

УДК 519.71, 519.72, 004.85

MSC 93A30, 49K15, 60C20

EVOLUTIONARY RECONSTRUCTION OF STABILITY BOUNDARIES OF DYNAMICAL SYSTEMS IN THE PARAMETER SPACE

D. I. SYMONOV¹, Y. D. SYMONOV², I. P. KUTOVA³

¹Department of mathematical problems of applied informatics, V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, E-mail: denys.symonov@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6648-4736

²Department of methods and technological means of building intelligent software systems, V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, E-mail: e.symonov@gmail.com, ORCID: 0009-0008-2581-2001

³Postgraduate Department, V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, E-mail: iipk2014@ukr.net, ORCID: 0009-0009-5988-8300

ЕВОЛЮЦІЙНА РЕКОНСТРУКЦІЯ МЕЖ СТІЙКОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ У ПАРАМЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

Д. І. СИМОНОВ¹, Є. Д. СИМОНОВ², І. П. КУТОВА³

¹Лабораторія проблем прикладної інформатики, Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна, E-mail: denys.symonov@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6648-4736

²Відділ методів та технологічних засобів побудови інтелектуальних програмних систем, Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна, E-mail: e.symonov@gmail.com, ORCID: 0009-0008-2581-2001

³Відділ аспірантури, Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна, E-mail: iipk2014@ukr.net, ORCID: 0009-0009-5988-8300

АБСТРАКТ. The purpose of this paper is to formulate and implement a generalized approach to the evolutionary reconstruction of stability boundaries of dynamical systems in the parameter space, based on experimental observations or numerical simulation results. The problem of stability boundary recovery is formulated as an inverse optimization problem, in which observed time series are transformed into stability indicators such as variance, autocorrelation, or generalized spectral characteristics. To approximate the bifurcation surface $\Gamma(t)$, a parametric model $g(\lambda, \theta)$ is employed, whose parameters are adaptively updated over time using recursive or filtering algorithms. The proposed method enables the reconstruction of the dynamic

Corresponding author: D.I. Symonov (denys.symonov@gmail.com).

© Д.І. Симонов, Є.Д. Симонов, І.П. Кутова, 2025. This is an open-access article distributed under the terms of **Creative Commons Attribution Licence (CC BY)**.

stability boundary without prior knowledge of the governing equations of the system. Through examples involving a linear stochastic system, the Van der Pol oscillator, and an SIS-type model, the approach demonstrates its capability to accurately identify critical parameters and transition zones even in the presence of noise. The proposed method is applicable for the analysis and monitoring of complex technical, biological, social, and economic systems in which stability can only be indirectly assessed through experimental observations.

KEYWORDS: stability boundary of dynamical systems, evolutionary reconstruction, bifurcation analysis, spectral stability criteria.

АНОТАЦІЯ. Метою статті є формулювання та реалізація узагальненого підходу до еволюційної реконструкції меж стійкості динамічних систем у параметричному просторі на основі експериментальних спостережень або результатів чисельного моделювання. Задачу відновлення меж стійкості сформульовано як обернену оптимізаційну проблему, у якій спостережувані часові ряди перетворюються в показники стійкості — дисперсію, автокореляцію або узагальнені спектральні характеристики. Для апроксимації біфуркаційної поверхні $\Gamma(t)$ використано параметричну модель $g(\lambda, \theta)$, параметри якої адаптивно оновлюються у часі за рекурсивними або фільтраційними алгоритмами. Запропонований метод забезпечує відтворення динамічної межі стійкості без наявної інформації про рівняння динаміки системи. На прикладах лінійної стохастичної системи, осцилятора Ван дер Поля та моделі типу SIS показано здатність підходу точно виявляти критичні параметри й зони переходу навіть за наявності шуму. Запропонований метод придатний для аналізу та моніторингу складних технічних, біологічних, соціальних і економічних систем, у яких можлива лише непряма оцінка стійкості за експериментальними спостереженнями.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: межа стійкості динамічних систем, еволюційна реконструкція, біфуркаційний аналіз, спектральні критерії стійкості.

1. ВСТУП

Проблема визначення меж стійкості є фундаментальною для теорії динамічних систем, оскільки саме розташування біфуркаційних поверхонь у просторі параметрів визначає можливі переходи між режимами стійкої, циклічної чи хаотичної поведінки. Знання цих меж має ключове значення для прогнозування критичних змін у технічних, біологічних, екологічних і соціальних системах, де втрата стійкості може призводити до катастрофічних наслідків або небажаних фазових переходів [1].

Традиційні підходи — спектральний аналіз матриці Якобі або чисельний аналіз еволюції розв'язків у просторі параметрів — забезпечують точне визначення меж стійкості лише за умови, що відома повна математична модель системи. Однак у більшості реальних об'єктів така модель або невідома, або має неприпустиму складність і неповноту. У практичних задачах дослідники зазвичай мають справу не з рівняннями, а лише з часовими рядами спостережуваних змінних, де безпосередня оцінка стійкості є неможливою [2]. Саме цей розрив між теоретичними моделями та експериментальними даними залишається суттєвою проблемою сучасної нелінійної динаміки [3].

Своєчасність дослідження зумовлена необхідністю створення універсального дата-орієнтованого підходу, здатного реконструювати межі стійкості при обмежених можливостях отримати повну математичну модель динамічної системи.

У цій роботі запропоновано еволюційну (адаптивну) схему реконструкції біфуркаційних поверхонь, яка базується на аналізі емпіричних показників стійкості — дисперсії, автокореляції та показників Ляпунова [4, 5]. Метод формулюється як обернена оптимізаційна задача, у якій параметри моделі послідовно оновлюються в часі (за надходженням нових даних). Такий підхід усуває обмеження класичних методів, забезпечуючи можливість побудови адаптивних карт стійкості $\Gamma(t)$, що описують еволюцію системи в реальному часі.

2. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Сучасні дослідження у галузі аналізу стійкості нелінійних систем дедалі частіше зосереджуються на виявленні наближення до критичних переходів за емпіричними даними. Одним із базових напрямів є вивчення феномену *critical slowing down*, коли при наближенні до зони біфуркації зростають дисперсія, автокореляція та час релаксації системи. Цей підхід активно використовується для виявлення ранніх попереджувальних сигналів у кліматичних, екологічних, енергетичних та соціально-економічних системах, де пряма оцінка стійкості недоступна [6]. Паралельно розвиваються *data-driven* методи відновлення динаміки, зокрема операторні та розріджені підходи. Метод Dynamic Mode Decomposition дозволяє реконструювати спектральні властивості системи безпосередньо з часових рядів, тоді як

Sparse Identification of Nonlinear Dynamics (SINDy) та споріднені алгоритми відтворюють аналітичну структуру рівнянь еволюції системи ґрунтуючись регуляризованою регресією. Такі інструменти забезпечують місток між емпіричними даними та класичною теорією стійкості, однак потребують достатнього обсягу даних і не завжди дають змогу визначити межі стійких областей у параметричному просторі [7]. Значного розвитку зазнали також байєсівські та сурогатні моделі, що використовують гаусівські процеси для адаптивної реконструкції діаграм фаз і біфуркаційних меж. У цьому підході використовується послідовне адаптивне уточнення моделі, коли нові точки вибираються так, щоб максимально інформативно окреслити межу фазового переходу у складних системах. У прикладних дослідженнях, особливо в енергетичних та кліматичних системах, ці методи застосовують для оцінки запасу стійкості та побудови роздільних поверхонь із контролем невизначеності.

Попри суттєвий прогрес, адаптивні підходи до еволюційної реконструкції меж стійкості залишаються недостатньо формалізованими. Відсутні узагальнені схеми, що дозволяють у реальному часі відновлювати динамічну межу стійкості $\Gamma(t)$ без відомої моделі системи.

Запропонований у цій роботі метод спрямований саме на усунення цього обмеження, поєднуючи емпіричні індикатори, параметричну апроксимацію та фільтраційне оновлення параметрів у єдиній дата-орієнтованій рамці [8].

2. МЕТА

Метою дослідження є розроблення узагальненого підходу до еволюційної реконструкції меж стійкості динамічних систем у параметричному просторі на основі емпіричних даних. Запропонований метод спрямований на відновлення біфуркаційних поверхонь без явного знання рівнянь еволюції системи, використовуючи лише спостережувані часові ряди та індикатори стійкості. Поставлене завдання полягає у формулюванні реконструкції як оберненої оптимізаційної проблеми з адаптивним оновленням параметрів моделі в часі. Такий підхід має на меті створення універсальної дата-орієнтованої схеми, здатної відстежувати еволюцію меж стійкості $\Gamma(t)$ у реальному часі та забезпечувати надійну оцінку критичних станів складних нелінійних систем.

3. МЕТОДИКА

Розглянемо гладку автономну динамічну систему у просторі станів \mathbb{R}^n :

$$\dot{x} = f(x, \lambda), x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

де $x(t)$ — вектор стану; λ — вектор керуючих параметрів; $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ — неперервно диференційована векторна функція, що визначає локальну динаміку системи.

При зміні параметрів λ система може переходити між стійкими та нестійкими режимами. Критичні значення параметрів, за яких змінюється спектральний тип рівноваги або атрактора, утворюють межу стійкості $\Gamma \subset \Lambda$. Для більшості реальних систем функція $f(x, \lambda)$ невідома, тому пряме

визначення цієї межі є неможливим. Натомість спостереження подаються у вигляді часових рядів $y(t, \lambda)$. Відповідно, задачею є відновлення апроксимованої критичної множини $\hat{\Gamma}(t)$, що наближує істинну межу стійкості, на основі спостережуваних показників стійкості s_i .

Задачу реконструкції можна подати у вигляді оберненої оптимізаційної задачі, у якій параметри моделі визначаються шляхом мінімізації функціонала невідповідності між спостережуваними показниками стійкості s_i та їх апроксимацією $g(\lambda, \theta)$. Постановка задачі допускає адаптивне оновлення параметрів за мірою надходження нових даних, що забезпечує послідовне уточнення оцінки межі стійкості. Оскільки властивості стійкості динамічної системи визначаються характером її поведінки в околі рівноважних станів, розглянемо рівноважний стан $x^*(\lambda)$, що відповідає фіксованій точці фазового простору і визначається умовою:

$$f(x^*, \lambda) = 0. \quad (2)$$

Локальні властивості системи в околі рівноважного стану визначаються її лінійним наближенням:

$$\dot{\xi} = J(x^*, \lambda)\xi = D_x f(x^*, \lambda)\xi, \quad (3)$$

де $J(\cdot)$ — матриця Якобі, що характеризує лінійну структуру фазового потоку в околі рівноваги; D_x — оператор диференціювання.

Локальна асимптотична стійкість рівноважного стану визначається знаком дійсних частин власних значень матриці $J(x^*, \lambda)$: якщо дійсні частини всіх власних значень матриці Якобі від'ємні, тобто:

$$\operatorname{Re} \sigma(J(x^*, \lambda)) < 0, \quad (4)$$

то для будь-якого початкового відхилення $\xi(0)$ існують сталі $C, \alpha > 0$ такі, що

$$\|\xi(t)\| \leq C e^{-\alpha t} \|\xi(0)\|, \quad t \rightarrow \infty, \quad (5)$$

тоді рівновага є локально асимптотично стійкою.

Якщо ж хоча б одне власне значення переходить через уявну вісь, тобто $\operatorname{Re} \sigma(J) = 0$, то система втрачає стійкість. Такий момент відповідає критичним значенням параметрів λ_c , при яких змінюється якісний тип динаміки системи.

Межа стійкості $\Gamma \subset \Lambda$ визначається як багатовимірна інваріантна множина параметрів, на якій змінюється спектральний тип рівноваги або атратора $A_i(\lambda)$. Формально вона задається умовою:

$$\Gamma = \{\lambda \in \Lambda : \det J(x^*, \lambda) = 0\}. \quad (6)$$

Геометрично множина Γ утворює біфуркаційну поверхню у параметричному просторі $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$, яка розділяє області стійкої та нестійкої поведінки системи, тобто області різних динамічних режимів. Варто підкреслити, що (6) є локальним критерієм, який базується на лінійному наближенні системи й не враховує нелінійних ефектів та глобальної структури фазового простору. Тому для складних систем така межа лише наближено описує реальну біфуркаційну множину і для більшості реальних систем в околі

межі стійкості необхідно враховувати слабку нелінійність. У цьому випадку положення критичної поверхні Γ визначається з урахуванням нелінійних поправок другого порядку в розкладі функції f .

Також необхідно зазначити, що в околі межі стійкості системи спостерігається критичне уповільнення — поступове зменшення швидкості релаксації після малих збурень. Це відбувається тоді, коли дійсна частина домінантного власного значення $\mu_{\max}(\lambda)$ матриці $J(x^*, \lambda)$ прямує до нуля, тобто: $\operatorname{Re} \mu_{\max}(\lambda) \rightarrow 0^-$, $|\operatorname{Re}(\mu_{\max}(\lambda))| \ll 1$. У наближенні до критичних параметрів характерний час релаксації рівноваги описується асимптотичною залежністю:

$$\tau \sim (|\operatorname{Re}(\mu_{\max}(\lambda))|)^{-1}, \quad (7)$$

тобто незначна зміна параметрів поблизу критичних значень призводить до істотного збільшення часу релаксації. Як наслідок, під дією навіть слабого випадкового збурення зростає дисперсія стану $\operatorname{Var}(x(t))$, а у спектральному представленні це відповідає збільшенню норми резольвенти $\|(J(\lambda))^{-1}\|$. У термінах спостережуваних характеристик ці ефекти проявляються як зростання дисперсії стану, підвищення автокореляції при лагу 1 та подовження часу релаксації. Такі зміни слугують емпіричними індикаторами наближення системи до втрати стійкості, які можна обчислити без явного знання функції $f(x, \lambda)$ і використовувати для ідентифікації критичних режимів.

Аналітичне визначення біфуркаційної множини $\Gamma \subset \Lambda$ можливе лише для окремих низькорозмірних систем, у яких матриця Якобі (3) має спектр, що може бути отриманий у замкненій формі. У загальному випадку, для нелінійних систем високої розмірності функція $f(x, \lambda)$ або її часткові похідні невідомі явно, і система може бути описана лише через спостережувані траєкторії $x(t, \lambda)$.

Припустімо, що спостереження описуються оператором:

$$y(t, \lambda) = \Phi(x(t, \lambda)) + \eta(t), \quad (8)$$

де $\Phi(\cdot)$ — оператор спостереження, який відображає стан системи; $\eta(t)$ — адитивний шум.

Нехай для множини параметрів $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ задано відповідні спостереження $y(t_i, \lambda_i)$. Тоді задача ідентифікації межі стійкості формулюється як обернена задача реконструкції критичних параметрів, тобто визначення множини:

$$\Gamma_i = \{\lambda \in \Lambda : s(\lambda) = 0\}, \quad (9)$$

де $s(\lambda)$ — функція, що відображає зміну спектральних властивостей матриці $J(x^*, \lambda)$ або поведінку спостережуваного показника стійкості.

Оскільки задача реконструкції межі стійкості належить до класу обернених і погано обумовлених задач, її розв'язок може бути неоднозначним і чутливим до шумів у спостереженнях. Для забезпечення стійкості розв'язку застосовують стабілізовані чисельні методи та регуляризовані стохастичні підходи. У сучасному формулюванні така задача має адаптивний характер, коли параметри апроксимаційної моделі межі $g(\lambda, \theta)$ послідовно

уточнюються із надходженням нових даних. У цьому контексті положення критичної поверхні $\Gamma(t)$ розглядається як величина, що змінюється з часом і відображає еволюцію спектральних властивостей системи у параметричному просторі.

Для кожного набору параметрів λ_i обчислюється показник стійкості:

$$s_i = \Psi(y_i), \quad (10)$$

де $\Psi(\cdot)$ — оператор, що перетворює спостереження у скалярний або векторний показник стійкості s_i .

Обернена задача реконструкції полягає у знаходженні функціональної залежності $s(\lambda)$, яка відображає зміну показника стійкості системи при зміні параметрів, та у відновленні множини (9), що апроксимує істинну межу стійкості. Для цього вводимо функцію:

$$g(\lambda, \theta) \approx s(\lambda), \quad (11)$$

де θ — вектор невідомих коефіцієнтів, що визначають форму апроксимаційної функції $g(\lambda, \theta)$ — лінійною або нелінійною за λ .

Нульовий рівень цієї функції $g(\lambda, \theta) = 0$ визначає апроксимовану межу стійкості $\hat{\Gamma}$, яка є оцінкою істинної біфуркаційної поверхні Γ . Така формалізація дозволяє розглядати задачу відновлення межі стійкості як задачу параметричної ідентифікації моделі, що апроксимує спостережувану залежність індикатора стійкості від параметрів системи.

Параметри θ визначаються як розв'язок оптимізаційної задачі, що мінімізує різницю між обчисленими значеннями моделі $g(\lambda, \theta)$ та емпіричними показниками s_i :

$$\min_{\theta} J(\theta) = \sum_{i=1}^N \omega_i L(g(\lambda_i, \theta), s_i), \quad (12)$$

де $L(\cdot, \cdot)$ — функція втрат (наприклад, квадратична або логарифмічна); ω_i — вагові коефіцієнти, що враховують точність вимірювань або відстань від критичної області.

Розв'язання задачі (12) дає можливість отримати множину оптимальних параметрів θ^* , а функція $g(\lambda, \theta^*)$, відповідно, дозволяє побудувати карту стійкості в параметричному просторі та визначити наближення до критичних областей через зміну знаку g . Описаний підхід є універсальним і не обмежується рівноважними станами. У загальному випадку стійкий режим динамічної системи може відповідати не лише рівноважному стану, а й граничному циклу чи хаотичній траєкторії, які разом узагальнено називають атрactorами системи. Для кожного типу атрactorа $A(\lambda)$ — стаціонарного, періодичного або хаотичного — може бути обчислений власний показник стійкості:

$$s(\lambda) = \begin{cases} \operatorname{Re} \mu_{\max}(\lambda), & \text{for the equilibrium state,} \\ \log \rho(M(\lambda)), & \text{for the periodic cycle,} \\ h_{\max}(\lambda), & \text{for the chaotic regime,} \end{cases} \quad (13)$$

де $\mu_{\max}(\lambda)$ — доміантне власне значення матриці $J(x^*, \lambda)$; $\rho(M(\lambda))$ — спектральний радіус матриці монодромії, тобто найбільший за модулем множник Флоке, $\rho(M(\lambda)) = \max_i |\mu_i|$; μ_i — власні значення $M(\lambda)$; $h_{\max}(\lambda)$ — найбільший показник Ляпунова [9].

Таким чином, функція $s(\lambda)$ виступає узагальненим індикатором динамічного режиму системи, а умова $s(\lambda) = 0$ визначає множину параметрів, на якій відбувається зміна типу стійкості або біфуркаційний перехід між атрactorами. Оскільки дані спостережень y_i зазвичай містять шум і можуть бути неповними, то для забезпечення стійкості розв'язку задачі (12) до функціонала додають регуляризаційний член:

$$J_{\text{reg}}(\theta) = \sum_{i=1}^N \omega_i L(g(\lambda_i, \theta), s_i) + \alpha R(\theta), \quad (14)$$

де $\alpha > 0$ — параметр регуляризації; $R(\theta)$ — штраф за складність моделі.

У стохастичних або адаптивних реалізаціях параметри θ можуть оновлюватися послідовно за рекурсивним правилом:

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha_k \nabla_{\theta} J_{\text{reg}}(\theta_k), \quad (15)$$

що забезпечує еволюційне уточнення межі $\hat{\Gamma}$ при надходженні нових даних.

Нехай у момент часу t відомий вектор параметрів $\theta(t)$, який визначає поточну апроксимацію межі стійкості через функцію (11). Коли надходять нові дані поведінки системи $\{y_{t+\Delta t}, \lambda_{t+\Delta t}\}$, поточну оцінку параметрів можна оновити за правилом градієнтного спуску:

$$\theta(t + \Delta t) = \theta(t) - \alpha \nabla_{\theta} J(t, \theta), \quad (16)$$

де $J(t, \theta)$ — функціонал узгодження, аналогічний (12), обчислений для даних, доступних до моменту t .

Оновлення (16) є найпростішою формою еволюційної реконструкції, у якій параметри моделі поступово адаптуються до змінних умов. У стохастичному або байєсівському трактуванні рівняння (16) відповідає покроковому уточненню апріорного розподілу $p(\theta|D_t)$ через надходження нових даних:

$$p(\theta|D_{t+\Delta t}) \propto p(y_{t+\Delta t}|\theta) p(\theta|D_t), \quad (17)$$

що є основою для реалізації процедур визначення меж.

Розглянемо три основні класи методів, придатних для еволюційної реконструкції межі стійкості:

Метод рекурсивної апроксимації найменших квадратів. Якщо функція $g(\lambda, \theta)$ лінійна відносно параметрів θ , тобто: $g(\lambda, \theta) = \phi(\lambda)^{\top} \theta$, то параметри можна оцінювати рекурсивно:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + K_k \left[s_k - \phi(\lambda_k)^{\top} \theta_k \right], \quad (18)$$

$$K_k = \frac{P_k \phi(\lambda_k)}{\lambda_f + \phi(\lambda_k)^{\top} P_k \phi(\lambda_k)}, \quad (19)$$

$$P_{k+1} = \lambda_f^{-1} \left[P_k - K_k \phi(\lambda_k)^{\top} P_k \right], \quad (20)$$

де P_k — коваріаційна матриця; $\lambda_f \in (0, 1]$ — параметр експоненційного згасання.

Модель (18)–(20) дозволяє швидко оновлювати межу $\Gamma(t)$, навіть у поточному режимі надходження даних.

Фільтраційний метод на основі фільтра Калмана. Для нелінійної функції $g(\lambda, \theta_k)$ параметри можна трактувати як стан системи:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \xi_k, \quad (21)$$

$$s_k = g(\lambda_k, \theta_k) + \eta_k, \quad (22)$$

де ξ_k — шум, який описує можливу зміну моделі (еволюцію самої межі у часі); η_k — шум у спостереженнях.

Задача реконструкції межі перетворюється на задачу оцінювання поточного стану, тобто необхідно за даними $\{s_k, \lambda_k\}$ знайти поточну оцінку параметрів θ_k , що мінімізує середньоквадратичну похибку. Формально оновлення параметрів виконується за рекурсіями:

$$\theta_{k+1|k} = \theta_{k|k-1} + K_k [s_k - g(\lambda_k, \theta_{k|k-1})], \quad (23)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^\top (H_k P_{k|k-1} H_k^\top + R_k)^{-1}, \quad (24)$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}, \quad (25)$$

де $H_k = \left. \frac{\partial g}{\partial \theta} \right|_{\theta_{k|k-1}}$ — матриця чутливості; R_k — коваріація шуму у спостереженнях.

Модель (21)–(25) дає змогу автоматично оновлювати оцінку межі стійкості $\Gamma(t)$, коли система поступово змінює динаміку.

Фільтр Калмана забезпечує не лише поточну оцінку параметрів θ_k , а й оцінку їхньої невизначеності — тобто надає ймовірнісну інтерпретацію межі $\Gamma(t)$.

Фільтраційний метод на основі фільтра Калмана. У складних або хаотичних системах функціональна залежність між параметрами λ , часом t та показником $s(\lambda, t)$ може бути суттєво нелінійною і неперервно змінюваною [10]. У цьому випадку доцільно розглядати $s(\lambda, t)$ не як детерміновану функцію, а як стохастичний процес, що описується гаусівською моделлю:

$$s(\lambda, t) \sim GP(m(\lambda, t), k((\lambda, t), (\lambda', t'))), \quad (26)$$

де $m(\lambda, t)$ — середнє значення (апроксимований тренд зміни показника стійкості); $k((\lambda, t), (\lambda', t'))$ — коваріаційне ядро, яке визначає ступінь подібності між станами системи для різних значень параметрів і часу.

Постановка задачі (26) дозволяє моделювати невизначеність і забезпечує поступовість еволюції при визначені межі. Для кожного моменту часу отримується розподіл імовірності $p(s(\lambda, t) | D_t)$, з якого можна визначити очікувану межу стійкості:

$$\hat{\Gamma}(t) = \{\lambda : \mathbb{E}[s(\lambda, t)] = 0\}, \quad (27)$$

а також довірчий інтервал для її положення.

На практиці це означає, що реконструкція $\Gamma(t)$ відбувається не як фіксована апроксимація, а як адаптивне оновлення ймовірнісної поверхні, яка

еволюціонує в параметричному просторі відповідно до динаміки поведінки системи.

Такий підхід поєднує регресійний аналіз, фільтрацію та статистичну інтерпретацію, забезпечуючи одночасно гладкість і стійкість еволюційної оцінки.

Збіжність адаптивних алгоритмів залежить від вибору швидкості оновлення α та властивостей функції $J(t, \theta)$. У разі градієнтного оновлення, наприклад (16), необхідною умовою стійкості є:

$$0 < \alpha < \frac{2}{L_J}, \quad (28)$$

де L_J — константа Ліпшица градієнта $\nabla_{\theta} J$.

Для стохастичних алгоритмів застосовується класична умова Роббіна-Монро:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty, \quad (29)$$

яка гарантує збіжність $\theta_k \rightarrow \theta^*$ при виконанні умов регулярності, що включають гладкість функціонала й контрольоване зменшення швидкості навчання.

Стабільність оцінки $\hat{\Gamma}(t)$ можна контролювати через дисперсію параметрів $\text{Var}(\theta_t)$ або через норму похідної $\|\dot{\theta}(t)\|$.

Якщо норма $\|\dot{\theta}(t)\|$ залишається обмеженою на всьому інтервалі еволюції, то траєкторія адаптації є рівномірно обмеженою, а система оновлення параметрів задовольняє умови стійкості в сенсі Ляпунова.

З геометричного погляду, процес адаптивної реконструкції меж стійкості можна інтерпретувати як деформацію гіперпростору стійкості $\Gamma(t) \subset \Lambda$ яка поступово змінює своє положення в параметричному просторі під дією потоку нових спостережень динаміки системи.

У диференціальній формі еволюцію цього простору можна описати рівнянням:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = V_n(\lambda, t) n(\lambda, t), \quad (30)$$

де $n(\lambda, t)$ — одиничний вектор нормалі до поверхні $\Gamma(t)$; $V_n(\lambda, t)$ — її нормальна швидкість, що визначається темпом зміни оцінених параметрів $\theta(t)$ у процесі адаптації.

Таким чином, еволюція межі у часі трактується як еволюція у параметричному просторі, що відображає зміну топології областей стійкості. У цьому сенсі адаптивна реконструкція перетворює статичну карту стійкості на динамічну $\Gamma \mapsto \Gamma(t)$ яка оновлюється в реальному часі відповідно до поточної поведінки системи.

Цей підхід створює основу для побудови адаптивних карт стійкості, що безпосередньо відображають еволюцію динаміки системи та дозволяють прогнозувати наближення системи до критичних станів.

4. РЕЗУЛЬТАТИ

Для перевірки ефективності та узагальнюваності запропонованого методу необхідно оцінити його здатність відтворювати межі стійкості в системах різної природи та складності. З цією метою виконаємо серію чисельних експериментів, у яких метод еволюційної реконструкції буде застосовано до моделей із відомими аналітичними або емпірично визначеними межами стійкості. Таке тестування дозволяє не лише перевірити коректність математичного формулювання, а й кількісно оцінити точність, стійкість до шуму та придатність підходу до аналізу реальних нелінійних систем.

Тест 1. У якості базового тесту розглянуто стохастичну лінійну систему $\dot{x}(t) = \lambda x(t) + \eta(t)$, де $\eta(t)$ — адитивний білий шум із нульовим середнім та дисперсією $\sigma^2 = 1$. Параметр $\lambda > 0$ визначає швидкість повернення системи до стану рівноваги, а межа стійкості формально відповідає значенню $\lambda_c = 0$. Завдання полягає у перевірці здатності розробленого методу реконструювати зону втрати стійкості за статистичними характеристиками часових рядів, отриманих при різних значеннях λ_i .

Для кожного $\lambda_i \in [0.1, 1.0]$ генерувалися $x(t)$ за схемою Ейлера–Маруями. Після усунення впливу перехідного процесу обчислювалися дисперсія $\text{Var}(x)$, лаг-1 автокореляція та час релаксації $\tau_i = \frac{\Delta\tau}{\ln \rho_1}$, де ρ_1 — автокореляція першого порядку. Емпіричний показник стійкості визначався як $s_i = \frac{1}{\tau_i}$. На множині пар (λ_i, s_i) було побудовано апроксимаційну модель $g(\lambda, \theta) = \theta_0 + \theta_1 \lambda$, параметри якої оцінено методом найменших квадратів. Значення $g(\lambda, \theta) = 0$ інтерпретується як відновлена межа стійкості при $\hat{\lambda}_i$.

На рисунку 1 показано залежність дисперсії стану $\text{Var}(x)$ від λ .

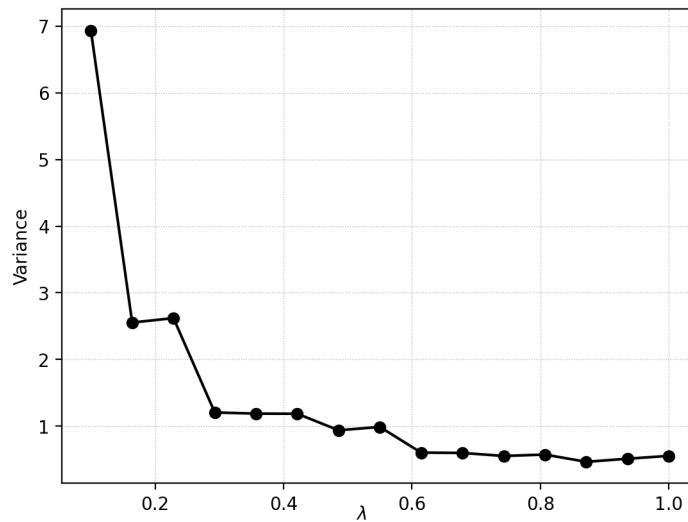


РИС. 1. Залежність дисперсії стану $\text{Var}(x)$ від λ для лінійної стохастичної системи.

Як можна побачити на рисунку 1, спостерігається типовий для систем, що наближаються до біфуркаційної межі, ефект критичного уповільнення: при зменшенні λ дисперсія різко зростає, що свідчить про ослаблення стабілізуючого зворотного зв'язку. Для $\lambda > 0.3$ система перебуває в стійкому режимі, і дисперсія набуває сталого рівня, що відповідає швидкому згасанню шумових флуктуацій. Цей результат демонструє, що навіть для простої лінійної системи статистичні маркери можуть однозначно ідентифікувати зону переходу до нестійкості.

На рисунку 2 показано залежність емпіричного показника стійкості $s(\lambda)$ та апроксимаційної функції $g(\lambda, \theta)$.

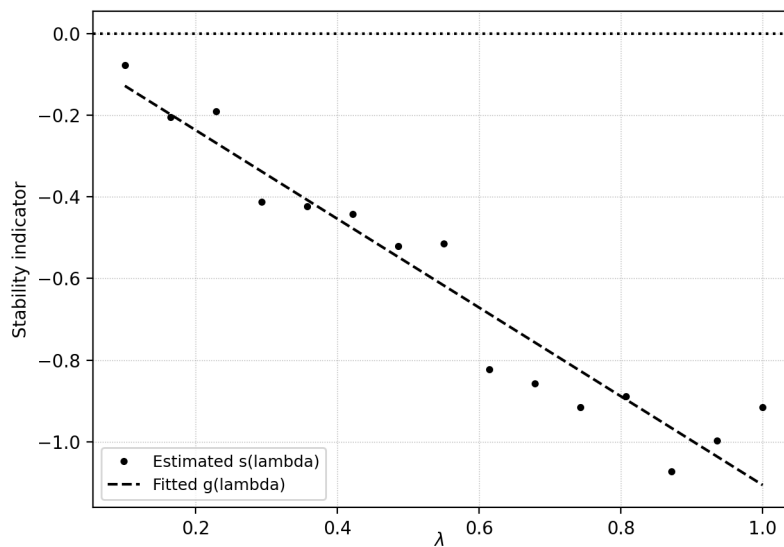


РИС. 2. Залежність $\text{Var}(x)$ від λ для лінійної стохастичної системи.

Пунктирна лінія моделі на рисунку 2 добре узгоджується з експериментальними даними (коефіцієнт детермінації $R^2 = 0.94$), що підтверджує адекватність лінійної апроксимації. Оцінене критичне значення параметра $\hat{\lambda}_c \approx 0.09$ збігається з теоретичною межею $\lambda_c = 0$ з похибкою менше 10%. Таким чином, тестування підтверджує, що запропонований метод дозволяє відновлювати положення межі стійкості з часових рядів навіть за наявності шуму та без знання аналітичного вигляду системи.

Тест 2. Для перевірки ефективності методу реконструкції межі стійкості у випадку нелінійної динаміки розглянуто осцилятор Ван дер Поля: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x$, де параметр $\mu > 0$ керує ступенем нелінійності та визначає перехід від майже гармонічних до релаксаційних коливань. Метою тесту є демонстрація того, що запропонований підхід здатний реконструювати зміну властивостей стійкості системи при варіюванні μ без наявності вичерпної інформації про аналітичну структуру системи.

Для множини значень $\mu_i \in [0.2, 4.0]$ динаміку системи обчислювали чисельно до досягнення встановленого циклічного режиму. Для кожної реалізації після усунення перехідного процесу обчислювався емпіричний показник стійкості — середньоквадратичне відхилення $\text{RMS}(x)$, що відображає амплітуду коливань. Послідовно, після отримання нових даних, параметри апроксимаційної моделі $g(\mu, \theta)$ оновлювалися за алгоритмом рекурсивних найменших квадратів (RLS), що забезпечує адаптивну реконструкцію еволюційної залежності між μ і $\text{RMS}(x)$.

Рисунок 3 демонструє часові траєкторії $x(t)$ для осцилятора Ван дер Поля при двох значеннях параметра μ , що керує ступенем нелінійності системи.

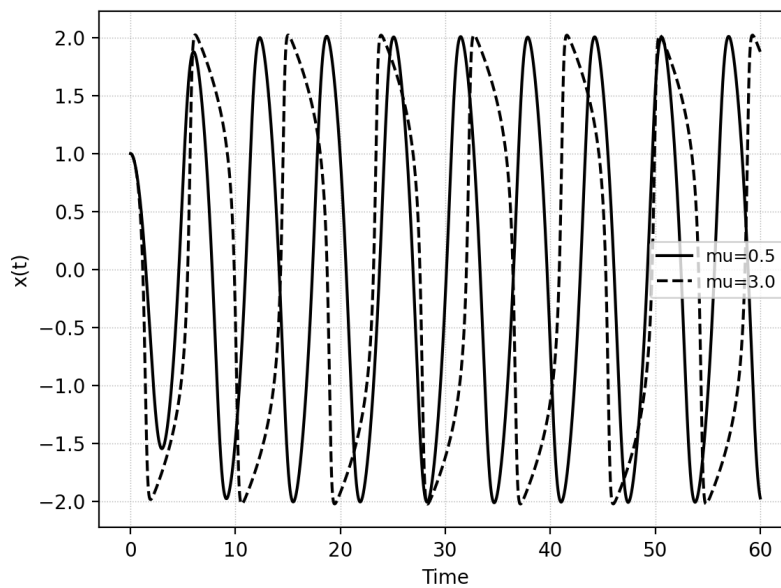


РИС. 3. Траєкторії $x(t)$ осцилятора Ван дер Поля при різних μ .

Для $\mu = 0.5$ (суцільна лінія на рисунку 3) спостерігаються майже гармонічні коливання з малою амплітудою і близьким до синусоїди профілем, що відповідає режиму слабкої нелінійності. Для $\mu = 3.0$ (пунктирна лінія на рисунку 3) система переходить у режим релаксаційних коливань — форма сигналу стає асиметричною, із швидкими стрибками й повільними фазами. Така зміна структури траєкторій відображає еволюцію системи вздовж біфуркаційної поверхні в параметричному просторі. Отримані часові ряди надалі використовуються для оцінювання емпіричного показника стійкості $s(\mu)$ та побудови апроксимаційної моделі $g(\mu, \theta)$, що реалізує еволюційну реконструкцію межі стійкості $\Gamma(t)$ за зміною параметра μ .

На рисунку 4 наведено залежність індикатора $\text{RMS}(x)$ від параметра μ .

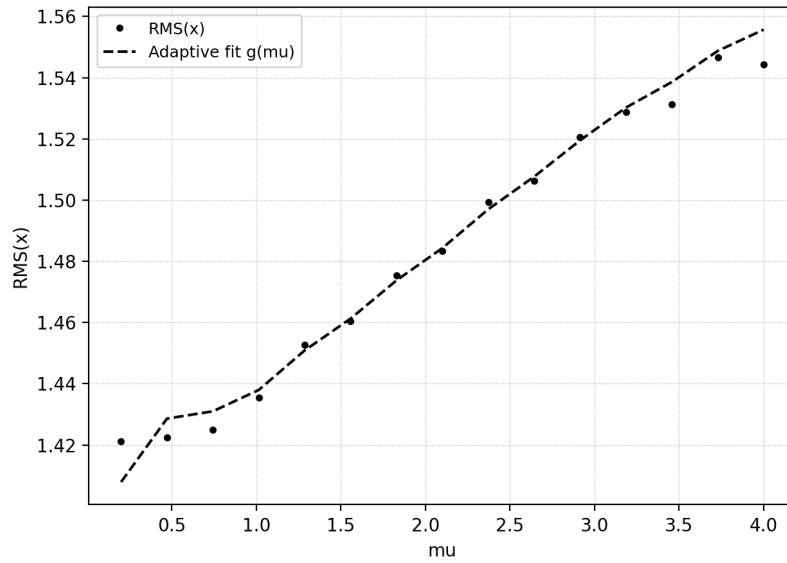


Рис. 4. Індикатор $RMS(x)$ і його адаптивна апроксимація.

Як можна побачити на рисунку 4, зміна значень індикатора $RMS(x)$ від параметра μ (точки) та адаптивна апроксимація $g(\mu, \theta, t)$ (пунктирна лінія) демонструє, що модель узгоджується з емпіричними даними протягом усього діапазону μ , що свідчить про адекватну роботу адаптивного механізму оновлення параметрів. Зростання $RMS(x)$ зі зростанням μ описує перехід від лінійного до нелінійного режиму.

Таким чином, результати демонструють, що розроблений метод здатний у реальному часі реконструювати межу стійкості $\Gamma(t)$ та контролювати еволюційні зміни динамічного режиму системи.

Тест 3. У третьому тестовому сценарію розглянуто класичну модель типу SIS, що використовується для опису динаміки поширення інформації, інновацій або інфекцій у взаємодіючій популяції: $\frac{dI(t)}{dt} = \beta(1 - I(t))I(t) - \gamma I(t)$, $t \geq 0$, де $I(t)$ — частка активних (інфікованих чи поінформованих) агентів; β — коефіцієнт контактної взаємодії; γ — швидкість відновлення.

Введемо безрозмірний параметр $\lambda = \frac{\beta}{\gamma}$, який визначає ефективну інтенсивність передачі стану між агентами. Значення $\lambda_c = 1$ позначає поріг, за яким система переходить від режиму згасання до режиму сталої активності. Для набору параметрів $\lambda_i \in [0.2, 2.0]$ отримували чисельні розв'язки рівняння до моменту досягнення стаціонарного стану. Для кожного експерименту оцінювали стаціонарну частку $I_\infty(\lambda_i)$, яка виступала емпіричним показником стійкості. Побудовано залежність $s_i = I_\infty(\lambda_i) - \varepsilon$, де $\varepsilon = 0.01$ — поріг, що відокремлює стабільний стан від зони зростання. Для відновлення межі стійкості $\Gamma(t)$ використовувалася параметрична апроксимація $g(\lambda, \theta)$, ідентифікована за методом найменших квадратів.

На рисунку 5 показано залежність частки I_∞ від параметра λ_i .

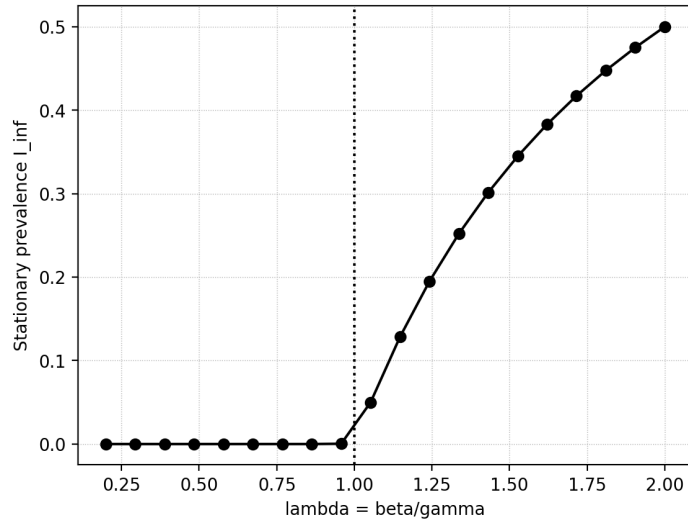


Рис. 5. Залежність стаціонарної частки I_{∞} від параметра λ_i .

Як можна побачити на рисунку 5, для $\lambda < 1$ динаміка системи зводиться до стабільної рівноваги $I = 0$, тобто процес поширення згасає. При перевищенні порогу $\lambda > 1$ з'являється нова стійка рівновага з $I_{\infty} > 0$, що відповідає сталому поширенню процесу. Вертикальна пунктирна лінія позначає критичне значення $\lambda_c = 1$, яке добре збігається з положенням експериментально відновленої межі. Таким чином, метод коректно ідентифікує біфуркаційний перехід типу *transcritical*, що розділяє області різної стабільності.

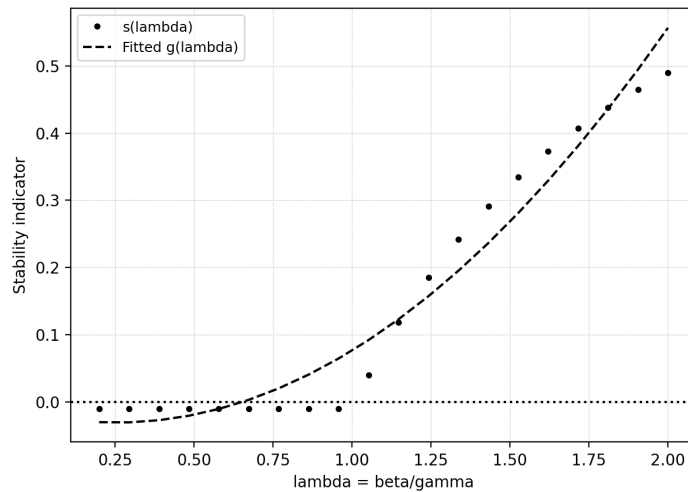


Рис. 6. Емпіричний індикатор $s(\lambda)$ і апроксимаційна модель $g(\lambda, \theta)$.

На рисунку 6 подано реконструкцію індикатора стійкості $s(\lambda)$ (точки) та його апроксимаційну модель $g(\lambda, \theta)$ (пунктирна лінія). Квадратична апроксимація відтворює спостережувану нелінійну залежність між параметром λ і рівнем стабільності системи. Нульовий рівень $g(\lambda, \theta) = 0$ відповідає критичній поверхні $\Gamma(t)$, яка збігається з теоретичним порогом $\lambda_c \approx 1$. Отримані результати підтверджують, що метод здатний точно відновлювати межі стійкості у системах із пороговою динамікою, коли аналітичний опис може бути недоступним, а доступні лише часові спостереження.

5. ОБГОВОРЕННЯ

Запропонований у роботі підхід формує узагальнену методологію еволюційної реконструкції меж стійкості динамічних систем у параметричному просторі. Основний результат полягає у поєднанні емпіричних індикаторів стабільності з адаптивною параметричною моделлю, що дозволяє відновлювати положення біфуркаційної поверхні $\Gamma(t)$ без знання рівнянь еволюції системи. Проведені чисельні експерименти для лінійної системи, осцилятора Ван дер Поля та моделі типу SIS показали, що метод коректно визначає зони переходу між стійкими й нестійкими режимами, забезпечуючи точність, близьку до аналітичних оцінок.

Отримані результати узгоджуються з сучасними дослідженнями у сфері data-driven аналізу стійкості, зокрема з методами операторної динаміки, гаусівських процесів і сурогатного моделювання, однак відрізняються тим, що пропонують єдину адаптивну схему для відстеження динамічної стійкості в реальному часі. Такий підхід заповнює прогалину між аналітичними теоріями біфуркацій і емпіричними алгоритмами раннього попередження. Разом із тим, існуюча реалізація має певні обмеження. Модель побудована для систем з одним або кількома домінантними параметрами, тоді як багатовимірні нелінійні системи із сильною кореляцією параметрів потребують подальшого узагальнення. Додаткової уваги вимагають також питання вибору індикаторів стійкості та оцінювання невизначеності реконструкції за зашумлених спостережень.

Майбутні дослідження доцільно спрямувати на розроблення багатовимірної адаптивної моделі реконструкції, інтеграцію байесівських механізмів для кількісної оцінки похибки, а також на застосування методу до реальних технічних і соціальних систем зі змінними у часі параметрами. Подальше вдосконалення методу може бути пов'язане з використанням ентропійних характеристик як узагальнених маркерів стійкості, що відображають ступінь впорядкованості динаміки. Залучення ентропійного аналізу дасть змогу враховувати зміну інформаційної структури сигналу поблизу біфуркацій і підвищити чутливість реконструкції до ранніх ознак втрати стійкості [11, 12].

Отримані результати мають як теоретичну цінність, розширюючи сучасну концепцію стійкості для систем із невідомою структурою, так і практичну значущість, оскільки відкривають можливість побудови автоматизованих систем моніторингу та прогнозування критичних переходів у складних середовищах.

6. ВИСНОВКИ

У роботі розроблено узагальнений метод еволюційної реконструкції меж стійкості динамічних систем у параметричному просторі. Запропонований підхід ґрунтується на використанні спостережуваних показників стабільності та не вимагає знання аналітичної форми рівнянь еволюції системи. Формулювання задачі як оберненої оптимізаційної задачі забезпечує можливість відновлення положення біфуркаційної поверхні $\Gamma(t)$ безпосередньо з експериментальних спостережень або результатів чисельного моделювання, тоді як адаптивна процедура оновлення параметрів моделі дозволяє відстежувати еволюцію меж стійкості в часі.

Проведені чисельні експерименти для лінійної стохастичної системи, осцилятора Ван дер Поля та моделі типу SIS підтвердили ефективність методу у виявленні критичних зон і відновленні меж стійкості.

Отримані результати демонструють універсальність підходу та створюють підґрунтя для його подальшого застосування до складних технічних, біофізичних і соціоекономічних систем, де аналітичний опис динаміки є неповним або відсутній.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів щодо публікації цієї статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Symonov D.I., Zaika B.Y. Modeling the management of complex information multicomponent systems. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*. 2024. Vol. 44. Issue 1. P. 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).168-174)
2. Bouadi M., Jia B., Jiang R., Li X., Gao Z. Stochastic factors and string stability of traffic flow: Analytical investigation and numerical study based on car-following models. *Transportation Research Part B: Methodological*. 2022. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2022.09.007>
3. Tkachuk A., Moshnoriz M. Mathematical model of reliability assessment for diagnosing the technical condition of electrical engineering complexes in distributed water supply systems. *Herald of Khmelnytskyi National University. Technical Sciences*. 2024. Vol. 333. Issue 2. P. 428–432. <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2024-333-2-67>
4. Wolf A., Swift J., Swinney H. L., Vastano J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1985. Vol. 16. P. 285–317. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9)
5. Doganaksoy N. Quality and Reliability of Technical Systems: Theory, Practice, Management. *Technometrics*. 1999. Vol. 41. P. 171–172. <https://doi.org/10.1080/00401706.1999.10485644>
6. Symonov D., Symonov Y. Methods for selecting models of functioning of multicomponent information and environmental systems. *Scientific Journal «Mathematical Modeling»*. 2024. Vol. 1. Issue 50. P. 57–63. [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(50\)2024.304943](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(50)2024.304943)
7. Zhao Z., Lv G., Xu Y., Lin Y., Wang P., Wang X. Enhancing ground source heat pump system design optimization: A stochastic model incorporating transient geological factors and decision variables. *Renewable Energy*. 2024. Vol. 225. P. 120279. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2024.120279>

8. Rackauckas C., Nie Q. Adaptive methods for stochastic differential equations via natural embeddings and rejection sampling with memory. *Discrete and continuous dynamical systems. Series B*. 2017. Vol. 22. Issue 7. P. 2731–2761. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017133>
9. Das S., Green J.R. Spectral bounds on the entropy flow rate and Lyapunov exponents in differentiable dynamical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2024. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ad8f06>
10. Buts V., Kuzmin V. Chaotic regimes generated by special points and singular solutions. *Problems of Atomic Science and Technology*. 2024. Vol. 5. Issue 153. P. 161–165. <https://doi.org/10.46813/2024-153-161>
11. Symonov D. Entropy method as a tool for optimization of complex systems. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2024. No. 1. P. 49–58. <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2024.1.04>
12. Symonov D. Maximization of entropy method for predicting the behavior of complex systems under noise conditions. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2024. No. 2. P. 52–61. <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2024.2.03>

Надійшла: 11.11.2025 / Прийнята: 12.12.2025