

УДК 519.85

MSC 47J20, 49J40, 90C25

ALGORITHM FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS IN BANACH SPACE

A. V. KRAVETS¹, S. V. DENYSOV²

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: anya171kravets@gmail.com, ORCID: 0009-0004-5358-0237

²Harbour.Space Institute of Technology, Barcelona, Spain, E-mail: denisov.univ@gmail.com,
ORCID: 0000-0003-4397-4617

АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО РІВНОВАГУ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРИ

А. В. КРАВЕЦЬ¹, С. В. ДЕНИСОВ²

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
E-mail: anya171kravets@gmail.com, ORCID: 0009-0004-5358-0237

²Технологічний інститут Harbour.Space, Барселона, Іспанія, E-mail: denisov.univ@gmail.com,
ORCID: 0000-0003-4397-4617

ABSTRACT. We consider the equilibrium programming problems in 2-uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces. We obtained a theorem about weak convergence of the two-stage proximal algorithm for pseudo-monotone equilibrium programming problems in 2-uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces. We proposed an adaptive two-stage proximal algorithm for equilibrium programming problems. The parameter update rule does not use the values of the Lipschitz constants of the bifunction. In contrast to the rules of the linear search type, it does not require calculations of the bifunction values at additional points. For pseudo-monotone bifunctions of the Lipschitz type, we prove the theorem on weak convergence of the sequences generated by the algorithm.

KEYWORDS: convergence, equilibrium problem, pseudo-monotonicity, proximal algorithm.

АНОТАЦІЯ. В статті розглянуто задачі про рівновагу в 2-рівномірно опуклих та рівномірно гладких банахових просторах. Отримана теорема про слабку збіжність двоетапного проксимального алгоритму для псевдомонотонних задач рівноважного програмування в 2-рівномірно опуклих та рівномірно гладких банахових просторах. Запропоновано адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм для задач про рівновагу. Правило оновлення параметрів не використовує значень ліпшицевих констант біфункції та на відміну від правил типу лінійного пошуку не потребує

Corresponding author: С.В. Денисов (denisov.univ@gmail.com).

© А.В. Кравець, С.В. Денисов, 2025. This is an open-access article distributed under the terms of **Creative Commons Attribution Licence (CC BY)**.

обчислень значень біфункції в додаткових точках. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведена теорема про слабку збіжність породжених алгоритмом послідовностей.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: збіжність, задача про рівновагу, псевдомонотонність, проксимальний алгоритм.

1. ВСТУП

Задачі про рівновагу (задачі рівноважного програмування, нерівності Кі Фаня) та методи їх розв'язання є популярним розділом сучасного прикладного аналізу [1].

Формулювання задачі про рівновагу, яке вважають класичним, було наведено ще в роботах Х. Нікайдо та К. Ісоди, виконаних в 1950-х роках [2] та пов'язаних з доведенням існування точок рівноваги за Нешем в некооперативних іграх. Увагу до задач рівноважного програмування у 1990-х привернули роботи W. Oettli [3, 4], у яких були розглянуто такий варіант задачі про рівновагу:

$$\text{знайти } x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (1)$$

де C — підмножина гільбертового простору H , $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ — біфункція (equilibrium bifunction), тобто, $F(x, x) = 0$ для всіх $x \in C$.

Задача (1) — зручна форма запису різних задач, що виникають в математичній фізиці, дослідженні операцій та оптимізації [1]. Наведемо дві типові постановки.

- (1) Якщо $F(x, y) = (Ax, y - x)$, де $A : C \rightarrow H$, то задача (1) зводиться до класичної варіаційної нерівності [5]:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2)$$

- (2) Нехай I — скінченна множина індексів. Для кожного $i \in I$ задано множину C_i та функцію $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$, де $C = \prod_{i \in I} C_i$. Для $x = (x_i)_{i \in I} \in C$ позначимо $x^i = (x_j)_{j \in I, j \neq i}$. Точка $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I}$ називається рівновагою Неша, якщо для всіх $i \in I$ справедливі нерівності

$$f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^i, y_i) \quad \forall y_i \in C_i.$$

Визначимо функцію $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ таким чином

$$F(x, y) = \sum_{i \in I} (f_i(x^i, y_i) - f_i(x)).$$

Точка $\bar{x} \in C$ є рівновагою Неша тоді і тільки тоді, коли \bar{x} є розв'язком задачі (1).

Теорема існування для задач рівноважного програмування див. в [1]. Найбільш завершені результати отримані для задач з монотонними та псевдомонотонними біфункціями на опуклих допустимих множинах.

У 2008 р. Quoc, Muu та Hien [6] запропонували аналог екстраградієнтного методу

$$\begin{cases} y_n = \text{prox}_{\lambda_n \cdot F(x_n, \cdot)} x_n, \\ x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda_n \cdot F(y_n, \cdot)} x_n, \end{cases} \quad (3)$$

де $\lambda_n > 0$, а prox_g — проксимальний оператор [7], що відповідає власній опуклій напівнеперервній знизу функції g :

$$H \ni x \mapsto \text{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y \in \operatorname{dom} g} \left(g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|_2^2 \right) \in \operatorname{dom} g.$$

Автори [6] довели при певних умовах збіжність методу (3) та його аналогу з відстанню Брегмана замість евклідової. Дана робота отримала продовження [8–15]. Наприклад, в роботі [13], відштовхуючись від двокрокового екстраградієнтного алгоритму [16], запропоновано та досліджено такий алгоритм

$$\begin{cases} y_n = \text{prox}_{\lambda_n \cdot F(x_n, \cdot)} x_n, \\ z_n = \text{prox}_{\lambda_n \cdot F(y_n, \cdot)} y_n, \\ x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda_n \cdot F(z_n, \cdot)} x_n, \end{cases}$$

де $\lambda_n > 0$. Нарешті, у роботі Я.І. Ведель та В.В. Семенова [14] (див. також [15]) запропоновано новий ітераційний двоетапний проксимальний метод розв’язання задачі рівноважного програмування в гільбертовому просторі

$$\begin{cases} x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda \cdot F(y_n, \cdot)} x_n, \\ y_{n+1} = \text{prox}_{\lambda \cdot F(x_{n+1}, \cdot)} x_{n+1}, \end{cases} \quad (4)$$

де $\lambda > 0$. Цей метод є розвитком методу Попова [17]. Показано, що збіжність гарантує умова

$$\lambda \in \left(0, \frac{1}{2(2a + b)} \right),$$

тобто явно використовувалася інформація про константи умови типу ліпшицевості біфункції F . Адаптивні модифікації методу (4) запропоновано та досліджено в роботах [18–20].

Останнім часом зросла активність в дослідженні варіаційних нерівностей та задач про рівновагу в банахових просторах [20–28]. Зокрема, для варіаційних нерівностей в рівномірно опуклих банахових просторах побудовані та теоретично обґрунтовані аналоги алгоритмів Корпелевич, Tseng’а та Попова [20–22]. У роботах [23–25] запропоновано адаптивні варіанти «forward–reflected–backward algorithm» для варіаційних нерівностей в 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому банаховому просторі.

Мета даної роботи полягає у розробці модифікацій двоетапного проксимального алгоритму для задачі про рівновагу в 2-рівномірно опуклих та рівномірно гладких банахових просторах. Замість класичного проксимального відображення використовується узагальнене проксимальне відображення (за Альбером). За допомогою ляпуновського аналізу отримуються теореми про слабку збіжність алгоритмів (зокрема, адаптивного). На цьому шляху ми узагальнюємо та уточнюємо результати робіт [15, 20, 29].

Статтю побудовано таким чином. В розділі 2 наведено основні поняття та факти, що пов’язані з 2-рівномірно опуклими та рівномірно гладкими банаховими просторами та необхідні для наших подальших досліджень. Розділ 3 містить постановку загальної задачі про рівновагу в 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому банаховому просторі. В розділі 4 двоетапний проксимальний алгоритм обґрунтований для псевдомонотонних

задач рівноважного програмування з розділу 3. В розділі 5 розглянуто адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм для задач рівноважного програмування в 2-рівномірно опуклих та рівномірно гладких банахових просторах.

2. ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ

Спочатку нагадаємо декілька понять та фактів геометрії банахових просторів та нелінійного аналізу, що необхідні для формулювання та доведення результатів [30–34].

Нехай E — дійсний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|$, E^* — спряжений до E простір, $\langle x^*, x \rangle$ — значення функціоналу $x^* \in E^*$ на елементі $x \in E$. Норму в E^* будемо позначати $\|\cdot\|_*$.

Нехай

$$S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Банаховий простір E називають строго опуклим, якщо для всіх $x, y \in S_E$ та $x \neq y$ маємо

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Модуль опуклості простору E визначається таким чином

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in S_E, \|x-y\| = \varepsilon \right\} \quad \forall \varepsilon \in (0, 2].$$

Банаховий простір E називають рівномірно опуклим, якщо

$$\delta_E(\varepsilon) > 0 \quad \text{для всіх } \varepsilon \in (0, 2].$$

Банаховий простір E називають 2-рівномірно опуклим, якщо існує таке $c > 0$, що

$$\delta_E(\varepsilon) \geq c\varepsilon^2 \quad \text{для всіх } \varepsilon \in (0, 2].$$

Очевидно, що 2-рівномірно опуклий простір є рівномірно опуклим. Відомо, що рівномірно опуклий банаховий простір рефлексивний [32].

Банаховий простір E називають гладким, якщо границя

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{5}$$

існує для всіх $x, y \in S_E$. Банаховий простір E називають рівномірно гладким, якщо границя (5) існує рівномірно за $x, y \in S_E$.

Відомо, що гільбертові простори та простори L_p ($1 < p \leq 2$) є 2-рівномірно опуклими та рівномірно гладкими (простори L_p рівномірно гладкі для $p \in (1, \infty)$) [32].

Багатозначний оператор $J : E \rightarrow 2^{E^*}$, що діє за правилом

$$Jx = \left\{ x^* \in E^* : \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|_*^2 \right\},$$

називають нормалізованим дуальним відображенням [32]. Відомо, що [32]:

- якщо простір E гладкий, то відображення J однозначне;
- якщо простір E строго опуклий, то відображення J ін'єктивне та строго монотонне;

- якщо простір E рефлексивний, то відображення J сюр'єктивне;
- якщо простір E рівномірно гладкий, то відображення J рівномірно неперервне на обмежених підмножинах E .

Нехай E — гладкий банаховий простір. Розглянемо введений Альбером [30, 31] функціонал

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle Jy, x \rangle + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in E.$$

З означення ϕ випливає корисна 3-точкова тотожність:

$$\phi(x, y) - \phi(x, z) - \phi(z, y) = 2\langle Jz - Jy, x - z \rangle \quad \forall x, y, z \in E.$$

Якщо простір E строго опуклий, то для $x, y \in E$ маємо

$$\phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Нехай E — рівномірно опуклий та рівномірно гладкий банаховий простір, $(x_n), (y_n)$ — обмежені послідовності елементів E . Тоді має місце [30]

$$\|x_n - y_n\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|Jx_n - Jy_n\|_* \rightarrow 0 \Leftrightarrow \phi(x_n, y_n) \rightarrow 0. \quad (6)$$

Лема 1 (Аоуама К., Kohsaka F., [33]). *Нехай E — 2-рівномірно опуклий та гладкий банаховий простір. Тоді для деякого $\mu \geq 1$ виконується нерівність*

$$\phi(x, y) \geq \frac{1}{\mu} \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in E. \quad (7)$$

Для банахових просторів ℓ_p, L_p та W_p^m ($1 < p \leq 2$) маємо $\mu = \frac{1}{p-1}$ [34]. Для гільбертового простору нерівність (7) перетворюється на тотожність з $\mu = 1$.

Використовуючи функціонал ϕ можна визначити новий оператор проєктування. Нехай K — непорожня замкнена та опукла підмножина рефлексивного, строго опуклого та гладкого простору E . Відомо [30, 31], що для кожного $x \in E$ існує єдиний елемент $z \in K$ такий, що

$$\phi(z, x) = \inf_{y \in K} \phi(y, x).$$

Цей елемент z позначають $\Pi_K x$, а відповідний оператор

$$\Pi_K : E \rightarrow K$$

називають узагальненою проєкцією E на K (узагальненою проєкцією Альбера) [30, 31].

Зауваження 1. Якщо E — гільбертовий простір, то Π_K співпадає з метричною проєкцією на множину K .

Лема 2 (Alber Y.I., [30]). *Нехай K — замкнена та опукла підмножина рефлексивного, строго опуклого та гладкого простору E , $x \in E$, $z \in K$. Тоді*

$$z = \Pi_K x \Leftrightarrow \langle Jz - Jx, y - z \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Нерівність леми 2 рівносильна такій [30]:

$$\phi(y, \Pi_K x) + \phi(\Pi_K x, x) \leq \phi(y, x) \quad \forall y \in K.$$

Для опуклої, власної і напівнеперервної знизу функції $g : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ узагальнений проксимальний оператор (за Альбером) визначається так:

$$\text{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y \in E} (g(y) + \frac{1}{2}\phi(y, x)).$$

Означення узагальненого проксимального оператора коректне, тобто для кожного $x \in E$ існує єдиний елемент $\text{prox}_g x \in E$.

3. ЗАДАЧА ПРО РІВНОВАГУ

Нехай E — 2-рівномірно опуклий та рівномірно гладкий банаховий простір. Для непорожньої опуклої замкненої множини $C \subseteq E$ і біфункції $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ розглянемо задачу про рівновагу:

$$\text{знайти } x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (8)$$

Припустимо, що виконані умови:

(A1) $F(x, x) = 0$ для всіх $x \in C$;

(A2) функції $F(x, \cdot) : C \rightarrow \mathbb{R}$ опуклі і напівнеперервні знизу для всіх $x \in C$;

(A3) функції $F(\cdot, y) : C \rightarrow \mathbb{R}$ слабко напівнеперервні зверху для всіх $y \in C$;

(A4) біфункція $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ псевдомонотонна, тобто

$$\text{для всіх } x, y \in C \text{ із } F(x, y) \geq 0 \text{ випливає } F(y, x) \leq 0;$$

(A5) біфункція $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ ліпшицевого типу, тобто існують дві константи $a > 0, b > 0$, такі, що

$$F(x, y) \leq F(x, z) + F(z, y) + a\|x - z\|^2 + b\|z - y\|^2 \quad \forall x, y, z \in C. \quad (9)$$

Розглянемо дуальну задачу про рівновагу:

$$\text{знайти } x \in C : F(y, x) \leq 0 \quad \forall y \in C. \quad (10)$$

Множини розв'язків задач (8) і (10) позначимо S і S^* , відповідно. При виконанні умов (A1)–(A4) маємо $S = S^*$ — опукла та замкнена множина [1].

Далі будемо припускати, що $S \neq \emptyset$.

4. ДВОЕТАПНИЙ ПРОКСИМАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПРО РІВНОВАГУ

Для наближеного розв'язання задачі (8) розглянемо наступний

Алгоритм 1.

Для $x_1, y_0 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n, y_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = \text{prox}_{\lambda F(y_{n-1}, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} (F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda}\phi(y, x_n)), \\ x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda F(y_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} (F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda}\phi(y, x_n)), \end{cases}$$

де $\lambda > 0$.

Зауваження 2. Алгоритм 1 для задач в гільбертовому просторі був розглянутий у роботах [14, 15, 29], для задач в просторах Адамара — у роботах [18, 35].

Основним елементом алгоритму 1 є опукла задача мінімізації вигляду

$$F(p, y) + \frac{1}{2\lambda} \phi(y, q) \rightarrow \min_{y \in C}.$$

Конструктивність процесу залежить від можливості її ефективного розв'язання.

Перейдемо до доведення збіжності алгоритму 1.

Має місце

Лема 3. Для послідовностей (x_n) , (y_n) , породжених алгоритмом 1, має місце нерівність

$$\begin{aligned} \phi(z, x_{n+1}) \leq & \phi(z, x_n) - (1 - 2\lambda\mu b)\phi(x_{n+1}, y_n) - \\ & - (1 - 4\lambda\mu a)\phi(y_n, x_n) + 4\lambda\mu a \phi(x_n, y_{n-1}), \end{aligned} \quad (11)$$

де $z \in S$.

Доведення. Маємо (двічі використали 3-точкову тотожність)

$$\begin{aligned} \phi(z, x_{n+1}) &= \\ &= \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, x_n) + 2 \langle Jx_{n+1} - Jx_n, x_{n+1} - z \rangle = \\ &= \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(y_n, x_n) - \\ & - 2 \langle Jy_n - Jx_n, x_{n+1} - y_n \rangle + 2 \langle Jx_{n+1} - Jx_n, x_{n+1} - z \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

З визначення точок x_{n+1} та y_n випливає

$$\lambda F(y_n, z) - \lambda F(y_n, x_{n+1}) \geq \langle Jx_{n+1} - Jx_n, x_{n+1} - z \rangle, \quad (13)$$

$$\lambda F(y_{n-1}, x_{n+1}) - \lambda F(y_{n-1}, y_n) \geq - \langle Jx_n - Jy_n, y_n - x_{n+1} \rangle. \quad (14)$$

Застосувавши нерівності (13), (14) для оцінки двох останніх доданків в (12), отримуємо

$$\begin{aligned} \phi(z, x_{n+1}) \leq & \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(y_n, x_n) + \\ & + 2\lambda \{F(y_n, z) - F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n)\}. \end{aligned} \quad (15)$$

З включення $z \in S$ випливає $F(y_n, z) \leq 0$, а умова типу ліпшицевості для F гарантує виконання нерівності

$$\begin{aligned} -F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) &\leq \\ &\leq a \|y_{n-1} - y_n\|^2 + b \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Використавши вищенаведені оцінки в (15), отримуємо

$$\begin{aligned} \phi(z, x_{n+1}) \leq & \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(y_n, x_n) + \\ & + 2\lambda a \|y_{n-1} - y_n\|^2 + 2\lambda b \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Член $\|y_{n-1} - y_n\|^2$ оцінимо наступним чином

$$\|y_{n-1} - y_n\|^2 \leq 2\|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\|y_n - x_n\|^2.$$

Урахувавши цю оцінку в (17), приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \phi(z, x_{n+1}) &\leq \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(y_n, x_n) + \\ &+ 4\lambda a \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 4\lambda a \|y_n - x_n\|^2 + 2\lambda b \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Оцінивши в (18) норми за допомогою нерівності (7), одержимо

$$\begin{aligned} \phi(z, x_{n+1}) &\leq \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(y_n, x_n) + \\ &+ 4\lambda \mu a \phi(x_n, y_{n-1}) + 4\lambda \mu a \phi(y_n, x_n) + 2\lambda \mu b \phi(x_{n+1}, y_n), \end{aligned}$$

а саме, нерівність (11). □

Зауважимо, що при виконанні для деякого $n \in \mathbb{N}$ рівностей

$$y_{n-1} = y_n = x_n \quad \text{або} \quad x_{n+1} = x_n = y_n. \quad (19)$$

має місце включення $y_n \in S$.

Дійсно, рівність

$$x_{n+1} = \text{PROX}_{\lambda F(y_n, \cdot)} x_n = \arg \min_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} \phi(y, x_n) \right),$$

означає

$$F(y_n, x_{n+1}) - F(y_n, z) \leq \frac{\phi(z, x_n) - \phi(z, x_{n+1}) - \phi(x_{n+1}, x_n)}{2\lambda} \quad \forall z \in C.$$

З другої рівності (19) випливає

$$-F(y_n, z) \leq 0 \quad \forall z \in C,$$

тобто $y_n \in S$.

Аналогічно, з

$$F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, z) \leq \frac{\phi(z, x_n) - \phi(y_n, x_n) - \phi(z, y_n)}{2\lambda} \quad \forall z \in S$$

при першій рівності в (19) отримуємо $y_n \in S$.

Далі будемо припускати, що для всіх номерів $n \in \mathbb{N}$ умова (19) не має місця.

Має місце

Теорема 1. *Нехай C — непорожня опукла та замкнена підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого банахового простору E , для біфункції $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ виконані умови (A1)–(A5) і $S \neq \emptyset$. Припустимо, що нормалізоване дуальне відображення J секвенційно слабко неперервне та*

$$\lambda \in \left(0, \frac{1}{2\mu(2a+b)} \right).$$

Тоді породжені алгоритмом 1 послідовності (x_n) , (y_n) слабко збігаються до розв'язку $z \in S$ задачі про рівновагу (8), причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Доведення. Нехай $z \in S$. Покладемо

$$\begin{aligned} a_n &= \phi(z, x_n) + 4\lambda\mu a\phi(x_n, y_{n-1}), \\ b_n &= (1 - 4\lambda\mu a)\phi(y_n, x_n) + (1 - 4\lambda\mu a - 2\lambda\mu b)\phi(x_{n+1}, y_n). \end{aligned}$$

Нерівність леми 3 приймає вигляд

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Має місце елементарна

Лема 4. *Нехай невід'ємні послідовності (a_n) , (b_n) , такі, що*

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Тоді існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

З леми 4 можемо зробити висновок, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\phi(z, x_n) + 4\lambda\mu a\phi(x_n, y_{n-1}))$$

та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((1 - 4\lambda\mu a)\phi(y_n, x_n) + (1 - 4\lambda\mu a - 2\lambda\mu b)\phi(x_{n+1}, y_n)) = 0.$$

Звідки отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(y_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_{n+1}, y_n) = 0 \quad (20)$$

та збіжність числової послідовності $(\phi(z, x_n))$ для всіх $z \in S$.

Спочатку покажемо, що всі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині S . З (13), (14), (15), (16) та (20) випливає

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} F(y_n, x_{n+1}) &\leq 0, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1})) &\leq 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1})) &= 0. \end{aligned}$$

Звідки, зокрема, отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n, x_{n+1}) = 0. \quad (21)$$

Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}) , слабо збіжну до деякої точки $\bar{z} \in C$. Тоді з (20) випливає, що й $y_{n_k} \rightharpoonup \bar{z}$. Покажемо, що $\bar{z} \in S$. Маємо

$$F(y_n, y) \geq F(y_n, x_{n+1}) + \frac{\langle Jx_{n+1} - Jx_n, x_{n+1} - y \rangle}{\lambda} \quad \forall y \in C. \quad (22)$$

Здійснивши граничний перехід в (22) з урахуванням (20), (21) та умови (A3), отримаємо

$$\begin{aligned} F(\bar{z}, y) &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} F(y_{n_k}, y) \geq \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ F(y_{n_k}, x_{n_k+1}) + \frac{\langle Jx_{n_k+1} - Jx_{n_k}, x_{n_k+1} - y \rangle}{\lambda} \right\} = 0 \quad \forall y \in C, \end{aligned}$$

тобто, $\bar{z} \in S$.

Покажемо, що послідовність (x_n) слабо збігається до $\bar{z} \in S$. Міркуємо від супротивного. Нехай існує підпослідовність (x_{m_k}) така, що $x_{m_k} \rightharpoonup z'$ та $\bar{z} \neq z'$. Ясно, що $z' \in S$. Маємо

$$2 \langle Jx_n, \bar{z} - z' \rangle = \phi(z', x_n) - \phi(\bar{z}, x_n) + \|\bar{z}\|^2 - \|z'\|^2.$$

Звідки випливає існування границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Jx_n, \bar{z} - z' \rangle$. Завдяки секвенційній слабкій неперервності нормалізованого дуального відображення J отримаємо

$$\langle J\bar{z}, z - z' \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Jx_{m_k}, \bar{z} - z' \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Jx_{m_k}, \bar{z} - z' \rangle = \langle Jz', \bar{z} - z' \rangle,$$

тобто, $\langle J\bar{z} - Jz', \bar{z} - z' \rangle = 0$. Звідки випливає $\bar{z} = z'$, що і необхідно було довести. \square

5. АДАПТИВНИЙ ВАРІАНТ ДВОЕТАПНОГО ПРОКСИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ

У розділі 4 для розв'язання задачі (8) був запропонований такий алгоритм:

$$\begin{cases} y_n = \text{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1}, \cdot)} x_n = \text{argmin}_{y \in C} \left(F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda} \phi(y, x_n) \right), \\ x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n = \text{argmin}_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} \phi(y, x_n) \right), \end{cases} \quad (23)$$

де величина $\lambda > 0$ задавалася, виходячи з вимоги

$$\lambda \in \left(0, \frac{1}{2\mu(2a+b)} \right),$$

тобто явно використовувалася інформація про константи умови типу ліпшицевості біфункції F .

Відштовхуючись від ітераційної схеми (23) та роботи [18], побудуємо двоетапний проксимальний алгоритм з адаптивним вибором величини λ .

Припустимо, що відома лише константа $\mu \geq 1$ з нерівності (7).

Алгоритм 2.

Обираємо елементи $x_1, y_0 \in C$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{3\mu} \right)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. Покладаємо $n = 1$.

1: Обчислити

$$y_n = \text{prox}_{\lambda F(y_{n-1}, \cdot)} x_n = \text{argmin}_{y \in C} \left(F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda_n} \phi(y, x_n) \right).$$

2: Обчислити

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda F(y_n, \cdot)} x_n = \text{argmin}_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} \phi(y, x_n) \right).$$

Якщо $x_{n+1} = x_n = y_n$, то зупинка та $x_n \in S$. Інакше перейти на крок 3.

3: Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2}{(F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}))} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ та перейти на 1.

У алгоритмі 2 параметр λ_{n+1} залежить тільки від розташування точок y_{n-1}, y_n, x_{n+1} , значень $F(y_{n-1}, x_{n+1}), F(y_{n-1}, y_n)$ і $F(y_n, x_{n+1})$. Ніяка інформація про константи a і b з нерівності (9) не використовується. Очевидно, що послідовність (λ_n) незростаюча. Також вона обмежена знизу числом

$$\min \left\{ \lambda_1, \frac{\tau}{2 \max\{a, b\}} \right\}.$$

Дійсно, маємо

$$\begin{aligned} F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) &\leq \\ &\leq a \|y_{n-1} - y_n\|^2 + b \|y_n - x_{n+1}\|^2 \leq \\ &\leq \max\{a, b\} (\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2). \end{aligned}$$

Перейдемо до обґрунтування збіжності алгоритму 2.

Має місце

Лема 5. *Для послідовностей $(x_n), (y_n)$, породжених алгоритмом 2, має місце нерівність*

$$\begin{aligned} \phi(z, x_{n+1}) &\leq \phi(z, x_n) - \left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \phi(x_{n+1}, y_n) - \\ &\quad - \left(1 - 2\tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \phi(y_n, x_n) + 2\tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_n, y_{n-1}), \end{aligned} \quad (24)$$

де $z \in S$.

Доведення. Маємо (показано в доведенні леми 3)

$$\begin{aligned} \phi(z, x_{n+1}) &\leq \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(y_n, x_n) + \\ &\quad + 2\lambda_n \{-F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n)\}. \end{aligned} \quad (25)$$

З правила обчислення λ_{n+1} випливає нерівність

$$\begin{aligned} F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) &\leq \\ &\leq \frac{\tau}{2\lambda_{n+1}} (\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2). \end{aligned} \quad (26)$$

Використавши (26) в (25), отримуємо

$$\begin{aligned} \phi(z, x_{n+1}) &\leq \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(y_n, x_n) + \\ &\quad + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_{n-1} - y_n\|^2 + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Член $\|y_{n-1} - y_n\|^2$ оцінимо наступним чином

$$\|y_{n-1} - y_n\|^2 \leq 2 \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2 \|y_n - x_n\|^2.$$

Урахувавши цю оцінку в (27), приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \phi(z, x_{n+1}) &\leq \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(y_n, x_n) + \\ &\quad + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_n - x_n\|^2 + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_n - x_{n+1}\|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Оцінивши в (28) норми за допомогою нерівності (7), одержимо

$$\begin{aligned} \phi(z, x_{n+1}) \leq & \phi(z, x_n) - \phi(x_{n+1}, y_n) - \phi(y_n, x_n) + \\ & + 2\tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_n, y_{n-1}) + 2\tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(y_n, x_n) + \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \phi(x_{n+1}, y_n), \end{aligned}$$

а саме, нерівність (24). □

Сформулюємо основний результат розділу.

Теорема 2. *Нехай C — непорожня опукла та замкнена підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого банахового простору E , для біфункції $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ виконані умови (A1)–(A5) і $S \neq \emptyset$. Припустимо, що нормалізоване дуальне відображення J секвенційно слабо неперервне. Тоді породжені алгоритмом 2 послідовності (x_n) , (y_n) слабо збігаються до розв'язку $z \in S$ задачі про рівновагу (8).*

Доведення. Використовуємо лему 5 та схему міркувань з доведення основного результату роботи [18]. □

6. ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

В роботі розглянуто задачі про рівновагу в 2-рівномірно опуклих та рівномірно гладких банахових просторах.

Отримана теорема про слабку збіжність двоетапного проксимального алгоритму для псевдомонотонних задач рівноважного програмування в 2-рівномірно опуклих та рівномірно гладких банахових просторах. Запропоновано адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм для задач в 2-рівномірно опуклих та рівномірно гладких банахових просторах. Правило оновлення параметрів не використовує значень ліпшицевих констант біфункції та на відміну від правил типу лінійного пошуку не потребує обчислень значень біфункції в додаткових точках. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведена теорема про слабку збіжність породжених алгоритмом послідовностей.

Отримані результати узагальнюють та уточнюють результати робіт [15, 20, 29].

7. Подяки

Автори вдячні проф. Сергію Ляшку та проф. Володимирі Семенову за деякі математичні поради, увагу та підтримку.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів щодо публікації цієї статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kassay G., Radulescu V.D. Equilibrium Problems and Applications. London: Academic Press, 2019. xx + 419 p.
2. Nikaido H., Isoda K. Note on noncooperative convex games. *Pacific Journal of Mathematics*. 1955. Vol. 5. P. 807–815.

3. Blum E., Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Math. Stud.* 1994. 63. P. 123–145.
4. Muu L.D. and Oettli W. Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria. *Nonlinear Anal. TMA.* 1992. 18. P. 1159–1166.
5. Kinderlehrer D. Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. New York: Academic Press, 1980. Russian transl., Moscow: Mir, 1983. 256 p.
6. Quoc T.D., Muu L.D., Hien N.V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization.* 2008. Vol. 57. P. 749–776.
7. Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2011. 408 p.
8. Van N.T.T., Strodiot J.J., Nguyen V.H. A bundle method for solving equilibrium problems. *Math. Program.* 2009. 116 (1–2), Ser. B. P. 529–552.
9. Anh P.N. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and Ky Fan inequalities. *J. Optim. Theory Appl.* 2012. 154. P. 303–320.
10. Vuong P.T., Strodiot J.J., Nguyen V.H. Extragradient methods and linesearch algorithms for solving Ky Fan inequalities and fixed point problems. *J. Optim. Theory Appl.* 2012. 155. P. 605–627.
11. Quoc T.D., Anh P.N., Muu L.D. Dual extragradient algorithms to equilibrium problems. *J. Glob. Optim.* 2012. 53. P. 139–159.
12. Anh P.N., Hai T.N., Tuan P.M. On Ergodic Algorithms for Equilibrium Problems. *J. Glob. Optim.* 2016. 64 (1). P. 179–195.
13. Nguyen T.P.D., Strodiot J.J., Nguyen V.H., Nguyen T.T.V. A family of extragradient methods for solving equilibrium problems. *J. Ind. Manag. Optim.* 2015. 11. P. 619–630.
14. Vedel Y.I., Semenov V.V. A new two-phase proximal method of solving the problem of equilibrium programming. *Journal of Numerical and Applied Mathematics.* 2015. № 1 (118). P. 15–23.
15. Lyashko S.I., Semenov V.V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. In: B. Goldengorin (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115. Springer, Cham, 2016. P. 315–325.
16. Zykina A.V., Melenchuk N.V. Finite number of iterations in the two-step extragradient method. *Russian Mathematics.* 2014. Volume 58. Issue 9. P. 62–65.
17. Popov L.D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR.* 1980. Vol. 28. Issue 5. P. 845–848.
18. Vedel Y.I., Sandrakov G.V., Semenov V.V. An Adaptive Two-Stage Proximal Algorithm for Equilibrium Problems in Hadamard Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56. Issue 6. P. 978–989.
19. Semenov V.V., Denisov S.V., Kravets A.V. Adaptive Two-Stage Bregman Method for Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57. Issue 6. P. 959–967. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00421-2>.
20. Semenov V.V., Denisov S.V. Convergence of the Method of Extrapolation from the Past for Variational Inequalities in Uniformly Convex Banach Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2022. Vol. 58. Issue 4. P. 564–575.
21. Denysov S., Semenov V. Theoretical Bound of the Complexity of Some Extragradient-Type Algorithms for Variational Inequalities in Banach Spaces. Selected Papers of the VIII International Scientific Conference «Information

- Technology and Implementation» (IT&I-2021). Workshop Proceedings, Kyiv, Ukraine, December 1-3, 2021. *CEUR Workshop Proceedings*, vol. 3179. 2022. P. 144–155.
22. Yang J., Cholamjiak P., Sunthrayuth P. Modified Tseng's splitting algorithms for the sum of two monotone operators in Banach spaces. *AIMS Mathematics*. 2021. Vol. 6, Iss. 5. P. 4873–4900.
 23. Denisov S., Semenov V. Convergence of Adaptive Forward-Reflected-Backward Algorithm for Solving Variational Inequalities. Selected Papers of the II International Scientific Symposium «Intelligent Solutions» (IntSol-2021). Workshop Proceedings, Kyiv–Uzhhorod, Ukraine, September 28-30, 2021. *CEUR Workshop Proceedings*, vol. 3106. 2021. P. 116–127.
 24. Semenov V., Denysov S. Convergence of Adaptive Operator Extrapolation Method for Operator Inclusions In Banach Spaces. Proceedings of The Fifth International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2022). Zaporizhzhia, Ukraine, May 12, 2022. *CEUR Workshop Proceedings*, vol. 3137. 2022. P. 186–199.
 25. Vedel Y., Semenov V., Denisov S. A Novel Algorithm with Self-adaptive Technique for Solving Variational Inequalities in Banach Spaces. In: Olenev N. N., Evtushenko Y. G., Jaćimović M., Khachay M., Malkova V. (eds.) *Advances in Optimization and Applications. OPTIMA 2021. Communications in Computer and Information Science*, vol 1514. Springer, Cham, 2021. P. 50–64.
 26. Iiduka H., Takahashi W. Weak convergence of a projection algorithm for variational inequalities in a Banach space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2008. Vol. 339, N 1. P. 668–679.
 27. Cholamjiak P., Shehu Y. Inertial forward-backward splitting method in Banach spaces with application to compressed sensing. *Appl. Math.* 2019. Vol. 64. P. 409–435.
 28. Shehu Y. Single projection algorithm for variational inequalities in Banach spaces with application to contact problem. *Acta Math. Sci.* 2020. Vol. 40. P. 1045–1063.
 29. Vedel Y.I., Semenov V.V., Chabak L.M. About the two-stage proximal method for solving of equilibrium problems. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2019. № 2 (131). P. 23–31. <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2019.2.03>.
 30. Alber Y.I. Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications. In: *Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type*, vol. 178. New York: Dekker, 1996. P. 15–50.
 31. Alber Y., Ryazantseva I. *Nonlinear Ill Posed Problems of Monotone Type*. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.
 32. Beauzamy B. *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry*. Amsterdam: North-Holland, 1985. 307 p.
 33. Aoyama K., Kohsaka F. Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings. *Fixed Point Theory Appl.* 2014. 95. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2014-95>.
 34. Xu H.K. Inequalities in Banach spaces with applications. *Nonlinear Anal.* 1991. Vol. 16. Iss. 12. P. 1127–1138.
 35. Vedel Y.I., Sandrakov G.V., Semenov V.V., Chabak L.M. Convergence of a Two-Stage Proximal Algorithm for the Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56. Issue 5. P. 784–792.

Надійшла: 14.01.2025 / Прийнята: 27.02.2025