

УДК 524.7

В. Жданов, д-р фіз.-мат. наук, проф.  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

## ЕФЕКТИ ЕЛІПТИЧНОСТІ ГРАВІТАЦІЙНО-МІКРОЛІНЗОВАНОГО ДЖЕРЕЛА ВИПРОМІНЮВАННЯ З РОЗПОДІЛОМ ЯСКРАВОСТІ СТЕПЕНЕВОГО ТИПУ

*Розглянуто процеси гравітаційного мікролінзування еліптичних джерел з урахуванням формули для степеневого розподілу яскравості. Побудовано коефіцієнти підсилення, що дозволяють оцінити збільшення інтегральної яскравості джерела у процесах мікролінзування для різних його орієнтацій відносно лінійної каустики. Побудовано усереднені криві підсилення в межах спрощеної статистичної моделі, коли відбуваються перетинання джерела лінійними каустиками з ізотропним розподілом швидкостей. Оцінки якісно узгоджуються з висновками, отриманими для моделі гаусівського джерела, хоча є відмінності, пов'язані з формою розподілу яскравості джерела. Ресстрація ефектів еліптичності в реальній ситуації потребує тривалого моніторингу з великою кількістю подій мікролінзування.*

**Ключові слова:** гравітаційні лінзи, мікролінзування, еліптичне джерело, криві блиску.

**Вступні зауваження.** У піонерській роботі [1] запропоновано використовувати події гравітаційного мікролінзування (ПГМ) у позагалактичних гравітаційно-лінзових системах (ГЛС) для вивчення тонкої структури джерела. Цю ідею розвинуто у багатьох роботах (наприклад, огляди [2, 3]). Найбільш вивченими є центрально-симетричні (у проєкції на картинну площину) розподіли яскравості різних типів [2, 3]. Багато питань розглянуто для ПГМ еліптичних джерел у роботах [4–6]. Зазначимо, що у спостереженнях еліптичність вихідного зображення може бути пов'язана як із власною формою джерела, так і з нахилом плоского джерела до променя зору. У роботі [4] детально вивчено ПГМ протяжних джерел точковою лінзою. У [5] розглянуто еліптичне джерело з однорідним розподілом яскравості в наближенні лінійної каустики для коефіцієнта підсилення. Постлінійні поправки за кривину каустики для ПГМ гаусівського еліптичного джерела розглянуто в [6] на основі розкладів, отриманих у [7]. Як впливає із цих робіт, спостереження ефектів еліптичності в одній ПГМ є складною задачею. У роботі [8] з урахуванням гаусівської моделі джерела подано прості оцінки статистичних ефектів еліптичності за наявності великої кількості таких подій. У цій роботі, яка продовжує дослідження [8], ми розглянемо аналогічні питання для степеневі моделі розподілу яскравості. Буде побудовано залежності додаткової інтегральної яскравості від відстані каустики до центра джерела (криві підсилення), які пов'язані із спостережуваними кривими блиску при мікролінзуванні, а також усереднені характеристики, які характеризують стиснення (еліптичність) джерела. Ми розглядаємо ПГМ при перетинанні каустики-складки, що є типовим явищем у позагалактичних ГЛС, причому використовуємо наближення лінійної каустики.

**Еліптичне джерело.** Сформулюємо "еліптичну" модель (або модель зі стисненням) на основі загального центрально-симетричного розподілу яскравості по диску джерела

$$B(x, y) = \frac{I_0}{\pi R^2} F \left\{ \frac{r^2}{R^2} \right\}, \quad \int_0^{\infty} dx F \{x\} = 1,$$

де  $R$  – розмірний параметр, наприклад, ефективний радіус,  $I_0$  – інтегральна яскравість. Як модель еліптичного джерела розглянемо розподіл

$$B(x, y) = \frac{I_0}{\pi ab} F \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}, \quad (1)$$

який зберігає інтегральну яскравість; далі покладемо  $b = a\sqrt{1-e^2}$ . Таким чином, ізолінії рівня функції  $B(x, y)$  є еліпсами, подібними до еліпса з ексцентриситетом  $e$ .

Далі розглянемо мікролінзування у системі, де орієнтація лінійної каустики буде фіксованою, натомість джерело буде повернуте (у своїй площині) на кут  $\theta$ :

$$B(x, y, e, \theta) = \frac{I_0}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} F \left\{ \left( \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{a} \right)^2 + \left( \frac{y \cos \theta - x \sin \theta}{b} \right)^2 \right\}, \quad (2)$$

тут  $\theta$  є нахилом великої осі еліпсів – ліній рівня розподілу яскравості – до напрямку руху каустики. Формула (2) записана у системі, де центр джерела  $y=0$  є нерухомим.

**Модель джерела та коефіцієнт підсилення.** У процесах гравітаційного мікролінзування відбувається підсилення яскравості (збільшення потоків випромінювання) різних ділянок джерела. Ми вважаємо, що спостереження кривих блиску дають змогу відокремити локальне підсилення інтегральної яскравості джерела в ПГМ при перетинанні каустики-складки від інших плавних змін, наприклад, обумовлених усередненим полем лінзової галактики. У найпростішому наближенні лінійної каустики, яке спрацьовує у багатьох випадках, коефіцієнт підсилення точкового джерела завдяки виникненню нових критичних зображень такий:

$$K(x-d) = A \frac{H(x-d)}{\sqrt{x-d}}, \quad (3)$$

де  $H$  – функція Хевісайда, коефіцієнт  $A$  – сила каустики,  $d$  – відстань від каустики до джерела. Це наближення припускає, що фактичний розмір джерела значно менший радіуса кривини каустики. Незважаючи на те, що каустика

в (3) є лінійною, ця формула неявно враховує цю кривину. А саме, згідно з формулою (3) область  $x > d$  відповідає появі двох критичних зображень при перетинанні каустики точковим джерелом у напрямку кривини (див. наприклад, [7]). Кривина каустики спрямована у додатному напрямку  $x$ -осі і в разі збільшення  $d$  джерело виходить із підсилюючого впливу лінзи. Для врахування протилежної ситуації, коли джерело входить в зону дії лінзи, треба поміняти  $d \rightarrow -d$ . Точніші формули для коефіцієнта підсилення, які явно враховують, зокрема, кривину каустики, можна знайти в [7]. Параметр  $d$  зазвичай вважають лінійною функцією від часу  $d = V_n t$ ,  $V_n$  – нормальна компонента швидкості каустики відносно джерела.

Тут виникають питання щодо сили каустики та швидкості її руху. У позагалактичних гравітаційно-лінзових системах ці величини справді мають певний розподіл. Є можливість позбавитися від впливу коефіцієнтів  $A, I_0$ , розглядаючи нормовані криві підсилення окремо для кожної ПГМ, як це запропоновано у [8, формула (8)]. Зазначимо, що в роботі [1] показано, що поперечний профіль яскравості можна відновити з точністю до коефіцієнта (див. додатки А, В у [1]); процедура нормування дозволяє позбавитися впливу цього коефіцієнта в кожній ПГМ. Указана процедура не міняє результатів щодо впливу еліптичності, але ускладнює розрахунки. В іншому підході можна використати асимптотичну формулу для підсилення, коли відстань до джерела значно більша за його розмір; це дозволяє відновити параметр  $A$  в окремій ПГМ і, таким чином позбавитися його впливу. Тому далі зафіксуємо ці величини, покладаючи  $A=1, I_0=1$ . Складнішою є проблема розподілу швидкостей, яка вимагає складного моделювання. Для оціночно-якісного розгляду, який передувє повномасштабним симуляціям у багаточастинковій системі, вважаємо, що всі каустики мають однакову (за абсолютною величиною) характерну нормальну швидкість. Далі покладаємо  $|V_n|=1$ , що означає певний вибір одиниць довжини у площині джерела.

Запишемо коефіцієнт підсилення для всього джерела

$$K_{tot}(d, e, \theta) = \iint dx dy K(x-d) B(x, y, e, \theta) = \int_d^\infty dx \frac{J(x, e, \theta)}{\sqrt{x-d}}, \tag{4}$$

де

$$J(x, e, \theta) = \int_{-\infty}^\infty dy B(x, y, e, \theta). \tag{5}$$

Для подальшого розгляду конкретизуємо функцію

$$F\{\xi\} = (p-1)(1+\xi)^{-p}, \quad p > 1, \tag{6}$$

У цьому разі проінтегрований по  $Y$  розподіл є

$$J(x, e, \theta) = \frac{p-1}{\pi a} \frac{\beta\left(\frac{1}{2}, p-\frac{1}{2}\right) \left((1-e^2)\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)^{p-1}}{\left((1-e^2)\sin^2\theta + \cos^2\theta + x^2\right)^{p-\frac{1}{2}}}, \tag{7}$$

де  $\beta(p, q)$  – бета-функція Ейлера.

**Криві підсилення.** Як видно з (5), (7), при  $\theta=0$   $K_{tot}$  не залежить від ексцентриситету. На рис. 1 подано криві підсилення у випадку, коли каустика перетинає джерело з розподілом, визначеним формулами (6), (7) із різними ексцентриситетами, при значенні кута повороту  $\theta = \pi/2$ , коли ефект еліптичності максимальний. На рис. 2 подано криві підсилення, розраховані для трьох ненульових значень  $\theta$ .

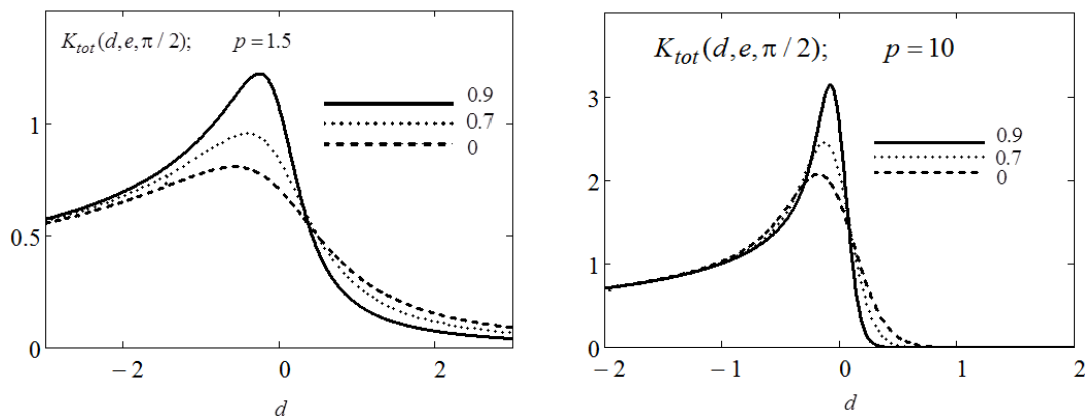


Рис. 1. Криві підсилення  $K_{tot}(d, e, \theta)$  для ексцентриситетів 0, 0.7, 0.9;  $\theta = \pi/2$ . Тут і далі  $a=1$ .  
Ліворуч – графіки для показника степеня  $p=1.5$  в (6), праворуч – для  $p=10$

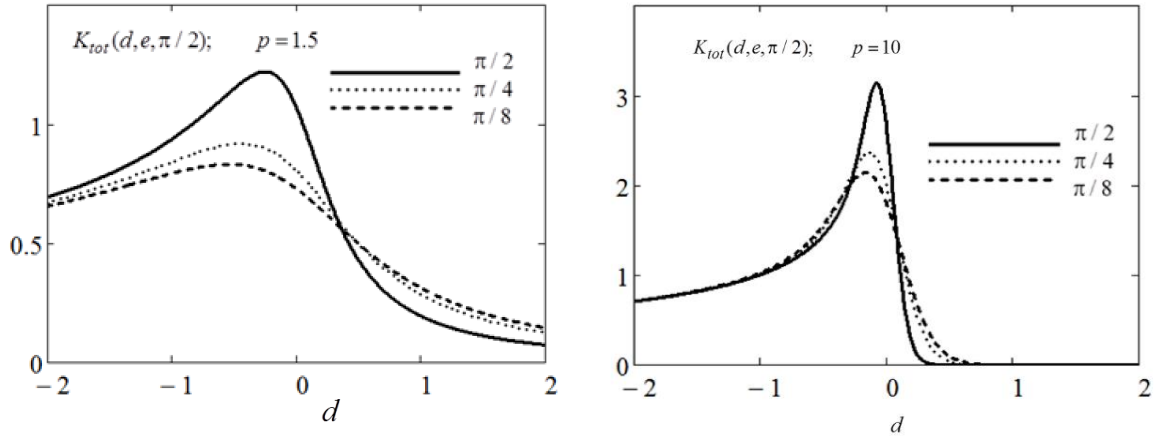


Рис. 2. Криві підсилення  $K_{tot}(d, 0.9, \theta)$  для різних кутів повороту еліптичного джерела  $\theta = \pi/8, \pi/4, \pi/2$

У системі зір-мікролінз із хаотичними напрямками швидкості руху каустик також хаотичні. Розглянемо випадок, коли немає виділеного напрямку такого руху, тобто розподіл напрямків швидкостей рівномірний. Нагадаємо, що в обчисленнях покладено  $A=1, |V_n|=1$ . Обчислимо криву підсилення  $I(d, e)$  еліптичного джерела (1), мікролінзовану лінійними каустиками (3), усереднену за усіма (рівномірними) орієнтаціями каустик, причому враховуватимемо обидва варіанти руху каустики, як у напрямку кривини, так і у протилежному. Очевидно, тут можна використати результати обчислень за формулами (4), (5), (7), вважаючи каустику фіксованою та розглядаючи всі орієнтації джерела. Крім того, треба врахувати (рівномірні) напрямки руху каустики відносно кривини, що відповідає зміні напрямку  $x$ -осі. Результат моделює "спостережувану" характеристику еліптичності після значної кількості подій мікролінзування:

$$\delta(d, e) = \frac{I(d, e) - I(d, 0)}{I(d, 0)}, \tag{8}$$

де

$$I(d, e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta [K_{tot}(d, e, \theta) + K_{tot}(-d, e, \theta)]. \tag{9}$$

Наявність двох доданків у підінтегральному виразі (9) враховує обидва напрямки руху каустики відносно кривини.

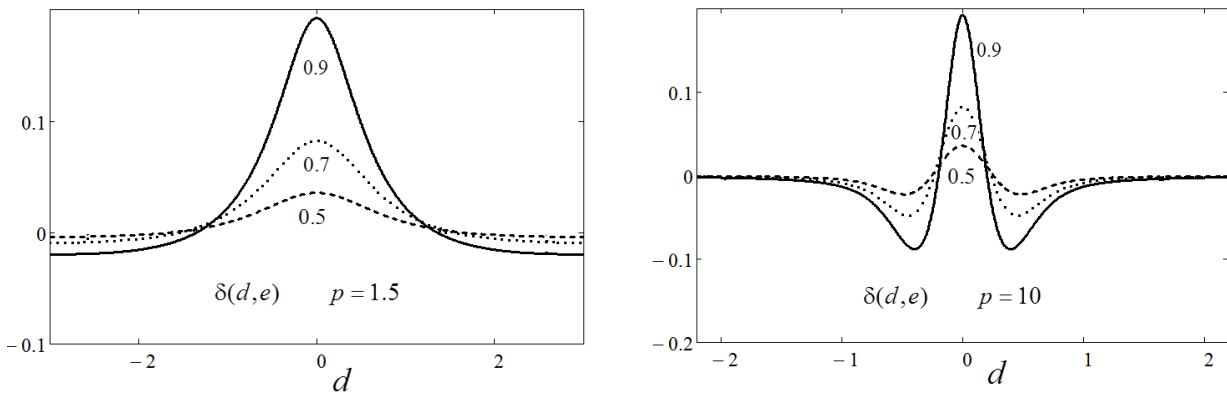


Рис. 3. Величина  $\delta(d, e)$ , отримана в результаті усереднення кривих підсилення за всіма напрямками руху каустик (ізотропний випадок), для ексцентриситетів  $e = 0.5, 0.7, 0.9$  та різних степенів  $p$

Значення  $\delta(0, e) = I(0, e) / I(0, 0) - 1$  не залежить від степеня  $p > 1$ . Це видно з обчислення

$$I(0, e) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \frac{p-1}{\pi a} \frac{\beta\left(\frac{1}{2}, p-\frac{1}{2}\right) \left((1-e^2)\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)^{p-1}}{\left((1-e^2)\sin^2\theta + \cos^2\theta + x^2\right)^{\frac{p-1}{2}}} = \frac{1}{a} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\left((1-e^2)\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

Відповідно,

$$\delta(0, e) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left( (1 - e^2) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right)^{\frac{1}{4}}} - 1.$$

Графік цієї величини показано на рис. 4.

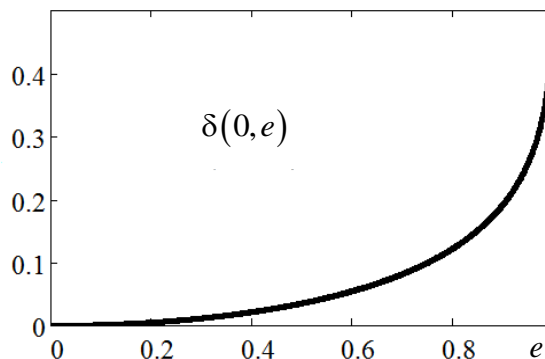


Рис. 4. Максимальне значення характеристики еліптичності  $\max\{\delta(d, e)\} = \delta(0, e)$  як функція ексцентриситету  $e$

**Висновки.** У цій статті сформульовано моделі мікролінзованих джерел за наявності еліптичності з урахуванням загальної формули для центрально-симетричного розподілу яскравості. Ми отримуємо спостережувані характеристики в межах спрощеної моделі статистичного мікролінзування, коли відбуваються перетинання джерела лінійними каустиками однакової сили та з однаковими швидкостями (за абсолютною величиною), але напрямки руху каустик розподілені рівномірно по колу. Результати якісно узгоджуються з раніше отриманими висновками [8] для гаусівського джерела. Разом із тим, результати показують вплив ефектів розподілу яскравості по диску джерела, а саме, залежність від параметра  $p$ . Порівняння цієї моделі з гаусівською дає змогу оцінити відмінності, притаманні різним моделям, оскільки у степеневій моделі маємо повільніше спадання яскравості зі зростанням відстані від центра і, відповідно, різний характерний масштаб процесу. Чим більше  $p$ , тобто чим ближче розподіл до гаусівської моделі, тим менш широкими є самі ті елементи кривих блиску, де найсильніше проявляє себе вплив еліптичності (рис. 1–3). З іншого боку, для усереднених кривих (8), де максимальне значення функції  $\delta(d, e)$  не залежить від  $p$ , а еліптичність проявляє себе через ширину графіка цієї функції, що є помітним, починаючи приблизно з  $e = 0.3$ . Однак у реальній ситуації це вимагатиме тривалих спостережень із великою кількістю подій мікролінзування.

У цілому результати свідчать, що за точності сучасної фотометрії ефекти еліптичності є суттєвими. Але у спостереженнях їх важко відокремити від інших ефектів, пов'язаних із різними умовами конкретної ПГМ. У теоретичному плані послідовний аналіз потребує ретельного статистичного моделювання з великою кількістю мікролінз. Також цікаво порівняти результати цієї роботи з іншими моделями розподілу яскравості, такими, як модель із потемнінням до краю та ін. (див. наприклад, [2, 3]).

#### Список використаних джерел

1. B. Grieger, R. Kayser, and S. Refsdal. Gravitational microlensing as a clue to quasar structure // *Astronomy & Astrophysics*, vol. 194, pp. 54–64, 1988.
2. V. I. Zhdanov, A. N. Alexandrov, E. V. Fedorova, V. M. Sliusar. Qualitative problems in gravitational microlensing // *Dark Matter. V. 2. Astrophysical Aspects of the Problem.* – Kyiv: Akadempriodyka, 2014. – P. 84–130.
3. V. I. Zhdanov, A. N. Alexandrov, E. V. Fedorova, V. M. Sliusar. Analytical methods in gravitational microlensing // *ISRN Astronomy and Astrophysics*, 2012, id. D 906951, 21 p. doi:10.5402/2012/906951.
4. D. Heyrovsky, A. Loeb. Microlensing of an elliptical source by a point mass // *Astrophys. J.*, 1997. – Vol. 490. – P. 38–50.
5. B. S. Gaudi, Z. Haiman. Microlensing of elliptical sources by fold caustics // arXiv:astro-ph/0401035.
6. О. М. Александров, В. І. Жданов, А. В. Куйбаров. Гравітаційне мікролінзування еліптичного джерела поблизу каустики-складки // *Вісник Київського національного університету. Астрономія*, 2018. № 57. – P. 10–15.
7. A. N. Alexandrov, V. I. Zhdanov. Asymptotic expansions and amplification of a gravitational lens near a fold caustic // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* – 2011. – V. 417. – P. 541–554.
8. В. І. Жданов, О. М. Александров. Вплив еліптичності джерела на криві блиску в позагалактичних гравітаційно-лінзових системах. *Вісник Київського національного університету. Астрономія.* – 2020. – № 62, с.6–9.

Надійшла до редколегії 25.09.2022

V. Zhdanov, Dr Hab., Prof.  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

### EFFECT OF THE SOURCE ELLIPTICITY ON LIGHT CURVES IN EXTRAGALACTIC GRAVITATIONAL LENS SYSTEMS

*Gravitational microlensing of elliptical sources in the linear caustic approximation is considered, based on the formula for the power-law distribution of brightness over the source plane;*

$$B(x, y, e, \theta) = \frac{I_0}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} F \left\{ \left( \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{a} \right)^2 + \left( \frac{y \cos \theta - x \sin \theta}{b} \right)^2 \right\}, \text{ where } F\{\xi\} = (p-1)(1+\xi)^{-p}, \quad p > 1.$$

*This expression is convolved with the brightness amplification of the point source  $\sim (x-d)^{-1/2}$  (linear caustic approximation). We have constructed the total amplification coefficients  $K_{tot}(d)$  (amplification curves) that allow us to estimate the increase in the integral brightness of the source in microlensing processes for various orientations with respect to the linear caustic. The averaged amplification curves  $K_{tot}(x)$  are built within the framework of a simplified statistical model when the source is crossed by linear caustics with an isotropic distribution of velocities (with fixed caustic strength and velocity modulus)*

$$\delta(d, e) = \frac{I(d, e) - I(d, 0)}{I(d, 0)}, \quad I(d, e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta [K_{tot}(d, e, \theta) + K_{tot}(-d, e, \theta)].$$

*The value of  $\delta(0, e)$  appears to be independent of the model parameter  $p$ .*

*The resulting estimates are qualitatively consistent with the conclusions obtained for the Gaussian source model, although there are differences related to the shape of the source brightness distribution. The results show that in view of the accuracy of the modern photometry, the effects of ellipticity are significant; however, they are obscured by other effects due to various conditions of a specific microlensing event. Moreover, registration of the ellipticity signal in real observations requires long-term monitoring with a large number of microlensing events.*

*Key words: gravitational lenses, microlensing, elliptical source, light curves.*