}, g_0(\theta) \in D_{1\epsilon_2}$ *задовольняють умову мінімальності* (3.50). *Нехай функції* $h_f, h_g$, *що визначені рівняннями* (3.80), (3.81) *обмежені. Спектральні щільності* $f_0(\theta), g_0(\theta)$ *найменш сприятливі в класі* $D = D_f^0 \times D_g^0$ *для оптимальної інтерполяції функціонала* $A_T^{int} \xi$, *якщо* $f_0(\theta), g_0(\theta)$ *є розв'язком системи рівнянь* (3.82), (3.83) *та визначають розв'язок екстремальної задачі* (3.71). *Спектральна характеристика* $h(f_0, g_0)$ *оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}_T^{int} \xi$ *функціонала* $A_T^{int} \xi$ *визначається рівнянням* (3.60).

**3.3.9. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{2\epsilon_1}$. Спостереження без шуму.** Розглянемо задачу для класу $D_{2\epsilon_1}$.

$$D_{2\epsilon_1} = \{f(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant \epsilon_1\},$$

де $f_1-$ задана щільність. Із умови $0 \in \partial \triangle_D (f_0), D = D_{2\epsilon_1}$, отримуємо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$|C_T^0(\theta)|^2 = \alpha_1 f_0^2(\theta) \left(f_0(\theta) - f_1(\theta)\right). \qquad (3.84)$$

**Теорема 3.14.** *Нехай спектральна щільність* $f_0 \in D_{2\epsilon_1}$ *задовольняє умову мінімальності* (2.18) *при* $\alpha = 2$. *Найменш сприятливою щільністю в* *класі* $D_{2\epsilon_1}$ *для оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A_T^{int}\xi$ *є щільність, що задовольняє рівняння* (3.84) *та визначає розв'язок екстремальної задачі* (3.73). *Мінімаксна спектральна характеристика* $h(f_0)$ *визначається рівнянням* (3.63).

## 3.4. Задача фільтрації гармонізованих випадкових процесів

У даному розділі досліджено задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_T\xi = \int\limits_0^T a(t)\xi(-t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_T(\theta)dZ(\theta),$$

$$A_T(\theta) = \int\limits_0^T a(t)e^{-it\theta}dt,$$

що залежить від невідомих значень гармонізованого $\alpha-$стійкого процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$ у моменти часу $t<0$.

**3.4.1. Традиційний підхід.** Нехай взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta)$ та $\nu(\theta)$ відповідно, та спектральні щільності $f(\theta)>0$, $g(\theta)>0$, що задовольняють умову мінімальності (3.50). Така умова дає необхідну і достатню умову неможливості безпомилкової фільтрації невідомих значень процесу.

Позначимо через $H^-(\xi+\eta)$ замкнуту за нормою $||\cdot||_\alpha$ лінійну оболонку породжену випадковими величинами $\{\xi(t)+\eta(t); t<0\}$.

**Теорема 3.15.** *Нехай* $\xi(t), t\in\mathbb{R}$ *та* $\eta(t), t\in\mathbb{R}$ *взаємно незалежні гармонізовані* $\alpha-$*стійкі,* $HS\alpha S$*, стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри* $\mu(\theta),\nu(\theta)$ *із спектральними щільностями* $f(\theta)>0, g(\theta)>0$ *відповідно, які задовольняють умову мінімальності* (3.50). *Оптимальна лінійна оцінка* $\hat{A}_T\xi$ *функціонала* $A_T\xi=\int_{-\infty}^{\infty}A_T(\theta)dZ^{\xi}(\theta)$*, що залежить від невідомих значень* $HS\alpha S$ *процесу* $\xi(t)$ *за спостереженнями процесу* $\xi(t)+\eta(t)$ *у точках* $t<0$ *обчислюється за формулою* (3.85).

*Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *визначається із рівнянь* (3.87), *де невідома функція* $c(t), t > 0$, *визначається рівнянням* (3.88). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (3.89).

*Доведення.* Виходячи із співвідношення ізоморфізму між просторами $H(\xi+\eta)$ та $L_\alpha(f)$ будемо шукати оцінку у вигляді

$$\hat{A}_T\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\left(dZ^{\xi}(\theta) + dZ^{\eta}(\theta)\right). \tag{3.85}$$

Така оцінка визначається спектральною характеристикою $h(\theta)$, що належить підпростору $L_\alpha^-(f+g)$ простору $L_\alpha(f+g)$ породженому функціями $e^{it\theta}$ при $t < 0$. Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки $\hat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi$ мінімізує значення $||A_T\xi - \hat{A}_T\xi||_\alpha$. Найкращим наближенням значення величини $A_T\xi$ у просторі $H^-(\xi+\eta)$ є проекція $\hat{A}_T\xi$ на цей простір, що визначається наступним чином:

$$[\xi(t)+\eta(t), A_T\xi - \hat{A}_T\xi]_\alpha = 0, t < 0$$

Скориставшись спектральним розкладом коваріації гармонізованого процесу, отримаємо наступне співвідношення

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}\left[(A_T(\theta)-h(\theta))^{<\alpha-1>} f(\theta) - (h(\theta))^{<\alpha-1>} g(\theta)\right] d\theta = 0,\ t < 0. \tag{3.86}$$

Із отриманого співвідношення маємо таке рівняння для визначення спектральної характеристики оцінки

$$(A_T(\theta)-h(\theta))^{<\alpha-1>} f(\theta) - (h(\theta))^{<\alpha-1>} g(\theta) = \overline{C(\theta)}, \tag{3.87}$$

$$C(\theta) = \int\limits_{0}^{\infty} c(t)e^{it\theta}dt,$$

де $c(t)$ – невідома функція, яка визначаються із умови

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}h(\theta)d\theta = 0, \quad t > 0. \tag{3.88}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\|A_T\xi - \hat{A}_T\xi\right\|_\alpha^\alpha = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |A_T(\theta) - h(\theta)|^\alpha f(\theta) d\theta + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)|^\alpha g(\theta) d\theta. \qquad (3.89)$$

□

**3.4.2. Фільтрація гармонізованих $\alpha$-стійких процесів, $\alpha = 2$.** Розглянемо задачу оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ при $\alpha = 2$. У цьому випадку взаємно незалежні $HS\alpha S$ процеси $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ є стаціонарними.

**Теорема 3.16.** *Нехай $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, $\alpha = 2$, стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta), \nu(\theta)$ із спектральними щільностями $f(\theta) > 0, g(\theta) > 0$ відповідно, які задовольняють умову мінімальності* (3.50) *при $\alpha = 2$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ в точках $t < 0$ обчислюється за формулою* (3.85). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається із рівняння* (3.90), *де невідома функція $c(t)t > 0$, визначається рівнянням* (3.91). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (3.92).

*Доведення.* Спектральна характеристика оцінки, що визначається із рівняння (3.87), матиме вигляд

$$\begin{aligned} h(\theta) &= A_T(\theta) - \frac{A_T(\theta)g(\theta) + C(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)}, \\ C(\theta) &= \int\limits_0^{\infty} c(t)e^{it\theta} dt. \end{aligned} \qquad (3.90)$$

Невідомі функція $c(t)$ визначаються із рівнянь

$$\int\limits_0^T a(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(t-s)\theta} f(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta dt - \int\limits_0^{\infty} c(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t-s)\theta}}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta = 0, \quad s > 0. \qquad (3.91)$$

Визначимо оператори $\mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ за формулами

$$(\mathbf{B}\mathbf{c})(t) = \int\limits_0^T c(u) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{1}{f(\theta)+g(\theta)} d\theta du;$$

$$(\mathbf{Q}\mathbf{c})(t) = \int\limits_0^T c(u) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{f(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} d\theta du;$$

$$(\mathbf{R}\mathbf{c})(t) = \int\limits_0^T c(u) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{f(\theta)g(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} d\theta du.$$

Рівняння (3.91), що визначають невідому функцію $c(t)$, можна записати у вигляді

$$c(t) = \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{a}\right)(t).$$

Похибку оцінки функціонала можемо обчислити за формулою

$$\begin{aligned} \left\| \hat{A}_T\xi - A_T\xi \right\|_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A_T(e^{i\theta})g(\theta) + C(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} \right|^2 f(\theta)d\theta \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A_T(\theta)f(\theta) - C(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} \right|^2 g(\theta)d\theta = \\ = \langle \mathbf{Q}\mathbf{a}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{R}\mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle. \end{aligned} \tag{3.92}$$

□

**3.4.3. Фільтрація гармонізованих $\alpha$-стійких процесів. Мінімаксний підхід.** Величина похибки

$$\Delta(h(f,g); f,g) := \left\| \hat{A}_T\xi - A_T\xi \right\|_\alpha^\alpha,$$

та спектральна характеристика $h(f,g) := h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T\xi$ обчислюються за вказаними формулами за умови, що нам відомі спектральні щільності $f$ та $g$. Якщо ж щільності $f$ та $g$ невідомі, проте можна вказати класи допустимих спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$, використаємо мінімаксний підхід до задачі оцінювання функціонала і знайдемо оцінку, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх спектральних щільностей з даного класу $D = D_f \times D_g$ [30].

**Означення 3.8.** Для заданого класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральні щільності $f_0 \in D_f$, $g_0 \in D_g$ називаються найменш сприятливими в $D = D_f \times D_g$ для оптимального лінійного оцінювання $\hat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi$, якщо виконується наступне співвідношення:

$$\triangle(f_0, g_0) = \triangle(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f,g)\in D=D_f\times D_g} \triangle(h(f, g); f, g).$$

**Означення 3.9.** Для заданого класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо справджуються співвідношення

$$h^0 \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D_f\times D_g} L_\alpha^-(f + g),$$

$$\min_{h\in H_D} \max_{(f,g)\in D_f\times D_g} \triangle(h; f, g) = \max_{(f,g)\in D} (h^0; f, g).$$

Найменш сприятливі щільності $f_0 \in D_f$, $g_0 \in D_g$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$.

Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f_0, g_0) \geqslant \Delta\left(h^0; f_0, g_0\right) \geqslant \Delta\left(h^0; f, g\right)$$

$$\forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

справджуються, якщо $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, де $(f_0, g_0)$ - розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\tilde{\triangle}(f, g) = -\triangle(h(f_0, g_0); f, g) \to \inf, \quad (f, g) \in D_f \times D_g, \tag{3.93}$$

$$\triangle(h(f_0, g_0); f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|A_T(\theta) - h^0(\theta)\right|^\alpha f(\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|h^0(\theta)\right|^\alpha g(\theta)d\theta.$$

Зауважимо, що задача на умовний екстремум (3.93) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [38].

$$\triangle_D(f,g) = \tilde{\triangle}(f,g) + \delta(f,g|D_f \times D_g) \to \inf, \tag{3.94}$$

де $\delta(f,g|D_f \times D_g)$ – індикаторна функція множини $D$. Розв'язок задачі характеризується умовою $0 \in \partial\triangle_D(f_0,g_0)$, де $\partial\triangle_D(f_0,g_0)$ - субдиференціал опуклого функціонала $\triangle(f_0,g_0)$ [30], [38].

Зауважимо, що форма функціоналу $\triangle(h(f_0,g_0);f,g)$ дозволяє знаходити похідні та диференціали функціоналу у просторі $L_1 \times L_1$. Тому складність задачі на екстремум (3.94) визначається складністю обчислення субдиференціалу індикаторної функції $\delta((f,g)|D_f \times D_g)$ множини $D_f \times D_g$.

Підсумуємо наведені формули та означення.

**Лема 3.8.** *Нехай $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta), \nu(\theta)$ із спектральними щільностями $f(\theta) > 0, g(\theta) > 0$ відповідно, які задовольняють умову мінімальності* (3.50). *Нехай спектральні щільності $(f_0,g_0) \in D_f \times D_g$ є розв'язком екстремальної задачі* (3.94). *Спектральні щільності $(f_0,g_0)$ є найменш сприятливими в класі $D_f \times D_g$ і $h^0 = h(f_0,g_0)$ є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_T\xi$ функціонала $A_T\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$ у точках $t<0$, якщо $h^0 = h(f_0,g_0) \in H_D$.*

**3.4.4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_u^v \times D_\epsilon$.** Розглянемо задачу визначення найменш сприятливих спектральних щільностей у класі $D_u^v \times D_\epsilon$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t), t \in \mathbb{R}$ у моменти часу $t<0$, де $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні процеси. Нехай $f_0(\theta) \in D_u^v, g_0(\theta) \in D_\epsilon$, де

$$D_u^v = \{f(\theta)|v(\theta) \leqslant f(\theta) \leqslant u(\theta), \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\lambda \leqslant P_1\},$$

$$D_\epsilon = \{g(\theta)|g(\theta) = (1-\epsilon)g_1(\theta) + \epsilon\omega(\theta), \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)d\lambda \leqslant P_2\}.$$

Припустимо, що функції

$$h_f(f_0, g_0) = \left|A_T(\theta) - h^0(\theta)\right|^\alpha, \tag{3.95}$$

$$h_g(f_0, g_0) = \left|h^0(\theta)\right|^\alpha \tag{3.96}$$

обмежені. Із умови $0 \in \partial\triangle_D(f_0, g_0)$, для $D = D_u^v \times D_\epsilon$ отримуємо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$\left|A_T(\theta) - h^0(\theta)\right|^\alpha = (f_0(\theta) + g_0(\theta))(\gamma_1(\theta) + \gamma_2(\theta) + \alpha_1^{-1}), \tag{3.97}$$

$$\left|h^0(\theta)\right|^\alpha = (f_0(\theta) + g_0(\theta))(\phi(\theta) + \alpha_2^{-1}), \tag{3.98}$$

де константи $\gamma_1(\theta) \leqslant 0$ і $\gamma_1(\theta) = 0$, якщо

$$f^0(\theta) \geqslant v(\theta);$$

$\gamma_2(\theta) \geqslant 0$ і $\gamma_2(\theta) = 0$, якщо

$$f^0(\theta) \leqslant u(\theta);$$

$\phi(\theta) \leqslant 0$ і $\phi(\theta) = 0$, якщо

$$g^0(\theta) \geqslant (1-\epsilon)g_1(\theta).$$

Можемо сформулювати наступну теорему.

**Теорема 3.17.** *Нехай спектральні щільності* $f_0(\theta) \in D_u^v, g_0(\theta) \in D_\epsilon$ *задовольняють умову мінімальності* (3.50). *Нехай функції* $h_f(f_0, g_0), h_g(f_0, g_0)$, *що визначені за формулами* (3.95), (3.96) *обмежені. Спектральні щільності* $f_0(\theta), g_0(\theta)$ *найменш сприятливі в класі* $D = D_u^v \times D_\epsilon$ *для оптимального оцінювання функціонала* $A_T\xi$, *якщо* $f_0(\theta), g_0(\theta)$ *є розв'язком системи рівнянь* (3.97), (3.98) *та визначають розв'язок екстремальної задачі* (3.93). *Спектральна характеристика* $h(f_0, g_0)$ *оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}_T\xi$ *функціонала* $A_T\xi$ *визначається рівняннями* (3.87), (3.88).

**3.4.5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{2\epsilon_1} \times D_{1\epsilon_2}$.** Розглянемо задачу визначення найменш сприятливої спектральної щільності для класу $D_{2\epsilon_1} \times D_{1\epsilon_2}$, де

$$D_{2\epsilon_1} = \{f(\theta)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)-f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant \epsilon_1\},$$

$$D_{1\epsilon_2} = \{g(\theta)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\lambda)-g_1(\lambda)| d\lambda \leqslant \epsilon_2\}.$$

Припустимо, що функції

$$h_f(f_0,g_0) = \frac{\left|A_T(\theta)g_0(\theta) + \int_0^{\infty}\left((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a}\right)(t)e^{it\theta}dt\right|^2}{(f_0(\theta)+g_0(\theta))^2}, \tag{3.99}$$

$$h_g(f_0,g_0) = \frac{\left|A_T(\theta)f_0(\theta) - \int_0^{\infty}\left((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a}\right)(t)e^{it\theta}dt\right|^2}{(f_0(\theta)+g_0(\theta))^2} \tag{3.100}$$

обмежені. Із умови $0 \in \partial\triangle_D(f_0,g_0)$, $D = D_f^0 \times D_g^0$, маємо, що найменш сприятлива спектральна щільність визначається рівняннями

$$\left|A_T(\theta)g_0(\theta) + \int\limits_0^{\infty}\left((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a}\right)(t)e^{it\theta}dt\right|^2 = \tag{3.101}$$
$$= \alpha_1(f_0(\theta)+g_0(\theta))^2(f_0(\theta)-f_1(\theta)),$$

$$\left|A_T(\theta)f_0(\theta) - \int\limits_0^{\infty}\left((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a}\right)(t)e^{it\theta}dt\right|^2 = \tag{3.102}$$
$$= \alpha_2(f_0(\theta)+g_0(\theta))\Psi(\theta),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)-f_1(\lambda)|^2 d\lambda = \epsilon_1, \tag{3.103}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(\lambda)-g_1(\lambda)| d\lambda = \epsilon_2. \tag{3.104}$$

$$|\Psi(\theta)| < 1, \Psi(\theta) = sign(g_0(\theta)-g_1(\theta)),$$

якщо $g_0(\theta) \neq g_1(\theta)$, $\alpha_1, \alpha_2$ - константи.

Маємо наступну теорему.

**Теорема 3.18.** *Нехай спектральні щільності* $f_0(\theta) \in D_{2\epsilon_1}, g_0(\theta) \in D_{1\epsilon_2}$ *задовольняють умову мінімальності* (3.50). *Нехай функції* $h_f, h_g$, *що визначені за формулами* (3.99), (3.100) *обмежені. Спектральні щільності* $f_0(\theta), g_0(\theta)$ *найменш сприятливі в класі* $D = D_{2\epsilon_1} \times D_{1\epsilon_2}$ *для оптимального оцінювання функціонала* $A_T\xi$, *якщо* $f_0(\theta), g_0(\theta)$ *є розв'язком системи рівнянь* (3.101), (3.102), (3.103), (3.104) *та визначають розв'язок екстремальної задачі* (3.93). *Спектральна характеристика* $h(f_0, g_0)$ *оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}_T\xi$ *функціонала* $A_T\xi$ *визначається рівняннями* (3.87), (3.88).

### Висновки до розділу 3

Розділ 3 присвячений задачам екстраполяції, інтерполяції та фільтрації лінійних функціоналів від невідомих значень гармонізованих процесів. Задачі розв'язано при відомій спектральній щільності, та за умови, коли відомо лише деяку множину допустимих спектральних щільностей.

Для задачі екстраполяції знайдено співвідношення для обчислення значень похибок та спектральних характеристик оцінок функціонала

$$A^{extr}\xi = \int\limits_{0}^{\infty} a(t)\xi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A^{extr}(\theta)dZ^{\xi}(\theta),$$

$$A^{extr}(\theta) = \int\limits_{0}^{\infty} a(t)e^{it\theta}dt,$$

що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$-процесу $\xi(t), t > 0$, за спостереженнями процесу $\{\xi(t) + \eta(t), t < 0\}$, де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ є гармонізованими взаємно незалежними симетричними $\alpha$-стійкими стохастичними процесами.

Мінімаксний метод було застосовано для оцінювання найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик оцінок функціонала для деяких класів спектральних щільностей.

Для задачі інтерполяції знайдено співвідношення для обчислення похибок та знайдено явний вигляд спектральної характеристики оцінки функціонала

$$A_T^{int}\xi = \int\limits_{0}^{T} a(t)\xi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_T^{int}(\theta)dZ^{\xi}(\theta),$$

$$A_T^{int}(\theta) = \int\limits_{0}^{T} a(t)e^{it\theta}dt,$$

що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ стохастичного процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$, де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні процеси.

Було застосовано мінімаксний метод для пошуку найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик.

Для задачі фільтрації знайдено формули для обчислення значень похибок та спектральних характеристик оцінок функціонала

$$A_T\xi = \int_0^T a(t)\xi(-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} A_T(\theta)dZ(\theta), \quad A_T(\theta) = \int_0^T a(t)e^{-it\theta}dt,$$

що залежить від невідомих значень гармонізованого $\alpha-$стійкого процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$ у моменти часу $t<0$, де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні процеси. У випадку, коли задано лише класи допустимих спектральних щільностей знайдено співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності в деяких заданих класах допустимих спектральних щільностей та мінімаксні спектральні характеристики.

# ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджується задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень гармонізованих послідовностей та процесів. Наведено розв'язки задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації в умовах спектральної визначеності та спектральної невизначеності. У тому випадку, коли відомі формули, що задають спектральні щільності процесів та послідовностей, знайдено спектральні характеристики та значення похибок оптимальних оцінок лінійних функціоналів. У випадку спектральної невизначеності, коли щільності стохастичних гармонізованих послідовностей і процесів невідомі, але задані множини їх допустимих значень, застосовано мінімаксний (робастний) метод оцінювання лінійних функціоналів та встановлено співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики.

У дисертації отримано наступні нові наукові результати:

— знайдено оцінки функціоналів для задачі екстраполяції $\alpha$-стійких гармонізованих випадкових процесів у дискретному та неперервному часі у випадку відомої і невідомої спектральної щільності;

— знайдено оцінки функціоналів для задачі інтерполяції $\alpha$-стійких гармонізованих випадкових процесів у дискретному та неперервному часі у випадку відомої і невідомої спектральної щільності

— знайдено оцінки функціоналів для задачі фільтрації $\alpha$-стійких гармонізованих випадкових процесів у дискретному та неперервному часі у випадку відомої і невідомої спектральної щільності.

Наведені в роботі результати досліджень мають теоретичне значення для розвитку теорії випадкових процесів, а також широке практичне застосування при розв'язанні задач економетрики, теорії часових рядів, обробці нестаціонарних сигналів та процесів.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. *Ахиезер Н. И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – Москва: "Наука", 1966. – 544 с.
2. *Гихман И.И.* Теория случайных процессов Т.1 / И.И. Гихман, А.В. Скороход – Москва: "Наука", 1971. – 664 с.
3. *Голубев Г. К.* Минимаксная экстраполяция функций / Г. К. Голубев, М. С. Пинскер // Радиотехника и электроника, 1983. – Т. 28, № 11. – С. 2186-2190.
4. *Голубев Г. К.* Экстремальные задачи минимаксного оценивания последовательностей / Г. К. Голубев, М. С. Пинскер // Проблемы передачи информации. – 1985. – Т. 21, Вып. 3. – С. 36-52.
5. *Гренандер У.* Теплицевы формы и их применения / У. Гренандер, Г. Сеге. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1961. – 308 с.
6. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах на собственные значения / С. Гулд. – Москва: "Наука", 1970. – 328 с.
7. *Голіченко І.* Оцінки функціоналів від періодично корельованих стохастичних процесів / І. Голіченко, М. Моклячук – Київ: "Інтерсервіс", 2014. – 208 с.
8. *Дубовецька І. І.* Інтерполяція періодично корельованих стохастичних послідовностей / І. І. Дубовецька, О. Ю. Масютка, М. П. Моклячук // Теор. ймовір. та матем. статист. – 2011. – Вип. 84. – С.43-56.
9. *Дубовецька І.* Задача екстраполяції функціоналів від періодично корельованої послідовності / І. Дубовецька // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Математика. Механіка. – 2011. – Вип. 25. – С. 22-26.
10. *Дубовецька І.* Максимальна похибка прогнозу періодично корельованих послідовностей / І. Дубовецька // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Математика. Механіка. – 2012. – Вип. 28. – С. 22-26.

11. *Дубовецька І. І.* Фільтрація лінійних функціоналів від періодично корельованих послідовностей / І. Дубовецька, М. П. Моклячук // Теор. ймовір. та матем. статист. – 2012. – Вип. 86. – С.43-55.

12. *Дубовецька І. І.* Мінімаксна інтерполяція періодично корельованих процесів / І. І. Дубовецька, М. П. Моклячук // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2012. – Вип. 23, № 2. – С. 51-62.

13. *Дубовецька І.І.* Екстраполяція періодично корельованих процесів, які спостерігаються з шумом / І. І. Дубовецька, М. П. Моклячук// Теор. ймовір. та матем. статист. – 2013. – Вип. 88. – С. 60-75.

14. *Засухин В. Н.* К теории многомерных стационарных процессов / В. Н. Засухин // ДАН СССР. – 1941. – Т.33. – С. 435-437.

15. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения/ В.М. Золотарев .– Москва:"Наука", 1983. – 304с.

16. *Иоффе А.Д.* Теория экстремальных задач / А.Д. Иоффе , В.М. Тихомиров .– Москва:"Наука", 1974. – 480с.

17. *Кассам С. А.* Робастные методы обработки сигналов: Обзор / С. А. Кассам, Г. В. Пур // Труды иснститута инженеров по электронике и радиофизике. – 1985. – Т. 73, № 3. – С. 54-110.

18. *Колмогоров А. Н.* Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве / А. Н. Колмогоров // Бюллетень МГУ. – 1941. – Т. 2, № 6. – С. 1-40.

19. *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование стацинарных случайных последовательнотей / А. Н. Колмогоров // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1941. – Т. 5. – С. 3-14.

20. *Кнопов П. С.* Оптимальные оценки параметров стохастических систем / П. С. Кнопов. – К: Наукова думка, 1981. – 152 с.

21. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский – Москва: "Наука", 1977. – 292 с.

22. *Масютка О. Ю.* Мінімаксні оцінки функціоналів від стаціонарних процесів: монографія / О. Ю. Масютка, М. П. Моклячук. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. – 216 с.

23. *Моклячук М. П.* Об одной игре двух лиц с нулевой суммой и экстраполяции стационарных случайных последовательностей / М. П. Моклячук // Исследование операций и АСУ. – 1981. – Вып. 17. – С. 122-127.

24. *Моклячук М. П.* Про задачу фільтрації векторних послідовностей / М. П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1992. – Вип. 47. – С. 101-118.

25. *Моклячук М. П.* Стохастичні послідовності авторегресії та мінімаксна інтерполяція / М. П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1993. – Вип. 48. – С. 135-146.

26. *Моклячук М. П.* Екстраполяція стаціонарних послідовностей, що спостерігаються з шумом / М. П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1997. – Вип. 57. – С. 125-133.

27. *Моклячук М. П.* Інтерполяція векторних стаціонарних послідовностей / М. П. Моклячук, О. Ю. Масютка // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2005. – Вип. 73. – С. 112-119.

28. *Моклячук М. П.* Екстраполяція векторних стаціонарних послідовностей / М. П. Моклячук, О. Ю. Масютка // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 3. – С. 60-70.

29. *Моклячук М. П.* Про задачу фільтрації векторної стаціонарної послідовності / М. П. Моклячук, О. Ю. Масютка // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2006. – Вип. 75. – С. 95-104.

30. *Моклячук М. П.* Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів: монографія / М. П. Моклячук. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 320 с.

31. *Моклячук М.П.* Фільтрація періодично корельованих процесів / М. П. Моклячук, І. І. Дубовецька // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2012. – № 2. – С. 149-158.

32. *Моклячук М. П.* Мінімаксна фільтрація гармонізованих випадкових послідовностей / М. П. Моклячук, В. І. Остапенко // Науковий вісник Ужгородського університету: Серія Математика і Інформатика– 2016. №1 (28). – С. 80-89.

33. *Моклячук М. П.* Мінімаксна фільтрація гармонізованих випадкових процесів / М. П. Моклячук, В. І. Остапенко // Науковий вісник Ужгородського університету: Серія Математика і Інформатика– 2016. №2 (29). – С. 130-139.

34. *Моклячук М. П.* Мінімаксна інтерполяція гармонізованих $\alpha-$ стійких процесів зі спостереженнями із шумом / М. П. Моклячук, В. І. Остапенко // Всеукраїнської наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Івано-Франківськ — 2017. — С. 42.

35. *Наконечный А. Г.* Минимаксная оценка состояния линейных стохастических систем / А. Г. Наконечный // Теория вероятностей и ее применения. – 1978. – № 2. – С. 455-456.

36. *Остапенко В. І.* Задача мінімаксної екстраполяції гармонізованих процесів / В. І. Остапенко // XV Міжнародну конференцію студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2017», Математика, Статистика та Механіка, Прикладна математика та комп'ютерні науки, Київ — 2017. — С. 70-71.

37. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. – М.: "Наука", 1980. – 320 с.

38. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума / Б. Н. Пшеничный. – М.: "Наука", 1982. – 144 с.

39. *Рисс Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: "Мир", 1979. – 588 с.

40. *Розанов Ю. А.* Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем / Ю. А. Розанов // Успехи математических наук. – 1958. – Т. 13, № 2. – С. 93-142.

41. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы / Ю. А. Розанов. – 2-е изд., доп.. – М.: “Наука”, 1990. – 272 с.

42. *Яглом А. М.* Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью / А. М. Яглом // Труды Московского математического общества. – 1955. – № 4. – С. 333-374.

43. *Яглом А. М.* Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с рациональным спектром / А. М. Яглом // Теория вероятностей и ее применения. – 1960. – Т 5, № 3. – С. 265-292.

44. *Allen J.* Detecting target motion by frequency-plane smoothing / J. Allen , S. Hobbs // Proceedings of Conference Record of The Twenty-Sixth Asilomar Conference. Signals, Systems and Computers, 26-28 Oct. 1992. – P. 1042-1047.

45. *Breiman L.* A note of minimax filtering / L. Breiman // Ann. Prob. – 1973. – Vol. 1, No. 1. – P. 175-179.

46. *Brelsford W. M.* Time series with periodic structure / W. M. Brelsford, R. H. Jones // Biometrica. – 1967. – Vol. 54, No. 3-4. – P. 403-408.

47. *Cambanis S.* Complex stable variables and processes / S. Cambanis // Contributions to Statistics: Essays in Honour of Norman L. Johnson, P. K. Sen, ed., North-Holland, New York, 1983, P. 63-79.

48. *Cambanis S.* Spectral density estimation for stationary stable processes Stochastic Processes and their Applications / S. Cambanis, E. Masry // Stochastic Processes and their Applications. – Volume 18, Issue 1, September 1984. – P. 1–31.

49. *Cambanis S.* Prediction of Stable Processes: Spectral and Moving Average Representations / S. Cambanis, R. Soltani // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 66 . – 1984. – P. 593-612.

50. *Cambanis S.* On Harmonizable Stochastic Processes / S. Cambanis, B. Liu // Information and Control.— 1970. –Vol. 2, №17. – P. 183-202.

51. *Cambanis S.* On Prediction of Harmonizable Stable Processes / S. Cambanis, A. G. Miamee // The Indian Journal of Statistics, Series A. – 1989. – Vol. 51, №3. – P. 269-294.
52. *Cheng R.* Some extremal problems in $L_p(w)$ / R. Cheng, A. Miamee, M. Pourahmadi // Proceedings of the american mathematical society. – Volume 126, No. 8, August 1998. – P. 2333-2340.
53. *Cramer H.* On the theory of stationary random processes / H. Cramer // Ann. Math. – 1940. – Vol. 41 – P. 215-230.
54. *Cramer H.* Stochastic processes as curves in Hilbert space / H. Cramer // Theor. Probability Appl. – 1964. – Vol. 9 – P. 169-179.
55. *Dubovetska I. I.* Interpolation problem for periodically correlated stochastic sequences / I. I. Dubovetska, A. Yu. Masyutka, M. P. Moklyachuk // International Conference "Modern Stochastics: Theory and Applications II", September 7-11 2010, Kyiv, Ukraine: Abstracts. – 2010. – P. 85-86.
56. *Dubovetska I.* Minimax Estimation Problem for Periodically Correlated Stochastic Processes / I. Dubovetska, M. Moklyachuk // Journal of Mathematics and System Science. – 2013. – Vol. 3, № 1. – P. 26-30.
57. *Duren P. L.* Theory of $H^p$ spaces. / P. L. Duren .– Academic Press, New York, 1970.– 272 p.
58. *Franke J.* On the robust prediction and interpolation of time series in the presence of correlated noise / J. Franke // J. Time Ser. Analysis. – 1984. – Vol. 5, No. 4. – P. 227-244.
59. *Franke J.* Minimax-robust prediction of discrete time series / J. Franke // Z. Wahr. Verv. Geb. – 1985. – Vol. 68. – P. 337-364.
60. *Franke J.* Minimax-robust filtering and infnite-length robust predictors. Robust and Nonlinear Time Series Analysis / J. Franke, H. V. Poor // Lecture Notes in Statistics.– 1984.– Springer-Verlag 26. – P. 87-126.
61. *Grenander U.* A prediction problem in game theory / U. Grenander // Ark. Mat. – 1957. – Vol. 3. – P. 371-379.

62. *Hanssen A.* A theory of polyspectra for nonstationary stochastic processes / A. Hanssen, L. L. Scharf // IEEE Trans. Signal Proc., 51.– May 2003. – P. 1243–1252.
63. *Hosoya Y.* Robust linear extrapolations of second-order stationary processes / Y. Hosoya // Ann. Prob. – 1978. – Vol. 6, No. 4. – P. 574-584.
64. *Huber P. J.* Robust estimation of a location parametr / P. J. Huber // Ann. Math. Stat. – 1964. – Vol. 35, No. 1. – P. 73-101.
65. *Huber P. J.* A robust version of the probability ratio test / P. J. Huber // Ann. Math. Stat. – 1964. – Vol. 36, No. 6. – P. 1753-1758.
66. *Kallianpur G.* Multiplicity and representation theory of purely non-deterministic processes / G. Kallianpur, V. Mandrekar // Тоерия вероятностей и ее применения. – 1965. – Т. 10, № 4. – С. 614-644.
67. *Kallianpur G.* Some remarks on the purely nondeterministic property of second order random fields / G. Kallianpur // Lecture Notes in Control and Information Sciences – 1981. – Np. 36. – P. 98-109.
68. *Kassam S.* Robust techniques for signal processing: A survey/ S. Kassam, H. Poor // Proc. IEEE. – 1985. – Volume 73, Issue 3. – P. 433-481.
69. *Kassam S. A.* Robust hypothesis testing for bounded classes of probability densities / S. A. Kassam // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1981. – Vol. IT - 27. – P. 242-247.
70. *Kassam S. A.* Robust hypothesis testing and robust time series interpolation and regression / S. A. Kassam // J. Time Ser. Analysis. – 1982. – Vol. 3, No. 3. – P. 185-194.
71. *Kolmogorov A.* Selected works by A. N. Kolmogorov / Ed. by A. N. Shiryayev // Vol. II: Probability theory and mathematical statistics. Mathematics and Its Applications. Soviet Series. 26. Dordrecht etc. – Kluwer Academic Publishers. – 1992.
72. *Khintchin A.* Korrelationstheorie der stationaren stochastischen Prozesse / A. Khintchin // Math. Ann. – 1934. – Vol. 109. – P. 604-615.

73. *Krim H.* Multiresolution analysis of a class of nonstationary processes / H. Krim, J.-C. Pesquet // IEEE transactions on information theory. – 1995. – Vol. 41, No. 4. – P. 1010-1020.
74. *Lii K.* Spectral analysis for harmonizable processes/ K. Lii, M. Rosenblatt // Ann. of Statistics, 30. – 2002 .– P. 258–297.
75. *Loeve M.* Sur le fonctions aleatoire de second ordre / M. Loeve // Rev. Sci. – 1945. – Vol. 83. – P. 297–303.
76. *Loeve M.* Sur le fonctions aleatoire de second ordre / M. Loeve // Rev. Sci. – 1946. – Vol. 84. – P. 195–206.
77. *Loeve M.* Probability Theory / M. Loeve. – Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960 . – 686 p.
78. *Luz M. M.* Minimax-robust filtering problem for stochastic sequence with stationary increments / M. M. Luz, M. P. Moklyachuk // Theor. Probability and Math. Stat. 89, 2013 .– P. 117-131.
79. *Luz M.* Minimax interpolation problem for random processes with stationary increments / M. M. Luz, M. P. Moklyachuk // Statistics, Optimization & Information Computing 3(1).– 2015 .–P. 30-41.
80. *Luz M.* Minimax-robust prediction problem for stochastic sequences with stationary increments and cointegrated sequences / M. M. Luz, M. P. Moklyachuk // Statistics, Optimization & Information Computing 3(2).– 2015 .– P. 160-188.
81. *Moklyachuk M.* Robust extrapolation problem for stochastic sequences with stationary increments / M. P. Moklyachuk, M. M. Luz // Contemporary Mathematics and Statistics 1(3). – 2013 .– P. 123-150.
82. *Mallat S.* A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation/ S. Mallat // IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell. – 1989. – Vol. PAMI-11 – P. 14-38.
83. *Masani P.* The prediction theory of multivariate stochastic processes. – Acta. Mathematica. – 1957. – Volume 98, Issue 1-4. – P. 111-150.

84. *Masry E.* The wavelet transform of stochastic processes with stationary increments and its application to fractional Brownian motion / E. Marsy // IEEE Trans. Informal. Theory. – 1993. – No. IT-39. – P. 260-264.

85. *Marc H. Mehlman* Advances on Theoretical and Methodological Aspects of Probability and Statistics / Ed. by N. Balakrishnan // CRC Press. – 2003. – P. 49–56.

86. *Moklyachuk M. P.* Minimax extrapolation and autoregressive-moving average processes / M. P. Moklyachuk // Theory Probab. Math. Stat. 41. – 1990. – P. 77-84.

87. *Moklyachuk M. P.* Estimation of linear functionals of stationary stochastic processes and a two-person zero-sum game / M. P. Moklyachuk // Stanford University Technical Report. – 1981. – No. 169. – 82 p.

88. *Moklyachuk M. P.* Estimation of stochastic processes from observations with noise / M. P. Moklyachuk // Theory of Stochastic Processes. – 1997. – Vol. 3 (19), No. 3-4. – P. 330-338.

89. *Moklyachuk M. P.* Robust procedures in time series analysis / M. P. Moklyachuk // Theory of Stochastic Processes. – 2000. – Vol. 6 (22), No. 3-4. – P. 127-147.

90. *Moklyachuk M.* Robust extrapolation problem for stochastic sequences with stationary increments / M. Moklyachuk, M. Luz // Contemporary Mathematics and Statistics. – 2013. – V. 1, № 3. – P. 123-150.

91. *Moklyachuk M.* Minimax prediction problem for multidimentional stationary stochastic sequences / M. Moklyachuk, A. Masyutka // Theory of Stochastic Processes. – 2008. – Vol. 14 (30), No. 3-4. – P. 89-103.

92. *Moklyachuk M. P.* Minimax-robust estimation technique: For stationary stochastic processes / M. P. Moklyachuk, A. Yu. Masyutka. – LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2012. – 216 p.

93. *Moklyachuk M. P.* Minimax extrapolation problem for harmonizable stable processes with noise observations / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko //

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics and Mathematics. — 2016. – №2. – P. 15-23.

94. *Moklyachuk M. P.* Minimax interpolation of harmonizable sequences/ M.P.Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2016. – № 92. – P. 135-146.

95. *Moklyachuk M. P.* Minimax Interpolation Problem for Harmonizable Stable Sequences with Noise Observations / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Journal of Applied Mathematics and Statistics. — 2015. – №1. – P. 21-42.

96. *Moklyachuk M. P.* Interpolation Problem for Harmonizable Stable Sequences / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 4th International Scientific Conference of Students and Young Scientists, Kyiv: Bukrek, Ukraine: Coference materials. – 2014. — P. 151-157.

97. *Moklyachuk M. P.* Minimax Interpolation Problem for Harmonizable Stable Sequences / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Proceedings of the International Conference Probability, Reliability and Stochastic Optimization, Kyiv. — 2015. – P. 43.

98. *Moklyachuk M. P.* Extrapolation Problem for Harmonizable Stable Stochastic Sequences / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Proceedings of the International Conference Stochastic Processes in Abstract Spaces, Kyiv — 2015. — P. 38.

99. *Piranashvili Z.* On the problem of interpolation of random processes / Z. Piranashvili // Theor. Probability Appl. – 1967. – Vol. 12. – P. 647-657.

100. *Pourahmadi M.* On minimality and interpolation of harmonizable stable processes/ M. Pourahmadi // SIAM J. Appl.Math. – 1984. – Volume 44, Nomber 5. – P. 1023–1030.

101. *Poor H.* On robust Wiener filtering / H. Poor // IEEE Trans. Automat. Control. – 1980. – Vol. AC-25. – P. 531-536.

102. *Poor H.* Robust mathed filters / H. Poor // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1983. – Vol. 29, No. 5. – P. 677-687.

103. *Rajput S.* On some extremal problems in $H^p$ and the prediction of $L^p$-harmonizable stochastic processes / S. Rajput, C. Sunberg // Probab. Theory Relat. Fields. –1994 .– Vol. 99, Iss. 2.– P. 197-210.

104. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis / R. T. Rockafellar. // Princeton University Press. – 1997. – 472 p.

105. *Rosanov Y.* Spectral analysis of abstract functions / Y. Rosanov// Theor. Probability Appl. Vol. 4.– P. 271-287.

106. *Rao M.* Inference in stochastic processe / M. Rao // Wahrscheinlichheits theorie und verw. Gebiete. – 1967. – Vol. 8. – P. 49-72.

107. *Rao M. M.* Harmonizable, Cramer, and Karhunen classes of processes / M. M. Rao // In Handbook of Statistics, edited by E. J. Hannan, P. R. Krishnaiah and M. M. Rao, volume 5, Elsevier Science Publishers, Amsterdam. – 1985. – P. 279–310.

108. *Scharf L. L.* The Hilbert space geometry of the Rihaczek distribution for stochastic analytic signals / L. L. Scharf, P. J. Schreier, A. Hanssen // IEEE Signal Proc. Lett., 12. – 2005 .– P. 297–300.

109. *Soltani A. R.* Hilbert spaces formed by strongly Harmonizable stable processes / A. R. Soltani, B. Tarami // Georgian Mathematical Journal Volume 8, No. 1 . – 2001. – P. 181–188.

110. *Singer I.* Bases in Banach Spaces I / I. Singer. – Springer-Verlag. New York.. – 1970. – 668 p.

111. *Taniguchi M.* Robust regression and interpolation for time series / M. Taniguchi // J. Time Ser. Analysis. – 1981. – Vol. 2, No. 1. –P. 53-62.

112. *Vastola S. K.* An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering / S. K. Vastola, H. V. Poor // Automatica. – 1983. – Vol. 19, No. 3. – P. 289-293.

113. *Vastola S. K.* Robust Wiener-Kolmogorov theory / S. K. Vastola, H. V. Poor // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1984. – Vol. 30, No. 2. – P. 316-327.

114. *Verdu S.* On minimax robustness: a general approach and applications / S. Verdu, H. V. Poor // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1984. – Vol. IT-30,

No. 2. – P. 328-340.

115. *Weron A.* Harmonizable stable processes on groups: spectral, ergodic and interpolation properties / A. Weron // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. – 1985. – Volume 68, Issue 4. – P. 473-491.
116. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series: Whis engineering applications / N. Wiener. – Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, 1966. – 163 p.
117. *Wiener N.* The prediction theory of multivariate stochastic processes. Part 1: The regularity condition / N. Wiener, P. Masani // Acta Math. – 1957. – Vol. 98. – P. 111-150.
118. *Wiener N.* The prediction theory of multivariate stochastic processes. Part 2: The linear predictor / N. Wiener, P. Masani // Acta Math. – 1957. – Vol. 99. – P. 93-137.
119. *Wold H.* A study in the analysis of stationary time series / H. Wold. – 2-d ed. – Uppsala: Almqvist & Wiksell, 1954. – 236 p.
120. *Wold H.* On prediction in stationary time series / H. Wold // Ann. Math. Stat. – 1948. – Vol. 19, No. 4. – P. 558-567.
121. *Yadrenko M.I.* Spectral theory of random fields / M.I. Yadrenko – New York: Opti- mization Software, Inc., Publications Division; New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1983. – 259 p.
122. *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды / Э. Хеннан. – М.: “Мир”, 1974. – 576 с.
123. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results / A. M. Yaglom. – Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987. – 526 p.
124. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Suplementary notes and references / A. M. Yaglom. – Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987. – 258 p.

# ДОДАТОК

## Список опублікованих праць


1. *Moklyachuk M. P.* Minimax extrapolation problem for harmonizable stable processes with noise observations / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics and Mathematics — 2016. — No. 1. — P. 15–23.
2. *Моклячук М. П.* Мінімаксна фільтрація гармонізованих випадкових послідовностей / М. П. Моклячук, В. І. Остапенко // Науковий вісник Ужгородського університету: Серія Математика і Інформатика — 2016. — Вип. 28, №. 1. — С. 80–89.
3. *Моклячук М. П.* Мінімаксна фільтрація гармонізованих випадкових процесів / М. П. Моклячук, В. І. Остапенко // Науковий вісник Ужгородського університету: Серія Математика і Інформатика — 2016. — Вип. 29, №. 2. — С. 130–139.
4. *Moklyachuk M. P.* Minimax interpolation of harmonizable sequences / M.P.Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics — 2016. — Vol. 92. — P. 135–146.
5. *Moklyachuk M. P.* Minimax Interpolation Problem for Harmonizable Stable Sequences with Noise Observations / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Journal of Applied Mathematics and Statistics — 2015. — No. 1. — P. 21 - 42.
6. *Moklyachuk M. P.* Interpolation Problem for Harmonizable Stable Sequences / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 4th International Scientific Conference of Students and Young Scientists, Kyiv:Bukrek, Ukraine: Coference materials. — 2014. — P. 151–157.

7. *Moklyachuk M. P.* Minimax Interpolation Problem for Harmonizable Stable Sequences / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Proceedings of the International Conference Probability, Reliability and Stochastic Optimization, Kyiv. — 2015. — P. 43.
8. *Moklyachuk M. P.* Extrapolation Problem for Harmonizable Stable Stochastic Sequences / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Proceedings of the International Conference Stochastic Processes in Abstract Spaces, Kyiv — 2016. — P. 38.
9. *Моклячук М. П.* Мінімаксна інтерполяція гармонізованих $\alpha-$ стійких процесів зі спостереженнями із шумом / М. П. Моклячук, В. І. Остапенко // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Івано-Франківськ(тези доповідей) — 2017. — С. 42.
10. *Остапенко В. І.* Задача мінімаксної екстраполяції гармонізованих процесів / В. І. Остапенко // XV Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2017», Математика, Статистика та Механіка, Прикладна математика та комп'ютерні науки, Київ — 2017. — С. 70–71.

## Апробація результатів дисертації

1. Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, м. Київ, 25-27 квітня 2013.
2. Міжнародна наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Теоретичні та прикладні аспекти кібернетики м. Київ, 21-24 листопада 2014.
3. Міжнародна конференція ймовірність, надійність та стохастична оптимізація, м. Київ, 7-10 квітня 2015.
4. Міжнародна конференція стохастичні процеси в абстрактних просторах, м. Київ, 14-16 жовтня 2015.

5. Засідання наукового семінару кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Ю. С. Мішури та проф. Ю. В. Козаченка (м. Київ, 2016).
6. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Ворохта, 22 - 25 лютого 2017.
7. XV Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2017», Математика, Статистика та Механіка, Прикладна математика та комп'ютерні наук, м.Київ, квітень 2017.
8. Засідання наукового семінару кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Наконечного О. Г. (м. Київ, 2017).
9. Засідання наукового семінару кафедри теоретичної та прикладної статистики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка під керівництвом проф. Єлейка Я. І. (м. Львів, 2017).