МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кучук-Яценко Сергій Вікторович

УДК 517.9

ВІДСУТНІСТЬ АРБІТРАЖУ ТА ОЦІНЮВАННЯ ОПЦІОНІВ У МОДЕЛЯХ ФІНАНСОВИХ РИНКІВ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ ВОЛАТИЛЬНІСТЮ

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка та кафедрі математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Науковий консультант:
доктор фізико-математичних наук, професор
Мішура Юлія Степанівна,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри теорії ймовірностей, статистики
та актуарної математики

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор
Єлейко Ярослав Іванович,
Львівський національний університет імені Івана Франка,
завідувач кафедри теоретичної та прикладної статистики;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Щестюк Наталія Юріївна,
Національний університет «Києво-Могилянська академія»,
доцент кафедри математики.

Захист відбудеться 10 квітня 2017 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 4 Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці ім. М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розіслано “ 9 ” березня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Моклячук М.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Модель фінансового ринку з деривативами, представлена Ф. Блеком та М. Шоулсом у 1973 році, яка формалізувала процеси, що вже довгий час відбувалися на світових біржах, стала видатним проривом у тогочасній фінансовій математиці та стимулювала стрімкий розвиток ринку похідних цінних паперів. Класична модель, спираючись на певні припущення та обмеження, дозволяла відносно легко розраховувати справедливу вартість опціону Європейського типу. Саме згадані припущення та обмеження залишаються об'єктом досліджень і донині.

Біноміальна модель Кокса–Росса–Рубінштейна, представлена наприкінці 70-х років, є дискретною, що усуває один з недоліків моделі Блека–Шоулса. Встановлено, що ця модель надає більш точні результати при оцінюванні опціонів, особливо у випадку довгострокових контрактів. У другому розділі дисертаційної роботи розглядається поведінка так званих "греків" – величин, що характеризують ринок і активи на ньому в моделі Блека–Шоулса. Введено у розгляд дискретні аналоги цих величин у біноміальній моделі ринку і показано слабку збіжність цих аналогів до греків за умови, що кількість періодів прямує до нескінченності.

Класична модель Блека–Шоулса використовує припущення про сталість волатильності. Проте дослідження реальних фінансових ринків свідчать про протилежне: волатильність змінюється із часом, причому майже у всіх випадках не детермінованим чином. Очевидно, що за таких умов формула справедливої вартості опціону з класичної моделі потребує перегляду. Більше того, стохастична природа волатильності ставить під сумнів інше припущення класичної моделі – відсутність на ринку арбітражних можливостей. Отже, при розгляді модифікованих моделей інтерес викликає також і безарбітражність ринків. У третьому розділі дисертаційної роботи для моделі фінансового ринку зі стохастичною волатильністю вивчається питання відсутності арбітражних можливостей та із застосуванням оберненого перетворення Фур'є встановлюється точна формула справедливої вартості Європейського опціону. Інший підхід до точного обчислення ціни Європейського опціону, що застосовує елементи числення Маллявена, реалізовано у п'ятому розділі дисертаційної роботи. Актуальність досліджень підтверджує той факт, що обидві отримані формули для розглядуваної моделі ринку є новими, а застосування числення Маллявена до поставленої задачі не досліджувалося.

Поряд із точними формулами для оцінювання опціонів зацікавленість дослідників та практиків викликають наближені формули, які можуть бути технічно простішими, вимагати меншого часу обчислення та разом із цим забезпечувати прийнятну точність результатів. Зокрема наближені методи застосовуються, коли розрахунок за точними формулами технічно важко реалізувати, тобто саме у випадку розглядуваної моделі. Наближені методи, які використовують дискретизацію, стають все більш актуальними із зростанням технічних можливостей обчислювальної техніки. Четвертий розділ дисертаційної роботи представляє одну з можливих схем обчислення наближеного значення справедливої вартості Європейського опціону у моделі ринку зі стохастичною волатильністю. Розкрито чисельні результати, встановлено швидкість збіжності дискретизованих моделей до неперервної при спрямуванні кроку дискретизації до нуля та проведено аналіз похибок дискретизації.

У моделях ринку, які розглядаються у згаданих вище розділах, як буде показано у роботі, існують еквівалентні мартингальні міри. Відсутність арбітражу на ринку за певних умов є наслідком існування таких мір. Проте у багатьох моделях про існування мартингальних мір стверджувати не можна. У шостому розділі дисертаційної роботи розглядається модель економіки обміну, де вигляд цінового процесу невідомий. Знайдено необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги. Встановлено нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів. Сформульовано теорему про існування економічної динаміки. Представлено достатні умови відсутності арбітражних можливостей для економічних агентів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконана у рамках державних бюджетних науково-дослідних тем №11БФ038-02 "Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей" (номер державної реєстрації №0111U006561) і №16БФ038-02 "Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем" (номер державної реєстрації №0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт "Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів", а також у рамках державних бюджетних науково-дослідних тем №11БФ038-01 "Розроблення нових математичних методів моделювання, аналізу та побудови керувань для нелінійних еволюційних систем зі складною динамікою" (номер державної реєстрації №0111U006677) і №16БФ038-01 "Якісний аналіз та керування еволюційними системами складної структури" (номер державної реєстрації №0116U004732), що виконуються на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, і входять до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт "Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів".

Мета і завдання дослідження

Дисертаційна робота має на меті запропонувати нові та поглибити і розвинути вже проведені дослідження у сфері оцінювання деривативів та питань відсутності арбітражу у різних моделях фінансових ринків, зокрема, у моделях ринків зі стохастичною волатильністю, моделях із дискретним часом та моделях економіки обміну. Для досягнення мети дисертації були поставлені наступні завдання:

• відшукання у моделі Кокса–Росса–Рубінштейна дискретних аналогів величин, що характеризують опціони у моделі Блека–Шоулса, що функціонує у неперервному часі;

• побудова моделі ринку зі стохастичною волатильністю. Визначення властивостей волатильності, які варто імплементувати у модель, щоб забезпечити відповідність реальним фінансовим ринкам;

• визначення умов відсутності арбітражу та справедливої вартості опціону Європейського типу у моделі ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека;

• отримання чисельних результатів наближеного обчислення та оцінка швидкості збіжності цін опціонів у моделі ринку зі стохастичною волатильністю при застосуванні дискретизаційної схеми Ейлера–Маруями. Оцінка та характеризація похибки дискретизації;

• встановлення умов відсутності арбітражу у моделі економіки обміну.

Об'єктом дослідження є математичні моделі фінансового ринку.

Предметом дослідження є відсутність або наявність арбітражу та оцінювання деривативів у таких моделях, а також збіжність та швидкість збіжності дискретних моделей до неперервних аналогів.

Методи дослідження

У роботі використано методи теорії ймовірностей, випадкових процесів, мартингальні методи, методи теорії диференціальних рівнянь, фінансової математики, математичної економіки.

Наукова новизна одержаних результатів

Основні результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист:

• доведено, що дельта-хедж у біноміальній моделі Кокса–Росса–Рубінштейна є аналогом грецького символу дельта у моделі Блека–Шоулса у тому сенсі, що має місце слабка збіжність дельта-хеджу до дельти при спрямуванні кількості періодів у дискретній моделі до нескінченності;

• для моделі фінансового ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, доведено відсутність на ринку арбітражу у сенсі $\overline{NA}_{+}$ та $\overline{NA}_{g}$;

• із застосуванням оберненого перетворення Фур'є та числення Маллявена для моделі фінансового ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, для випадку, коли процеси Вінера, що керують еволюцією ціни активу та його волатильністю, є некорельованими, відшукано точні та наближені формули розрахунку справедливої вартості Європейського опціону;

• встановлено швидкість збіжності ціни опціону Європейського типу у дискретизованій за схемою Ейлера–Маруяма моделі ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, до ціни опціону у неперервній моделі при спрямуванні кроку дискретизації до нуля;

• у моделі економіки обміну знайдено необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги, встановлено нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів, представлено достатні умови відсутності арбітражних можливостей для економічних агентів.

Практичне значення одержаних результатів

Дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення. На практиці одержані результати можуть бути застосовані на реальних фінансових ринках при моделюванні первинних цінних паперів і наближеному обчисленні цін похідних цінних паперів.

Особистий внесок здобувача

Усі основні результати роботи належать здобувачу. У трьох статтях, підготовлених разом із науковим керівником проф. Мішурою Ю.С., останній належить формулювання задач та методика досліджень, а всі результати отримані здобувачем самостійно. Одна робота опублікована у співпраці з Мішурою Ю.С. та Мунчак Є.Ю., де здобувачу належать такі результати: із застосуванням методів числення Маллявена встановлено вигляд функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання Європейського опціону, та отримано формулу справедливої вартості Європейського опціону у моделі ринку зі стохастичною волатильністю, яка задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, для випадку, коли процеси Вінера, що керують еволюцією ціни активу та його волатильністю, є некорельованими.

Апробація результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наступних наукових семінарах, міжнародних і всеукраїнських конференціях:

1. Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та іх застосування" (Київ, Україна). 08.06.2011 – 10.06.2011.
2. Обчислювальна та прикладна математика, Четверта Міжнародна конференція імені академіка І.І. Ляшка 08.09.2011– 10.09.2011.
3. Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (смт. Ворохта, Івано-Франківська обл., Україна). 24.02.2016 – 27.02.2016.
4. Міжнародна міждисциплінарна наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна 2016" (Київ, Україна). 06.04.2016 – 08.04.2016.
5. Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та іх застосування" (Ужгород, Україна). 19.05.2016 – 21.05.2016.
6. Міжнародна наукова конференція "Modern Stochastics: Theory and Applications III" (Київ, Україна). 10.09.2012 – 14.09.2012.
7. Міжнародна літня математична школа пам'яті В.О. Плотнікова (Одеса, Україна). 12.09.2016 – 17.09.2016.
8. Засідання наукового семінару "Теорія ймовірностей та математична статистика" при кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Мішури Ю.С. та проф. Козаченка Ю.В. (м.Київ, Україна, 2016).
9. Засідання наукового семінару при кафедрі системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Наконечного О.Г. (м.Київ, Україна, 2016).
10. Засідання наукового семінару при кафедрі теоретичної та прикладної статистики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка під керівництвом проф. Єлейка Я.І. (м.Київ, Україна, 2016).
11. Засідання наукового семінару Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України під керівництвом проф. Кнопова П.С. (м.Київ, Україна, 2016).

Публікації

За результатами дисертації опубліковано 12 наукових публікацій. З них 5 статей, опублікованих у фахових виданнях, [1, 2, 3, 4, 5], та 7 тез доповідей [6, 7, 9, 10, 11, 12, 8]. Дві статті [3], [4] опубліковані у закордонних виданнях. Статті [2],

[5] опубліковано у виданні України, переклад якого включено до наукометричної бази Scopus.

Структура дисертації

Дисертація складається зі вступу, шести розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 133 сторінки, список використаних джерел займає 11 сторінок і містить 99 найменувань.

Подяка

Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Мішурі Юлії Степанівні за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу та підтримку в роботі.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обгрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначені мета і задачі дослідження, виділено наукову новизну, практичну значущість отриманих результатів, особистий внесок здобувача та апробацію отриманих результатів.

Перший розділ містить огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи та спорідненими питаннями. Наведені деякі результати інших авторів щодо проблем, які досліджуються в дисертації.

У **другому розділі** розглядається поведінка так званих "греків" – величин, що характеризують ринок і активи на ньому в моделі Блека–Шоулса. Введено у розгляд дискретні аналоги цих величин у біноміальній моделі ринку і показано слабку збіжність цих аналогів до греків за умови, що кількість періодів прямує до нескінченності.

Опис розглядуваних моделей починається із представлення граничної моделі Блека–Шоулса. В умовах повного ймовірнісного простору $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}\}$ з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, розглядається фінансовий ринок, що задається двома активами: еволюцію ціни безризикового активу визначає формула $B(t) = e^{rt}$, а ціну ризикового активу задано випадковим процесом $S(t) = \exp\{\mu t + \sigma W_t^{\mathrm{P}}\}$, де $\{W_t^{\mathrm{P}}, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ – вінерівський процес відносно міри P. Процес $X(t) = S(t)e^{-rt}$, є еволюцією дисконтованої вартості ризикового активу. Для такої моделі ринку встановлено існування та єдиність ризик-нейтральної (мартингальної) міри P^*, відносно якої процес $X = \{X(t), t \geq 0\}$ є мартингалом та допускає зображення

$X(t) = S_0 \exp\{\sigma W_t^{\mathrm{P}*} - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}.$

Нехай $V(S,t) = e^{-r(T-t)}\mathrm{E}^{\mathrm{P}}\{(S(T)-K)^+ \mid \mathcal{F}_t\}$ – справедлива ціна Європейського опціону купівлі зі страйковою ціною K та часом виконання T за умови, що поточна ціна ризикового активу дорівнює S. Так звані грецькі символи, або "греки", відповідають різним частинним похідним функції V. У роботі розглядається "грек" $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, який характеризує зміну вартості опціону або портфелю опціонів в залежності від ціни активу S. Дельта визначає міру кореляції між змінами вартості опціону і змінами ціни відповідного активу.

У другому підрозділі другого розділу дограниччна модель ринку в n-й серії описується на просторі

$$\Omega^{(n)} := \{-1,+1\}^n = \{\omega^{(n)} = (y_1^{(n)},\ldots,y_n^{(n)}) \mid y_i^{(n)} \in \{-1,+1\}\}.$$

Вводяться дві числові послідовності $a_n, b_n, n \geq 1$. Позначимо через $Y_k(\omega^{(n)}) := y_k^{(n)}$ для $\omega^{(n)} = (y_1^{(n)},\ldots,y_n^{(n)})$ k-ту координату, і нехай

$$R_k^{(n)}(\omega^{(n)}) := a_n \frac{1-Y_k(\omega^{(n)})}{2} + b_n \frac{1+Y_k(\omega^{(n)})}{2}.$$

Вважаємо, що дограниччна модель в n-й серії є n-періодною моделлю, і це модель Кокса–Росса–Рубінштейна з відсотковою ставкою

$$r_n = \frac{rT}{n},$$

що задає еволюцію безризикового активу $B_k^{(n)} = (1+r_n)^k$, $k = 0,\ldots,n$, одним ризиковим активом $S_k^{(n)}$, $k = 0,\ldots,n$, та доходами, які визначаються за формулою $R_k^{(n)} = (S_k^{(n)} - S_{k-1}^{(n)}) / S_{k-1}^{(n)}$, $k = 1,\ldots,n$. Доходи незалежні і набувають одного з двох можливих значень: a_n і b_n, $k = 1,\ldots,n$.

У такій моделі при переході до наступного періоду ціна активу здійснює стрибок від значення $S_{k-1}^{(n)}$ до більшого значення $S_k^{(n)} = S_{k-1}^{(n)}(1+b_n)$ (якщо $b_n > 0$), або ж до меншого – $S_k^{(n)} = S_{k-1}^{(n)}(1+a_n)$, (якщо $a_n < 0$).

Наступна частина підрозділу присвячується попереднім відомостям, означенням та відомим результатам. Зокрема на розглядуваному просторі описується об'єктивна та ризик-нейтральна ймовірнісні міри, вводиться фільтрація, описується вигляд дисконтованої вартості ризикового активу та розкривається поняття симетричної біноміальної моделі. Вводяться означення само-фінансованої торгівельної стратегії, реплікуючої стратегії, процесу вартості, функції капіталу. Наступною відомою лемою у якості аналогу до "греку" дельта представлено поняття дельта-хеджу Європейського опціону.

Лема 1 *Реплікуюча стратегія для Європейського опціону купівлі має вигляд*

$$\Delta_k^{(n)}(S_{k-1}^{(n)}) = (1+r_n)^k \frac{v_k^{(n)}(S_{k-1}^{(n)}\hat{b}_n) - v_k^{(n)}(S_{k-1}^{(n)}\hat{a}_n)}{S_{k-1}^{(n)}(\hat{b}_n - \hat{a}_n)}, \tag{1}$$

де

$$v_k^{(n)}(y) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(\hat{b}_n^i \hat{a}_n^{n-i-k} y - K)^+}{(1+r_n)^n} C_{n-k}^i (p_n^*)^i (1-p_n^*)^{n-i-1}. \tag{2}$$

У подальших підрозділах другого розділу доводиться слабка збіжність дельта-хеджу до "грека" дельти. Основний результат роботи сформульовано у вигляді теореми.

Теорема 1 *Нехай дограничнa модель є симетричною біноміальною, а гранична є моделлю Блека–Шоулса. Тоді дельта-хедж для Європейського опціону купівлі у дограничній моделі слабко збігається до дельти Європейського опціону купівлі у моделі Блека–Шоулса, коли кількість періодів у дискретній моделі прямує до нескінченності, тобто*

$$\Delta_k^{(n)}(S_{k_t^n}^{(n)}) \xrightarrow{d} \Delta(S(t), T-t), \quad n \to \infty.$$

У **третьому розділі** розглядається модель ринку Блека–Шоулса, модифікована з метою урахування стохастичної природи волатильності. У першому підрозділі вводиться основний об'єкт дослідження – дифузійна модель зі стохастичною волатильністю, що керується процесом Орнштейна–Уленбека. Розглядається повний ймовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^{(B,W)}, t \ge 0\}, P\}$ з фільтрацією, породженою корельованими процесами Вінера $\{B_t,\ W_t,\ 0 \le t \le T\}$. Модель ринку з одним ризиковим активом, ціна якого еволюціонує відповідно геометричному броунівському руху $\{S_t, 0 \le t \le T\}$, а волатильність ціни задається деякою функцією від стохастичного процесу, описується системою:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(Y_t) S_t dB_t, \tag{3}$$

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + k dW_t. \tag{4}$$

У найбільш загальній постановці задача розглядається у наступних припущеннях:

(A1) процеси Вінера B та W є корельованими з коефіцієнтом кореляції $\rho \in [-1;1]$, тобто $dB_t dW_t = \rho dt$;

(A2) функція волатильності $\sigma : \mathrm{R} \to \mathrm{R}_+$ є вимірною, відділеною від нуля деякою сталою c:

$$\sigma(x) \ge c > 0, x \in R,$$

і задовольняє умови $\int_0^T \sigma^2(Y_t)dt < \infty$ м.н.;

(A3) α, μ і k – додатні сталі.

Описано відомі властивості процесу Орнштейна–Уленбека, вказано у явному вигляді розв'язки рівнянь (3)-(4).

Наступний підрозділ третього розділу представляє попередні відомості та допоміжні результати. Вводиться низка важливих понять, таких як еквівалентна (локальна) мартингальна міра, мінімальна мартингальна міра. Зокрема наведено два наступні означення відсутності арбітражу. Зауважимо, що означення оперують великою кількістю позначень, сутність яких розкривається у третьому розділі.

Означення 1 *Будемо говорити, що на ринку виконується властивість $\overline{NA}_+$ (або, що те саме, що ринок є $\overline{NA}_+$), якщо*

$$\overline{\Psi}_+(S) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathrm{F}_T, \mathrm{P}) = \{0\},$$

де $L_\infty^+(\Omega, \mathrm{F}_T, \mathrm{P})$ – підмножина невід'ємних випадкових величин у $L_\infty(\Omega, \mathrm{F}_T, \mathrm{P})$.

Означення 2 *Будемо говорити, що на ринку виконується властивість $\overline{NA}_g$ (або, що те саме, що ринок є $\overline{NA}_g$), якщо*

$$\overline{\Psi}_g(S) \cap L_\infty^+(\Omega, \mathrm{F}_T, \mathrm{P}) = \{0\}.$$

Представлено деякі попередні результати, що пов'язують безарбітражність на фінансових ринках та наявність на них еквівалентних (локальних) мартингальних мір, а також визначають структуру еквівалентних локальних мартингальних мір на ринку.

Подальші викладки містять основні результати розділу, серед яких той факт, що розглядувана модель ринку за виконання певних умов задовольняє обом введеним вище означенням відсутності арбітражу.

Теорема 2 *Ринок, визначений моделлю (3)–(4) з умовами (A1)-(A3):*

- має властивість $\overline{NA}_+$;

- має властивість $\overline{NA}_g$, якщо для деякої еквівалентної локальної мартингальної міри Q виконується наступна нерівність

$$\mathrm{E}^{\mathrm{Q}} \int_0^T \sigma^2(Y_s) X_s^2 ds < \infty. \qquad (5)$$

Описано вигляд сімейства еквівалентних мартингальних мір та представлено модель у ризик-нейтральному середовищі.

У наступному підрозділі вводиться звуження загальної задачі, яке характеризується відсутністю кореляції між процесами Вінера, які керують ціновим процесом та процесом волатильності. Це зводить ризик-нейтральну модель до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma(Y_t) S_t dB_t^{Q}, \\ dY_t &= (-\alpha Y_t - k\nu(t))dt + kdZ_t^{Q}, \end{aligned} \qquad (6)$$

де

$$B_t^{Q} = B_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma(Y_s)} ds,$$

$$Z_t^{Q} = Z_t + \int_0^t \nu(s) ds.$$

некорельовані процеси Вінера відносно Q, $\nu(s)$ – процес ринкової ціни ризику волатильності що характеризує міру Q.

Подальше дослідження зводиться до відшукання формули для ціни Європейського опціону відносно мінімальної мартингальної міри, яка визначається єдиним чином згідно з наступним твердженням.

Твердження 1 *Еквівалентна мартингальна міра* Q *на ринку, визначеному моделлю (6) є мінімальною тоді і тільки тоді, коли процес* ν, *асоційований з мірою* Q, *тотожно рівний нулю.*

Ціна Європейського опціону купівлі у момент часу 0 відносно мінімальної мартингальної міри визначається наступною загальною формулою:

$$V_0 = e^{-rT} \mathrm{E}^{Q}\{\mathrm{E}^{Q}\{(S_T^{Q} - K)^{+} \mid Y_s, 0 \le s \le T\}\}. \qquad (7)$$

Внутрішнє математичне сподівання у (7) має таке зображення:

$$\begin{aligned} P &:= \mathrm{E}^{Q}\{(S_T^{Q} - K)^{+} \mid Y_s, 0 \le s \le T\} \\ &= e^{\ln S + rT} \Phi\left(\frac{\ln S + (r + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_0^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}_0 \sqrt{T}} \right) \\ &\quad - K\Phi\left(\frac{\ln S + (r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_0^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}_0 \sqrt{T}} \right), \end{aligned} \qquad (8)$$

де $\bar{\sigma}_t := \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^T \sigma^2(Y_s) ds} \ge 0$, Φ функція стандартного нормального розподілу.

Таким чином, головною проблемою у відшуканні аналітичної формули для ціни опціону є те, що необхідно обчислювати математичне сподівання від функції Φ. Ця проблема розв'язана у останньому підрозділі третього розділу, і результат сформульовано у вигляді теореми. Наведемо скорочений її варіант нижче.

Теорема 3 *Нехай ринок, визначений моделлю (6),* Q *є мінімальною мартингальною мірою,* V_0 *ціна у початковий момент часу європейського опціону купівлі. Нехай функція щільності випадкової величини* $\bar{\sigma}_0^2$ *є кусково-неперервною на* R, *і* $\ln(S/K) + rT \ge 0$ *і* $k = \sqrt{2(\ln(S/K) + rT)}$. *Тоді має місце наступне зображення:*

$$V_0 = \lim_{\varepsilon\to 0}(Se^{rT}(\Phi(k) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}(\int_k^{\infty}(\int_{-\infty}^{\sigma_1^2(s)}\int_{-\infty}^{\infty} exp(iyu -$$

$$\frac{\varepsilon^2 u^2}{2})\phi(u)dudy + \int_{\sigma_2^2(s)}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right)\phi(u)dudy)e^{-s^2/2}ds))$$

$$-K(\frac{1}{2} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}(\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\sigma_4^2(s)}\int_{-\infty}^{\infty} exp(iyu$$

$$-\frac{\varepsilon^2 u^2}{2})\phi(u)dudye^{-s^2/2}ds$$

$$+\int_{-\infty}^{0}\int_{\sigma_4^2(s)}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(iyu - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right)\phi(u)dudye^{-s^2/2}ds))),$$

де $\phi(u) = \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}(e^{iu\bar{\sigma}_0^2})$ є характеристичною функцією випадкової величини $\bar{\sigma}_0^2$; $\sigma_i = \sigma_i(s),\ i = \overline{1,4}$ мають вигляд

$$\sigma_{1,2}(s) = \frac{s}{\sqrt{T}} \mp \frac{\sqrt{s^2T - 2T(\ln(S/K) + rT)}}{T}, \tag{9}$$

$$\sigma_{3,4}(s) = \frac{-s}{\sqrt{T}} \mp \frac{\sqrt{s^2T + 2T(\ln(S/K) + rT)}}{T}. \tag{10}$$

У **четвертому розділі** розглядається наближення неперервних траєкторій процесу Орнштейна–Уленбека дискретними аналогами з метою отримання апроксимації для ціни Європейського опціону купівлі у моделі ринку зі стохастичною волатильністю. Застосовується апроксимаційна схема Ейлера-Маруями. Для заданих наборів параметрів визначено наближення ціни опціону. Визначено швидкість збіжності до точного значення ціни і точного значення середньої волатильності при спрямуванні величини дискретизаційного інтервалу до нуля. Досліджується точність апроксимації для випадку, коли точне значення ціни опціону можливо обчислити.

У першому підрозділі визначено модель, до якої застосовуватиметься апроксимаційна схема, – ризик-нейтральна модель (6). Наближенням Ейлера–Маруями істинного розв'язку рівняння Ланжевена, що задає стохастичну волатильність, є марківський ланцюг $Y^{(m)}$, визначений наступним чином:

- розглянемо розбиття інтервалу $[0,T]$ на m рівних підінтервалів довжини $\Delta t = T/m$;
- початкове значення схеми визначається тотожністю: $Y_0^{(m)} = Y_0$;
- $Y_{l+1}^{(m)}$, що є скороченим записом $Y_{(l+1)T/m}^{(m)}$, $0 \le l \le m-1$, визначається рекурсивно:

$$Y_{l+1}^{(m)} = (1 - \alpha\Delta t)Y_l^{(m)} + k\Delta Z_l^{\mathrm{Q}}, \tag{11}$$

де $\Delta Z_l^{\mathrm{Q}} = Z_{(l+1)T/m}^{\mathrm{Q}} - Z_{lT/m}^{\mathrm{Q}}$.

Неперервний процес $Y_t^{(m)}$ є ступінчастим процесом, який визначається таким чином:

$$Y_t^{(m)} = Y_{[tm/T]T/m}^{(m)}, \quad t \in [0,T],$$

де "$[x]$" позначає цілу частину x.

Введемо позначення для внутрішнього математичного сподівання з виразу (7), визначеного у (8):

$$P := \mathrm{E}^{\mathrm{Q}}\{(S_T^{\mathrm{Q}} - K)^+ \mid Y_s, 0 \le s \le T\} = e^{\ln S + rT}\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)$$

$$:= e^{\ln S + rT}\Phi\left(\frac{\ln S + (r + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}\sqrt{T}}\right)$$

$$-K\Phi\left(\frac{\ln S + (r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}\sqrt{T}}\right).$$

Подальше дослідження четвертого розділу має на меті відшукати оцінку похибки, що виникає у результаті наближення точної формули (7) шляхом застосування апроксимаційної схеми Ейлера до процесу, який керує волатильністю. Необхідно оцінити математичне сподівання випадкової величини R, визначеної наступним чином:

$$R := | P - \hat{P}_m |, \qquad (12)$$

де P визначається рівністю (8), m – кількість точок розбиття інтервалу $[0,T]$ на інтервали однакового розміру, $\hat{P}_m$ – ціна опціону у дискретній моделі, розрахована за формулою, аналогічною до (8):

$$\hat{P}_m = e^{\ln S + rT}\Phi\left(d_1^{(m)}\right) - K\Phi\left(d_2^{(m)}\right), \qquad (13)$$

де

$$d_1^{(m)} = \frac{\ln S + (r + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_m^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}_m\sqrt{T}}; \qquad (14)$$

$$d_2^{(m)} = \frac{\ln S + (r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_m^2)T - \ln K}{\bar{\sigma}_m\sqrt{T}} \qquad (15)$$

Попередні вирази використовують наступні позначення:

$$\bar{\sigma}_m = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{l=1}^{m}\sigma^2\left(Y_l^{(m)}\right)\frac{T}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\sigma^2\left(Y_l^{(m)}\right)}, \qquad (16)$$

Похибка апроксимації виникає виключно через різницю між $\bar{\sigma}$ та $\bar{\sigma}_m$. Тому для кожного m встановлюється оцінку згори для математичного сподівання модуля цієї різниці. Після цього R можна представити у вигляді $R_\sigma := \mathrm{E}\,|\,\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_m\,|$. У роботі доведено наступну лему:

Лема 2 *Нехай $\sigma^2(x)$ задовольняє умову Гельдера:*

$$|\sigma^2(x)-\sigma^2(y)|\le L|x-y|^{\gamma}, \tag{17}$$

де $0<\gamma\le 1$, L – деяка додатна стала. Тоді $\mathrm{E}R_{\sigma}\le Cm^{-0.5\gamma}$, де C – деяка додатна стала.

Попередня лема дозволяє довести основний результат четвертого розділу.

Теорема 4 *Нехай $\sigma^2(x)$ задовольняє умову Гельдера (17). Тоді $\mathrm{E}R\le Dm^{-\gamma/2}$, де D – деяка додатна стала.*

Четвертий розділ продовжується розрахунками ціни Європейського опціону купівлі шляхом симуляцій із застосуванням апроксимаційної схеми Ейлера. Проводиться перевірка точності апроксимації при різних кроках дискретизації та аналізуються характеристики вибірки похибок. Розділ завершується додатковими відомостями про апроксимаційну схему Ейлера–Маруями, які було використано при отриманні основних результатів розділу.

У **п'ятому розділі** питання точного обчислення ціни Європейського опціону купівлі розглядається крізь призму методів числення Маллявена. Встановлено вигляд функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання опціону. Отриманий результат дозволяє обчислити ціну опціону за мінімальною мартингальною мірою у випадку, коли вінерівський процес, що породжує еволюцію ціни активу, та вінерівський процес, який задає волатильність, є незалежними.

У першому підрозділі описується розглядувана модель ринку із дещо зміненими відносно попередніх розділів припущеннями.

(С1) вінерівські процеси W і $\widehat{W}$ є некорельованими, а отже, незалежними;

(С2) функція волатильності $\sigma:\mathrm{R}\to\mathrm{R}_{+}$ вимірна, віддалена від нуля і має не більш ніж поліноміальне зростання, тобто $c\le\sigma(x)\le q(1+|x|^{l})$ для всіх $x\in\mathrm{R}$ та деяких додатних сталих c,q і деякого $l\in N$.

(С3) коефіцієнти α і k є додатними.

Наступний підрозділ вводить низку відомих базових означень та деякі попередні результати з числення Маллявена. Зокрема вводиться поняття стохастичної похідної, інтегралу Скорохода та інші.

Введемо позначення $\nu(x)=\sigma(x)\sigma'(x)$ і випадкову величину

$$\eta_t=\left[\int_0^T\int_0^T[e^{-\alpha|t_1-t_2|}-e^{-\alpha(t_1+t_2)}]\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})dt_1dt_2\right]^{-1}\times \\ \alpha Tk^{-1}e^{-\alpha t}\nu(Y_t). \tag{18}$$

Основний результат розділу сформульовано у вигляді наступної теореми.

Теорема 5 *Нехай функція σ задовольняє припущення (С2), є двічі неперервно диференційовною, похідна σ' є строго додатною та має не більше, ніж поліноміальний зростання на нескінченності. Тоді для процесу Орнштейна–Уленбека Y, визначеного стохастичним диференціальним рівнянням (4), випадкова величина $\overline{\sigma}^2$ має неперервну обмежену щільність розподілу виду*

$$p_{\overline{\sigma}^2}(x) = \mathrm{E}[1_{\{\overline{\sigma}>\sqrt{x}\}}(\int_0^T \eta_t \int_0^t e^{\alpha s} dW_s\, dt - \int_0^T \int_0^t e^{\alpha h} D_h \eta_t\, dh dt)], \tag{19}$$

і всі величини у правих частинах рівностей (18) і (19) коректно означені.

Також у розділі доведено лему, яка визначає вигляд стохастичної похідної від η_t.

Теорема 5 має простий, проте дуже важливий наслідок, який дозволяє обчислити вартість Європейського опціону купівлі у розглядуваній моделі.

Наслідок 1 *Нехай виконуються умови теореми 5. Тоді ціна у початковий момент часу Європейського опціону купівлі $C = (S_T - K)^+$ зі страйковою ціною $K \geq 0$ задається виразом*

$$V_C = \int_0^\infty (S_0 \Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r + \frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}}\right)) p_{\overline{\sigma}^2}(x)dx,$$

де $p_{\overline{\sigma}^2}(x)$ визначено у (19).

У **шостому розділі** у моделі економіки обміну відшукуються необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги. Встановлюються нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів. Сформульовано теорему про існування економічної динаміки. Представлено достатні умови відсутності арбітражних можливостей для економічних агентів.

Розглядається економічна модель обміну з пропорційним споживанням і заданими доходами. Однією з основних задач є встановлення умов, за яких рівноважний ціновий вектор є строго додатним.

Розглядатимемо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{l} C_{ki} \frac{\langle b_i, p\rangle + D_i}{\langle C_i, p\rangle} = \psi_k, \quad k = \overline{1,n}, \tag{20}$$

розв'язки якої описують стан рівноваги в таких економічних системах, де $C = |C_{ki}|_{k=1,i=1}^{n,l}$, $B = |b_{ki}|_{k=1,i=1}^{n,l}$ є невід'ємними матрицями, $C_i = \{C_{ki}\}_{k=1}^n$ і $b_i = \{b_{ki}\}_{k=1}^n$, $i = \overline{1,l}$, -

невід'ємні вектори, побудовані за цими матрицями відповідно, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$ строго додатний вектор, $D_i > 0,\ \ i = \overline{1,l}.$ Припускатимемо також, що мають місце нерівності

$$\sum_{k=1}^{n} C_{ki} > 0, \quad \sum_{k=1}^{n} b_{ki} > 0, \quad i = \overline{1,l}, \sum_{i=1}^{l} C_{ki} > 0, \quad k = \overline{1,n}. \qquad (21)$$

Використовуватимемо наступні позначення

$$\langle b_i, p\rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k b_{ki}, \quad \langle C_i, p\rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k C_{ki}, \quad i = \overline{1,l}.$$

Нехай існує строго додатний вектор p_0, який є розв'язком системи рівнянь (20). Введемо позначення

$$y_i = \frac{\langle b_i, p\rangle + D_i}{\langle C_i, p\rangle}, \quad i = \overline{1,l}. \qquad (22)$$

Внаслідок виконання нерівностей (21) і строгої додатності компонент вектора D маємо $y_i > 0, i = \overline{1,l},$ та справедлива рівність $\psi = \sum_{i=1}^{l} y_i C_i,\ \ y_i > 0,\ \ i = \overline{1,l}.$ З рівностей (22) отримуємо систему рівностей

$$\langle -b_i + y_i C_i, p_0\rangle = D_i, \quad i = \overline{1,l}, \qquad (23)$$

У першому підрозділі шостого розділу поряд із описом розглядуваної моделі наведено деякі попередні результати, використані при доведенні основного результату підрозділу, сформульованого у вигляді теореми про існування строго додатного розв'язку системи рівнянь 20 за виконання визначених умов для векторів $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n,\ D = \{D_i\}_{i=1}^l,\ \{C_i, i = \overline{1,l}\}.$

У наступному підрозділі припускається, що економічна система функціонує протягом N періодів, $N < \infty.$ У t-му періоді функціонування економіки вектори попиту $C_i^t(\omega) = \{C_{ki}^t(\omega)\}_{k=1}^n,\ i = \overline{1,l}$ задаються на ймовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$. Рівні споживання у t-му періоді задано деяким випадковим вектором

$$y^t(\omega) = \{y_i^t(\omega)\}_{i=1}^l,$$

всі компоненти якого є строго додатними, тобто $y_i^t(\omega) > 0.$ Таким чином, вектор пропозиції в t-му періоді задається формулою

$$\psi^t(\omega) = \sum_{i=1}^{l} C_i^t(\omega) y_i^t(\omega).$$

Як наслідок попередніх результатів, сформульовано теорему про необхідні та достатні умови існування економічної динаміки. Крім того, введено стандартне означення безарбітражної економічної динаміки. В умовах цього означення доведено теореми про загальні умови відсутності арбітражу в динамічних системах без коротких продажів.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну робота присвячено вивченню нових та поглибленню і розвиненню минулих досліджень у сфері питань відсутності арбітражу та оцінювання деривативів у різних моделях фінансових ринків, зокрема, у моделях ринків зі стохастичною волатильністю, моделях із дискретним часом та моделях економіки обміну. Основні результати роботи можна узагальнити наступним чином:

1. Доведено, що дельта-хедж у біноміальній моделі Кокса–Росса–Рубінштейна є аналогом грецького символу дельта у моделі Блека–Шоулса у тому сенсі, що має місце слабка збіжність дельта-хеджу до дельти при спрямуванні кількості періодів у дискретній моделі до нескінченності.
2. Доведено відсутність арбітражу у сенсі $\overline{NA}_{+}$ та $\overline{NA}_{g}$ у моделі ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека.
3. Одержано формули розрахунку справедливої вартості Європейського опціону у моделі фінансового ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, для випадку, коли процеси Вінера, що керують еволюцією ціни активу та його волатильністю, є некорельованими.
4. Отримано оцінку швидкості збіжності ціни опціону Європейського типу у дискретизованій за схемою Ейлера–Маруяма моделі ринку зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, до ціни опціону у неперервній моделі при спрямуванні кроку дискретизації до нуля. Досліджено характеристики похибок наближення при різній довжині дискретизаційних інтервалів.
5. У моделі економіки обміну знайдено необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги. Встановлено нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів. Представлено достатні умови відсутності арбітражних можливостей для економічних агентів.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Кучук-Яценко С.В. Відсутність арбітражу в динамічних економічних системах із заданими доходами / С.В. Кучук-Яценко // Доповіді Національної академії наук України. 2013. № 2, с. 19–24.
2. Кучук-Яценко С.В. Слабка збіжність грецьких символів для цін опціонів Європейського типу: від дискретного часу до неперервного / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура // Теорія ймовір. та матем. статист.. 2014. № 91, с. 87–98. Переклад статті: The weak convergence of Greek symbols for prices of European options: frpm discrete time to continuous / S. Kuchuk-Iatsenko, Yu. Mishura // Theor. Probability and Math Statist.. – 2015 – No. 91 – P. 93–104.
3. Kuchuk-Iatsenko S. Pricing the European call option in the model with stochastic volatility driven by Ornstein–Uhlenbeck process. Exact formulas / S. Kuchuk-Iatsenko, Yu. Mishura // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2015. Vol. 2, №. 3, p. 233–249.
4. Kuchuk-Iatsenko S. Option pricing in the model with stochastic volatility driven by Ornstein–Uhlenbeck process. Simulation / S. Kuchuk-Iatsenko, Yu. Mishura // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2015. Vol. 2, № 4, p. 355–369.
5. Кучук-Яценко С.В. Застосування числення Маллявена до точного і наближеного обчислення цін опціонів на акції зі стохастичною волатильністю / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовір. та матем. статист.. 2016. № 94, с. 93–115.
6. Кучук-Яценко С.В. Відсутність арбітражу в економічних динамічних системах / М.С. Гончар, С.В. Кучук-Яценко // Матеріали Четвертої Міжнародної конференції імені академіка І.І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, Україна). 2011. С. ??– ??.
7. Кучук-Яценко С.В. Відсутність арбітражу в динамічних економічних системах / С.В. Кучук-Яценко // Матеріали Міжнародної наукової конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування» (Київ, Україна). 2011. С. 62.
8. Кучук-Яценко С.В. Аналітична формула для ціни опціона у моделі ринку зі стохастичною волатильністю / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура // Матеріали Міжнародної міждисциплінарної наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2016» (Київ, Україна). 2016. С. 42–46.

9. Кучук-Яценко С.В. Ціна опціону у моделі ринку зі стохастичною волатильністю, яка задається функцією від процесу Орнштейна–Уленбека / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура // Матеріали Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (смт. Ворохта, Івано-Франківська обл., Україна). 2016. С. 35.
10. Кучук-Яценко С.В. Обчислення цін опціонів у моделях фінансових ринків, заданих лінійними стохастичними диференціальними рівняннями зі стохастичним коефіцієнтом дифузії / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Тези доповідей Міжнародної літньої математичної школи пам'яті В.О. Плотнікова (Одеса, Україна). 2016. С. 40.
11. Кучук-Яценко С.В. Модель фінансового ринку, задана лінійним стохастичним диференціальним рівнянням зі стохастичним коефіцієнтом дифузії / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування» (Ужгород, Україна). 2016. С. 86.
12. Kuchuk-Iatsenko S.V. Arbitrage absence in economy dynamical systems with fixed gains / S.V. Kuchuk-Iatsenko // Матеріали міжнародної наукової конференції «Modern Stochastics: Theory and Applications III» (Київ, Україна). 2012. С. 57– 58.

АНОТАЦІЯ

Кучук-Яценко С. В. Відсутність арбітражу та оцінювання опціонів у моделях фінансових ринків зі стохастичною волатильністю. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2016.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню умов відсутності арбітражу та оцінюванню похідних цінних паперів у різних моделях фінансових ринків.

Для моделі фінансового ринку зі стохастичною волатильністю, що керується функцією від процесу Орнштейна–Уленбека, встановлено умови відсутності арбітражу та отримано аналітичні вирази для ціни опціону Європейського типу. Отримано оцінку швидкості збіжності ціни опціону до істинного значення при застосуванні дискретизаційної схеми Ейлера–Маруями.

У роботі представлено дискретний аналог грецького символа "дельта". Доведено, що дельта-хедж у дискретній моделі Кокса–Росса–Рубінштейна слабко збігається до "дельти" опціону у відповідним чином означеній неперервній моделі Блека–Шоулса при спрямуванні кількості періодів у дискретній моделі до нескінченності.

У моделі економіки обміну знайдено необхідні та достатні умови строгої додатності розв'язків рівнянь економічної рівноваги. Встановлено нерівності знизу для всіх рівноважних цінових векторів. Представлено достатні умови відсутності арбітражних можливостей для економічних агентів у побудованій економічній динаміці.

Ключові слова: модель Блека–Шоулса, стохастична волатильність, безарбітражність, оцінювання опціонів, грецькі символи.

АННОТАЦИЯ

Кучук-Яценко С. В. Отсутствие арбитража и оценивание опционов в моделях финансовых рынков со стохастической волатильностью. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. — Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Министерство образования и науки Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию вопросов, связанных с отсутствием арбитража и оцениванием опционов в различных моделях финансовых рынков. В работе рассмотрены следующие основные модели рынков: классические модели Кокса–Росса–Рубинштейна и Блэка–Шоулса, модели рынков со стохастической

волатильностью, модели экономики обмена с пропорциональным потреблением, экономические динамические системы.

Классическая модель Блэка–Шоулса имеет ряд недостатков, которые не позволяют ей в полной мере отразить процессы, происходящие на реальных финансовых рынках. В частности, реальные рынки функционируют в дискретном времени. Поэтому симметрическая биномиальная модель Кокса–Росса–Рубинштейна позволяет более точно определить справедливую цену опциона, в особенности, когда речь идет о продолжительных сроках до выполнения опциона. В связи с этим важно определить аналоги объектов в разных моделях и установить связь между ними в случае граничного перехода. В этой работе была решена задача поиска аналога греческого символа "дельта" из непрерывной модели в модели Кокса–Росса–Рубинштейна, а также доказана слабая сходимость этого аналога к "дельте" при устремлении длины интервала разбиения временного отрезка в дограничной модели к нулю.

Основная часть диссертационной работы раскрывает результаты научных поисков автора в сфере финансовых рынков со стохастической волатильностью. Мотивацией исследований послужила возрастающая популярность таких моделей в последнее время, вызванная, в частности, ростом вычислительных возможностей. Известно, что классическая модель Блэка–Шоулса может быть приведена в большее соответствие реальности путем внедрения в нее стохастической волатильности вместо постоянной. Такая модернизация модели влечет за собой необходимость изучения безарбитражности измененного рынка и вопросов справедливой цены опциона. В диссертационной работе рассмотрена модель финансового рынка со стохастической волатильностью, заданной некоторой функцией от процесса Орштейна–Уленбека. Представлена обобщенная модель вместе с необходимыми определениями и предварительными результатами. Для обобщенной модели доказана теорема про отсутствие арбитража на рынке. Далее осуществляется переход к модели, в которой процессы Винера, управляющие процессом эволюции цены актива и волатильностью, не коррелированы. Для этого случая получены два аналитических выражения для цены опциона Европейского типа. В первом случае в процессе вывода формулы используется обратное преобразование Фурье. Второе аналитическое выражение получено с помощью применения элементов исчисления Маллявена.

В работе также изучен вопрос приближенного вычисления справедливой стоимости опциона в модели рынка со стохастической волатильностью. Для модели представлена аппроксимационная схема Ейлера–Маруямы, доказана теорема о скорости сходимости цены опциона в дискретизированных моделях к цене опциона в непрерывной модели при устремлении длины дискретизационного материала к нулю. Реализовано моделирование цен опционов и усредненных значений волатильности при использовании указанной аппроксимационной схемы и сделан ряд выводов о качестве аппроксимаций.

Кроме того, для модели экономики обмена в работе установлены необходимые и достаточные условия строгой положительности решений уравнений экономического равновесия. Определены неравенства снизу для всех равновесных ценовых векторов. Представлены достаточные условия отсутствия арбитражных возможностей для экономических агентов в построенной экономической динамике.

Ключевые слова: модель Блэка–Шоулса, стохастическая волатильность, безарбитражность, оценивание опционов, греческие символы.

ABSTRACT

Kuchuk-Iatsenko S. V. The absence of arbitrage and option pricing in financial market models with stochastic volatility. — Manuscript.

The thesis for Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.05 — Probability Theory and Mathematical Statistics. — Taras Shevchenko National University of Kyiv, MES of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to the study of conditions of absence of arbitrage and the option pricing in various models of financial markets.

The conditions of absence of arbitrage along with the exact formulas for the price of European call option are derived for the model of financial market with stochastic volatility driven by the Ornstein–Uhlenbeck process. The Euler–Maruyama discretization scheme is applied to derive the approximation for the option price. The estimate of the rate of convergence of the option prices in the discretization schemes to its exact value is determined.

The discrete analogue of Greek "delta" is introduced in the Cox–Ross–Rubinstein model of the financial market. The weak convergence of this analogue to the "delta" is established under the condition that the number of periods tends to infinity.

In the exchange economy model the necessary and sufficient conditions of strict positiveness of equilibrium price vectors are found. For all solutions of the set of equations of equilibrium the inequalities from below are established. The sufficient conditions of absence of arbitrage opportunities for economic agents in the economy dynamics are presented.

Key words: Black–Scholes model, stochastic volatility, arbitrage-free markets, option pricing, Greeks (finance).

Підписано до друку 06.03.2017 р. Зам. №180.
Формат 60х90 1/16. Папір офсетний. Друк – цифровий.
Наклад 100 прим. Ум. друк. арк. 0,9.
Друк «ЦП «КОМПРИНТ», Свідоцтво ДК №4131, від 04.08.2011 р.
м. Київ, вул. Предславинська, 28
528-05-42, 067-209-54-30
Email: komprint@ukr.net