

Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Міністерство освіти і науки України  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**КРАВЕЦЬ ВІКТОРІЯ ПАВЛІВНА**

УДК 517.9

**ДИСЕРТАЦІЯ**

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО  
ПОРЯДКУ ЗІ СТРИБКОМ ОПЕРАТОРНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Спеціальність 111 — математика

Галузь знань 11 — математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня *доктора філософії*

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

---

*В. П. Кравець*

Науковий керівник

*Городній Михайло Федорович,  
доктор фізико-математичних наук, професор*

Київ – 2023

## Анотація

*Кравець В. П.* Обмежені розв'язки різницевих рівнянь другого порядку зі стрибком операторних коефіцієнтів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 "Математика та статистика" за спеціальністю 111 "Математика". – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2023.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню питань про існування єдиного обмеженого розв'язку різницевих рівнянь другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів та єдиного обмеженого в середньому розв'язку стохастичних аналогів таких рівнянь.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, наведено список конференцій та наукових семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію, та короткий зміст роботи.

У першому розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи та результатів, отриманих іншими авторами. Також цей розділ містить порівняльний аналіз із деякими роботами, що містять подібні результати.

У другому розділі дисертації досліджується питання про існування єдиного обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта, ліва частина якого є різницевим аналогом другої похідної у скінченновимірному банаховому просторі. Отримано необхідні і достатні умови на оператори, при виконанні яких існує єди-

ний обмежений розв'язок такого рівняння. Окремо розглядався випадок, коли оператори в одному і тому ж базисі зводяться до діагонального вигляду (тобто мають один і той же набір власних векторів, які утворюють базис). Також вдалось дослідити більш загальний випадок, коли матриці операторів мають жорданову нормальну форму у одному і тому ж базисі.

У третьому розділі дисертації досліджується питання про існування єдиного обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку загального вигляду зі стрибками операторних коефіцієнтів у скінченновимірному банаховому просторі. Було знайдено необхідні і достатні умови на оператори, при виконанні яких існує єдиний обмежений розв'язок такого рівняння у загальному випадку, а також уточнено ці умови, коли оператори належать деяким спеціальним класам.

У четвертому розділі дисертаційного дослідження досліджується питання про існування єдиного обмеженого в середньому розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта у сепарабельному банаховому просторі. У пункті 3 цього розділу знайдено достатні умови на оператори, при виконанні яких таке різницеве рівняння має єдиний обмежений в середньому розв'язок. У пункті 4 цього розділу оцінено близькість при  $n \rightarrow \infty$  компонент обмеженого у середньому розв'язку різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта до компонент обмеженого в середньому розв'язку різницевого рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом. У п'ятому пункті четвертого розділу розглянуто нелінійне різницеве рівняння. Для цього рівняння знайдено достатні умови існування єдиного обмеженого в середньому розв'язку.

Також у дисертаційній роботі наведені приклади застосування теорем до дослідження конкретних рівнянь.

У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

— доведено критерій існування єдиного обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку загального вигляду зі стрибками операторних коефіцієнтів у скінченновимірному банаховому просторі;

— встановлено, що цей критерій суттєво спрощується у таких двох випадках:

а) ліва частина різницевого рівняння є різницевим аналогом другої по-

хідної, а матриці операторних коефіцієнтів зводяться до жорданової нормальної форми в одному і тому ж базисі;

б) відповідні до різницевого рівняння "алгебраїчні" операторні рівняння мають корені, що задовольняють деякі спеціальні умови;

— встановлено достатні умови існування єдиного обмеженого в середньому розв'язку різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта, збуреного обмеженою в середньому послідовністю випадкових елементів;

— досліджено питання про близькість при  $n \rightarrow \infty$  єдиного обмеженого в середньому розв'язку різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта до обмеженого в середньому розв'язку відповідного різницевого рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом;

— знайдено достатні умови існування єдиного обмеженого в середньому розв'язку слабо нелінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта.

Дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення. Отримані в роботі результати можуть бути використані в подальших дослідженнях властивостей розв'язків різницевого рівнянь другого порядку зі змінними операторними коефіцієнтами.

*Ключові слова:* різницеве рівняння, банахів простір, лінійний обмежений оператор, обмежений розв'язок, експоненціальна дихотомія, обмежений в середньому розв'язок, стаціонарний розв'язок, близькість розв'язків.

## Abstract

*Kravets V. P.* The bounded solutions of a second-order difference equation with a jump of operator coefficients. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Doctor of Philosophy thesis undertaken in the field of knowledge 11 – Mathematics and statistics in specialty 111 – Mathematics – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis is devoted to the study of the problem of existence of unique bounded solution of second-order linear difference equations with jumps of operator coefficients and a unique solution bounded in the mean of stochastic analogues of such equations.

The dissertation consists of an abstract in Ukrainian and English, an introduction, four chapters of the main part, conclusions, a reference list, and an appendix.

In the introduction the research topic is motivated, the purpose, object, subject, tasks, and methods of research are formulated, and the scientific novelty of the obtained results and their practical significance is indicated, the connection of the work with scientific programs and personal contribution of the applicant. Also it is indicated where the results have been discussed and published.

Chapter 1 provides a review of the literature on the topic of the thesis and the results obtained by other authors. Also, this chapter provides a comparative analysis with some works containing similar results.

The Chapter 2 is devoted to the study of the problem of existence of the unique bounded solution of a linear second-order difference equation with a jump of operator coefficient the left part of which is a difference analogue of the second derivative in a finite-dimensional Banach space. Necessary and sufficient conditions for the operators were obtained, in the case of which there is a unique bounded solution of such an equation. The case when operators in the same basis are reduced to the diagonal form was considered separately. It was also

possible to investigate the more general case when the operator matrices have Jordan normal form in the same basis.

The Chapter 3 is investigated of the problem of existence of unique bounded solution of second-order linear difference equations of the general form with jumps of operator coefficients in a finite-dimensional Banach space. Necessary and sufficient conditions for the operators were obtained, in the case of which there is a unique bounded solution of such an equation in the general case. These conditions when the operators belong to some special classes have also been clarified.

The Chapter 4 is devoted to the study of the problem of existence of the unique bounded in the mean solution of a linear second-order difference equation with a jump of operator coefficient the left part of which is a difference analogue of the second derivative in a separable Banach space. Sufficient conditions are given for the existence of a unique solution bounded in the mean to a second-order difference equation with jumps of operator coefficients. The question of the proximity of this solution to the stationary solution of the corresponding difference equation with constant operator coefficients is studied. Next, the nonlinear difference equation was considered. Sufficient conditions for the existence of a unique bounded in the mean solution for this equation were obtained.

Also, examples of the application of theorems to the study of specific equations are given in the thesis.

The following new results were developed in the thesis :

- the criterion for the existence of a unique bounded solution of a linear second-order difference equation of the general form with jumps of operator coefficients in a finite-dimensional Banach space is proved;

- it is established that this criterion is significantly simplified in such two cases:

- a) the left part of the difference equation is the difference analogue of the second derivative and the matrices of operator coefficients reduce to the Jordan normal form in the same basis;

- b) "algebraic" operator equations corresponding to the difference equation have solutions that satisfy some special conditions;

- sufficient conditions for the existence of a unique bounded in the mean

solution of a second-order difference equation with a jump in the operator coefficient disturbed by a bounded in the mean sequence of random elements have been established;

— the question of proximity for  $n \rightarrow \infty$  of the unique bounded in the mean solution of a second-order difference equation with a jump of the operator coefficient to the bounded in the mean solution of the corresponding difference equation with a constant operator coefficient is investigated;

— sufficient conditions for the existence of a unique bounded in the mean solution of a weakly nonlinear second-order difference equation with a jump of the operator coefficient have been found.

The thesis is both theoretical and practical research. The obtained results can be used in further studies of the properties of solutions of second-order difference equations with variable operator coefficients.

*Keywords:* difference equation, Banach space, linear bounded operator, bounded solution, exponential dichotomy, bounded in the mean solution, stationary solution, proximity of solutions.

## Список опублікованих праць за темою дисертації

### Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Городній М. Ф., Кравець В. П., *Обмежені розв'язки різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта*, Допов. Нац. акад. наук Укр., № 2, (2019), С. 12–16. DOI: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.02.012>

2. Городній М. Ф., Кравець В. П., *Про обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку*, Нелінійні коливання, Т. 22, № 2, (2019), С. 196–201; translation in *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 249, No 4, (2020), P. 601–608, DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04960-5>.

3. Городній М. Ф., Кравець В. П., *Обмежені розв'язки різницевого рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів*, Укр. мат. журн., Т. 73, № 3, (2021), С. 47–52, DOI: <https://doi.org/10.37863/umzh.v73i3.6058>; translation in *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 73, No. 3, (2021), P. 391–398, DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-021-01932-z>.

4. Horodnii M., Kravets V., *Bounded in the mean solutions of a second-order difference equation*, *Modern Stochastics: Theory and Applications*, Vol. 8, No. 4, (2021), P. 465–473, DOI: <https://doi.org/10.15559/21-VMSTA189>.

### Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Кравець В. П. Про обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку // Матеріали XVII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2019». К.: Київський університет, 2019. С. 17-18.

2. Городній М. Ф., Кравець В. П. Обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку // Матеріали XVIII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2020». К.: Київський університет, 2020. С. 9-10.

3. Городній М. Ф., Кравець В. П. Про властивості обмежених розв'язків різницевих рівнянь зі стрибками операторних коефіцієнтів // Abstracts International Conference of Young Mathematician. Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2021. С. 64-65.

4. Городній М. Ф., Кравець В. П. Про обмежені в середньому розв'язки різницевих рівнянь другого порядку // Матеріали XX Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2022». К.: Київський університет, 2022. С. 16.

5. Kravets V. Bounded In The Mean Solutions Of A Second-Order Difference Equation // 11th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2022). Istanbul, Turkey, 2022. P. 85

6. Кравець В. П. Обмежені в середньому розв'язки одного нелінійного різницевого рівняння // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2023». К.: Київський університет, 2023. С. 27 - 28.

# Зміст

<b>ВСТУП</b>	<b>12</b>
<b>1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ</b>	<b>20</b>
1.1 Різницеві рівняння першого порядку. Умова експоненціальної дихотомії . . . . .	22
1.2 Різницеві рівняння другого порядку зі сталими операторними коефіцієнтами . . . . .	28
1.3 Різницеві рівняння з випадковою правою частиною . . . . .	33
1.4 Висновки до розділу 1 . . . . .	37
<b>2 ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ</b>	<b>38</b>
2.1 Постановка задачі . . . . .	38
2.2 Допоміжні результати . . . . .	39
2.3 Основний результат . . . . .	52
2.4 Приклади . . . . .	58
2.5 Висновки до розділу 2 . . . . .	64
<b>3 ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ЗІ СТИБКАМИ ОПЕРАТОРНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ</b>	<b>65</b>

3.1	Постановка задачі . . . . .	65
3.2	Допоміжні результати . . . . .	67
3.3	Основні результати . . . . .	74
3.4	Приклади . . . . .	79
3.5	Висновки до розділу 3 . . . . .	83
<b>4</b>	<b>ОБМЕЖЕНІ В СЕРЕДНЬОМУ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ДРУГО- ГО ПОРЯДКУ</b>	<b>84</b>
4.1	Постановка задачі . . . . .	84
4.2	Допоміжні результати . . . . .	86
4.3	Обмежені у середньому розв'язки різницевого рівняння (4.1)	94
4.4	Близькість компонент обмежених у середньому розв'язків рі- зницевих рівнянь (4.1) та (4.2) при $n \rightarrow \infty$ . . . . .	95
4.5	Обмежені в середньому розв'язки слабко нелінійного різни- цевого рівняння . . . . .	100
4.6	Приклади . . . . .	103
4.7	Висновки до розділу 4 . . . . .	111
	<b>ВИСНОВКИ</b>	<b>112</b>
	<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>	<b>113</b>
	<b>ДОДАТОК</b>	<b>122</b>

# ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена вивченню питань про існування єдиного обмеженого розв'язку різницевих рівнянь другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів у скінченновимірному банаховому просторі, а також єдиного обмеженого в середньому розв'язку їхніх стохастичних аналогів.

## **Актуальність теми.**

Різницеві рівняння відомі ще з античних часів у зв'язку з численними практичними застосуваннями. Вони адекватно описують поведінку багатьох реальних систем у науці та техніці. Різноманітним аспектам теорії різницевих рівнянь присвячено велику кількість статей та монографій, тематичних наукових конференцій. Наукові результати щодо існування і поведінки розв'язків різницевих рівнянь відіграють важливу роль в медицині, економіці, фізиці, інформатиці, тощо.

Важливими внесками в побудову теорії різницевих рівнянь більш ніж сто років тому були роботи Дж. Д. Біркгофа, А. Пуанкаре, Р. Д. Кармайкла, Д. Ф. Селіванова, А. А. Маркова та їх учнів.

Розвиток електронно-обчислювальної техніки та її застосувань зумовили необхідність подальших досліджень з теорії різницевих рівнянь. Тому різницеві рівняння активно вивчаються починаючи з середини ХХ століття. З'являються фундаментальні праці, в яких досліджуються властивості їхніх розв'язків. Серед них можна відзначити роботи О. О. Гельфонда, Е. Джурі, А. Халаяна, Д. Векслера, Я. В. Бикова, В. Г. Ліненка, Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, Д. І. Мартинюка, О. М. Шарковського, В. Ю. Слюсарчука, О. А. Бойчука, Г. П. Пелюха, М. А. Солдатова, О. О. Миролобова, С. Коффмана, Х. Шеффера, І. В. Гайшуна, А. Г. Баскакова, А. Я. Дороговцева, Ю. В. Томілова, О. О. Покутного та інших

відомих математиків.

Важлива в теорії різницевих рівнянь проблема існування єдиного обмеженого на  $Z$  розв'язку лінійного різницевого рівняння першого порядку зі змінними операторними коефіцієнтами досліджувалась В. Ю. Слюсарчуком, Д. Хенрі, С. Коффманом і Х. Шеффером, А. Г. Баскаковим, А. М. Самойленком, О. А. Бойчуком, О. О. Покутним та іншими математиками з використанням умови експоненціальної дихотомії. Перевірка цієї умови зазвичай нетривіальна. Тому для рівнянь з одним або кількома стрибками операторних коефіцієнтів у роботах В. Ю. Слюсарчука, М. Ф. Городнього і І. В. Гончар, А. В. Чайковського і О. А. Лагоди додатково отримано явні умови на операторні коефіцієнти, що забезпечують існування єдиного обмеженого на  $Z$  розв'язку таких різницевих рівнянь.

У даній дисертаційній роботі вперше досліджуються актуальні питання про існування єдиного обмеженого на  $Z$  розв'язку різницевих рівнянь другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів. Аналогічні рівняння зі сталими операторними коефіцієнтами вивчали А. Г. Баскаков, А. Я. Дороговцев та їхні учні.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційне дослідження виконане відповідно до індивідуального плану аспірантки кафедри диференціальних та інтегральних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, затвердженого вченою радою механіко-математичного університету, і в рамках державної бюджетної дослідницької наукової теми 21БНН-06 « Виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напрямку "Математичні науки і природничі науки" » Київського національного університету імені Тараса Шевченка (номер державної реєстрації 0121U112941).

**Мета і завдання дослідження.** Метою дисертаційної роботи є дослідження властивостей розв'язків різницевих рівнянь другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів у банаховому просторі.

Основними завданнями даної роботи є:

— знайти необхідні і достатні умови існування єдиного обмеженого

розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку загального вигляду зі стрибками операторних коефіцієнтів у скінченновимірному банаховому просторі;

— дослідити, наскільки спрощуються необхідні і достатні умови існування єдиного обмеженого розв'язку для деяких спеціальних класів таких різницевих рівнянь;

— отримати достатні умови існування єдиного обмеженого в середньому розв'язку різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта, збуреного обмеженою в середньому послідовністю випадкових елементів;

— оцінити близькість при  $n \rightarrow \infty$  єдиного обмеженого в середньому розв'язку різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта до обмеженого в середньому розв'язку відповідного різницевого рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом;

— знайти достатні умови існування єдиного обмеженого в середньому розв'язку слабо нелінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта.

**Об'єктом дослідження** є різницеві рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів та їх стохастичні аналоги.

**Предметом дослідження** є обмежені розв'язки різницевих рівнянь другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів та обмежені в середньому розв'язки їх стохастичних аналогів.

**Методи дослідження.** У процесі дослідження, проведеного у дисертаційній роботі, застосовуються методи теорії різницевих та диференціальних рівнянь, методи функціонального аналізу і теорії операторів, а також методи лінійної алгебри.

**Наукова новизна отриманих результатів.** Всі результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими та математично обґрунтованими. Основні з них такі:

— доведено критерій існування єдиного обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку загального вигляду зі стрибками операторних коефіцієнтів у скінченновимірному банаховому просторі;

— встановлено, що цей критерій суттєво спрощується у таких двох випадках:

а) ліва частина різницевого рівняння є різницевим аналогом другої похідної, а матриці операторних коефіцієнтів зводяться до жорданової нормальної форми в одному і тому ж базисі;

б) відповідні до різницевого рівняння "алгебраїчні" операторні рівняння мають корені, що задовольняють деякі спеціальні умови;

— встановлено достатні умови існування єдиного обмеженого в середньому розв'язку різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта, збуреного обмеженою в середньому послідовністю випадкових елементів;

— досліджено питання про близькість при  $n \rightarrow \infty$  єдиного обмеженого в середньому розв'язку різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта до обмеженого в середньому розв'язку відповідного різницевого рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом;

— знайдено достатні умови існування єдиного обмеженого в середньому розв'язку слабо нелінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта.

**Теоретичне та практичне значення отриманих результатів.** Дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення. Одержані в роботі результати можуть бути використані в подальших дослідженнях властивостей розв'язків різницевих рівнянь другого порядку зі змінними операторними коефіцієнтами.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати роботи, що вносяться на захист, отримані автором самостійно. Визначення основного плану дослідження, постановка задач та загальне керівництво роботою належить науковому керівнику М. Ф. Городньому. За результатами дисертації здобувачем було опубліковано чотири роботи у фахових виданнях у

співавторстві з науковим керівником М. Ф. Городнім [1 – 4].

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційного дослідження доповідалися та обговорювалися на таких наукових конференціях та наукових семінарах різного рівня:

1. XVII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2019», 17–19 квітня, 2019, м. Київ, Україна.

2. XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2020», 15–16 квітня, 2020, м. Київ, Україна.

3. Abstracts International Conference of Young Mathematician, Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, June 3–5, 2021, Kyiv, Ukraine.

4. XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022», 14–15 квітня, 2022, м. Київ, Україна.

5. 11th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2022), August 29 – September 1, 2022, Istanbul, Turkey.

6. XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023», 14 квітня, 2023, м. Київ, Україна.

7. Науковий семінар з диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Почесний керівник семінару — академік НАН України, професор, доктор фізико-математичних наук М. О. Перестюк. Наукові керівники — професор, доктор фізико-математичних наук О. М. Станжицький і професор, доктор фізико-математичних наук О. В. Капустян, 16 березня, 2023, м. Київ, Україна.

**Публікації.** Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в десятих наукових працях, з яких чотири статті [1 – 4] та шість тез у матеріалах наукових конференцій [5 – 10]. Статтю [1] опубліковано у виданні, що внесено до переліку наукових фахових видань України. Статтю [2] надруковано у науковому фаховому виданні України категорії "А", що індексується у наукометричній базі MathSciNet, англійська версія видання індексована в наукометричній базі Scopus та входить до квартиля Q3. Статтю [3] надруковано у науковому фаховому виданні України категорії "А", що індексується у наукометричній базі Scopus, MathSciNet та Web

of Science, англomовна версія видання індексовна в наукометричній базі Scopus та входить до квартиля Q2. Статтю [4] опубліковано у міжнародному журналі, який індексується у наукометричній базі Scopus та Web of Science та входить до квартиля Q3.

**Обсяг і структура дисертації.** Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновку, списку використаних джерел та додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Загальний обсяг роботи становить 124 сторінки. Обсяг основного тексту дисертації — 101 сторінка. Список використаної літератури займає 9 сторінок і налічує 93 найменування. Додатки займають 3 сторінки і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

**Зміст роботи.** У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, наведено список конференцій та наукових семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію, та короткий зміст роботи.

У **першому розділі** дисертаційної роботи наведено огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи та результатів, отриманих іншими авторами. Також цей розділ містить порівняльний аналіз із деякими роботами, що містять подібні результати.

У **другому розділі** дисертації досліджується питання про існування єдиного обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта, ліва частина якого є різницевим аналогом другої похідної,

$$\begin{cases} x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = Ax_n + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = Bx_n + y_n, n \leq 0, \end{cases}$$

у скінченновимірному банаховому просторі.

Отримано необхідні і достатні умови на оператори  $A, B$ , при виконанні яких існує єдиний обмежений розв'язок такого рівняння. Окремо розглядався випадок, коли оператори  $A, B$  в одному і тому ж базисі зводяться до діагонального вигляду (тобто мають один і той же набір власних векторів, які утворюють базис). Також вдалось дослідити більш загальний випадок, коли матриці операторів  $A, B$  мають жорданову нормальну форму у одному і тому ж базисі.

У **третьому розділі** дисертації досліджується питання про існування єдиного обмеженого на  $\mathbb{Z}$  розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку загального вигляду зі стрибками операторних коефіцієнтів

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_1 x_n + A_2 x_{n-1} + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = B_1 x_n + B_2 x_{n-1} + y_n, n \leq 0, \end{cases}$$

у скінченновимірному банаховому просторі. Було знайдено необхідні і достатні умови на оператори  $A_1, A_2, B_1, B_2$ , при виконанні яких існує єдиний обмежений розв'язок такого рівняння, у загальному випадку, а також уточнено ці умови, коли  $A_1, A_2, B_1, B_2$  належать деяким спеціальним класам.

У **четвертому розділі** дисертаційного дослідження досліджується питання про існування єдиного обмеженого в середньому розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів

$$\begin{cases} \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = A\xi_n + \eta_n, n \geq 1, \\ \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = B\xi_n + \eta_n, n \leq 0, \end{cases}$$

у сепарабельному банаховому просторі. У пункті 3 цього розділу знайдено достатні умови на оператори  $A, B$ , при виконанні яких таке різницеве рівняння має єдиний обмежений у середньому розв'язок. У пункті 4 цього розділу оцінено близькість при  $n \rightarrow \infty$  компонент обмеженого в середньому розв'язку різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта до компонент обмеженого у середньому розв'язку різницевого рівняння зі

сталим операторним коефіцієнтом

$$\zeta_{n+1} - 2\zeta_n + \zeta_{n-1} = A\zeta_n + \eta_n, n \in \mathbb{Z}.$$

У п'ятому пункті четвертого розділу розглянуто нелінійне різницеве рівняння

$$\begin{cases} \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = A\xi_n + f(\xi_n) + \eta_n, n \geq 1, \\ \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = B\xi_n + f(\xi_n) + \eta_n, n \leq 0. \end{cases}$$

Для цього рівняння знайдено достатні умови існування єдиного обмеженого в середньому розв'язку.

Також у дисертаційній роботі наведені приклади застосування теорем до дослідження конкретних рівнянь.

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

**Подяка.** Автор дисертації висловлює щирю подяку своєму науковому керівнику — доктору фізико-математичних наук, професору Городньому Михайлу Федоровичу — за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну підтримку, увагу та допомогу в роботі.

# Розділ 1

## ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Цей розділ присвячений огляду відомих результатів, що стосуються тематики дисертації.

Різницеві рівняння відомі ще з античних часів, а перші письмові згадки про них з'являються у XVIII столітті. Саме з того часу дослідженню різних типів різницевих рівнянь присвячували свої роботи багато відомих математиків.

Особливий внесок у теорію різницевих рівнянь зробив А. Пуанкаре у кінці XIX століття, дослідивши асимптотичну поведінку розв'язків таких рівнянь. Його результати стали поштовхом до досліджень Дж. Д. Біркгофа [11 – 13], Р. Д. Кармайкла [14] та їхніх учнів, які стали засновниками загальної аналітичної теорії лінійних різницевих рівнянь. Також одними з перших досліджень теорії різницевих рівнянь вважаються монографії О. Й. Гельфонда [15], А. А. Маркова [16], Д. Ф. Селіванова [17], Н. Ньорлунда [18].

Дослідження різницевих рівнянь стали особливо необхідними у 60-х роках XX століття з початком швидкого розвитку електронно-обчислювальної техніки. Теорія різницевих рівнянь розвивалась як у скінченновимірних так і в абстрактних просторах. Результати з якісної теорії різницевих рівнянь, а також різноманітні застосування цієї теорії висвітлені, зокрема, у монографіях Я. З. Ципкіна [19], Е. Джурі [20], Я. В. Бикова і В. Г. Ліненка [21], А. Халая і Д. Векслера [22], Д. І. Мартинюка [23], І. В. Гайшуна [24], огляді С. Л. Блюміна і Р. Г. Фараджева [25] та ін.

Задачі про існування та єдиність обмежених розв'язків різницевих рівнянь у банахових просторах досліджувалися, зокрема, В. Ю. Слюсарчуком [26 – 29], А. Я. Дороговцевим [30, 31], В. С. Кімом [32], Д. Хенрі

[33], І. І. Мармерштейном [34], І. В. Гайшуном [35], А. Г. Баскаковим [36], Ю. В. Томіловим [37] у випадку обмежених коефіцієнтів, та А. Г. Баскаковим і О. І. Пастуховим [38], А. Г. Баскаковим [39, 40], А. Я. Дороговцевим [30], М. Ф. Городнім [41] у випадку необмежених операторних коефіцієнтів.

Важливі результати щодо властивостей розв'язків різницевих рівнянь отримано також у роботах А. О. Миролубова і М. О. Солдатова [42], О. М. Шарковського, Ю. Л. Майстренка і О. Ю. Романенко [43], А. М. Самойленка, Д. І. Мартинюка і М. О. Перестюка [44], М. Бенабдаллаха, А. Г. Руткаса і А. А. Соловійова [45], М. Ф. Bondarenko, А. G. Rutkas [46], В. Ю. Слюсарчука [47 – 58], В. І. Ткаченка [59], М. Ф. Бондаренка, Л. А. Власенко і А. Г. Руткаса [60], А. М. Самойленка і Ю. В. Теплінського [61], Р. Preda, М. Megan [62], М. Medved [63], М. Ф. Городнього і О. В. Вятчанінова [64], О. В. Вятчанінова [65], І. М. Грода [66], В. Г. Мазьї і М. Г. Сулімова [67] та ін.

# 1.1 Різницеві рівняння першого порядку. Умова експоненціальної дихотомії

Умова існування єдиного обмеженого на  $\mathbb{Z}$  розв'язку лінійного різницевого рівняння першого порядку зі змінним операторним коефіцієнтом у довільному банаховому просторі еквівалентна умові експоненціальної дихотомії. Експоненціальні дихотомії вивчалися в роботах В. Ю. Слюсарчука [28, 29], Д. Хенрі [68], А. Г. Баскакова і О. І. Пастухова [38], О. О. Покутного [69], С. Коффмана і Х. Шеффера [70], А. А. Бойчука, В. Ф. Журавльова, А. М. Самойленка [71], О. А. Бойчука, А. М. Самойленка [72], О. А. Бойчука [73], Р. К. Романовського і Л. В. Бельгарта [74], Г. В. Демиденка і А. О. Бондар [75].

Мабуть у найбільш загальному випадку умову експоненціальної дихотомії досліджував В. Ю. Слюсарчук. Сформулюємо один з його результатів.

Нехай  $E_n, n \in \mathbb{Z}$  — банахові простори,  $\|\cdot\|_{E_n}$  — норма в  $E_n$  і  $\mathfrak{M}$  — банахів простір обмежених двосторонніх послідовностей  $x = (x_n)$ , для кожної з яких  $x_n \in E_n, n \in \mathbb{Z}$ , з нормою  $\|x\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|_{E_n}$ .

Нехай  $L(E_k, E_l)$  — банахів простір лінійних неперервних операторів  $A : E_k \rightarrow E_l$  з нормою  $\|A\|_{L(E_k, E_l)} = \sup_{\|x\|_{E_k}=1} \|Ax\|_{E_l}$ .

Розглянемо оператори  $A_n \in L(E_n, E_{n+1}), n \in \mathbb{Z}$ , для яких

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A_n\|_{L(E_n, E_{n+1})} < +\infty,$$

і лінійні різницеві рівняння

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1}, n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

і

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1} + f_n, n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

де  $x_n \in E_n$  для всіх  $n \in \mathbb{Z}$  і  $f = (f_n) \in \mathfrak{M}$ .

Важливою для теорії різницевих рівнянь є задача про існування єдиного обмеженого розв'язку рівняння (1.2) для кожної послідовності  $f \in \mathfrak{M}$ , тобто, з урахуванням теореми Банаха про обернений оператор, задача про

умови оборотності оператора

$$(\mathfrak{A}y)_n = y_n - A_{n-1}y_{n-1}, n \in \mathbb{Z}, \quad (1.3)$$

що діє в просторі  $\mathfrak{M}$ . Цю задачу розв'язано в [29] із використанням означення експоненціальної дихотомії розв'язків рівняння (1.1). Сформулюємо це означення.

**Означення 1.1.** (див. [28, 29]). Для рівняння (1.1) має місце експоненціальна дихотомія на  $\mathbb{Z}$  (рівняння  $e$ -дихотомічне), якщо для кожного  $m \in \mathbb{Z}$  простір  $E_m$  зображується у вигляді прямої суми замкнених підпросторів  $E_m = E_m^+ \dot{+} E_m^-$  і виконуються такі умови:

а) проектори  $P_m^+$  і  $P_m^-$  на підпростори  $E_m^+$  і  $E_m^-$  рівномірно обмежені, тобто

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} (\|P_m^+\|_{L(E_m, E_m)} + \|P_m^-\|_{L(E_m, E_m)}) < +\infty; \quad (1.4)$$

б) для кожного  $z \in E_m^+$  розв'язок  $y_n$  задачі

$$y_{n+1} = A_n y_n, n \geq m, y_m = z \quad (1.5)$$

задовольняє нерівність  $\|y_n\|_{E_n} \leq N_1 q_1^{n-m} \|z\|_{E_m}$  для всіх  $n \geq m$  з деякими  $N_1 > 0$  і  $q_1 \in (0, 1)$ , не залежними від  $n$  і  $m$ ;

в) для кожного  $z \in E_m^-$  розв'язок  $y_n$  задачі

$$y_{n+1} = A_n y_n, n < m, y_m = z \quad (1.6)$$

задовольняє нерівність  $\|y_n\|_{E_n} \leq N_2 q_2^{m-n} \|z\|_{E_m}$  для всіх  $n \leq m$  з деякими  $N_2 > 0$  і  $q_2 \in (0, 1)$ , не залежними від  $n$  і  $m$ .

В. Ю. Слюсарчук довів таку теорему.

**Теорема 1.1.** (див. [28, 29]). *Рівняння (1.1)  $e$ -дихотомічне тоді і тільки тоді, коли оператор  $\mathfrak{A}$  має неперервний обернений.*

Перевірка умов експоненціальної дихотомії з означення 1.1 для конкретних різницевого рівнянь є окремою, досить складною задачею. У часткових випадках, зокрема, для рівнянь зі скінченною кількістю стрибків операторних коефіцієнтів, вона спрощується. Про це свідчать сформульовані у

цьому пункті результати.

М. Ф. Городній та його аспірантка І. В. Гончар розглядали різницеве рівняння першого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта у скінченновимірному банаховому просторі та отримали результати, які еквівалентні умові експоненціальної дихотомії. Сформулюємо ці результати.

Нехай  $X$  — скінченновимірний комплексний банахів простір з нормою  $\|\cdot\|$ ;  $A, B$  — лінійні оператори в  $X$ ;  $I$  — одиничний оператор в  $X$ .

Розглядається різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n + y_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

у якому  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — задана, а  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — шукана послідовність елементів простору  $X$ .

Нехай  $\sigma(A), \sigma(B)$  — спектри операторів  $A, B$  відповідно,  $S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ .

Покладемо  $Q_-^0 = \{z \in X \mid \sup_{n \geq 1} \|A^n z\| < \infty\}$ ;  
 $Q_+^0 = \{z \in X \mid \text{існує послідовність } \{a(\nu, 0, z), \nu \leq 0\} \text{ така, що}$

$$a(0, 0, z) = z; Ba(\nu, 0, z) = a(\nu + 1, 0, z), \nu \leq -1; \sup_{\nu \leq 0} \|a(\nu, 0, z)\| < \infty; \}.$$

Нехай  $X = Q_-^0 \dot{+} Q_+^0$ ,  $P_-^0, P_+^0$  — проектори в  $X$  на підпростори  $Q_-^0, Q_+^0$ , що відповідають зображенню  $X = Q_-^0 \dot{+} Q_+^0$ ;  $P_-^A, P_+^A$  — проектори в  $X$  на  $X_-(A), X_+(A)$ , що відповідають зображенню  $X = X_-(A) \dot{+} X_+(A)$ ,  $P_-^B, P_+^B$  проектори в  $X$  на  $X_-(B), X_+(B)$ , що відповідають зображенню  $X = X_-(B) \dot{+} X_+(B)$ .

У [76] було доведено таку теорему.

**Теорема 1.2.** (див. [76]). *У скінченновимірному комплексному банаховому просторі  $X$  для довільної обмеженої в  $X$  послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (1.7) має єдиний обмежений розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  у просторі  $X$  тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

- i)  $\sigma(A) \cap S = \emptyset, \sigma(B) \cap S = \emptyset$ ;
- ii)  $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$ .

Якщо умови *i*), *ii*) виконуються, то  $Q_-^0 = X_-(A)$ ,  $Q_+^0 = X_+(B)$  і відповідний до обмеженої послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  різницевого рівняння (1.7) визначається за такими формулами:

$$x_1 = P_-^0 y_0 + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} P_-^0 B_-^{|\nu|} P_-^B y_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} P_+^0 A_+^{-\nu} P_+^A y_\nu; \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2: x_n = & \sum_{k=1}^{n-1} A_-^{n-1-k} P_-^k y_k + \sum_{\nu=-\infty}^0 A_-^{n-1} P_-^0 B_-^{|\nu|} P_-^B y_\nu - \\ & - \sum_{\nu=n}^{\infty} P_+^{n-1} A_+^{n-1-\nu} P_+^A y_\nu; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \forall n \leq 0: x_n = & P_-^{n-1} y_{n-1} + \sum_{\nu=-\infty}^{n-2} P_-^{n-1} B_-^{|\nu|+n-1} P_-^B y_\nu - B_+^{-|n|-1} P_+^0 y_0 - \\ & - B_+^{-|n|} P_+^{-1} y_{-1} - \dots - B_+^{-1} P_+^{-|n|} y_{-|n|} - \sum_{\nu=1}^{\infty} B_+^{n-1} P_+ A_+^{-\nu} P_+^A y_\nu. \end{aligned} \quad (1.10)$$

У роботі [77] І. В. Гончар досліджує різницеве рівняння першого порядку зі змінним операторним коефіцієнтом у нескінченновимірному банаховому просторі  $X$ . Наведемо її результати.

Спочатку розглядається лінійне різницеве рівняння (1.7), у якому  $A, B$  — фіксовані оператори з простору лінійних обмежених операторів  $L(X)$ .

Для такого рівняння було доведено теорему, умови якої еквівалентні умовам експоненціальної дихотомії.

**Теорема 1.3** (див. [77, Теорема 1]). *Припустимо, що виконуються умови *i*), *ii*) теореми 1.2.*

*Тоді ряди з (1.8)–(1.10) абсолютно збігаються за нормою та задають відповідний до обмеженої послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  обмежений розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (1.7). Цей розв'язок єдиний у класі всіх обмежених в нескінченновимірному просторі  $X$  послідовностей.*

Також І.В. Гончар досліджує нелінійне різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + g(x_n) + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n + g(x_n) + y_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

де  $g : X \rightarrow X$  і задовольняє умову Ліпшиця зі сталою  $K$ , тобто

$$\exists K > 0 \forall x, z \in X : \|g(x) - g(z)\| \leq K\|x - z\|.$$

Для такого рівняння також доведено теорему про існування єдиного обмеженого розв'язку.

**Теорема 1.4.** (див. [77, Теорема 3]) *Нехай  $\sigma(A) \cap S = \emptyset, \sigma(B) \cap S = \emptyset$ ,  $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$  і виконується нерівність  $KL \max\{M_1, M_2\} < 1$ , де  $L, M_1, M_2$  — сталі з оцінки  $\|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{y}\|_\infty L \max\{M_1, M_2\}$ ,*

$$M_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \|A_+^{-k}\| + \sup_{p \geq 0} \left\{ \sum_{k=1}^p \|A_-^k\| + \|A_-^p\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \|B_-^\nu\| \right\},$$

$$M_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|B_-^j\| + \sup_{p \geq 1} \left\{ \sum_{k=1}^p \|B_+^{-k}\| + \|B_+^{-p}\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \|A_+^{-\nu}\| \right\}.$$

*Тоді для довільної обмеженої послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  нелінійне різницеве рівняння (1.11) має єдиний обмежений розв'язок.*

В. Ю. Слюсарчук у роботі [28] встановив умови експоненціальної дихотомії розв'язків лінійного різницевого рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами (тобто зі скінченною кількістю стрибків в нашій термінології). Сформулюємо його результат.

В комплексному банаховому просторі  $E$  розглядається різницеве рівняння

$$x_n = B_{n-1}x_{n-1}, n \in \mathbb{Z}, \quad (1.12)$$

в якому  $B_n = \begin{cases} D, n < n_1, \\ A_n, n_1 \leq n < n_2, \\ C, n \geq n_2, \end{cases}$  де  $n_1$  і  $n_2$  — довільні цілі числа, для

яких  $n_1 < n_2$ , оператори  $C, D, A_n, n_1 \leq n < n_2$ , належать  $L(E)$ .

**Теорема 1.5.** (див. [28, Теорема 9]) *Для  $e$ -дихотомічності рівняння (1.12) необхідно і достатньо виконання таких умов:*

1) *для кожного  $t \in \mathbb{Z}$  банахів простір  $E$  зображується у вигляді прямої суми замкнених підпросторів  $E = E_m^+ \oplus E_m^-$ , для яких*

*$E_n^+ = E_{n_2}^+$  і  $E_n^- = E_{n_2}^-$  для всіх  $n \geq n_2$  та  $E_n^+ = E_{n_1-1}^+$  і  $E_n^- = E_{n_1-1}^-$  для всіх  $n \leq n_1 - 1$ ;*

2)  *$CE_{n_2}^+ \subset E_{n_2}^+, CE_{n_2}^- = E_{n_2}^-$ , оператор  $P_{n_2}^- CP_{n_2}^- : E_{n_2}^- \rightarrow E_{n_2}^-$  має неперерв-*

ний обернений  $(P_{n_2}^- C P_{n_2}^-)^{-1}$  і спектральні радіуси

$$r(P_{n_2}^+ C P_{n_2}^+) < 1, r\left((P_{n_2}^- C P_{n_2}^-)^{-1}\right) < 1;$$

3)  $DE_{n_1-1}^+ \subset E_{n_1-1}^+ \cap E_{n_1}^+, DE_{n_1-1}^- = E_{n_1-1}^- = E_{n_1}^-$ , оператор  $P_{n_1-1}^- DP_{n_1-1}^- : E_{n_1-1}^- \rightarrow E_{n_1-1}^-$  має неперервний обернений  $(P_{n_1-1}^- DP_{n_1-1}^-)^{-1}$  і

$$r(P_{n_1-1}^+ DP_{n_1-1}^+) < 1, r\left((P_{n_1-1}^- DP_{n_1-1}^-)^{-1}\right) < 1;$$

4)  $A_{n_1} E_{n_1}^+ \subset E_{n_1+1}^+, A_{n_1+1} E_{n_1+1}^+ \subset E_{n_1+2}^+, \dots, A_{n_2-1} E_{n_2-1}^+ \subset E_{n_2}^+$ ;

5)  $A_{n_1} E_{n_1}^- = E_{n_1+1}^-, A_{n_1+1} E_{n_1+1}^- = E_{n_1+2}^-, \dots, A_{n_2-1} E_{n_2-1}^- = E_{n_2}^-$  і оператори  $A_{n_1}|_{E_{n_1}^-} : E_{n_1}^- \rightarrow E_{n_1+1}^-, A_{n_1+1}|_{E_{n_1+1}^-} : E_{n_1+1}^- \rightarrow E_{n_1+2}^-, \dots, A_{n_2-1}|_{E_{n_2-1}^-} : E_{n_2-1}^- \rightarrow E_{n_2}^-$  мають неперервні обернені оператори.

А. В. Чайковський і О. А. Лагода у [78] теж розглядали різницеве рівняння першого порядку зі скінченною кількістю стрибків операторного коефіцієнта в банаховому просторі  $X$ , а саме рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_0 x_n + y_n, n \leq 0, \\ x_{n+1} = A_n x_n + y_n, 1 \leq n \leq N-1, \\ x_{n+1} = A_N x_n + y_n, n \geq N, \end{cases} \quad (1.13)$$

де  $N$  — фіксоване натуральне число,  $A_k, 0 \leq k \leq N$ , — оператори з  $L(X)$ .

Ними доведено таку теорему.

**Теорема 1.6.** (див. [78, Теорема 2]) *Нехай  $\sigma(A_0) \cap S = \emptyset, \sigma(A_N) \cap S = \emptyset$  і  $A_{N-1} A_{N-2} \dots A_1$  є ін'єкцією. Тоді рівняння (1.13) має єдиний обмежений розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X$  для довільної обмеженої послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X$  тоді і тільки тоді, коли*

$$X = W \dot{+} X_-(A_N),$$

де  $W = \{A_{N-1} A_{N-2} \dots A_1 x \mid x \in X_+(A_0)\}$ .

В дисертаційній роботі проводяться аналогічні дослідження для різницевих рівнянь другого порядку зі стрибками операторного коефіцієнта.

## 1.2 Різницеві рівняння другого порядку зі сталими операторними коефіцієнтами

Різницеві рівняння і системи рівнянь другого порядку є ефективним інструментом математичного моделювання, відіграють велику роль і мають широке застосування в різних сферах. Наприклад, загальний член послідовності чисел Фібоначчі є розв'язком лінійного різницевого рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Також різницеві рівняння і системи рівнянь другого порядку використовуються, наприклад, у моделюванні динамічних процесів в економіці, банківській справі та ін.

У дисертаційній роботі вивчаються різницеві рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів. Аналогічні рівняння зі сталими операторними коефіцієнтами досліджувались, зокрема, А. Г. Баскаковим [36], А. Я. Дороговцевим [30], А. Г. Баскаковим і А. Ю. Дуплищевою [79], Л. Ю. Кабанцовою [80].

Сформулюємо результат, отриманий А. Я. Дороговцевим в [30].

Нехай  $(B, \|\cdot\|)$  — комплексний банахів простір,  $A_0, A_1$  — фіксовані оператори з простору всіх лінійних обмежених операторів  $L(B)$ ,  $S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ .

Розглядається різницеве рівняння

$$x_{n+1} = A_0 x_n + A_1 x_{n-1} + y_n, n \in \mathbb{Z}, \quad (1.14)$$

у якому  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — задана, а  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — шукана послідовність елементів простору  $B$ .

**Теорема 1.7.** (див. [30, Теорема 4, с.15]). *Нехай  $A_0 A_1 = A_1 A_0$ . Для того, щоб для довільної обмеженої послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (1.14) мало єдиний обмежений розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  необхідно і достатньо, щоб для довільного  $\lambda \in S$  оператор  $\lambda^2 I - \lambda A_0 - A_1$  мав неперервний обернений на  $B$ .*

Теорему 1.7 можна застосувати до різницевого рівняння

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = Ax_n + y_n, n \in \mathbb{Z}, \quad (1.15)$$

де  $A \in L(B)$ . У лівій частині цього рівняння записано різницевий аналог другої похідної. Прикладні задачі, які зводяться до аналізу рівняння (1.15), розглядаються в [81, 82]. Також різницеве рівняння (1.15) із замкненим оператором  $A$  виникає при дискретизації деяких типів рівнянь в частинних похідних.

У розділі 2 дисертаційного дослідження розглядається аналогічне до (1.15) різницеве рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта.

У статті [41] М. Ф. Городнім досліджувалось питання про існування і єдиність обмежених і періодичних розв'язків різницевого рівняння

$$Ax_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k x_{n+k} + y_n, n \in \mathbb{Z}, \quad (1.16)$$

в якому  $A$  — замкнений оператор,  $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — послідовність лінійних обмежених операторів в комплексному банаховому просторі  $B$ . Наведемо основний результат роботи [41].

Нехай  $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$  такий набір операторів з  $L(B)$ , що ряд

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_n z^n$$

збігається за нормою в кільці  $\{z \in \mathbb{C} \mid s_0 < |z| < s_1\}$ , де  $s_0, s_1$  — деякі фіксовані дійсні числа, такі, що  $0 < s_0 < 1 < s_1$ ,  $A$  — замкнений оператор з областю визначення  $D$ . Нехай

$$\sup_n \|x_n\| + \sup_n \|Ax_n\| < +\infty$$

і

$$\mathfrak{M} := \{\{C_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset L(B) \mid \forall n \in \mathbb{Z} : C_n : B \rightarrow D, AC_n \in L(B)\};$$

$$\exists t_0 \in (0; 1); \exists t_1 \in (1; +\infty) : \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\|C_j\| + \|AC_j\|) |z|^j < +\infty, t_0 < |z| < t_1;$$

$$\forall m \in \mathbb{Z} : (AC_m - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k C_{m+k})u = (C_m A - \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{m+k} A_k)u, u \in D\}.$$

**Теорема 1.8.** (див. [41, Теорема 1]). *Наступні умови еквівалентні:*

1) існує набір операторів  $\{C_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \mathfrak{M}$  такий, що рівняння (1.16) має для довільної обмеженої в  $B$  послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  обмежений розв'язок вигляду

$$\{x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{n-k} y_k, n \in \mathbb{Z}\};$$

2) для кожного  $z, |z| = 1$  точка нуль належить резольвентній множині оператора  $A - f(z)$ ;

3) для довільної обмеженої в  $B$  послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  існує єдиний розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  різницевого рівняння (1.16), який задовільняє умову

$$\sup_n \|x_n\| + \sup_n \|Ax_n\| < +\infty.$$

Якщо в рівнянні (1.16) покласти  $A_1 = -I$ ,  $A = O$ ,  $A_k = 0, |k| \geq 2$ , де  $I, O$  — одиничний і нульовий оператори в  $B$ , то отримаємо рівняння

$$x_{n+1} = A_0 x_n + A_1 x_{n-1} + y_n, n \in \mathbb{Z}.$$

Тому з теореми 1.8 зокрема випливає, що твердження теореми 1.7 виконуються і у випадку, коли  $A_0 A_1 \neq A_1 A_0$ .

У розділі 3 дисертації розглядається аналогічне до (1.14) різницеве рівняння зі стрибками операторних коефіцієнтів.

Аналогічні питання для різницевого рівнянь другого порядку вивчала Л. Ю. Кабанцова. У роботі [80] розглядається лінійне різницеве рівняння другого порядку в комплексному банаховому просторі  $X$  з обмеженими операторними коефіцієнтами  $B_1, B_2$

$$x_{n+2} + B_1 x_{n+1} + B_2 x_n = g_n, n \in \mathbb{Z}, \quad (1.17)$$

у якому  $g = \{g_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(\mathbb{Z}, X)$ .

Якщо  $p = \infty$ , то

$$l_\infty(\mathbb{Z}, X) = \{g = \{g_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X \mid \|g\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|g_n\| < \infty\},$$

тобто у нашій термінології досліджується питання про існування єдиного обмеженого розв'язку різницевого рівняння (1.17) для кожної  $g \in l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ .

Розглядається випадок, коли відповідне «алгебраїчне» операторне рівняння

$$\Lambda^2 + B_1\Lambda + B_2 = O \quad (1.18)$$

має в  $L(X)$  розділені корені  $\Lambda_1, \Lambda_2$ , тобто такі, що оператор  $\Lambda_1 - \Lambda_2$  неперервно оборотний. Зокрема, Л. Ю. Кабанцовою отримано такі результати.

Нехай  $X^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \mid x^{(1)}, x^{(2)} \in X \right\}$  — банахів простір з покомпонентним додаванням і множенням на скаляр і нормою

$$\|\bar{x}\|_{X^2} = \|x^{(1)}\| + \|x^{(2)}\|, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \in X^2.$$

Якщо оператори  $E, F, G, H$  належать  $L(X)$ , то, як і в скалярному випадку, оператор  $T = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$  визначається за правилом

$$T\bar{x} = \begin{pmatrix} Ex^{(1)} + Fx^{(2)} \\ Gx^{(1)} + Hx^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \in X^2.$$

**Теорема 1.10.** (див. [80, Теорема 2]). *Якщо рівняння (1.18) має два розділені корені  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L(X)$ , то оператор  $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} O & -I \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}$  подібний блочно-діагональному оператору  $\Lambda = \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & O \\ O & -\Lambda_2 \end{pmatrix}$ . Також має місце рівність*

$$\mathbb{B} = U^{-1}\Lambda U, \quad (1.19)$$

де

$$U = \begin{pmatrix} I & I \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

**Теорема 1.11.** (див. [80, Теорема 3]). *Нехай рівняння (1.18) має розділені корені  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L(X)$ . Для того, щоб різницеве рівняння (1.17) мало*

єдиний обмежений розв'язок для кожної  $g \in l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ , необхідно і достатньо, щоб

$$(\sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2)) \cap S = \emptyset,$$

де  $\sigma(\Lambda_k)$  — спектри операторів  $\Lambda_k, k = 1, 2, S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ .

Зазначимо, що порядок множників у правій частині формули (1.19) і, як наслідок, низка подальших формул в [80], записані неправильно (див. зауваження 3.1 дисертаційної роботи).

У теоремі 3.2 дисертаційної роботи розглядається аналогічне до (1.17) різницеве рівняння зі стрибками операторних коефіцієнтів у випадку, коли відповідні «алгебраїчні» операторні рівняння мають розділені корені.

### 1.3 Різницеві рівняння з випадковою правою частиною

Важливим для застосувань також є дослідження різницевих рівнянь з випадковою правою частиною, оскільки вони адекватно моделюють поведінку різноманітних реальних процесів з випадковим впливом. Різні властивості розв'язків таких рівнянь вивчалися, зокрема, в роботах А. Я. Дороговцева [30, 83, 84], Т. Morozan [85, 86], А. Brandt [87], Р. Preda, М. Megan [88], У. Morita [82], М. Ф. Городнього [41], М. Ф. Городнього та І. В. Гончар [89].

Сформулюємо результат, отриманий А. Я. Дороговцевим в [30].

Нехай  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — повний імовірнісний простір,  $B$  — комплексний сепарабельний банахів простір,  $\mathcal{B}(X)$  —  $\sigma$ -алгебра борельових множин простору  $B$ ,  $A$  — фіксований оператор з простору всіх лінійних обмежених операторів  $L(B)$ ,  $\sigma(A)$  — спектр оператора  $A$ ,  $S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ .

Спочатку запишемо означення стаціонарного (у вузькому сенсі) процесу.

**Означення 1.2.** Процес  $B$ -значних випадкових елементів  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , заданих на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , називається стаціонарним (у вузькому сенсі), якщо  $\forall m \in \mathbb{N} \forall n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{Z} \forall Q_1, Q_2, \dots, Q_m \in \mathcal{B}(X)$  :

$$P\{x_{n_k+1} \in Q_k, 1 \leq k \leq m\} = P\{x_{n_k} \in Q_k, 1 \leq k \leq m\}.$$

Означення випадкових елементів і їх властивості сформульовані, наприклад, в [90].

**Теорема 1.12.** (див. [30, Теорема 1, с. 65]). *Для того, щоб для довільного  $B$ -значного стаціонарного процесу  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  з  $E\|y(0)\| < +\infty$  рівняння*

$$x_{n+1} = Ax_n + y_n, n \in \mathbb{Z}, \tag{1.20}$$

*мало єдиний стаціонарний розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  з  $E\|x(0)\| < +\infty$ , необхідно і достатньо, щоб  $\sigma(A) \cap S = \emptyset$ .*

При доведенні теореми 1.12 встановлено, що відповідний до  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний стаціонарний розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (1.20) зображується у вигляді

$$x_n = \sum_{j=0}^{\infty} (AP_-)^j y_{n-1-j} - \sum_{j=-\infty}^{-1} (AP_+)^j y_{n-1-j}, \quad (1.21)$$

де  $P_- = -\frac{1}{2\pi i} \int_S (A - \lambda I)^{-1} d\lambda$ ,  $P_+ = I - P_-$  — проектори.

Формула (1.21) суттєво використовується у четвертому розділі дисертації.

Також А. Я. Дороговцевим було доведено таку теорему.

**Теорема 1.13.** (див. [30, Теорема 13, с. 87]). *Нехай  $p \in N \cup \{0\}$  і  $\{A_0, A_1, \dots, A_p\} \subset L(B)$ . Для того, щоб для довільного  $B$ -значного стаціонарного процесу  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  з  $E\|y(0)\| < +\infty$  рівняння*

$$A_0 x_n + A_1 x_{n-1} + \dots + A_p x_{n-p} = y_n, n \in \mathbb{Z},$$

*мало єдиний стаціонарний розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  з  $E\|x(0)\| < +\infty$ , необхідно і достатньо, щоб для будь-якого  $\lambda \in S$  оператор*

$$A_0 \lambda^p + A_1 \lambda^{p-1} + \dots + A_p$$

*мав неперервний обернений на  $B$ .*

Теорему 1.13 можна застосувати до різницевого рівняння

$$\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = A\xi_n + \eta_n, n \in \mathbb{Z}, \quad (1.22)$$

у якому  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — заданий стаціонарний процес  $B$ -значних випадкових елементів,  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — шуканий стаціонарний розв'язок  $B$ -значних випадкових елементів, заданих на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Рівняння (1.22) навіть із замкненим оператором  $A$  розглядалося в [83], а більш загальне різницеве рівняння — в [41].

У розділі 4 дисертаційного дослідження розглядається аналогічне до (1.22) різницеве рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта та вивчаються умови існування обмежених в середньому розв'язків для такого рівняння.

У статті [89] М. Ф. Городній та І. В. Гончар досліджували питання про існування єдиного обмеженого у середньому порядку  $p$  розв'язку різни-

цевого рівняння першого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта. Сформулюємо їх результат.

Нехай  $X$  — комплексний сепарабельний банахів простір,  $L(X)$  — набір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з  $X$  в  $X$ . Зафіксуємо  $p \in [1, \infty)$  і позначимо через  $Y$  банахів простір  $L_p(\Omega, X)$  усіх класів еквівалентних випадкових елементів  $\xi : \Omega \rightarrow X$  таких, що

$$\|\xi\|_p = (E\|\xi\|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Послідовність  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset Y$  будемо називати обмеженою в середньому порядку  $p$ , якщо

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|\xi_n\|_p < \infty.$$

Розглядається різницеве рівняння

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = A\xi_n + \eta_n, n \geq 1, \\ \xi_{n+1} = B\xi_n + \eta_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

у якому  $A, B$  — фіксовані оператори з  $L(X)$ ,  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — задана,  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — шукана послідовність випадкових елементів простору  $Y$ , а рівності з (1.23) повинні виконуватись з імовірністю 1.

У [89] було доведено таку терему.

**Теорема 1.14.** (див. [89, Теорема 2]). *Припустимо, що виконуються такі умови:*

1)  $\sigma(A) \cap S = \emptyset, \sigma(B) \cap S = \emptyset$ ;

2)  $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$ .

*Тоді різницеве рівняння (1.23) має для довільної обмеженої в середньому порядку  $p$  послідовності  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений в середньому порядку  $p$  розв'язок  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .*

У четвертому розділі дисертації проводяться аналогічні дослідження для різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта

$$\begin{cases} \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = A\xi_n + \eta_n, & n \geq 1, \\ \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = B\xi_n + \eta_n, & n \leq 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Для такого рівняння було знайдено достатні умови на оператори  $A, B$ , при виконанні яких різницеве рівняння (1.24) має для кожної обмеженої в середньому послідовності  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений у середньому розв'язок  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , а також оцінено близькість при  $n \rightarrow \infty$  компонент обмеженого у середньому розв'язків різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта (1.24) до компонент обмеженого у середньому розв'язку різницевого рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом

$$\zeta_{n+1} - 2\zeta_n + \zeta_{n-1} = A\zeta_n + \eta_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

## 1.4 Висновки до розділу 1

Цей розділ є допоміжним і не містить нових результатів.

У ньому викладено основні поняття і сформульовано відомі результати, що стосуються тематики дисертації і свідчать про актуальність і новизну задач, які досліджуються в дисертаційній роботі. У пункті 1.1 показано зв'язок умови обмеженості розв'язків різницевого рівняння першого порядку із умовою експоненціальної дихотомії. У пункті 1.2 та пункті 1.3 цього розділу було зроблено короткий огляд результатів, котрі стосуються різницевих рівнянь другого порядку та різницевих рівнянь з випадковою правою частиною відповідно, і показано, в яких напрямках проводяться подальші дослідження таких рівнянь в даній дисертаційній роботі.

# Розділ 2

## ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

У цьому розділі досліджується питання про існування єдиного обмеженого на  $\mathbb{Z}$  розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта, ліва частина якого є різницеvim аналогом другої похідної, у скінченновимірному банаховому просторі.

### 2.1 Постановка задачі

Нехай  $X$  —  $m$ -вимірний комплексний банахів простір з нормою  $\|\cdot\|$  і нульовим елементом  $\bar{0}$ ;  $I, O$  — одиничний та нульовий оператори в  $X$ ;  $A, B$  — фіксовані лінійні оператори в  $X$ .

Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = Ax_n + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = Bx_n + y_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

у якому  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — задана, а  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — шукана послідовність елементів простору  $X$ .

Знайдемо необхідні і достатні умови на оператори  $A, B$ , при виконанні яких виконується така умова.

**Умова обмеженості.** Для довільної обмеженої в  $X$  послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (2.1) має єдиний обмежений розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  у просторі  $X$ .

## 2.2 Допоміжні результати

Покладемо  $X^2 = \left\{ \bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \mid x^{(1)}, x^{(2)} \in X \right\}$ .

Тоді  $X^2$  —  $2m$ -вимірний комплексний банахів простір з покоординатним додаванням і множенням на скаляр та нормою  $\|\bar{x}\|_* = \|x^{(1)}\| + \|x^{(2)}\|$ ,  $\bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \in X^2$ .

Якщо  $E, F, G, H$  — лінійні оператори в  $X$ , то, як і для випадку числових матриць,  $T = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$  задає лінійний оператор в  $X^2$  за правилом

$$T\bar{x} = \begin{pmatrix} Ex^{(1)} + Fx^{(2)} \\ Gx^{(1)} + Hx^{(2)} \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \in X^2.$$

Нехай  $T_A = \begin{pmatrix} A + 2I & -I \\ I & O \end{pmatrix}$ ,  $T_B = \begin{pmatrix} B + 2I & -I \\ I & O \end{pmatrix}$ ,  $\sigma(T_A)$  — набір власних чисел оператора  $T_A$ ,  $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

Для доведення основного результату цього розділу використовуються наведені нижче твердження.

**Лема 2.1.** *Для оператора  $T_A$  існує обернений оператор*  
 $T_A^{-1} = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & A + 2I \end{pmatrix}$ .

*Доведення.* Справді

$$\begin{pmatrix} A + 2I & -I \\ I & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} O & I \\ -I & A + 2I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix},$$

і цього досить у скінченновимірному просторі, бо у ньому правий обернений оператор є оберненим оператором.

□

**Лема 2.2** *Число  $\lambda \neq 0$  є власним числом  $T_A$ , якому відповідає власний вектор  $\begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix}$ , тоді і тільки тоді, коли  $\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$  є власним числом  $A$ , якому відповідає власний вектор  $v$ .*

*Доведення. Необхідність.* Нехай  $\lambda \neq 0$  — власне число  $T_A$ , якому відповідає власний вектор  $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ .

Тоді  $T_A \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$  у тому і лише у тому випадку, коли

$$\begin{cases} (A + 2I)v - w = \lambda v \\ v = \lambda w. \end{cases}$$

Оскільки  $\lambda \neq 0$ , то  $v \neq \bar{0}$ , бо інакше із того, що  $v = \lambda w$  випливає, що і  $w = \bar{0}$ , але власний вектор ненульовий. Тоді  $w = \frac{1}{\lambda}v$ .

Підставимо  $w = \frac{1}{\lambda}v$  в  $(A + 2I)v - w = \lambda v$ . Отримаємо  $Av = (\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2)v$ ,

а також  $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{\lambda}v \end{pmatrix}$ , тобто  $\begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix}$  — власний вектор  $T_A$ .

*Достатність.* Нехай  $\lambda \neq 0$ ,  $(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2)$  — власне число  $A$ , якому відповідає власний вектор  $v$ . Тоді

$$\begin{aligned} T_A \begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A + 2I & -I \\ I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + 2I)(\lambda v) & -v \\ \lambda v & \end{pmatrix} = \\ &= \lambda \begin{pmatrix} Av + 2v - \frac{1}{\lambda}v \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

бо  $Av = \frac{1}{\lambda}v + \lambda v - 2v$ .

□

**Лема 2.3.** Якщо  $\lambda \in \sigma(T_A)$  і йому відповідає власний вектор  $\begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix}$ , то  $\lambda \neq 0$ ,  $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T_A)$  і йому відповідає власний вектор  $\begin{pmatrix} v \\ \lambda v \end{pmatrix}$ .

*Доведення.* Доведемо, що  $\lambda = 0$  — не є власним числом  $T_A$ . Справді

$$\begin{aligned} T_A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A + 2I & -I \\ I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (A + 2I)u - v = \bar{0}, \\ u = \bar{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Отже,  $\lambda \neq 0$ .

Нехай  $\lambda \in \sigma(T_A)$  і йому відповідає власний вектор  $\begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix}$ . Доведемо, що  $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T_A)$  і йому відповідає власний вектор  $\begin{pmatrix} v \\ \lambda v \end{pmatrix}$ .

Оскільки  $\begin{pmatrix} v \\ \lambda v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} v \\ v \end{pmatrix}$ , то досить перевірити, що  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} v \\ v \end{pmatrix}$  — власний вектор  $T_A$ , якому відповідає власне число  $\frac{1}{\lambda}$ , а це виконується, бо внаслідок леми 2.2

$$Av = \frac{1}{\lambda}v + \lambda v - 2v,$$

звідки

$$T_A \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + 2I)\left(\frac{1}{\lambda}v\right) - v \\ \frac{1}{\lambda}v \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} Av + 2v - \lambda v \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}v \\ v \end{pmatrix}.$$

□

**Зауваження 2.1.** При  $|\lambda| < 1$  вектори

$$\begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} v \\ \lambda v \end{pmatrix}, \text{ де } v \neq \bar{0},$$

лінійно незалежні.

$$\begin{aligned} \text{Доведення. } \alpha \begin{pmatrix} \lambda v \\ v \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v \\ \lambda v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda\alpha + \beta)v = \bar{0} \\ (\alpha + \lambda\beta)v = \bar{0} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \lambda\beta = 0 \end{cases}, \text{ але } \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \neq 0, \text{ бо } |\lambda| < 1. \end{aligned}$$

Отже, система має тільки нульовий розв'язок  $\alpha = \beta = 0$ .

□

**Лема 2.4.**  $\sigma(T_A) \cap S = \emptyset$ , тоді і тільки тоді, коли  $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \emptyset$ .

*Доведення.* Оскільки функція Жуковського  $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  переводить коло

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{it} \mid t \in [0; 2\pi)\}$$

у відрізок  $[-1; 1]$ , то функція

$$g(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 = 2f(\lambda) - 2$$

переводить  $S$  у відрізок  $[-4; 0]$ . Тому твердження леми випливає з леми 2.2.

□

**Лема 2.5.** *Рівняння*

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 = \mu$$

має при заданому  $\mu \in \mathbb{C}$  два корені, один з яких лежить всередині кола  $S$ , а інший зовні  $S$ , тоді і тільки тоді, коли  $\mu \notin [-4; 0]$ .

*Доведення.* Твердження леми випливає з того, що функція Жуковського  $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  переводить  $S$  у відрізок  $[-1; 1]$ , а кола  $\{re^{it} \mid t \in [0; 2\pi)\}$  та  $\{\frac{1}{r}e^{-it} \mid t \in [0; 2\pi)\}$ , де  $r > 1$ , в еліпс

$$\left\{ \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos t + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin t \mid t \in [0; 2\pi) \right\},$$

причому при  $r > 1$  кола радіуса  $r$  та кола радіуса  $\frac{1}{r}$  переводяться в еліпс бієктивно.

Зокрема, якщо  $\mu \notin [-1; 1]$ , то через  $\mu$  проходить рівно один такий еліпс.

□

**Зауваження 2.2.** Якщо  $\lambda = \lambda_1$  — корінь  $\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 = \mu$ , то  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$  — теж корінь  $\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 = \mu$ .

**Лема 2.6.** Якщо  $\mu$  — власне число оператора  $A$ , якому відповідає клітина Жордана порядку  $p$ , і  $\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 = \mu$ , то власним числам  $\lambda, \frac{1}{\lambda}$  оператора  $T_A$  відповідають клітини Жордана порядку, не меншого за  $p$ .

*Доведення.* Із умов леми випливає, що в  $X$  існує такий набір лінійно незалежних векторів  $e_1, e_2, \dots, e_p$ , що

$$\begin{cases} (A - \mu I)e_p = e_{p-1}, \\ (A - \mu I)e_{p-1} = e_{p-2}, \\ \dots \\ (A - \mu I)e_2 = e_1, \\ (A - \mu I)e_1 = \bar{0}; \end{cases} \quad (2.2)$$

Оскільки  $Ae_1 = \mu e_1$ , то

$$T_A \begin{pmatrix} \lambda e_1 \\ e_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda e_1 \\ e_1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

тобто

$$(T_A - \lambda E) \begin{pmatrix} \lambda e_1 \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Знайдемо тепер такий вектор  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ , що

$$(T_A - \lambda E) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e_1 \\ e_1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Відзначимо, що (2.5) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{pmatrix} (A - \mu I) + \frac{1}{\lambda} I & -I \\ I & -\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e_1 \\ e_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} (A - \mu I)v_1 + \frac{1}{\lambda}v_1 - v_2 = \lambda e_1, \\ v_1 - \lambda v_2 = e_1, \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (A - \mu I)v_1 + \frac{1}{\lambda}e_1 = \lambda e_1, \\ v_1 - \lambda v_2 = e_1, \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (A - \mu I)v_1 = \lambda(1 - \frac{1}{\lambda^2})e_1, \\ v_2 = \frac{1}{\lambda}(v_1 - e_1). \end{cases}
\end{aligned}$$

Тому з (2.2) випливає, що досить вибрати  $v_1 = \lambda(1 - \frac{1}{\lambda^2})e_2$ . Тоді отримаємо

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(1 - \frac{1}{\lambda^2})e_2 \\ (1 - \frac{1}{\lambda^2})e_2 - \frac{1}{\lambda}e_1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Зауважимо, що (2.6) знаходиться не єдиним способом, оскільки розв'язком рівняння  $(A - \mu I)v_1 = \lambda(1 - \frac{1}{\lambda^2})e_1$  є, наприклад,  $v_1 = \lambda(1 - \frac{1}{\lambda^2})e_2 + ke_1$ . Покладемо тепер

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e_1 \\ e_1 \end{pmatrix}, \\
\bar{v}_2 &= \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(1 - \frac{1}{\lambda^2})e_2 \\ (1 - \frac{1}{\lambda^2})e_2 - \frac{1}{\lambda}e_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тоді  $(T_A - \lambda E)\bar{v}_1 = \bar{0}$ ,  $(T_A - \lambda E)\bar{v}_2 = \bar{v}_1$ .

Знайдемо такі вектори  $\bar{v}_k$ ,  $2 \leq k \leq p$ , що

$$\forall 1 \leq k \leq p-1 : (T_A - \lambda E)\bar{v}_{k+1} = \bar{v}_k. \quad (2.7)$$

Зауважимо, що

$$(T_A - \lambda E)\bar{v}_{k+1} = \bar{v}_k \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \mu I)v_1^{(k+1)} + \frac{1}{\lambda}v_1^{(k+1)} - v_2^{(k+1)} = v_1^{(k)}, \\ v_1^{(k+1)} - \lambda v_2^{(k+1)} = v_2^{(k)}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A - \mu I)v_1^{(k+1)} = v_1^{(k)} - \frac{1}{\lambda}v_2^{(k)}, \\ v_1^{(k+1)} - \lambda v_2^{(k+1)} = v_2^{(k)}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Оскільки (2.8) виконується для усіх  $1 \leq k \leq p-1$ , то послідовно матимемо:

$$\begin{aligned} (A - \mu I)v_1^{(k+1)} &= v_1^{(k)} - \frac{1}{\lambda}v_2^{(k)} = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)v_1^{(k)} + \frac{1}{\lambda^2}(v_1^{(k)} - \lambda v_2^{(k)}) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)v_1^{(k)} + \frac{1}{\lambda^2}v_2^{(k-1)} = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)v_1^{(k)} + \frac{1}{\lambda^3}v_1^{(k-1)} - \frac{1}{\lambda^3}(v_1^{(k-1)} - \lambda v_2^{(k-1)}) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)v_1^{(k)} + \frac{1}{\lambda^3}v_1^{(k-1)} - \frac{1}{\lambda^3}v_2^{(k-2)} = \dots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)v_1^{(k)} + \frac{1}{\lambda^3}v_1^{(k-1)} - \dots + (-1)^k \frac{1}{\lambda^{k+1}}v_1^{(1)} + (-1)^{k+1} \frac{1}{\lambda^{k+1}}(v_1^{(1)} - \lambda v_2^{(1)}). \end{aligned}$$

Оскільки  $v_1^{(1)} = \lambda e_1$ ,  $v_2^{(1)} = e_1$ , то остаточно

$$(A - \mu I)v_1^{(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)v_1^{(k)} + \frac{1}{\lambda^3}v_1^{(k-1)} - \dots + (-1)^k \frac{1}{\lambda^{k+1}}v_1^{(1)}. \quad (2.9)$$

Також  $(A - \mu I)v_1^{(k+1)} = v_1^{(k)} - \frac{1}{\lambda}v_1^{(k+1)} + v_2^{(k+1)}$ , звідки

$$v_2^{(k+1)} = \frac{1}{\lambda}v_1^{(k+1)} - \frac{1}{\lambda^2}v_1^{(k)} + \dots + (-1)^k \frac{1}{\lambda^{k+1}}v_1^{(1)}. \quad (2.10)$$

Зокрема, при  $k = 1$  (2.9) записується у вигляді

$$(A - \mu I)v_1^{(2)} = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)v_1^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\lambda e_1,$$

а отже, з урахуванням (2.2) можна покласти

$$v_1^{(2)} = \lambda\left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)e_2. \quad (2.11)$$

При цьому з (2.10) матимемо

$$v_2^{(2)} = \frac{1}{\lambda}v_1^{(2)} - \frac{1}{\lambda^2}v_1^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)e_2 - \frac{1}{\lambda}e_1. \quad (2.12)$$

Це співпадає з (2.6).

Оскільки при фіксованому  $1 \leq k \leq p - 1$  у правій частині (2.9) маємо лінійну комбінацію векторів  $e_1, e_2, \dots, e_k$ , то вектори  $\bar{v}_{k+1}$  послідовно визначаються за допомогою співвідношень (2.9), (2.10). Тому внаслідок рівностей (2.7) оператор  $T_A$  має клітину Жордана порядку, не меншого за  $p$ .

Відзначимо, що внаслідок співвідношень (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) для усіх допустимих  $k$

$$v_2^{(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)^k e_{k+1} + h_k(\lambda; e_1, e_2, \dots, e_k), \quad (2.13)$$

де  $h_k(\lambda; e_1, e_2, \dots, e_k)$  — деяка лінійна комбінація базисних векторів  $e_1, e_2, \dots, e_k$ .

Щодо власного числа  $\frac{1}{\lambda}$  міркування аналогічні.

□

Розглянемо клітину Жордана порядку  $p$

$$J(\mu, p) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

**Лема 2.7.** *Нехай  $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \emptyset$ . Тоді кожній клітині Жордана  $J(\mu, p)$  матриці оператора  $A$  відповідають рівно дві клітини Жордана  $J(\lambda, p)$ ,  $J(\frac{1}{\lambda}, p)$  матриці оператора  $T_A$ , де  $\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$ .*

*Доведення.* З лем 2.2, 2.3, 2.6 випливає, що коли матриця оператора  $A$  має клітину Жордана  $J(\mu, p)$  і  $\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$ , то матриця оператора  $T_A$  має клітини Жордана  $J(\lambda, q_1)$ ,  $J(\frac{1}{\lambda}, q_2)$ , де  $q_1 \geq p$ ,  $q_2 \geq p$ .

Якщо, від супротивного, для деякої  $J(\mu, p)$   $q_1 > p$  або  $q_2 > p$ , то внаслідок скінченновимірності простору  $X$  твердження леми 2.6 не може виконуватися для кожної з клітин Жордана матриці оператора  $T_A$ . Суперечність.

□

**Наслідок 2.1.** Якщо  $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \emptyset$ , то підпростори  $X_-^2(A)$ ,  $X_+^2(A)$  мають розмірності  $m$ , а також жорданова нормальна форма матриці оператора  $T_A$  містить пари клітин Жордана, вказаних у лемі 2.7.

**Лема 2.8.** Нехай в  $X$  існує базис із власних векторів оператора  $A$ , а також  $\sigma(T_A) \cap S = \emptyset$ . Тоді в  $X^2$  існує базис із власних векторів оператора  $T_A$ , причому  $m$  векторам базису відповідають власні числа оператора  $T_A$ , що лежать всередині кола  $S$ , а іншим  $m$  — зовні  $S$ .

*Доведення.* Нехай  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$  — власні числа оператора  $A$  (з урахуванням кратності),  $u_1, u_2, \dots, u_m$  — відповідні їм власні вектори  $A$ .

Оскільки  $\sigma(T_A) \cap S = \emptyset$ , то внаслідок лемі 2.4 маємо  $[-4; 0] \cap \sigma(A) = \emptyset$ . Тоді для кожного  $1 \leq k \leq m$   $\mu_k \notin [-4; 0]$  і, скориставшись спочатку лемою 2.5, а потім — лемами 2.2, 2.3, робимо висновок, що для кожного  $1 \leq k \leq m$  існує таке  $\lambda_k$ ,  $|\lambda_k| < 1$ , що

$$\mu_k = \lambda_k + \frac{1}{\lambda_k} - 2,$$

$\lambda_k, \frac{1}{\lambda_k}$  — власні числа оператора  $T_A$ , яким відповідають власні вектори  $\begin{pmatrix} \lambda_k u_k \\ u_k \end{pmatrix}$  та  $\begin{pmatrix} u_k \\ \lambda_k u_k \end{pmatrix}$ .

Доведемо, що  $2m$  векторів  $\begin{pmatrix} \lambda_k u_k \\ u_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_k \\ \lambda_k u_k \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq m$  лінійно незалежні в  $X^2$ . Цього буде достатньо для доведення лемі.

Справді,

$$\sum_{k=1}^m \left( \alpha_k \begin{pmatrix} \lambda_k u_k \\ u_k \end{pmatrix} + \beta_k \begin{pmatrix} u_k \\ \lambda_k u_k \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m (\lambda_k \alpha_k + \beta_k) u_k = \bar{0}, \\ \sum_{k=1}^m (\alpha_k + \lambda_k \beta_k) u_k = \bar{0}. \end{cases}$$

Звідси випливає (оскільки  $u_k, 1 \leq k \leq m$  лінійно незалежні), що для ко-

жного  $1 \leq k \leq m$ :

$$\begin{cases} \lambda_k \alpha_k + \beta_k = 0, \\ \alpha_k + \lambda_k \beta_k = 0. \end{cases}$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} \lambda_k & 1 \\ 1 & \lambda_k \end{vmatrix} = \lambda_k^2 - 1 \neq 0,$$

бо  $|\lambda_k| < 1$ , то для кожного  $1 \leq k \leq m$  виконується  $\alpha_k = \beta_k = 0$ , а отже, вказані  $2m$  векторів лінійно незалежні.

□

**Лема 2.9.** *Для того, щоб умова обмеженості виконувалась для рівняння (2.1), необхідно і достатньо, щоб ця умова виконувалася у просторі  $X^2$  для різницевого рівняння*

$$\begin{cases} \bar{x}_{n+1} = T_A \bar{x}_n + \bar{y}_n, n \geq 1, \\ \bar{x}_{n+1} = T_B \bar{x}_n + \bar{y}_n, n \leq 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

*Доведення.* Достатність. Нехай умова обмеженості виконується для рівняння (2.14). Зафіксуємо обмежену в  $X$  послідовність  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .

Нехай  $\{\bar{x}_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}\}$  — єдиний обмежений розв'язок рівняння

(2.14), що відповідає обмеженій послідовності  $\{\bar{y}_n = \begin{pmatrix} y_n \\ \bar{0} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}\}$ . Запи-

савши рівності (2.14) покоординатно, отримаємо

$$\begin{cases} \begin{cases} x_{n+1}^{(1)} - (A + 2I)x_n^{(1)} + x_n^{(2)} = y_n, \\ x_{n+1}^{(2)} = x_n^{(1)}, \end{cases} & n \geq 1, \\ \begin{cases} x_{n+1}^{(1)} - (B + 2I)x_n^{(1)} + x_n^{(2)} = y_n, \\ x_{n+1}^{(2)} = x_n^{(1)}, \end{cases} & n \leq 0, \end{cases}$$

а отже, послідовність  $\{x_n^{(1)}, n \in \mathbb{Z}\}$  є відповідним до  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  обмеженим розв'язком рівняння (2.1), бо  $x_n^{(2)} = x_{n-1}^{(1)}$  для кожного  $n \in \mathbb{Z}$ .

Якщо, від супротивного, цей обмежений розв'язок не єдиний, то однорідне рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = Ax_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = Bx_n, n \leq 0, \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок  $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Але тоді однорідне рівняння (2.14) теж має відмінний від нульового обмежений розв'язок

$$\{\bar{u}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}\}. \text{ Суперечність.}$$

Необхідність. Нехай тепер умова обмеженості виконується для рівняння (2.1). Зафіксуємо обмежену в  $X^2$  послідовність  $\{\bar{y}_n = \begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}\}$ .

Відзначимо, що (2.14) записується у такому еквівалентному вигляді:

$$\begin{cases} \begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = (A + 2I)x_n^{(1)} - x_n^{(2)} + y_n^{(1)}, \\ x_{n+1}^{(2)} = x_n^{(1)} + y_n^{(2)}, \end{cases} & n \geq 1, \\ \begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = (B + 2I)x_n^{(1)} - x_n^{(2)} + y_n^{(1)}, \\ x_{n+1}^{(2)} = x_n^{(1)} + y_n^{(2)}, \end{cases} & n \leq 0. \end{cases}$$

Тому, поклавши  $x_n^{(1)} = x_n$ , де  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — єдиний обмежений розв'язок (2.1), відповідний до обмеженої послідовності  $\{y_n = y_n^{(1)} - y_{n-1}^{(2)}, n \in \mathbb{Z}\}$ , а також  $x_n^{(2)} = x_{n-1}^{(1)} + y_{n-1}^{(2)}, n \in \mathbb{Z}$ , отримаємо відповідний до  $\{\bar{y}_n, n \in \mathbb{Z}\}$  обмежений розв'язок  $\{\bar{x}_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (2.14).

Якщо, від супротивного, цей обмежений розв'язок не єдиний, то існує ненульовий обмежений розв'язок  $\{\bar{u}_n = \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}\}$  різницевого рівняння (2.14), а отже,

$$\begin{cases} \begin{cases} u_{n+1}^{(1)} = (A + 2I)u_n^{(1)} - u_n^{(2)}, \\ u_{n+1}^{(2)} = u_n^{(1)}, \end{cases} & n \geq 1, \\ \begin{cases} u_{n+1}^{(1)} = (B + 2I)u_n^{(1)} - u_n^{(2)}, \\ u_{n+1}^{(2)} = u_n^{(1)}, \end{cases} & n \leq 0, \end{cases}$$

причому  $u_k^{(1)} \neq \bar{0}$  для деякого  $k \in \mathbb{Z}$ .

Тому однорідне рівняння (2.1) має ненульовий обмежений розв'язок  $\{u_n^{(1)}, n \in \mathbb{Z}\}$ . Суперечність. □

Нехай  $T$  — такий лінійний оператор в  $X^2$ , що  $\sigma(T) \cap S = \emptyset$ .  
Визначимо простори  $X_-^2(T), X_+^2(T)$  за таким правилом. Якщо  $\sigma(T)$  лежить всередині кола  $S$ , то  $X_-^2(T) = X^2, X_+^2(T) = \{\bar{0}\}$ . Якщо  $\sigma(T)$  лежить зовні  $S$ , то  $X_-^2(T) = \{\bar{0}\}, X_+^2(T) = X^2$ . Якщо ж  $\sigma(T)$  має непорожні перетини з множинами  $S_- = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  і  $S_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ , то зафіксуємо такий базис  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k, \bar{f}_{k+1}, \bar{f}_{k+2}, \dots, \bar{f}_{2m}$  у просторі  $X^2$ , в якому матриця оператора  $T$  має жорданову нормальну форму, причому  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$  відповідають клітини Жордана з власними числами із  $S_-$ , а  $\bar{f}_{k+1}, \bar{f}_{k+2}, \dots, \bar{f}_{2m}$  — клітини Жордана з власними числами із  $S_+$ . Тоді  $X_-^2(T), X_+^2(T)$  — лінійні оболонки векторів  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$  та  $\bar{f}_{k+1}, \bar{f}_{k+2}, \dots, \bar{f}_{2m}$  відповідно.

Внаслідок теореми 1 роботи [91] справджується таке твердження.

**Теорема 2.1.** *Для різницевого рівняння (2.14) умова обмеженості виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

- (i)  $\sigma(T_A) \cap S = \emptyset, \sigma(T_B) \cap S = \emptyset$ ;
- (ii)  $X^2 = X_-^2(T_A) \dot{+} X_+^2(T_B)$ , тобто  $X^2$  є прямою сумою  $X_-^2(T_A)$  та  $X_+^2(T_B)$ .

Також у подальшому постійно використовується відоме твердження з лінійної алгебри про те, що для довільного лінійного оператора у скінченновимірному просторі існує базис цього простору, в якому матриця цього оператора має жорданову нормальну форму (див., наприклад, [92, §18]). Сформулюємо потрібне у подальшому твердження про зведення оператора до цього базису.

**Лема 2.10.** *Нехай  $L$  — лінійний оператор в  $m$ -вимірному просторі  $X$ , матриця якого зводиться до жорданової нормальної форми, яка має  $p$  клітинок Жордана, що відповідають власним числам  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  оператора  $L$ , причому  $k$ -та клітинка є квадратною матрицею порядку  $j_k, 1 \leq k \leq p$ . Тоді:*

- (1)  $j_1 + j_2 + \dots + j_p = m$ ;
- (2) для кожного  $1 \leq k \leq p$  існує набір із власного вектора  $u(k, 1)$  і при

$j_k > 1$  приєднаних векторів  $u(k, 2), u(k, 3), \dots, u(k, j_k)$  таких, що

$$(L - \lambda_k I)u(k, 1) = \bar{0},$$

$$\forall 2 \leq q \leq j_k : (L - \lambda_k I)u(k, q) = u(k, q - 1);$$

(3) матриця оператора  $L$  має жорданову нормальну форму в базисі

$$u(1, 1), \dots, u(1, j_1); u(2, 1), \dots, u(2, j_2); \dots; u(p, 1), \dots, u(p, j_p).$$

## 2.3 Основний результат

В загальному випадку перевірка умов (i), (ii) теореми 2.1 є нетривіальною задачею. Один з випадків, коли перевірка суттєво спрощується, описаний у наступній теоремі.

**Теорема 2.2.** *Нехай оператори  $A, B$  в одному і тому ж базисі простору  $X$  зводяться до діагонального вигляду (тобто мають один і той же набір власних векторів  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , які утворюють базис в  $X$ ). Тоді для різницевого рівняння (2.1) умова обмеженості виконується у тому і тільки у тому випадку, коли*

$$\sigma(A) \cap [-4; 0] = \emptyset, \sigma(B) \cap [-4; 0] = \emptyset. \quad (2.15)$$

*Доведення.* Внаслідок леми 2.4 співвідношення (2.15) виконуються тоді і тільки тоді, коли виконується умова (i) теореми 2.1. Отже, досить переконатися, що при вказаних умовах на оператори  $A, B$  із (2.15) впливає, що умова (ii) теореми 2.1 теж виконується.

Нехай  $\mu_k, z_k$  — власні числа операторів  $A, B$  відповідно, що відповідають спільному власному вектору  $u_k, 1 \leq k \leq m$ . Послідовно застосувавши леми 2.5, 2.2, 2.3, 2.8, робимо висновок, що для кожного  $1 \leq k \leq m$  знайдуться такі числа  $\lambda_k, |\lambda_k| < 1, \nu_k, |\nu_k| < 1$ , що

$$\mu_k = \lambda_k + \frac{1}{\lambda_k} - 2, z_k = \nu_k + \frac{1}{\nu_k} - 2,$$

а також  $X_-^2(T_A), X_+^2(T_B)$  є відповідно лінійними оболонками векторів

$$\begin{pmatrix} \lambda_k u_k \\ u_k \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq m; \begin{pmatrix} u_k \\ \nu_k u_k \end{pmatrix}, 1 \leq k \leq m. \quad (2.16)$$

Перевіримо, що  $2m$  векторів із (2.16) лінійно незалежні. Справді, якщо

існують такі числа  $\alpha_k, \beta_k, 1 \leq k \leq m$ , що

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k \begin{pmatrix} \lambda_k u_k \\ u_k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^m \beta_k \begin{pmatrix} u_k \\ \nu_k u_k \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

то, записавши (2.17) покоординатно і скориставшись лінійною незалежністю векторів  $u_k, 1 \leq k \leq m$ , отримаємо, що для кожного  $1 \leq k \leq m$  числа  $\alpha_k, \beta_k$  задовольняють систему

$$\begin{cases} \lambda_k \alpha_k - \beta_k = 0, \\ \alpha_k - \nu_k \beta_k = 0. \end{cases}$$

Оскільки  $|\lambda_k| < 1, |\nu_k| < 1$ , то звідси робимо висновок, що  $\alpha_k = \beta_k = 0, 1 \leq k \leq m$ .

Із лінійної незалежності векторів (2.16) випливає, що  $X^2 = X_-^2(T_A) + X_+^2(T_B)$ .

□

Наступна теорема, яка є основним результатом цього розділу, містить достатні умови на оператори  $A, B$ , при виконанні яких справджується імплікація (i)  $\Rightarrow$  (ii) для умов теореми 2.1.

**Теорема 2.3.** *Нехай виконується умова (i) теореми 2.1, а також матриці операторів  $A, B$  мають жорданову нормальну форму у одному і тому ж базисі  $e_1, e_2, \dots, e_m$  (тут також суттєвий однаковий порядок базисних векторів для  $A$  і  $B$ ). Тоді виконується умова (ii) теореми 2.1.*

*Доведення.* Розглянемо випадок, коли матриця оператора  $A$  має дві клітини Жордана порядків

$$p_1, p_2, p_1 + p_2 = m,$$

а матриця  $B$  — три клітини порядків

$$q_1, q_2 = 1, q_3, q_1 + 1 + q_3 = m,$$

причому

$$p_1 > q_1 + 1.$$

У загальному випадку міркування аналогічні.

Нехай  $\mu_1, \mu_2$  та  $z_1, z_2, z_3$  — власні числа операторів  $A, B$ , які відповідають їх клітинам Жордана. Тоді

$$(A - \mu_1 I)e_1 = \bar{0}, (A - \mu_1 I)e_k = e_{k-1}, 2 \leq k \leq p_1;$$

$$(A - \mu_2 I)e_{p_1+1} = \bar{0}, (A - \mu_2 I)e_k = e_{k-1}, p_1 + 2 \leq k \leq m;$$

$$(B - z_1 I)e_1 = \bar{0}, (B - z_1 I)e_k = e_{k-1}, 2 \leq k \leq q_1;$$

$$(B - z_2 I)e_{q_1+1} = \bar{0};$$

$$(B - z_3 I)e_{q_1+2} = \bar{0}, (B - z_3 I)e_{q_1+k} = \bar{0}, q_1 + 3 \leq k \leq m.$$

Зафіксуємо такі числа

$$\lambda_k, k = 1, 2; \nu_k, k = 1, 2, 3,$$

що для кожного  $k$

$$|\lambda_k| < 1, \mu_k = \lambda_k + \frac{1}{\lambda_k} - 2, |\nu_k| < 1, z_k = \nu_k + \frac{1}{\nu_k} - 2.$$

Скористаємося лемами 2.6, 2.7 і виберемо в  $X^2$  вектори

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_1(e_1), \dots, \bar{v}_{p_1} = \bar{v}_{p_1}(e_1),$$

$$\bar{v}_{p_1+1} = \bar{v}_{p_1+1}(e_{p_1+1}), \dots, \bar{v}_{p_1+p_2} = \bar{v}_{p_1+p_2}(e_{p_1+1}),$$

які задають клітини Жордана оператора  $T_A$ , що відповідають власним числам  $\lambda_1, \lambda_2$  і будуються за формулами (2.9), (2.10) за власним вектором  $e_1$  і приєднаними векторами  $e_2, \dots, e_{p_1}$  та власним вектором  $e_{p_1+1}$  і приєднаними векторами  $e_{p_1+2}, \dots, e_{p_1+p_2}$  оператора  $A$ , а також вектори

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_1(e_1), \dots, \bar{w}_{q_1} = \bar{w}_{q_1}(e_1), \bar{w}_{q_1+1} = \bar{w}_{q_1+1}(e_{q_1+1}),$$

$$\bar{w}_{q_1+2} = \bar{w}_{q_1+2}(e_{q_1+2}), \dots, \bar{w}_{q_1+1+q_3} = \bar{w}_{q_1+1+q_3}(e_{q_1+2}),$$

які аналогічно задають клітини Жордана оператора  $T_B$ , що відповідають

власним числам  $\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, \frac{1}{\nu_3}$ .

Внаслідок леми 2.9 простори  $X_-^2(T_A), X_+^2(T_B)$   $m$ -вимірні і є лінійними оболонками векторів  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{p_1+p_2}$  і  $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{q_1+q_3}$  відповідно.

Отже, для виконання умови (ii) теореми 2.1 досить перевірити, що рівність

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p_1} \delta_k \bar{v}_k(e_1) + \sum_{k=p_1+1}^m \delta_k \bar{v}_k(e_{p_1+1}) &= \sum_{k=1}^{q_1} \sigma_k \bar{w}_k(e_1) + \\ &+ \sigma_{q_1+1} \bar{w}_{q_1+1}(e_{q_1+1}) + \sum_{k=q_1+2}^m \sigma_k \bar{w}_k(e_{q_1+2}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

виконується тільки при  $\delta_1 = \dots = \delta_m = \sigma_1 = \dots = \sigma_m = 0$ .

Нехай, від супротивного, знайдуться числа  $\delta_1, \dots, \delta_m; \sigma_1, \dots, \sigma_m$  не всі нульові і такі, що виконується (2.18).

Відзначимо, що для довільних  $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} (T_A - \lambda_i E) &= \begin{pmatrix} A + 2I - \lambda_i I & -I \\ I & -\lambda_i I \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} B + 2I - \frac{1}{\nu_j} I & -I \\ I & -\frac{1}{\nu_j} I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A - B + (\frac{1}{\nu_j} - \lambda_i) I & O \\ O & (\frac{1}{\nu_j} - \lambda_i) I \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

звідки

$$T_A - \lambda_i E = T_B - \frac{1}{\nu_j} E + \begin{pmatrix} A - B + T_{i,j} & O \\ O & T_{i,j} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

де  $T_{i,j} = (\frac{1}{\nu_j} - \lambda_i) I$ ,  $E$  — одиничний оператор в  $X^2$ .

Також із (2.9), (2.10) і виразів для  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  і їхніх аналогів для  $\bar{w}_k$  отримаємо, що для будь-якого допустимого  $k$ :

$$\begin{aligned} v_2^{(k+1)} &= (1 - \frac{1}{\lambda_i^2})^k e_{k+1} + h(\lambda_i; e_1, \dots, e_k), \\ w_2^{(k+1)} &= (1 - \nu_j^2)^k e_{k+1} + h(\frac{1}{\nu_j}; e_1, \dots, e_k) \end{aligned} \quad (2.20)$$

з однією і тією ж функцією  $h$ , яка лінійно залежить від  $e_1, \dots, e_k$ .

Подіємо на (2.18) оператором  $(T_A - \lambda_2 E)$ .

Скористаємось співвідношенням (2.19), а також тим, що для довільних  $p_1 + 2 \leq k \leq m$  :

$$(T_A - \lambda_2 E)\bar{v}_k(e_{p_1+1}) = \bar{v}_{k-1}(e_{p_1+1});$$

$$(T_A - \lambda_2 E)\bar{v}_{p_1+1}(e_{p_1+1}) = \bar{0};$$

для довільних  $2 \leq k \leq p_1$  :

$$(T_A - \lambda_2 E)\bar{v}_k(e_1) = (T_A - \lambda_1 E)\bar{v}_k(e_1) + (\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v}_k(e_1) = \bar{v}_{k-1}(e_1) + (\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v}_k(e_1);$$

$$(T_A - \lambda_2 E)\bar{v}_1(e_1) = (T_A - \lambda_1 E)\bar{v}_1(e_1) + (\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v}_1(e_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)e_1.$$

Для векторів  $\bar{w}_k$  формули аналогічні.

Також

$$\begin{pmatrix} A - B + T_{i,j} & O \\ O & T_{i,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A - B + T_{i,j})v_1 \\ (\frac{1}{\nu_j} - \lambda_i)v_2 \end{pmatrix}.$$

Тому після дії оператором  $(T_A - \lambda_2 E)$  і властивостей приєднаних векторів для других координат отриманої з (2.18) рівності буде виконуватися співвідношення

$$\begin{aligned} & \delta_1(\lambda_1 - \lambda_2)v_2^{(1)}(e_1) + \sum_{k=2}^{p_1} \delta_k \left( v_2^{(k-1)}(e_1) + (\lambda_1 - \lambda_2)v_2^{(k)}(e_1) \right) + \\ & + \sum_{k=p_1+2}^m \delta_k v_2^{(k-1)}(e_{p_1+1}) = \sigma_1 \left( \frac{1}{\nu_1} - \lambda_2 \right) w_2^{(1)}(e_1) + \sum_{k=2}^{q_1} \sigma_k \left( w_2^{(k-1)}(e_1) + \right. \\ & + \left. \left( \frac{1}{\nu_1} - \lambda_2 \right) w_2^{(k)}(e_1) \right) + \sigma_{q_1+1} \left( \frac{1}{\nu_2} - \lambda_2 \right) w_2^{(q_1+1)}(e_{q_1+1}) + \\ & + \sigma_{q_1+2} \left( \frac{1}{\nu_3} - \lambda_2 \right) w_2^{(q_1+2)}(e_{q_1+2}) + \sum_{k=q_2+3}^m \sigma_k \left( w_2^{(k-1)}(e_{q_1+2}) + \right. \\ & + \left. \left( \frac{1}{\nu_3} - \lambda_2 \right) w_2^{(k)}(e_{q_1+2}) \right). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Внаслідок (2.20) у рівності (2.21) вектор  $e_m$  зустрічається тільки у виразі для  $w_2^{(m)}(e_{q_1+2})$  в останній сумі.

Отже, із лінійної незалежності векторів  $e_1, e_2, \dots, e_m$  випливає, що  $\sigma_m = 0$ . Після цього, повернувшись до (2.18), робимо висновок, що і  $\delta_m = 0$ .

Тепер (2.18) виконується із підсумуванням до  $m - 1$  замість  $m$  у останніх доданках зліва і справа.

Враховавши, що  $p_1 > q_1 + 1$  і подіявши на (2.18)  $m - p_1$  раз оператором  $(T_A - \lambda_2 E)$ , отримаємо, що

$$\delta_{p_1+1} = \dots = \delta_m = \sigma_{p_1+1} = \dots = \sigma_m = 0,$$

і замість (2.18) матимемо рівність

$$\sum_{k=1}^{p_1} \delta_k \bar{v}_k(e_1) = \sum_{k=1}^{q_1} \sigma_k \bar{w}_k(e_1) + \sigma_{q_1+1} \bar{w}_{q_1+1}(e_{q_1+1}) + \sum_{k=q_1+2}^{p_1} \sigma_k \bar{w}_k(e_{q_1+2}). \quad (2.22)$$

Подіявши на (2.22)  $p_1$  раз оператором  $(T_A - \lambda_1 E)$ , послідовно отримаємо, що

$$\sigma_{p_1} = \delta_{p_1} = 0, \sigma_{p_1-1} = \delta_{p_1-1} = 0, \dots, \sigma_1 = \delta_1 = 0.$$

Таким чином, (2.18) може виконуватись тільки при

$$\delta_1 = \dots = \delta_m = \sigma_1 = \dots = \sigma_m = 0.$$

□

**Зауваження 2.3.** Теорема 2.2 є частковим випадком теореми 2.3, бо в теоремі 2.2 усі клітини Жордана операторів  $A, B$  мають розмір 1.

## 2.4 Приклади

В подальшому у випадку, коли  $X = \mathbb{C}^m$ , будемо вважати, що в  $\mathbb{C}^m$  вибрано евклідову норму

$$\|\bar{x}\| = \left( \sum_{k=1}^m |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m,$$

а також лінійний оператор в  $\mathbb{C}^m$  і його матрицю в канонічному базисі

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

простору  $\mathbb{C}^m$  будемо позначати однією і тією ж літерою.

Наступні приклади 2.1, 2.2 показують, що коли оператори  $A, B$  зводяться до діагонального вигляду у різних базисах, то при виконанні (2.15) твердження теореми 2.2 щодо зображення  $X^2 = X_-^2(T_A) + X_+^2(T_B)$  не обов'язково виконується.

**Приклад 2.1.** Покладемо  $X = \mathbb{C}^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ .

Тоді

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{4}{3}$$

— власні числа  $A$ , яким відповідають власні вектори  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

При цьому

$$\frac{1}{2} = \mu_1 = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} - 2 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{4}{3} = \mu_2 = \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} - 2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

Тому, з урахуванням доведення леми 2.8

$$X_-^2(T_A) = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Побудуємо таку матрицю  $B$ , щоб її власними векторами були  $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $f_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 17 \end{pmatrix}$ , а відповідними власними числами  $z_1 = \frac{4}{3}$ ,  $z_2 = -\frac{100}{21}$ . Тоді

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} &= \nu_1 + \frac{1}{\nu_1} - 2 \Rightarrow \nu_1 = \frac{1}{3}, \\ -\frac{100}{21} &= \nu_2 + \frac{1}{\nu_2} - 2 \Rightarrow \nu_2 = -\frac{3}{7} \end{aligned}$$

і з урахуванням доведення леми 2.8

$$X_+^2(T_B) = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{7 \cdot 15}{3} \\ \frac{7 \cdot 17}{3} \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix} \right\}.$$

Оскільки  $f_1 = e_1 + e_2$ ,  $f_2 = 15e_1 + 17e_2$ , то покладемо

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & -\frac{15}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

а також

$$B = C \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{100}{21} \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14 \cdot 17 + 750}{21} & -\left(\frac{14 \cdot 15 + 750}{21}\right) \\ \frac{14 \cdot 17 + 850}{21} & -\left(\frac{14 \cdot 15 + 850}{21}\right) \end{pmatrix}.$$

При цьому справді

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14 \cdot 2}{21} \\ \frac{14 \cdot 2}{21} \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} B \begin{pmatrix} 15 \\ 17 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{14 \cdot 15 \cdot 17 + 750 \cdot 15}{21} & -\left(\frac{14 \cdot 15 \cdot 17 + 750 \cdot 17}{21}\right) \\ \frac{14 \cdot 15 \cdot 17 + 850 \cdot 15}{21} & -\left(\frac{14 \cdot 15 \cdot 17 + 850 \cdot 17}{21}\right) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1500}{21} \\ -\frac{1700}{21} \end{pmatrix} = -\frac{100}{21} \begin{pmatrix} 15 \\ 17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Також

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -\frac{7 \cdot 15}{3} \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{7 \cdot 17}{3} \\ 2 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 3 & 1 & 17 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{7 \cdot 17}{3} \\ 2 & 0 & -5 & 15 + \frac{14 \cdot 15}{3} \\ 0 & 3 & 1 & 17 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -\frac{7 \cdot 17}{3} \\ 0 & -5 & 15 + \frac{14 \cdot 15}{3} \\ 3 & 1 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -\frac{7 \cdot 17}{3} \\ 0 & -5 & 15 + \frac{14 \cdot 15}{3} \\ 0 & -8 & 17 + 7 \cdot 17 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -5 & 85 \\ -8 & 136 \end{vmatrix} = -680 + 680 = 0, \end{aligned}$$

а отже

$$X_-^2(T_A) + X_+^2(T_B) \neq C^4,$$

бо відповідні вектори лінійно залежні.

**Приклад 2.2.** Нехай оператор  $A$  такий, як в прикладі 2.1. Тоді

$$X_-^2(T_A) = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Побудуємо таку матрицю  $B$ , щоб її власними векторами були  $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , а відповідними власними числами  $z_1 = \frac{1}{2}$ ,  $z_2 = \frac{4}{3}$ .  
Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \nu_1 + \frac{1}{\nu_1} - 2 \Rightarrow \nu_1 = \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} &= \nu_2 + \frac{1}{\nu_2} - 2 \Rightarrow \nu_2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

і з урахуванням доведення леми 2.8

$$X_+^2(T_B) = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Оскільки  $f_1 = e_1 + e_2$ ,  $f_2 = e_1$ , то покладемо

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

а також

$$B = C \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

При цьому справді

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Також

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -25 \neq 0,$$

звідки

$$X^2 = X_-^2(T_A) + X_+^2(T_B).$$

Наступний приклад показує, що коли матриці операторів  $A, B$  мають жорданову нормальну форму у одному і тому ж базисі, але з різним порядком базисних векторів, то твердження теореми 2.3 може не виконуватися.

**Приклад 2.3.** Нехай

$$X = \mathbb{C}^2, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо такі оператори  $A, B$ , що

$$(A - \mu I)e_1 = \bar{0}, (A - \mu I)e_2 = e_1, (B - zI)e_2 = \bar{0}, (B - zI)e_1 = e_2$$

для деяких  $\mu, z$  з множини  $\mathbb{R} \setminus [-4, 0]$ .

Нехай  $\lambda, \nu$  — такі числа, що

$$|\lambda| < 1, |\nu| < 1, \mu = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2, z = \nu + \frac{1}{\nu} - 2.$$

Тоді, з урахуванням співвідношень (2.11, 2.12),  $X_-^2(T_A), X_+^2(T_B)$  є відповідно лінійними оболонками векторів

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda(1 - \frac{1}{\lambda^2}) \\ \frac{1}{\lambda^2} \\ 1 - \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\nu} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\nu}(1 - \nu^2) \\ 0 \\ 1 - \nu^2 \\ -\nu \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що при деяких  $\lambda, \nu$ , які задовольняють вказані вище умови, ці чотири вектори лінійно залежні, а отже, умова (ii) не виконується. Справді

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \frac{1}{\nu}(1 - \nu^2) \\ 0 & \lambda(1 - \frac{1}{\lambda^2}) & \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 & 1 - \nu^2 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\lambda^2} & 1 & -\nu \end{vmatrix} = -1 - (\lambda - \frac{1}{\nu})^2(1 - \frac{1}{\lambda^2})(1 - \nu^2).$$

Покладемо  $\nu = \frac{1}{3}$  і розглянемо функцію  $F : (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , яка діє за правилом

$$F(\lambda) = -1 - \frac{8}{9}(\lambda - 3)^2(1 - \frac{1}{\lambda^2}).$$

Оскільки функція  $F$  неперервна на  $(0; 1]$ ,  $F(1) = -1$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} F(\lambda) = +\infty$ , то знайдеться таке  $\lambda_0 \in (0, 1)$ , що  $F(\lambda_0) = 0$ . Тому при  $\nu = \frac{1}{3}$ ,  $\lambda = \lambda_0$  умова (ii) теореми 2.1 не виконується.

## 2.5 Висновки до розділу 2

Розділ 2 присвячений дослідженню необхідних і достатніх умов на фіксовані лінійні оператори  $A, B$ , при виконанні яких різницеве рівняння (2.1) зі стрибком операторного коефіцієнта має єдиний обмежений розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  у скінченновимірному банаховому просторі для довільної обмеженої послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .

Спочатку було розглянуто випадок, коли оператори  $A, B$  в одному і тому ж базисі простору  $X$  зводяться до діагонального вигляду, тобто мають один і той же набір власних векторів, які утворюють базис в  $X$ , а потім — більш складний випадок, коли матриці операторів  $A, B$  мають жорданову нормальну форму у одному і тому ж базисі.

Відповідна теорема 2.2 опублікована в [1], теорема 2.3 — в [2]. Деякі результати з цього розділу висвітлено в тезах міжнародних конференцій [5], [6].

# Розділ 3

## ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ЗІ СТРИБКАМИ ОПЕРАТОРНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

У цьому розділі досліджується питання про існування єдиного обмеженого на  $\mathbb{Z}$  розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку загального вигляду зі стрибками операторних коефіцієнтів у скінченновимірному банаховому просторі.

### 3.1 Постановка задачі

Нехай, як і у розділі 2, простір  $X$  буде  $m$ -вимірним комплексним банаховим простором з нормою  $\|\cdot\|$  і нульовим елементом  $\bar{0}$ ;  $I, O$  — одиничним та нульовим оператором в  $X$ . І нехай  $A_1, A_2, B_1, B_2$  — фіксовані лінійні оператори в  $X$ .

Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_1 x_n + A_2 x_{n-1} + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = B_1 x_n + B_2 x_{n-1} + y_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

у якому  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — задана, а  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — шукана послідовності елементів простору  $X$ .

Знайдемо необхідні і достатні умови на оператори  $A_1, A_2, B_1, B_2$  з деяких спеціальних класів, при виконанні яких виконується така умова.

**Умова обмеженості.** Для довільної обмеженої в  $X$  послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (3.1) має єдиний обмежений розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  у просторі  $X$ .

## 3.2 Допоміжні результати

Використаємо позначення з пункту 2.2. Нехай банахів простір  $X^2$  такий, як у розділі 2.

Нехай  $T'_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I & O \end{pmatrix}$ ,  $T'_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ I & O \end{pmatrix}$ ,  $\sigma(T'_A)$ ,  $\sigma(T'_B)$  — набори власних чисел операторів  $T'_A$ ,  $T'_B$  відповідно.

Для доведення основного результату цього розділу використовуються наведені нижче твердження.

**Лема 3.1.** *Для того, щоб умова обмеженості виконувалась для рівняння (3.1), необхідно і достатньо, щоб ця умова виконувалась у просторі  $X^2$  для різницевого рівняння*

$$\begin{cases} \bar{x}_{n+1} = T'_A \bar{x}_n + \bar{y}_n, n \geq 1, \\ \bar{x}_{n+1} = T'_B \bar{x}_n + \bar{y}_n, n \leq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Доведення леми 3.1 аналогічне до доведення леми 2.9.

**Лема 3.2.** *Виконуються такі твердження.*

- 1) Якщо  $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$  — власний вектор оператора  $T'_A$ , що відповідає власному числу  $\lambda \in \mathbb{C}$ , то  $v = \lambda u$ .
- 2) Число  $\lambda \in \mathbb{C}$  є власним числом оператора  $T'_A$ , що відповідає власному вектору  $\begin{pmatrix} \lambda u \\ u \end{pmatrix}$ , де  $u$  — деякий ненульовий елемент простору  $X$ , тоді і тільки тоді, коли  $(\lambda^2 I - A_1 \lambda - A_2)u = \bar{0}$ .

*Доведення.* 1) За означенням власного вектора  $T'_A \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ , тобто

$$\begin{cases} A_1 v + A_2 u = \lambda v, \\ v = \lambda u. \end{cases}$$

Звідси випливає, що  $v = \lambda u$ .

- 2) Необхідність. Нехай  $\lambda \in \mathbb{C}$  — власне число  $T'_A$ , якому відповідає вла-

сний вектор  $\begin{pmatrix} \lambda u \\ u \end{pmatrix}$ .

Тоді  $T'_A \begin{pmatrix} \lambda u \\ u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda u \\ u \end{pmatrix}$  у тому і лише у тому випадку, коли

$$\begin{cases} A_1 \lambda u + A_2 u = \lambda^2 u, \\ \lambda u = \lambda u. \end{cases}$$

Отже,  $(\lambda^2 I - A_1 \lambda - A_2)u = \bar{0}$ .

Достатність. Нехай  $(\lambda^2 I - A_1 \lambda - A_2)u = \bar{0}$ . Тоді

$$\begin{aligned} T'_A \begin{pmatrix} \lambda u \\ u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda u \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \lambda u + A_2 u \\ \lambda u \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^2 u \\ \lambda u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda u \\ u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Лема 3.3.** *Припустимо, що операторне рівняння*

$$\Lambda^2 - A_1 \Lambda - A_2 = O \tag{3.3}$$

*має корені  $\Lambda_1, \Lambda_2$ , причому існує обернений оператор  $(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}$  до оператора  $\Lambda_1 - \Lambda_2$ . Покладемо*

$$U = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \Lambda_2 \\ -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \Lambda_1 \end{pmatrix}.$$

*Тоді  $U^{-1}$  — обернений оператор до  $U$ , а також*

$$U^{-1} T'_A U = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

*Доведення.* Покажемо, що  $U^{-1}$  — обернений оператор до  $U$ .

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 \\ -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \Lambda_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} - \Lambda_2(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & -\Lambda_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 + \Lambda_2(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} - (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 + (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & O \\ O & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_1 - \Lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

оскільки, враховуючи той факт, що  $(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}$  — обернений до  $\Lambda_1 - \Lambda_2$ ,

$$\begin{aligned} & -\Lambda_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 + \Lambda_2(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 = \\ & = -\Lambda_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 + \Lambda_2(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 - \Lambda_2(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 + \Lambda_2(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 = \\ & = -\Lambda_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 + \Lambda_2(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_1 - \Lambda_2) + \Lambda_2(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 = \\ & = -\Lambda_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 + \Lambda_2 + \Lambda_2(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 = \\ & = \Lambda_2 - (\Lambda_1 - \Lambda_2)(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 = \Lambda_2 - \Lambda_2 = O. \end{aligned}$$

Цього достатньо для оборотності операторів у скінченновимірному просторі.

Покажемо, що  $U^{-1}T'_A U = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} U^{-1}T'_A U & = \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 \\ -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}A_1 - (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}A_2 \\ -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}A_1 + (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(A_1 - \Lambda_2) & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}A_2 \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_1 - A_1) & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}((A_1 - \Lambda_2)\Lambda_1 + A_2) & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}((A_1 - \Lambda_2)\Lambda_2 + A_2) \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}((\Lambda_1 - A_1)\Lambda_1 - A_2) & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}((\Lambda_1 - A_1)\Lambda_2 - A_2) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(A_1\Lambda_1 - \Lambda_2\Lambda_1 + A_2) & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(A_1\Lambda_2 - \Lambda_2^2 + A_2) \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_1^2 - A_1\Lambda_1 - A_2) & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_1\Lambda_2 - A_1\Lambda_2 - A_2) \end{pmatrix}$$

Оскільки  $\Lambda_1, \Lambda_2$  — корені рівняння (3.3), то підставивши по черзі  $\Lambda_1, \Lambda_2$  у рівняння (3.3), отримаємо рівності

$$\begin{cases} \Lambda_1^2 - A_1\Lambda_1 - A_2 = O, \\ \Lambda_2^2 - A_1\Lambda_2 - A_2 = O. \end{cases} \quad (3.5)$$

Враховувши (3.5), у останньому виразі матимемо

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_1^2 - \Lambda_2\Lambda_1) & O \\ O & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_1\Lambda_2 - \Lambda_2^2) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_1 - \Lambda_2)\Lambda_1 & O \\ O & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_1 - \Lambda_2)\Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести. □

**Зауваження 3.1.** Лема 3.3 уточнює аналогічні формули, наведені з помилками у теоремі 2 роботи [80].

Справді, у теоремі 2 із роботи [80] стверджується, що коли  $\Lambda_1, \Lambda_2$  — розділені корені рівняння

$$\Lambda^2 + R_1\Lambda + R_2 = O$$

і  $W = \begin{pmatrix} I & I \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix}$ , то  $W^{-1} = \begin{pmatrix} -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \end{pmatrix}$ , а також

для оператора  $T_R = \begin{pmatrix} O & -I \\ R_2 & R_1 \end{pmatrix}$  виконується рівність

$$T_R = W^{-1} \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & O \\ O & -\Lambda_2 \end{pmatrix} W.$$

Остання рівність неправильна, бо, наприклад, для  $X = \mathbb{C}$  розглянемо рівняння  $\Lambda^2 - 3\Lambda + 2 = O$ . Розв'язками цього рівняння є  $\Lambda_1 = 2$  та  $\Lambda_2 = 1$ .

Тоді  $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $W^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Покажемо, що для оператора  $T_R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  не виконується рівність

$$T_R = W^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W.$$

Справді,

$$\begin{aligned} W^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = T_R. \end{aligned}$$

Відзначимо, що з цієї причини деякі теореми з [80] неправильні.

Як звичайно, лінійні оператори  $G : X \rightarrow X$  і  $\tilde{G} : X \rightarrow X$  будемо називати подібними, якщо існує такий лінійний оборотний оператор  $V : X \rightarrow X$ , що  $\tilde{G} = V^{-1}GV$ .

Наступні леми містять потрібні в подальшому властивості подібних операторів.

**Лема 3.4.** *Нехай лінійні оператори  $G, \tilde{G}$  подібні і  $\tilde{G} = V^{-1}GV$ . Тоді:*

- 1) *матриці операторів  $G$  та  $\tilde{G}$  мають одну і ту ж жорданову нормальну форму;*
- 2) *оператор  $\tilde{G}$  має ланцюг із власного і приєднаних векторів  $e_k \rightarrow e_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow e_1 \rightarrow e$ , що відповідає власному числу  $z$ , (див. [92, с.189]) тоді і тільки тоді, коли оператор  $G$  має ланцюг  $Ve_k \rightarrow Ve_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow Ve_1 \rightarrow Ve$ , що відповідає власному числу  $z$ .*

Твердження леми 3.4 є прямим наслідком означення подібних операторів та скінченної вимірності банахового простору  $X$ .

**Лема 3.5.** *Якщо  $\Lambda_1, \Lambda_2$  - корені операторного рівняння (3.3) і  $\Lambda_1 + \Lambda_2 = A_1$ , то оператори  $\Lambda_1, \Lambda_2$  комутують.*

*Доведення.* Оскільки  $A_1 = \Lambda_1 + \Lambda_2$ , то підставивши  $\Lambda_1$  у рівняння (3.3), отримаємо

$$\Lambda_1^2 - (\Lambda_1 + \Lambda_2)\Lambda_1 - A_2 = O.$$

Звідси  $\Lambda_2\Lambda_1 = -A_2$ .

Аналогічно, підставивши  $\Lambda_2$  у рівняння (3.3), отримаємо

$$\Lambda_2^2 - (\Lambda_1 + \Lambda_2)\Lambda_2 - A_2 = O.$$

Звідси  $\Lambda_1\Lambda_2 = -A_2$ , а отже,  $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$ .

□

**Лема 3.6.** *Нехай виконується умова лема 3.3. Тоді оператори  $\Lambda_1, \Lambda_2$  комутують у тому і тільки у тому випадку, коли  $\Lambda_1 + \Lambda_2 = A_1$ .*

*Доведення.* Достатність. Нехай  $\Lambda_1 + \Lambda_2 = A_1$ .

Оскільки  $\Lambda_1, \Lambda_2$  — корені рівняння (3.3), то виконуються рівності (3.5), звідки

$$\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2 = A_1(\Lambda_1 - \Lambda_2). \quad (3.6)$$

Також, внаслідок комутативності  $\Lambda_1, \Lambda_2$ ,

$$\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2 = (\Lambda_1 + \Lambda_2)(\Lambda_1 - \Lambda_2). \quad (3.7)$$

Із (3.6, 3.7) отримаємо

$$A_1(\Lambda_1 - \Lambda_2) = (\Lambda_1 + \Lambda_2)(\Lambda_1 - \Lambda_2).$$

Оскільки існує обернений оператор  $(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}$  до оператора  $\Lambda_1 - \Lambda_2$ , то

$$A_1(\Lambda_1 - \Lambda_2)(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} = (\Lambda_1 + \Lambda_2)(\Lambda_1 - \Lambda_2)(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}$$

тоді і тільки тоді, коли  $A_1 = \Lambda_1 + \Lambda_2$ .

Необхідність випливає з лема 3.5.

□

Нехай  $T'$ , як і у розділі 2, — такий лінійний оператор в  $X^2$ , що його спектр  $\sigma(T')$  не перетинається з одиничним колом  $S$ . Аналогічно до розділу

2 визначимо лінійні підпростори  $X_-^2(T')$ ,  $X_+^2(T')$  у просторі  $X^2$ . Внаслідок леми 3.1 і теореми 1 роботи [76] справджується таке твердження.

**Теорема 3.1.** *Для різницевого рівняння (3.1) умова обмеженості виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

a1)  $\sigma(T'_A) \cap S = \emptyset$ ,  $\sigma(T'_B) \cap S = \emptyset$ ;

a2)  $X^2 = X_-^2(T'_A) \dot{+} X_+^2(T'_B)$ , тобто  $X^2$  є прямою сумою підпросторів  $X_-^2(T'_A)$  та  $X_+^2(T'_B)$ .

### 3.3 Основні результати

У загальному випадку перевірка умов  $a1)$ ,  $a2)$  теореми 3.1 є нетривіальною задачею. Нижче розглядаються два випадки, коли ця перевірка суттєво спрощується.

**Теорема 3.2.** *Припустимо, що операторні рівняння*

$$\Lambda^2 - A_1\Lambda - A_2 = O, \Phi^2 - B_1\Phi - B_2 = O \quad (3.8)$$

мають такі корені  $\Lambda_1, \Lambda_2$  та  $\Phi_1, \Phi_2$  відповідно, що існують оператори  $(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}$ ,  $(\Phi_1 - \Phi_2)^{-1}$ . Тоді для різницевого рівняння (3.1) умова обмеженості виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

$b1)$   $(\sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2)) \cap S = \emptyset$ ,  $(\sigma(\Phi_1) \cup \sigma(\Phi_2)) \cap S = \emptyset$ ;

$b2)$  якщо при  $k = 1, 2$  матриця оператора  $\Lambda_k$  має жорданову нормальну форму, у якій рівно  $p_k$  клітин Жордана відповідають власним числам  $z(k, 1), z(k, 2), \dots, z(k, p_k)$ , що лежать всередині  $S$ , причому  $z(k, i)$  відповідає клітина, що будується за ланцюгом із власного і приєднаних векторів  $u_{l(k,i)}(k, i) \rightarrow u_{l(k,i)-1}(k, i) \rightarrow \dots \rightarrow u_1(k, i)$ , а матриця оператора  $\Phi_k$  має жорданову нормальну форму, у якій рівно  $q_k$  клітин Жордана відповідають власним числам  $\lambda(k, 1), \lambda(k, 2), \dots, \lambda(k, q_k)$ , що лежать зовні  $S$ , причому  $\lambda(k, j)$  відповідає клітина, що будується за ланцюгом  $v_{n(k,j)}(k, j) \rightarrow v_{n(k,j)-1}(k, j) \rightarrow \dots \rightarrow v_1(k, j)$ , то вектори-стовпчики

$$\begin{pmatrix} z(k, i)u_1(k, i) \\ u_1(k, i) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z(k, i)u_2(k, i) + u_1(k, i) \\ u_2(k, i) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} z(k, i)u_{l(k,i)}(k, i) + u_{l(k,i)-1}(k, i) \\ u_{l(k,i)}(k, i) \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq p_k, k = 1, 2; \quad (3.9)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda(k, j)v_1(k, j) \\ v_1(k, j) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda(k, j)v_2(k, j) + v_1(k, j) \\ v_2(k, j) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \lambda(k, j)v_{n(k,j)}(k, j) + v_{n(k,j)-1}(k, j) \\ v_{n(k,j)}(k, j) \end{pmatrix}, 1 \leq j \leq q_k, k = 1, 2, \quad (3.10)$$

утворюють базис в  $X^2$ .

*Доведення.* Внаслідок леми 3.3 оператори  $T'_A, T'_B$  подібні до операторів

$$\tilde{T}'_A = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \tilde{T}'_B = \begin{pmatrix} \Phi_1 & O \\ O & \Phi_2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки  $\sigma(\tilde{T}'_A) = \sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2)$ ,  $\sigma(\tilde{T}'_B) = \sigma(\Phi_1) \cup \sigma(\Phi_2)$ , то, скориставшись лемою 3.4, робимо висновок, що умови  $a1)$  теореми 3.1 та  $b1)$  теореми 3.2 виконуються одночасно.

Із  $b2)$  і структури оператора  $\tilde{T}'_A$  випливає, що підпростір  $X_-^2(\tilde{T}'_A)$  є лінійною оболонкою векторів, які утворюють такі ланцюги із власних і приєднаних векторів оператора  $\tilde{T}'_A$ :

$$\begin{pmatrix} u_{l(1,i)}(1, i) \\ \bar{0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_{l(1,i)-1}(1, i) \\ \bar{0} \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} u_1(1, i) \\ \bar{0} \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq p_1,$$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} \\ u_{l(2,i)}(2, i) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{0} \\ u_{l(2,i)-1}(2, i) \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{0} \\ u_2(2, i) \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq p_2.$$

Тому внаслідок рівності (3.4) і леми 3.4 підпростір  $X_-^2(T'_A)$  є лінійною оболонкою векторів (3.9).

Аналогічно із  $b2)$  і структури оператора  $\tilde{T}'_B$  випливає, що підпростір  $X_+^2(\tilde{T}'_B)$  є лінійною оболонкою векторів, які утворюють такі ланцюги із власних і приєднаних векторів оператора  $\tilde{T}'_B$ :

$$\begin{pmatrix} v_{n(1,j)}(1, j) \\ \bar{0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_{n(1,j)-1}(1, j) \\ \bar{0} \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} v_1(1, j) \\ \bar{0} \end{pmatrix}, 1 \leq j \leq q_1,$$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} \\ v_{n(2,j)}(2, j) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{0} \\ v_{n(2,j)-1}(2, j) \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{0} \\ v_2(2, j) \end{pmatrix}, 1 \leq j \leq q_2.$$

Тому внаслідок рівності (3.4) і леми 3.4 підпростір  $X_+^2(T'_B)$  є лінійною оболонкою векторів (3.10).

Таким чином, за умов теореми 3.2 умови  $a2)$  теореми 3.1 та  $b2)$  теореми 3.2 теж рівносильні.

□

**Теорема 3.3.** Припустимо, що операторні рівняння (3.8) мають корені  $\Lambda_1, \Lambda_2$  та  $\Phi_1, \Phi_2$  відповідно, які зводяться до діагонального вигляду у одному і тому ж базисі, тобто існує такий базис  $u_1, u_2, \dots, u_m$  у просторі  $X$ , що для кожного  $1 \leq i \leq m$  та  $k = 1, 2$  існують такі  $z(k, i), \lambda(k, i) \in \mathbb{C}$ , що

$$\Lambda_k u_i = z(k, i) u_i, \quad \Phi_k u_i = \lambda(k, i) u_i, \quad (3.11)$$

а також

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = A_1, \quad \Phi_1 + \Phi_2 = B_1. \quad (3.12)$$

Тоді для різницевого рівняння (3.1) умова обмеженості виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

c1)  $\forall k = 1, 2 \quad \forall 1 \leq i \leq m : |z(k, i)| \neq 1, |\lambda(k, i)| \neq 1;$

c2) якщо серед чисел  $z(1, i), z(2, i)$  рівно  $p_i$  лежить всередині кола  $S$ , а серед чисел  $\lambda(1, i), \lambda(2, i)$  — рівно  $q_i$  зовні  $S$ , то  $p_i + q_i = 2$  для кожного  $1 \leq i \leq m$ .

*Доведення.* Розглядаючи (3.1) у базисі  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , робимо висновок, що внаслідок (3.11, 3.12) умова обмеженості для різницевого рівняння (3.1) виконується у тому і тільки у тому випадку, коли умова обмеженості виконується для кожного з таких  $m$  числових різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = (z(1, i) + z(2, i))\alpha_n - z(1, i)z(2, i)\alpha_{n-1} + \beta_n, n \geq 1, \\ \alpha_{n+1} = (\lambda(1, i) + \lambda(2, i))\alpha_n - \lambda(1, i)\lambda(2, i)\alpha_{n-1} + \beta_n, n \leq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Тут  $\{\beta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — задана, а  $\{\alpha_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — шукана обмежені послідовності комплексних чисел.

Застосувавши при фіксованому  $1 \leq i \leq m$  до рівняння (3.13) лему 3.1 і теорему 3.1, робимо висновок, що для 3.13 умова обмеженості виконується тоді і тільки тоді, коли оператори в  $\mathbb{C}^2$ , які задаються матрицями

$$T'_{A,i} = \begin{pmatrix} z(1, i) + z(2, i) & -z(1, i)z(2, i) \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T'_{B,i} = \begin{pmatrix} \lambda(1, i) + \lambda(2, i) & -\lambda(1, i)\lambda(2, i) \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

задовольняють умови  $a1)$ ,  $a2)$  теореми 3.1 при  $X^2 = \mathbb{C}^2$ .

Неважко переконатися, що  $z(1, i), z(2, i)$  — власні числа оператора  $T'_{A,i}$ , а також при  $z(1, i) \neq z(2, i)$  їм відповідають власні вектори  $\begin{pmatrix} z(1, i) \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} z(2, i) \\ 1 \end{pmatrix}$ , а при  $z(1, i) = z(2, i)$  — власний вектор  $\begin{pmatrix} z(1, i) \\ 1 \end{pmatrix}$  і приєднаний вектор  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Тому при  $|z(1, i)| \neq 1$ ,  $|z(2, i)| \neq 1$  підпростори

$\mathbb{C}_-^2(T'_{A,i}), \mathbb{C}_+^2(T'_{A,i})$  для цього оператора будуються за таким правилом:

якщо  $z(1, i), z(2, i)$  лежать всередині кола  $S$ , то  $\mathbb{C}_-^2(T'_{A,i}) = \mathbb{C}^2$ ,  
 $\mathbb{C}_+^2(T'_{A,i}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ;

якщо  $z(1, i), z(2, i)$  лежать зовні  $S$ , то  $\mathbb{C}_-^2(T'_{A,i}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $\mathbb{C}_+^2(T'_{A,i}) = \mathbb{C}^2$ ;  
якщо  $z(1, i)$  лежать всередині, а  $z(2, i)$  — зовні  $S$ , то

$\mathbb{C}_-^2(T'_{A,i}) = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} z(1, i) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $\mathbb{C}_+^2(T'_{A,i}) = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} z(2, i) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , де л.о.  $\left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\}$

позначає лінійну оболонку в  $\mathbb{C}^2$  вектора  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ .

Аналогічно побудуємо підпростори  $\mathbb{C}_-^2(T'_{B,i})$  та  $\mathbb{C}_+^2(T'_{B,i})$ . Можна переконатися, що  $\lambda(1, i), \lambda(2, i)$  — власні числа оператора  $T'_{B,i}$ , а також при  $\lambda(1, i) \neq \lambda(2, i)$  їм відповідають власні вектори  $\begin{pmatrix} \lambda(1, i) \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$\begin{pmatrix} \lambda(2, i) \\ 1 \end{pmatrix}$ , а при  $\lambda(1, i) = \lambda(2, i)$  — власний вектор  $\begin{pmatrix} \lambda(1, i) \\ 1 \end{pmatrix}$  і приєднаний вектор  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Тому при  $|\lambda(1, i)| \neq 1$ ,  $|\lambda(2, i)| \neq 1$  підпростори

$\mathbb{C}_-^2(T'_{B,i}), \mathbb{C}_+^2(T'_{B,i})$  для цього оператора будуються за таким правилом:

якщо  $\lambda(1, i), \lambda(2, i)$  лежать всередині кола  $S$ , то  $\mathbb{C}_-^2(T'_{B,i}) = \mathbb{C}^2$ ,  
 $\mathbb{C}_+^2(T'_{B,i}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ;

якщо  $\lambda(1, i), \lambda(2, i)$  лежать зовні  $S$ , то  $\mathbb{C}_-^2(T'_{B,i}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $\mathbb{C}_+^2(T'_{B,i}) = \mathbb{C}^2$ ;  
якщо  $\lambda(1, i)$  лежать всередині, а  $\lambda(2, i)$  — зовні  $S$ , то

$\mathbb{C}_-^2(T'_{B,i}) = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} \lambda(1, i) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $\mathbb{C}_+^2(T'_{B,i}) = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} \lambda(2, i) \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ,

де л.о.  $\left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\}$  позначає лінійну оболонку в  $\mathbb{C}^2$  вектора  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ .

Тому для еквівалентності умов *a2)* теореми 3.1 і *c2)* теореми 3.3 для різницевого рівняння (3.13) досить зауважити, що  $\mathbb{C}^2$  є прямою сумою л.о.  $\left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  і л.о.  $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  для довільних  $z, \lambda \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq \lambda$ , бо  $\begin{vmatrix} z & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ .

□

### 3.4 Приклади

Наступні приклади показують, що умови леми 3.3 і леми 3.5 незалежні.

**Приклад 3.1.** Нехай  $X = \mathbb{C}^2$  — арифметичний двовимірний комплексний простір. Зафіксуємо деяку норму в  $X$  і будемо ототожнювати оператори, що діють з  $X$  в  $X$ , з їхніми матрицями у базисі  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Операторне рівняння  $\Lambda^2 - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Lambda + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = O$  має, зокрема, корені

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

При цьому:

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1 + \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_3 + \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1 - \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \det(\Lambda_1 - \Lambda_2) = 1,$$

$$\Lambda_1 - \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \det(\Lambda_1 - \Lambda_3) = 0,$$

$$\Lambda_3 - \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \det(\Lambda_3 - \Lambda_4) = -1,$$

де  $\det(A)$  позначає визначник матриці  $A$ .

Отже,

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = A_1 \text{ і існує } (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1},$$

$$\Lambda_1 + \Lambda_3 \neq A_1 \text{ і не існує } (\Lambda_1 - \Lambda_3)^{-1},$$

$$\Lambda_3 + \Lambda_4 \neq A_1 \text{ і існує } (\Lambda_3 - \Lambda_4)^{-1}.$$

**Приклад 3.2.** Нехай  $X = \mathbb{C}^2$  — арифметичний двовимірний комплексний простір. Зафіксуємо деяку норму в  $X$  і будемо ототожнювати оператори, що діють з  $X$  в  $X$ , з їхніми матрицями у базисі  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Операторне рівняння  $\Lambda^2 - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Lambda + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$  має корені

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При цьому,  $\Lambda_1 + \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\det(\Lambda_1 - \Lambda_2) = 0$ .

Таким чином,  $\Lambda_1 + \Lambda_2 = A_1$  і не існує  $(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}$ .

У наступному прикладі показано, що навіть у просторі  $\mathbb{C}^2$  операторне рівняння (3.3) може мати безліч розв'язків, а також доведено для яких з цих розв'язків виконуються умови лем 3.3 і 3.5.

**Приклад 3.3.** Знайдемо усі корені рівняння

$$X^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O. \quad (3.14)$$

Нехай  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Оскільки  $X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & d^2 + bc \end{pmatrix}$

і  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , то з урахуванням (3.14)

покомпонентно матимемо

$$\begin{cases} a^2 + bc - a = 0, \\ b(a + d) - b = 0, \\ c(a + d) = 0, \\ d^2 + bc = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

З третьої рівності (3.15) випливає, що  $c = 0$  або  $a + d = 0$ .

Нехай  $c = 0$ . Тоді з останньої рівності (3.15) випливає, що  $d = 0$  і

$$\text{отримаємо } \begin{cases} a(a-1) = 0, \\ b(a-1) = 0, \end{cases} \text{ звідки } \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a = 1, \\ b \in \mathbb{C}. \end{cases} \text{ Отже,}$$

маємо такі розв'язки:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ та } \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{C}. \quad (3.16)$$

Нехай  $a + d = 0$ . Тоді з другої рівності (3.15) випливає, що  $b = 0$ , далі з останньої рівності (3.15) випливає, що  $d = 0$ . З того, що  $a + d = 0$  випливає, що  $a = -d = 0$ , а також з першої рівності (3.15) випливає, що  $a(a-1) = 0$ , тобто  $a = 0$ . При цьому  $c \in \mathbb{C}$ . Отже, маємо такі розв'язки:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}. \quad (3.17)$$

З (3.16, 3.17) випливає, що (3.14) має дві серії розв'язків

$$T_{c,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C} \text{ та } T_{b,2} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{C}. \quad (3.18)$$

Знайдемо пари розв'язків, які комутують.

При  $c_1 \neq c_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ :

$$T_{c_1,1} \cdot T_{c_2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T_{c_2,1} \cdot T_{c_1,1}.$$

$$T_{c_1,1} - T_{c_2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 \end{pmatrix}, \det(T_{c_1,1} - T_{c_2,1}) = 0.$$

Отже,  $T_{c_1,1}, T_{c_2,1}$  комутують, причому не існує  $(T_{c_1,1} - T_{c_2,1})^{-1}$ .

При  $b_1 \neq b_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ :

$$T_{b_1,2} \cdot T_{b_2,2} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T_{b_2,2} \cdot T_{b_1,2} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$T_{b_2,2} - T_{b_1,2} = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \det(T_{b_2,2} - T_{b_1,2}) = 0.$$

Отже,  $T_{b_1,2}, T_{b_2,2}$  не комутують, а також не існує  $(T_{b_2,2} - T_{b_1,2})^{-1}$ .

Беремо тепер оператори з різних серій:

$$T_{c,1} \cdot T_{b,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & bc \end{pmatrix},$$

$$T_{b,2} \cdot T_{c,1} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, ці оператори комутують у тому і тільки тому випадку, коли

$$c = 0, b \in \mathbb{C}, \text{ тобто пара має вигляд } T_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T_{b,2} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При цьому,  $T_{0,1} - T_{b,2} = \begin{pmatrix} -1 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\det(T_{0,1} - T_{b,2}) = 0$ , тобто не існує  $(T_{0,1} - T_{b,2})^{-1}$ .

$$\text{Також відзначимо, що } T_{c,1} - T_{b,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

$\det(T_{c,1} - T_{b,2}) = bc$ , а отже,  $(T_{c,1} - T_{b,2})^{-1}$  існує у тому і тільки тому випадку, коли  $bc \neq 0$ .

## 3.5 Висновки до розділу 3

У розділі 3 одержано необхідні і достатні умови на фіксовані лінійні оператори  $A_1, A_2, B_1, B_2$ , при виконанні яких різницеве рівняння загального вигляду (3.1) зі стрибками операторних коефіцієнтів має єдиний обмежений розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  у скінченновимірному банаховому просторі  $X$  для довільної обмеженої послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  (теорема 3.1), а також більш прості для застосувань необхідні і достатні умови, коли оператори  $A_1, A_2, B_1, B_2$  належать деяким спеціальним класам (теоремами 3.2, 3.3). У теоремах 3.2, 3.3 умови накладаються на корені відповідних "алгебраїчних" операторних рівнянь (3.8).

Також виправлено формули, наведені з помилками в роботі [80] (зауваження 3.1).

Результати розділу опубліковано в [3] та в тезах міжнародної конференції [7].

# Розділ 4

## ОБМЕЖЕНІ В СЕРЕДНЬОМУ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У цьому розділі досліджується питання про існування єдиного обмеженого у середньому на  $\mathbb{Z}$  розв'язку одного лінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів у сепарабельному банаховому просторі, а також про близькість цього розв'язку до стаціонарного розв'язку відповідного різницевого рівняння зі сталими операторними коефіцієнтами у випадку, коли рівняння збурюються стаціонарними послідовностями випадкових елементів.

### 4.1 Постановка задачі

Нехай  $X$  — сепарабельний комплексний банахів простір з нормою  $\|\cdot\|_X$  і нульовим елементом  $0_X$ ,  $\mathcal{L}(X)$  — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з  $X$  в  $X$  і  $\mathcal{B}(X)$  —  $\sigma$ -алгебра борельових множин простору  $X$ . Аналогічні позначення для норми, нульового елемента і т.д. будемо використовувати і в інших банахових просторах, що вводяться в цьому розділі.

Нехай  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — повний імовірнісний простір.

**Означення 4.1.** Послідовність  $X$ -значних випадкових елементів  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , заданих на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , будемо називати:

- обмеженою в середньому, якщо  $\sup_{n \in \mathbb{Z}} E \|\xi_n\|_X < +\infty$ ;
- стаціонарною (у вузькому сенсі), якщо

$\forall m \in \mathbb{N} \forall n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{Z} \forall Q_1, Q_2, \dots, Q_m \in \mathcal{B}(X) :$

$$P\{\xi_{n_k+1} \in Q_k, 1 \leq k \leq m\} = P\{\xi_{n_k} \in Q_k, 1 \leq k \leq m\}.$$

Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = A\xi_n + \eta_n, & n \geq 1, \\ \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = B\xi_n + \eta_n, & n \leq 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

у якому  $A, B$  — фіксовані оператори з  $\mathcal{L}(X)$ ,  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — задана обмежена в середньому послідовність  $X$ -значних випадкових елементів,  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — шукана обмежена в середньому послідовність  $X$ -значних випадкових елементів простору  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Означення 4.2.** Послідовність  $X$ -значних випадкових елементів  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$  називається обмеженим у середньому розв'язком різницевого рівняння (4.1), відповідним до обмеженої у середньому послідовності  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , якщо послідовність  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$  обмежена у середньому і для кожного  $n \in \mathbb{Z}$  з імовірністю 1 виконується рівність (4.1).

Знайдемо достатні умови на оператори  $A, B$ , при виконанні яких різницеве рівняння (4.1) має для кожної обмеженої в середньому послідовності  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений у середньому розв'язок  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , а також оцінимо близькість при  $n \rightarrow \infty$  компонент  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$  до компонент обмеженого у середньому розв'язку  $\{\zeta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  різницевого рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом  $A$

$$\zeta_{n+1} - 2\zeta_n + \zeta_{n-1} = A\zeta_n + \eta_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.2)$$

## 4.2 Допоміжні результати

Покладемо  $X^2 = \left\{ \bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \mid x^{(1)}, x^{(2)} \in X \right\}$ .

Тоді  $X$  — сепарабельний комплексний банахів простір з покоординатним додаванням та множенням на скаляр і нормою  $\|\bar{x}\|_{X^2} = \|x^{(1)}\|_X + \|x^{(2)}\|_X$ ,  $\bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \in X^2$ .

Нехай  $T_A = \begin{pmatrix} A + 2I & -I \\ I & O \end{pmatrix}$ ,  $\sigma(T_A)$ ,  $\rho(T_A)$ ,  $r(T_A)$  — відповідно спектр, резольвентна множина та спектральний радіус оператора  $T_A$ ,  $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

Для доведення основного результату цього розділу використовуються наведені нижче твердження.

**Лема 4.1.** Число  $\lambda \neq 0$  належить до  $\rho(T_A)$  тоді і тільки тоді, коли  $\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$  належить до  $\rho(A)$ .

*Доведення.* Достатність. Оскільки  $(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2) \in \rho(A)$ , то оператор  $\Delta_\lambda = \lambda^2 I - (A + 2I)\lambda + I$  має неперервний обернений оператор  $\Delta_\lambda^{-1}$ . Позначимо через  $J$  одиничний оператор в  $X^2$ . Покажемо, що неперервним оберненим оператором до  $T_A - \lambda J$  є оператор

$$(T_A - \lambda J)^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda \Delta_\lambda^{-1} & \Delta_\lambda^{-1} \\ -\Delta_\lambda^{-1} & (A + 2I - \lambda I) \Delta_\lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Домножимо зліва оператор  $T_A - \lambda J$  на  $(T_A - \lambda J)^{-1}$ :

$$\begin{aligned} & (T_A - \lambda J)^{-1} (T_A - \lambda J) = \\ & = \begin{pmatrix} -\lambda \Delta_\lambda^{-1} & \Delta_\lambda^{-1} \\ -\Delta_\lambda^{-1} & (A + 2I - \lambda I) \Delta_\lambda^{-1} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} A + 2I & -I \\ I & O \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \right) = \\ & = \begin{pmatrix} -\lambda \Delta_\lambda^{-1} & \Delta_\lambda^{-1} \\ -\Delta_\lambda^{-1} & (A + 2I - \lambda I) \Delta_\lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + 2I - \lambda I & -I \\ I & -\lambda I \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \Delta_\lambda^{-1}(\lambda^2 I - (A + 2I)\lambda) + \Delta_\lambda^{-1} & \lambda\Delta_\lambda^{-1} - \lambda\Delta_\lambda^{-1} \\ -\Delta_\lambda^{-1}(A + 2I - \lambda I) + (A + 2I - \lambda I)\Delta_\lambda^{-1} & \Delta_\lambda^{-1} + (\lambda^2 I - (A + 2I)\lambda)\Delta_\lambda^{-1} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \Delta_\lambda^{-1}\Delta_\lambda - \Delta_\lambda^{-1} + \Delta_\lambda^{-1} & O \\ \Delta_\lambda^{-1}\Delta_\lambda \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\Delta_\lambda\Delta_\lambda^{-1} & \Delta_\lambda^{-1} + \Delta_\lambda\Delta_\lambda^{-1} - \Delta_\lambda^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

оскільки  $\Delta_\lambda = \lambda^2 I - (A + 2I)\lambda + I$  має неперервний обернений оператор  $\Delta_\lambda^{-1}$ .

Аналогічно домножимо справа оператор  $T_A - \lambda J$  на  $(T_A - \lambda J)^{-1}$ :

$$\begin{aligned}
&(T_A - \lambda J)(T_A - \lambda J)^{-1} = \\
&= \left( \begin{pmatrix} A + 2I & -I \\ I & O \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -\lambda\Delta_\lambda^{-1} & \Delta_\lambda^{-1} \\ -\Delta_\lambda^{-1} & (A + 2I - \lambda I)\Delta_\lambda^{-1} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} A + 2I - \lambda I & -I \\ I & -\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda\Delta_\lambda^{-1} & \Delta_\lambda^{-1} \\ -\Delta_\lambda^{-1} & (A + 2I - \lambda I)\Delta_\lambda^{-1} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (\lambda^2 I - (A + 2I)\lambda)\Delta_\lambda^{-1} + \Delta_\lambda^{-1} & (A + 2I - \lambda I)\Delta_\lambda^{-1} - (A + 2I - \lambda I)\Delta_\lambda^{-1} \\ -\lambda\Delta_\lambda^{-1} + \lambda\Delta_\lambda^{-1} & \Delta_\lambda^{-1} + (\lambda^2 I - (A + 2I)\lambda)\Delta_\lambda^{-1} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \Delta_\lambda\Delta_\lambda^{-1} - \Delta_\lambda^{-1} + \Delta_\lambda^{-1} & \frac{1}{\lambda}\Delta_\lambda\Delta_\lambda^{-1} - \frac{1}{\lambda}\Delta_\lambda\Delta_\lambda^{-1} \\ O & \Delta_\lambda^{-1} + \Delta_\lambda\Delta_\lambda^{-1} - \Delta_\lambda^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отже,  $\lambda \in \rho(T_A)$ .

Необхідність. Зафіксуємо  $\lambda \in \rho(T_A)$ ,  $\lambda \neq 0$ . Досить перевірити, що оператор  $\Delta_\lambda$  неперервно оборотний.

Із теореми Банаха про обернений оператор випливає, що коли  $\Delta_\lambda^{-1}$  не існує, то виконується одна із таких двох умов:

(a1)  $\exists u \neq 0_X : \Delta_\lambda u = 0_X$ ;

(a2) існує таке  $v \in X$ , що операторне рівняння  $\Delta_\lambda x = v$  немає розв'язків.

Якщо виконується умова (a1), то  $(T_A - \lambda J) \begin{pmatrix} \lambda u \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_X \\ 0_X \end{pmatrix}$ . Це суперечить включенню  $\lambda \in \rho(T_A)$ .

Оскільки  $\lambda \in \rho(T_A)$ , то операторне рівняння

$$\begin{pmatrix} A + 2I - \lambda I & -I \\ I & -\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0_X \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

має розв'язок.

Запишемо рівняння (4.3) покоординатно:

$$\begin{cases} (A + 2I - \lambda I)x^{(1)} - x^{(2)} = v, \\ x^{(1)} - \lambda x^{(2)} = 0_X, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A + 2I - \lambda I)\lambda x^{(2)} - x^{(2)} = v, \\ x^{(1)} = \lambda x^{(2)}. \end{cases}$$

Звідки випливає, що рівняння  $\Delta_\lambda x = v$  має розв'язок  $x = -x^{(2)}$ , а отже, умова (a2) теж не виконується. □

**Лема 4.2.**  $\sigma(T_A) \cap S = \emptyset$  тоді і тільки тоді, коли  $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \emptyset$ .

*Доведення.* Оскільки, як показано в лемі 2.4,  $\{\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 \mid \lambda \in S\} = [-4; 0]$ , то лема 4.2 є прямим наслідком лемі 4.1. □

**Лема 4.3.** Різницеве рівняння (4.1) має для кожної обмеженої в середньому послідовності  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений у середньому розв'язок  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$  тоді і тільки тоді, коли різницеве рівняння

$$\begin{cases} \bar{\xi}_{n+1} = T_A \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n, n \geq 1, \\ \bar{\xi}_{n+1} = T_B \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

має для кожної обмеженої в середньому послідовності  $X^2$ -значних випадкових елементів  $\{\bar{\eta}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , визначених на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , єдиний обмежений у середньому розв'язок  $\{\bar{\xi}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .

*Доведення. Достатність.* Нехай різницеве рівняння (4.4) має для кожної обмеженої в середньому послідовності  $X^2$ -значних випадкових елементів  $\{\bar{\eta}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , визначених на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , єдиний обмежений у середньому розв'язок  $\{\bar{\xi}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Зафіксуємо обмежену в середньому послідовність  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Нехай  $\{\bar{\xi}_n = \begin{pmatrix} \xi_n^{(1)} \\ \xi_n^{(2)} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}\}$  — єдиний обмежений у середньому розв'язок рівняння (4.4), що відповідає обмеженій у середньому послідовності  $\{\bar{\eta}_n = \begin{pmatrix} \eta_n \\ \bar{0} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}\}$ .

Записавши рівності (4.4) покоординатно, отримаємо

$$\begin{cases} \begin{cases} \xi_{n+1}^{(1)} - (A + 2I)\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)} = \eta_n, \\ \xi_{n+1}^{(2)} = \xi_n^{(1)}, \end{cases} & n \geq 1, \\ \begin{cases} \xi_{n+1}^{(1)} - (B + 2I)\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)} = \eta_n, \\ \xi_{n+1}^{(2)} = \xi_n^{(1)}, \end{cases} & n \leq 0. \end{cases}$$

Підставивши у перші рівняння системи  $\xi_n^{(2)} = \xi_{n-1}^{(1)}$ , отримаємо

$$\begin{cases} \xi_{n+1}^{(1)} - (A + 2I)\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(1)} = \eta_n, & n \geq 1, \\ \xi_{n+1}^{(1)} - (B + 2I)\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(1)} = \eta_n, & n \leq 0, \end{cases}$$

а отже, обмежена в середньому послідовність  $\{\xi_n^{(1)}, n \in \mathbb{Z}\}$  є відповідним до  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  обмеженим у середньому розв'язком рівняння (4.1).

Якщо, від супротивного, цей обмежений в середньому розв'язок не єдиний, то відповідне до (4.1) однорідне рівняння

$$\begin{cases} \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = A\xi_n, & n \geq 1, \\ \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = B\xi_n, & n \leq 0, \end{cases}$$

має ненульовий обмежений в середньому розв'язок  $\{\zeta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Але тоді відповідне до (4.4) однорідне рівняння теж має відмінний від нульового

обмежений в середньому розв'язок  $\{\bar{\zeta}_n = \begin{pmatrix} \zeta_n \\ \zeta_{n-1} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}\}$ , бо, підставивши цей розв'язок у відповідне до (4.4) однорідне рівняння, записане по координатно, отримаємо

$$\begin{cases} \begin{cases} \zeta_{n+1} - (A + 2I)\zeta_n + \zeta_{n-1} = \bar{0}, \\ \zeta_n = \zeta_n, \end{cases} & n \geq 1, \\ \begin{cases} \zeta_{n+1} - (B + 2I)\zeta_n + \zeta_{n-1} = \bar{0}, \\ \zeta_n = \zeta_n, \end{cases} & n \leq 0, \end{cases}$$

причому  $\zeta_k$  — ненульовий випадковий елемент для деякого  $k \in \mathbb{Z}$ .

Суперечність.

Необхідність. Нехай тепер різницеве рівняння (4.1) має для кожної обмеженої в середньому послідовності  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений у середньому розв'язок  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Зафіксуємо обмежену в середньому послідовність  $X^2$ -значних випадкових елементів  $\{\bar{\eta}_n = \begin{pmatrix} \eta_n^{(1)} \\ \eta_n^{(2)} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}\}$ . Відзначимо, що (4.4) записується у такому еквівалентному вигляді:

$$\begin{cases} \begin{cases} \xi_{n+1}^{(1)} = (A + 2I)\xi_n^{(1)} - \xi_n^{(2)} + \eta_n^{(1)}, \\ \xi_{n+1}^{(2)} = \xi_n^{(1)} + \eta_n^{(2)}, \end{cases} & n \geq 1, \\ \begin{cases} \xi_{n+1}^{(1)} = (B + 2I)\xi_n^{(1)} - \xi_n^{(2)} + \eta_n^{(1)}, \\ \xi_{n+1}^{(2)} = \xi_n^{(1)} + \eta_n^{(2)}, \end{cases} & n \leq 0. \end{cases}$$

Покладемо  $\xi_n^{(1)} = \xi_n$ , де  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — єдиний обмежений в середньому розв'язок (4.1), відповідний до обмеженої в середньому послідовності  $\{\eta_n = \eta_n^{(1)} - \eta_{n-1}^{(2)}, n \in \mathbb{Z}\}$ , а також  $\xi_n^{(2)} = \xi_{n-1}^{(1)} + \eta_{n-1}^{(2)}, n \in \mathbb{Z}$ . В результаті отримаємо відповідний до  $\{\bar{\eta}_n, n \in \mathbb{Z}\}$  обмежений в середньому розв'язок  $\{\bar{\xi}_n = \begin{pmatrix} \xi_n^{(1)} \\ \xi_n^{(2)} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (4.4).

Якщо, від супротивного, цей обмежений в середньому розв'язок

не єдиний, то існує ненульовий обмежений в середньому розв'язок  $\{\bar{\zeta}_n = \begin{pmatrix} \zeta_n^{(1)} \\ \zeta_n^{(2)} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}\}$  відповідного до (4.4) однорідного різницевого рівняння, а отже,

$$\left\{ \begin{cases} \zeta_{n+1}^{(1)} = (A + 2I)\zeta_n^{(1)} - \zeta_n^{(2)}, \\ \zeta_{n+1}^{(2)} = \zeta_n^{(1)}, \end{cases} \right. \quad n \geq 1,$$

$$\left\{ \begin{cases} \zeta_{n+1}^{(1)} = (B + 2I)\zeta_n^{(1)} - \zeta_n^{(2)}, \\ \zeta_{n+1}^{(2)} = \zeta_n^{(1)}, \end{cases} \right. \quad n \leq 0,$$

причому  $\zeta_k^{(1)}$  — ненульовий випадковий елемент для деякого  $k \in \mathbb{Z}$ .

Тому відповідне до (4.1) однорідне рівняння має ненульовий обмежений в середньому розв'язок  $\{\zeta_n^{(1)}, n \in \mathbb{Z}\}$ . Суперечність. □

**Зауваження 4.1.** Легко перевірити, що у випадку, коли (4.4) має єдиний обмежений у середньому розв'язок для кожної обмеженої в середньому послідовності  $\{\bar{\eta}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , то відповідний до обмеженої в середньому послідовності  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений у середньому розв'язок рівняння (4.1) можна отримати наступним чином. Якщо  $\left\{ \begin{pmatrix} \xi_n^{(1)} \\ \xi_n^{(2)} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$  — єдиний обмежений у середньому розв'язок (4.4), відповідний до обмеженої в середньому послідовності  $\left\{ \begin{pmatrix} \eta_n \\ 0_X \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ , то  $\xi_n^{(2)} = \xi_{n-1}^{(1)}$  з імовірністю 1 для кожного  $n \in \mathbb{Z}$  і  $\{\xi_n^{(1)}, n \in \mathbb{Z}\}$  — відповідний до  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  обмежений в середньому розв'язок рівняння (4.1). Справді, підставимо  $\left\{ \begin{pmatrix} \xi_n^{(1)} \\ \xi_n^{(2)} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$  у (4.4) і запишемо покоординатно

$$\left\{ \begin{cases} \xi_{n+1}^{(1)} - (A + 2I)\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)} = \eta_n, \\ \xi_{n+1}^{(2)} = \xi_n^{(1)}, \end{cases} \right. \quad n \geq 1,$$

$$\left\{ \begin{cases} \xi_{n+1}^{(1)} - (B + 2I)\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)} = \eta_n, \\ \xi_{n+1}^{(2)} = \xi_n^{(1)}, \end{cases} \right. \quad n \leq 0.$$

У других рівняннях цієї системи отримали, що  $\xi_n^{(2)} = \xi_{n-1}^{(1)}$  для кожного  $n \in \mathbb{Z}$ . Підставимо  $\xi_n^{(2)} = \xi_{n-1}^{(1)}$  у перші рівняння цієї системи

$$\begin{cases} \xi_{n+1}^{(1)} - (A + 2I)\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(1)} = \eta_n, & n \geq 1, \\ \xi_{n+1}^{(1)} - (B + 2I)\xi_n^{(1)} + \xi_n^{(1)} = \eta_n, & n \leq 0. \end{cases}$$

Отримали, що  $\{\xi_n^{(1)}, n \in \mathbb{Z}\}$  — відповідний до  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  обмежений в середньому розв'язок рівняння (4.1).

Позначимо через  $Y$  банахів простір  $\mathcal{L}_1(\Omega, X)$  усіх класів еквівалентності випадкових елементів  $\xi : \Omega \rightarrow X$  таких, що  $\|\xi\|_Y = E\|\xi\|_X < +\infty$ . Кожному оператору  $G$  із  $\mathcal{L}(X)$  поставимо у відповідність оператор  $\tilde{G}$  із  $\mathcal{L}(Y)$ , який діє за правилом

$$\forall \xi \in Y : (\tilde{G}\xi)(\omega) = G\xi(\omega), \omega \in \Omega. \quad (4.5)$$

Наступна лема є прямим наслідком означень 4.1 і 4.2.

**Лема 4.4.** *Різницеве рівняння (4.4) має для кожної обмеженої в середньому послідовності  $\{\bar{\eta}_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений у середньому розв'язок  $\{\bar{\xi}_n, n \in \mathbb{Z}\}$  тоді і тільки тоді, коли детерміноване різницеве рівняння*

$$\begin{cases} \bar{\xi}_{n+1} = \tilde{T}_A \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n, & n \geq 1, \\ \bar{\xi}_{n+1} = \tilde{T}_B \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n, & n \leq 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

*має для кожної обмеженої в  $Y^2$  послідовності  $\{\bar{\eta}_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений розв'язок  $\{\bar{\xi}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .*

Нехай  $W$  — комплексний банахів простір. Припустимо, що для спектра  $\sigma(U)$  оператора  $U \in \mathcal{L}(W)$  виконується умова  $\sigma(U) \cap S = \emptyset$ . Нехай  $\sigma_-(U)$  — частина спектра  $\sigma(U)$ , що лежить всередині кола  $S$ , а  $\sigma_+(U)$  — частина спектра  $\sigma(U)$ , що лежить зовні кола  $S$ . Розглядатимемо випадок, коли  $\sigma_-(U) \neq \emptyset$ ,  $\sigma_+(U) \neq \emptyset$ . Відзначимо, що усі отримані нижче результати справедливі і у випадку, коли серед множин  $\sigma_-(U)$ ,  $\sigma_+(U)$  є порожня множина, з очевидними змінами в отриманих формулах.

З теореми про спектральний розклад оператора у банаховому просторі (див., наприклад, [30, с.8]) випливає, що простір  $W$  розкладається в пряму суму інваріантних відносно оператора  $U$  підпросторів  $W = W_-(U) \dot{+} W_+(U)$  таким чином, що звуження  $U_-, U_+$  оператора  $U$  на підпростори  $W_-(U)$ ,  $W_+(U)$  мають спектри  $\sigma_-(U)$ ,  $\sigma_+(U)$  відповідно, а отже, для спектральних радіусів операторів  $U_-, U_+^{-1}$  справджуються оцінки

$$r(U_-) < 1, r(U_+^{-1}) < 1. \quad (4.7)$$

Також виконується наступне твердження.

**Лема 4.5.** (див. лему 4 із [93, с.151-152]). *Якщо оператор  $U \in \mathcal{L}(W)$  неперервно оборотний і  $\sigma(U) \cap S = \emptyset$ , то*

$$W_-(U) = \left\{ w \in W \mid \sup_{n \geq 1} \|U^n w\| < \infty \right\},$$

$$W_+(U) = \left\{ w \in W \mid \sup_{n \geq 1} \|U^{-n} w\| < \infty \right\}.$$

### 4.3 Обмежені у середньому розв'язки різни- цевого рівняння (4.1)

Наступна теорема містить один з основних результатів цього розділу.

**Теорема 4.1.** *Нехай для операторів  $A, B$  виконуються такі умови:*

$$(i1) \sigma(A) \cap [-4; 0] = \emptyset, \sigma(B) \cap [-4; 0] = \emptyset;$$

$$(i2) X^2 = X_-^2(T_A) + X_+^2(T_B).$$

*Тоді різницеве рівняння (4.1) має для кожної обмеженої в середньому  $X$ -значної послідовності випадкових елементів  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений у середньому розв'язок  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .*

*Доведення.* Із умови (i1) і леми 4.2 випливає, що  $\sigma(T_A) \cap S = \emptyset$ ,  $\sigma(T_B) \cap S = \emptyset$ . Скориставшись також умовою (i2) і теоремою 2 із [89], робимо висновок, що різницеве рівняння (4.4) має для довільної обмеженої в середньому послідовності  $\{\bar{\eta}_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений у середньому розв'язок  $\{\bar{\xi}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Тому твердження теореми виконується внаслідок леми 4.3.

□

**Зауваження 4.2.** У розділі 2 встановлено, що коли додатково простір  $X$  скінченновимірний і матриці операторів  $A, B$  мають жорданову нормальну форму в одному і тому ж базисі, то із умови (i1) випливає, що виконується умова (i2).

## 4.4 Близькість компонент обмежених у середньому розв'язків різницевих рівнянь (4.1) та (4.2) при $n \rightarrow \infty$

Спочатку запишемо детерміновані аналоги рівнянь (4.1) і (4.2). Нехай  $U, V$  — фіксовані оператори з  $\mathcal{L}(W)$ . У подальшому використовуються такі твердження.

**Теорема 4.2.** (див. теорему 1 із [30, с.9]). Різницеве рівняння

$$u_{n+1} = Uu_n + y_n, n \in \mathbb{Z}, \quad (4.8)$$

має для кожної обмеженої в  $W$  послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений розв'язок  $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$  тоді і тільки тоді, коли  $\sigma(U) \cap S = \emptyset$ .

**Зауваження 4.3.** Із доведення теореми 4.2 випливає, що коли  $\sigma(U) \cap S = \emptyset$ , то відповідний до обмеженої послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений розв'язок рівняння (4.8) має вигляд

$$\{u_n = \sum_{j=0}^{\infty} U_-^j P_-^U y_{n-1-j} - \sum_{j=-\infty}^{-1} U_+^j P_+^U y_{n-1-j}, n \in \mathbb{Z}\}, \quad (4.9)$$

де  $P_-^U, P_+^U$  — проектори в  $W$  на підпростори  $W_-(U)$  і  $W_+(U)$  відповідно. Внаслідок нерівностей (4.7) ряди з (4.9) збігаються.

**Теорема 4.3.** (див. теорему 1 із [77]). Нехай виконуються такі умови:

(j1)  $\sigma(U) \cap S = \emptyset, \sigma(V) \cap S = \emptyset$ ;

(j2)  $W = W_-(U) \dot{+} W_+(V)$ .

Тоді різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ux_n + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Vx_n + y_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

має для кожної обмеженої в  $W$  послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений розв'язок  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .

**Зауваження 4.4.** В [77] також встановлено, що коли виконуються умови (j1), (j2), то при  $n \geq 1$  компонента  $x_n$  єдиного обмеженого

розв'язку  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (4.10), відповідного до обмеженої послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , зображується наступним чином. Нехай  $P_-, P_+$  — проектори на підпростори  $W_-(U), W_+(V)$ , що відповідають зображенню  $W = W_-(U) \dot{+} W_+(V)$ . Покладемо для кожного  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} P_+^n &= U^n P_+^0 U_+^{-n} P_+^U, \\ P_-^n &= I_W - P_+^n, \end{aligned} \quad (4.11)$$

де  $I_W$  — одиничний оператор в просторі  $W$ . Тоді для кожного  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} x_n &= P_-^{n-1} y_{n-1} + U_- P_-^{n-2} y_{n-2} + \dots + U_-^{n-2} P_-^1 y_1 + \\ &+ \sum_{j=-\infty}^0 U_-^{n-1} P_-^0 V_-^{|j|} P_-^V y_j - \sum_{j=n}^{\infty} P_+^{n-1} U_+^{n-1-j} P_+^U y_j. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ряди з (4.12) збігаються за нормою в  $W$ .

Наступна теорема показує наскільки близькі розв'язки рівнянь (4.8, 4.10) при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 4.4.** *Нехай виконуються умови теореми 4.3. Тоді знайдуться такі залежні тільки від операторів  $U, V$  сталі  $\rho \in (0, 1)$ ,  $C > 0$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$ , що для кожної обмеженої в  $W$  послідовності  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  для відповідних до цієї послідовності обмежених розв'язків  $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (4.8) та  $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (4.10) для кожного  $n \geq n_0$  виконується оцінка*

$$\|x_n - u_n\|_W \leq C \rho^n \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|_W. \quad (4.13)$$

*Доведення.* Оскільки відповідно до (4.7) спектральні радіуси операторів  $U_-, U_+^{-1}, V_-$  менші за одиницю, то знайдуться такі сталі  $\rho \in (0, 1)$ ,  $m_0 \in \mathbb{N}$ , що

$$\forall m \geq m_0 : \max(\|U_-^m\|, \|U_+^{-m}\|, \|V_-^m\|) \leq \rho^m. \quad (4.14)$$

Зафіксуємо обмежену послідовність  $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$  і при  $n \geq m_0 + 2$  оцінимо  $\|u_n - x_n\|$ , скориставшись формулами (4.9, 4.12).

Оскільки  $P_-^0$  проектує на  $W_-(U)$ , то з урахуванням (4.11), матимемо для

кожного  $0 \leq k \leq n - 2$ :

$$\begin{aligned}
& \|U_-^k P_-^U y_{n-1-k} - U_-^k P_-^{n-1-k} y_{n-1-k}\|_W = \\
& = \|U_-^k (P_-^U - I_W + P_+^{n-1-k}) y_{n-1-k}\|_W = \\
& = \|U_-^k (P_+^{n-1-k} - P_+^U) y_{n-1-k}\|_W = \\
& = \|U_-^k (U^{n-1-k} P_+^0 U_+^{-(n-1-k)} - U^{n-1-k} U_+^{-(n-1-k)}) P_+^U y_{n-1-k}\|_W = \\
& = \|-U_-^k U^{n-1-k} P_-^0 U_+^{-(n-1-k)} P_+^U y_{n-1-k}\|_W = \\
& = \|U_-^{n-1} P_-^0 U_+^{-(n-1-k)} P_+^U y_{n-1-k}\|_W.
\end{aligned}$$

Тому, позначивши через  $C_1$  максимум квадратів норм операторів  $P_{\pm}^0, P_{\pm}^U, P_{\pm}^V$ , матимемо:

$$\begin{aligned}
& \forall 0 \leq k \leq n - 1 - m_0 : \\
& \|U_-^k P_-^U y_{n-1-k} - U_-^k P_-^{n-1-k} y_{n-1-k}\|_W \leq \rho^{n-1} \rho^{n-1-k} C_1 \|y\|_{\infty},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
& \forall n - m_0 \leq k \leq n - 2 : \|U_-^k P_-^U y_{n-1-k} - U_-^k P_-^{n-1-k} y_{n-1-k}\|_W \leq \\
& \leq \rho^{n-1} C_1 \max_{1 \leq j \leq m_0 - 1} \|U_+^{-j}\| \cdot \|y\|_{\infty}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Тут  $\|y\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|_W$ .

Із (4.11) і властивостей проекторів випливає, що для кожного  $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
& \|U_+^{-1-k} P_+^U y_{n+k} - P_+^{n-1} U_+^{-1-k} P_+^U y_{n+k}\|_W = \\
& = \|(U^{n-1} U_+^{-n+1} P_+^U - U^{n-1} P_+^0 U_+^{-n+1} P_+^U) U_+^{-1-k} P_+^U y_{n+k}\|_W = \\
& = \|U_-^{n-1} P_-^0 U_+^{-n-k} P_+^U y_{n+k}\|_W \leq \rho^{n-1} \rho^{n+k} C_1 \|y\|_{\infty}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Також

$$\left\| \sum_{j=n-1}^{\infty} U_-^j P_-^U y_{n-1-j} \right\|_W \leq C_1 \|y\|_{\infty} \frac{\rho^{n-1}}{1 - \rho}, \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{j=-\infty}^0 U_-^{n-1} P_-^0 V^{|j|} P_-^V y_j \right\|_W \leq \\
& \leq \rho^{n-1} C_1 \|y\|_{\infty} (m_0 \max_{0 \leq k \leq m_0 - 1} \|V_-^k\| + \frac{\rho^{m_0}}{1 - \rho}).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Оскільки сталі в (4.15 – 4.19) залежать тільки від операторів  $U, V$ , то скориставшись цими оцінками і зображеннями (4.9, 4.12), робимо висновок, що виконуються нерівності (4.13). □

У наступній теоремі отримано оцінку близькості компонент єдиного обмеженого у середньому розв'язку різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта до компонент обмеженого у середньому розв'язку різницевого рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом.

**Теорема 4.5.** *Нехай виконуються умови теореми 4.1. Тоді знайдуться сталі  $\rho \in (0, 1)$ ,  $C > 0$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$ , які залежать тільки від операторів  $A$  та  $B$  і такі, що для кожної обмеженої в середньому послідовності  $X$ -значних випадкових елементів  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  для відповідних до цієї послідовності обмежених у середньому розв'язків  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (4.1) та  $\{\zeta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (4.2) виконується оцінка:*

$$\forall n \geq n_0 : E\|\xi_n - \zeta_n\|_X \leq C\rho^n \sup_{n \in \mathbb{Z}} E\|\eta_n\|_X. \quad (4.20)$$

*Доведення.* Поклавши  $A = B$  і застосувавши теорему 4.1, робимо висновок, що різницеве рівняння (4.2) має для кожної обмеженої в середньому послідовності  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений в середньому розв'язок  $\{\zeta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  тоді і тільки тоді, коли  $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \emptyset$ .

Із результатів, опублікованих у роботі [89], випливає, що коли

$$\sigma(T_A) \cap S = \emptyset, \sigma(T_B) \cap S = \emptyset, X^2 = X_-^2(T_A) \dot{+} X_+^2(T_B),$$

то

$$\sigma(\tilde{T}_A) = \sigma(T_A), \sigma(\tilde{T}_B) = \sigma(T_B), Y^2 = Y_-^2(\tilde{T}_A) \dot{+} Y_+^2(\tilde{T}_B),$$

де оператори  $\tilde{T}_A, \tilde{T}_B$  визначені відповідно до (4.5).

Тому, застосувавши теорему 4.4 до різницевого рівняння (4.6), а потім, скориставшись лемами 4.3, 4.4, теоремою 4.1 і зауваженням 4.1, робимо висновок, що виконуються нерівності (4.20). □

**Зауваження 4.5.** Відзначимо, що коли послідовність  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  додатково стаціонарна, то відповідний до неї розв'язок  $\{\zeta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  рівняння (4.2) теж стаціонарний. Отже, елементи розв'язку рівняння (4.1), згідно з (4.20), близькі до елементів стаціонарної послідовності  $\{\zeta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  при  $n \rightarrow \infty$ , незважаючи на стрибок операторного коефіцієнта в рівнянні (4.1).

## 4.5 Обмежені в середньому розв'язки слабко нелінійного різницевого рівняння

Використаємо введений в пункті 4.2 простір  $Y = \mathcal{L}_1(\Omega, X)$  і покладемо  $l_\infty(\mathbb{Z}, Y) = \left\{ \widehat{\xi} = \{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset Y \mid \|\widehat{\xi}\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|\xi_n\|_Y < \infty \right\}$ .

Тоді  $l_\infty(\mathbb{Z}, Y)$  — комплексний банахів простір з покоординатним додаванням і множенням на комплексне число і нормою  $\|\cdot\|_\infty$ .

Нехай оператори  $A, B \in \mathcal{L}(X)$  задовольняють умови теореми 4.1. Розглянемо лінійний неперервний оператор  $\Phi : l_\infty(\mathbb{Z}, Y) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}, Y)$ , який визначається за таким правилом:

$$\Phi \widehat{\xi} = \{(\Phi \widehat{\xi})_n, n \in \mathbb{Z}\}, \widehat{\xi} \in l_\infty(\mathbb{Z}, Y),$$

де

$$(\Phi \widehat{\xi})_n = \begin{cases} \xi_{n+1} - (A + 2I)\xi_n + \xi_{n-1}, & n \geq 1, \\ \xi_{n+1} - (B + 2I)\xi_n + \xi_{n-1}, & n \leq 0. \end{cases}$$

Лінійність оператора  $\Phi$  очевидна, а обмеженість випливає з оцінки

$$\|\Phi \widehat{\xi}\|_\infty \leq (4 + \max(\|A\|, \|B\|)) \cdot \|\widehat{\xi}\|_\infty, \widehat{\xi} \in l_\infty(\mathbb{Z}, Y).$$

За допомогою оператора  $\Phi$  різницеве рівняння (4.1) записується в еквівалентному вигляді  $\Phi \widehat{\xi} = \widehat{\eta}$ .

Якщо виконуються умови теореми 4.1, то за теоремою Банаха про обернений оператор існує неперервний обернений оператор  $\Phi^{-1}$  до оператора  $\Phi$ .

Розглянемо нелінійне різницеве рівняння

$$\begin{cases} \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = A\xi_n + f(\xi_n) + \eta_n, & n \geq 1, \\ \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} = B\xi_n + f(\xi_n) + \eta_n, & n \leq 0, \end{cases} \quad (4.21)$$

у якому  $f : X \rightarrow X$  — відображення, що задовольняє умову Ліпшиця зі

сталюю  $K > 0$ , тобто

$$\forall x, y \in X : \|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|.$$

Виконується така теорема.

**Теорема 4.6.** *Припустимо, що виконуються умови (i1), (i2) теореми 4.1, а також справджується нерівність  $K \cdot \|\Phi^{-1}\| < 1$ . Тоді різницеве рівняння (4.21) має для кожної обмеженої в середньому послідовності  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений у середньому розв'язок  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .*

*Доведення.* Визначимо відображення  $F : l_\infty(\mathbb{Z}, Y) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}, Y)$  за таким правилом:

$$\{(F(\widehat{\xi}))_n = f(\xi_n), n \in \mathbb{Z}\}, \widehat{\xi} = \{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_\infty(\mathbb{Z}, Y).$$

Це означення коректне, оскільки із умови Ліпшиця для  $f$  випливає, що  $f(\xi_n) - X$ -значний випадковий елемент для кожного  $n \in \mathbb{Z}$ , а також

$$(F(\widehat{0})) = \{\dots, f(\bar{0}), f(\bar{0}), \dots\} \in l_\infty(\mathbb{Z}, Y),$$

тому для кожного  $\widehat{\xi} \in l_\infty(\mathbb{Z}, Y)$  справджується оцінка

$$\begin{aligned} \|\Phi(\widehat{\xi})\|_\infty &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|f(\xi_n) - f(\bar{0}) + f(\bar{0})\|_Y \leq \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|f(\xi_n) - f(\bar{0})\|_Y + \|f(\bar{0})\|_Y \leq \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} E \|f(\xi_n) - f(\bar{0})\|_X + \|F(\widehat{0})\|_\infty \leq \\ &\leq K \sup_{n \in \mathbb{Z}} E \|\xi_n - \bar{0}\|_X + \|F(\widehat{0})\|_\infty = \\ &= K\|\widehat{\xi}\|_\infty + \|F(\widehat{0})\|_\infty. \end{aligned}$$

Зафіксуємо  $\widehat{\eta} \in l_\infty(\mathbb{Z}, Y)$ . За допомогою оператора  $\Phi$  і відображення  $F$  різницеве рівняння (4.21) записується у просторі  $l_\infty(\mathbb{Z}, Y)$  в такому еквівалентному вигляді:

$$\Phi\widehat{\xi} = F(\widehat{\xi}) + \widehat{\eta},$$

або, якщо врахувати теорему Банаха про обернений оператор,

$$\widehat{\xi} = \Phi^{-1}F(\widehat{\xi}) + \Phi^{-1}\widehat{\eta}. \quad (4.22)$$

Визначимо тепер відображення  $\Psi : l_\infty(\mathbb{Z}, Y) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}, Y)$  за правилом:

$$\Psi(\widehat{\zeta}) = \Phi^{-1}F(\widehat{\zeta}) + \Phi^{-1}\widehat{\eta}, \quad \widehat{\zeta} \in l_\infty(\mathbb{Z}, Y).$$

Тоді рівняння (4.22) записується у вигляді

$$\widehat{\xi} = \Psi(\widehat{\xi}), \quad (4.23)$$

причому для довільних  $\widehat{\xi}, \widehat{\zeta} \in l_\infty(\mathbb{Z}, Y)$

$$\begin{aligned} \|\Psi(\widehat{\xi}) - \Psi(\widehat{\zeta})\|_\infty &= \|\Phi^{-1}F(\widehat{\xi}) - \Phi^{-1}F(\widehat{\zeta})\|_\infty \leq \\ &\leq \|\Phi^{-1}\| \cdot \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|f(\xi_n) - f(\zeta_n)\|_Y = \\ &= \|\Phi^{-1}\| \cdot \sup_{n \in \mathbb{Z}} E \|f(\xi_n) - f(\zeta_n)\|_X \leq \\ &\leq \|\Phi^{-1}\| \cdot K \cdot \sup_{n \in \mathbb{Z}} E \|\xi_n - \zeta_n\|_X = \\ &= K \cdot \|\Phi^{-1}\| \cdot \|\widehat{\xi} - \widehat{\zeta}\|_\infty. \end{aligned}$$

Отже, врахувавши нерівність  $K \cdot \|\Phi^{-1}\| < 1$ , робимо висновок, що для рівняння (4.23) виконуються умови теореми Банаха про стискаюче відображення. Оскільки рівняння (4.23) і (4.21) еквівалентні, то рівняння (4.21) має єдиний обмежений у середньому розв'язок, відповідний до послідовності  $\widehat{\eta} = \{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .

□

## 4.6 Приклади

**Приклад 4.1.** Нехай  $X = \mathbb{C}^2$ . Розглянемо оператори

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що

$$\sigma(A) = \sigma(B) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{3} \right\}, \quad \sigma(T_A) = \sigma(T_B) = \left\{ \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3 \right\}.$$

Із доведення леми 4.1 випливає, що якщо  $\lambda \neq 0$ , то

$$Au = \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 \right) u \Leftrightarrow T_A \begin{pmatrix} \lambda u \\ u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda u \\ u \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X_-^2(T_A) = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$X_+^2(T_B) = \text{л.о.} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ці вектори є лінійно незалежними. Тому, для операторів  $A, B$  умови (i1) та (i2) теореми 4.1 виконуються.

**Приклад 4.2.** У просторі  $X = \mathbb{C}^4$  розглянемо оператори

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що для них виконуються умови (i1), (i2) теореми 4.1.

Знайдемо жорданову нормальну форму матриці  $A$ , а також відповідний набір власних і приєднаних векторів. Оскільки

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\left(\frac{5}{2} - \lambda\right)\left(\frac{3}{2} - \lambda\right) + \frac{1}{4}\right)\left((1 - \lambda)(-\lambda) + \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 4)\left(\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 2)^2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

то  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$  — власні числа кратності 2. Знайдемо кількість жорданових клітинок, що відповідають числу  $\lambda_1 = 2$ .

Відзначимо, що

$$A - 2I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а отже, ранг матриці  $A - 2I$  рівний 3. Тому жорданова нормальна форма має одну клітинку з власним числом  $\lambda_1$ . Оскільки

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (A - 2I) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то  $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  і  $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  є відповідно власним і приєднаним вектором матриці  $A$ , що відповідають власному числу  $\lambda_1 = 2$ .

Шукаємо тепер кількість жорданових клітинок матриці  $A$ , що відповідають числу  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ . Оскільки

$$A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

то ранг матриці  $A - \frac{1}{2}I$  також рівний 3, тобто з власним числом  $\lambda_2$  теж

матимемо одну клітинку. Також

$$\left(A - \frac{1}{2}I\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left(A - \frac{1}{2}I\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а отже, вектори  $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  і  $f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  є відповідно власним і приєднаним

вектором матриці  $A$ , що відповідають власному числу  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ .

Таким чином, матриця  $A$  має жорданову нормальну форму в базисі  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , і матриця переходу до неї

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Безпосередньо перевіряється, що

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тепер відзначимо, що

$$\begin{aligned}
 C^{-1}BC &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Тому матриця  $B$  має власні числа  $\mu_1 = -5$  і  $\mu_2 = 2$  кратності 1 і 3 відповідно, а також зводиться до жорданової нормальної форми в тому ж базисі  $f_1, f_2, f_3, f_4$ .

Таким чином, з урахуванням зауваження 4.2 оператори  $A$  і  $B$  справді задовольняють умови (i1), (i2) теореми 4.1.

**Приклад 4.3.** Нехай  $G \in \mathcal{L}(X)$  такий оператор, що  $\sigma(G) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ . Доведемо, що оператори  $A = G + G^{-1} - 2I$ ,  $B = -G - G^{-1} - 2I$  задовольняють умови теореми 4.1.

З теореми Данфорда про відображення спектра випливає, що  $\sigma(A) = \{\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 \mid \lambda \in \sigma(G)\}$ . Тому, скориставшись властивостями функції Жуковського, робимо висновок, що  $\sigma(A) \cap [-4; 0] = \emptyset$ , бо  $\sigma(G) \cap S = \emptyset$ . Аналогічно перевіряється, що також  $\sigma(B) \cap [-4; 0] = \emptyset$ , а отже, виконується умова (i1) теореми 4.1.

Розглянемо тепер в  $X^2$  оператор  $T_A = \begin{pmatrix} G + G^{-1} & -I \\ I & O \end{pmatrix}$ .

Йому відповідає операторне рівняння  $\Lambda^2 - (G + G^{-1})\Lambda + I = O$ .

Оператори  $\Lambda_1 = G^{-1}$ ,  $\Lambda_2 = G$  є коренями цього рівняння, причому оператор  $\Lambda_1 - \Lambda_2 = G^{-1}(I - G^2)$  має неперервний обернений оператор

$(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} = (I - G^2)^{-1}G$ , оскільки за теоремою Данфорда про відображення спектра  $\sigma(G^2) = \{\lambda^2 \mid \lambda \in \sigma(G)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ , а отже, існує  $(I - G^2)^{-1}$ . Тому, як і в лемі 3.3, перевіряється, що оператор

$$U_A = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{-1} & G \\ I & I \end{pmatrix}$$

має неперервний обернений оператор

$$U_A^{-1} = \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 \\ -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

а також

$$U_A^{-1} T_A U_A = \begin{pmatrix} G^{-1} & O \\ O & G \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Оскільки у цьому розділі банахів простір  $X$  може бути нескінченновимірним, то з урахуванням доведення лемі 3.3 для перевірки формули (4.24) досить додатково зауважити, що

$$U_A^{-1} U_A = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 \\ -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix},$$

тобто виконується рівність  $U_A^{-1} U_A = I$ .

Із рівності (4.25) випливає, що

$$\forall n \geq 1 : T_A^n = U_A \begin{pmatrix} G^{-n} & O \\ O & G^n \end{pmatrix} U_A^{-1}.$$

Тому, з урахуванням лемі 4.5,

$$\begin{aligned} X_-^2(T_A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X^2 \mid \sup_{n \geq 1} \|T_A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\| < \infty \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X^2 \mid \sup_{n \geq 1} \left\| \begin{pmatrix} G^{-n} & O \\ O & G^n \end{pmatrix} U_A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| < \infty \right\} = \end{aligned}$$

$$= \left\{ U_A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mid \sup_{n \geq 1} \left\| \begin{pmatrix} G^{-n} & O \\ O & G^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\| < \infty \right\},$$

бо оператор  $U_A$  неперервно оборотний.

Оскільки  $\sigma(G) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ , то  $X_-(G) = \{\bar{0}\}$ ,  $X_+(G) = X$ , а отже, з урахуванням леми 4.5,

$$\forall v \in X, v \neq \bar{0} : \sup_{n \geq 1} \|G^n v\| = \infty.$$

Аналогічно

$$\forall u \in X : \sup_{n \geq 1} \|G^{-n} u\| < \infty.$$

Таким чином, остаточно матимемо

$$\begin{aligned} X_-^2(T_A) &= \left\{ \begin{pmatrix} G^{-1} & G \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mid \sup_{n \geq 1} \|G^{-n} u\| < \infty, \right. \\ &\left. \sup_{n \geq 1} \|G^n v\| < \infty \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} G^{-1} u \\ u \end{pmatrix} \mid u \in X \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Із неперервної оборотності оператора  $U_A$  випливає, що рівняння

$$U_A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} G^{-1} u \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

має єдиний розв'язок  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  для кожного  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X^2$ . Тому, врахувавши рівність (4.26), робимо висновок, що

$$X_+^2(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} G v \\ v \end{pmatrix} \mid v \in X \right\}.$$

Аналогічно, замінивши відповідно  $G^{-1}, G$  на  $-G^{-1}, -G$ , отримаємо рівності

$$X_-^2(T_B) = \left\{ \begin{pmatrix} -G^{-1} u \\ u \end{pmatrix} \mid u \in X \right\},$$

$$X_+^2(T_B) = \left\{ \begin{pmatrix} -Gv \\ v \end{pmatrix} \mid v \in X \right\}.$$

Оскільки  $G^{-1} - (-G) = G^{-1}(I + G^2)$ , то, як і  $U_A$ , оператор  $\begin{pmatrix} G^{-1} & -G \\ I & I \end{pmatrix}$  неперервно оборотний. Тому рівняння

$$\begin{pmatrix} G^{-1} & -G \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} G^{-1}u \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Gv \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

теж має єдиний розв'язок  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  для кожного  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X^2$ , тобто  $X_-^2(T_A) \dot{+} X_+^2(T_B) = X^2$ . Таким чином, умова (i2) теореми 4.1 теж виконується.

## 4.7 Висновки до розділу 4

Розділ 4 присвячений дослідженню питання про існування єдиного обмеженого у середньому на  $\mathbb{Z}$  розв'язку одного лінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів у сепарабельному банаховому просторі.

Знайдено достатні умови на лінійні оператори  $A, B$ , при виконанні яких різницеве рівняння (4.1) має для кожної обмеженої в середньому послідовності  $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$  єдиний обмежений у середньому розв'язок  $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Наведено приклад, що ілюструє цей результат.

Оцінено близькість при  $n \rightarrow \infty$  компонент обмеженого у середньому розв'язків різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта (4.1) до компонент обмеженого у середньому розв'язків різницевого рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом (4.2).

Також у цьому розділі розглянено нелінійне різницеве рівняння (4.21) та знайдено достатні умови щодо його єдиного обмеженого у середньому розв'язку.

Відповідні теореми 4.1 — 4.5 опубліковані в [4] та деякі результати з цього розділу висвітлено в тезах міжнародної конференції [8 – 10].

## ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню питань про існування єдиного обмеженого розв'язку різницевого рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів та єдиного обмеженого в середньому розв'язку стохастичних аналогів таких рівнянь.

У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

— доведено критерій існування єдиного обмеженого розв'язку лінійного різницевого рівняння другого порядку загального вигляду зі стрибками операторних коефіцієнтів у скінченновимірному банаховому просторі;

— встановлено, що цей критерій суттєво спрощується у таких двох випадках:

а) ліва частина різницевого рівняння є різницевим аналогом другої похідної, а матриці операторних коефіцієнтів зводяться до жорданової нормальної форми в одному і тому ж базисі;

б) відповідні до різницевого рівняння "алгебраїчні" операторні рівняння мають корені, що задовольняють деякі спеціальні умови;

— встановлено достатні умови існування єдиного обмеженого в середньому розв'язку різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта, збуреного обмеженою в середньому послідовністю випадкових елементів;

— досліджено питання про близькість при  $n \rightarrow \infty$  єдиного обмеженого в середньому розв'язку різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта до обмеженого в середньому розв'язку відповідного різницевого рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом;

— знайдено достатні умови існування єдиного обмеженого в середньому розв'язку слабо нелінійного різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Городній М. Ф., Кравець В. П. Обмежені розв'язки різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта // Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. № 2. С.12–16. DOI: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.02.012>
2. Городній М. Ф., Кравець В. П. Про обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку // Нелінійні коливання. 2019. Т.22, № 2. С. 196–201; translation in Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 249, no 4. P. 601–608. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04960-5>.
3. Городній М. Ф., Кравець В. П. Обмежені розв'язки різницевого рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів // Укр. мат. журн. 2021. Т. 73, № 3. С.47–52. DOI: <https://doi.org/10.37863/umzh.v73i3.6058>; translation in Ukrainian Mathematical Journal. 2021. Vol. 73, no. 3. P. 391–398. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-021-01932-z>.
4. Horodnii M., Kravets V. Bounded in the mean solutions of a second-order difference equation // Modern Stochastics: Theory and Applications. 2021. Vol. 8, no. 4. P. 465–473. DOI: <https://doi.org/10.15559/21-VMSTA189>.
5. Кравець В. П. Про обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку // Матеріали XVII Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна — 2019». Київ, Україна: Київський університет, 2019. С. 17–18.
6. Городній М. Ф., Кравець В. П. Обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку // Матеріали XVIII Міжнародної науково-

- практичної конференції «Шевченківська весна — 2020». Київ, Україна: Київський університет, 2020. С. 9–10.
7. Городній М. Ф., Кравець В. П. Про властивості обмежених розв'язків різницевих рівнянь зі стрибками операторних коефіцієнтів // Abstracts International Conference of Young Mathematician. Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2021. С. 64–65.
  8. Городній М. Ф., Кравець В. П. Про обмежені в середньому розв'язки різницевих рівнянь другого порядку // Матеріали XX міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна — 2022». Київ, Україна: Київський університет, 2022. С. 16.
  9. Kravets V. Bounded In The Mean Solutions Of A Second-Order Difference Equation // 11th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2022). Istanbul, Turkey, 2022. P. 85
  10. Кравець В. П. Обмежені в середньому розв'язки одного нелінійного різницевого рівняння // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна — 2023». Київ, Україна: Київський університет, 2023. С. 27–28.
  11. Birkhoff G. D. General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1911. Vol. 12, no. 2. P. 243–284.
  12. Birkhoff G. D. Formal theory of irregular linear difference equations // Acta. Math. 1930. Vol. 54. P. 205–246.
  13. Birkhoff G. D., Trjitzinsky W. J. Analytic theory of singular difference equations // Acta. Math. 1933. Vol. 60. P. 1–89.
  14. Carmichael R. D. Linear difference equations and their analytic solutions // Trans. Amer. Math. Soc. 1911. Vol. 12, no. 1. P. 99–134.
  15. Гельфонд О. Й. Исчисление конечных разностей // М.: Наука, 1967. 375 с.
  16. Марков А. А. Исчисление конечных разностей // Одесса: Mathesis, 1910. 274 с.

17. Селиванов Д. Ф. Курс исчисления конечных разностей // С.-Пб.: тип. Имп. Акад. наук, 1908.
18. Nörlund N. E. Differenzenrechnung // Berlin: Springer, 1924.
19. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем // М.: Физматгиз, 1963. 968 с.
20. Джури Э. Импульсные системы автоматического управления // М.: Физматгиз, 1963. 455 с.
21. Быков Я. В., Линенко В. Г. О некоторых вопросах качественной теории разностных уравнений // Фрунзе: Илим, 1968. 137 с.
22. Халанай А., Векслер Д. Качественная теории импульсных систем // М.: Мир, 1971. 310 с.
23. Мартынюк Д. И. Лекции по качественной теории разностных уравнений // К.: Наукова думка, 1972. 246 с.
24. Гайшун И. В. Системы с дискретным временем // Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2001. 400 с.
25. Блюмин С. Л., Фараджев Р. Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний // Автомат. и телемех. 1982. № 2. С. 125–163.
26. Слюсарчук В. Е. Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на  $\mathbb{Z}$  функций // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 662–666. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01157966>
27. Слюсарчук В. Ю. Необхідні і достатні умови оборотності кусково-автономних різницевих операторів у просторі обмежених двосторонніх послідовностей // Нелінійні коливання. 2020. Т. 23, № 1. С. 90–111.
28. Слюсарчук В. Ю. Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. 2020. Т. 72, № 6. С. 822–841.
29. Слюсарчук В. Е. Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35, № 1. С. 109–115.

30. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. // К.: Вища шк., 1992. 319 с.
31. Дороговцев А. Я. Об одном методе доказательства существования ограниченных и периодических решений // Математика сегодня '90. Научно-метод. сборник. К.: Вища шк., 1990. № 6. С. 39–48.
32. Ким В. С. Об условиях существования ограниченных решений разностного уравнения в банаховом пространстве // Диффер. уравнения. 1967. Т. 3, № 12. С. 2151–2160.
33. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations // Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1981.
34. Мармерштейн И. И. О некотором свойстве одного семейства и его применениях к исследованию решений разностных и операторных уравнений // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1979. № 32. С. 52–61.
35. Гайшун И. В. Устойчивость двухпараметрических систем с коммутирующими операторами // Диффер. уравнения. 1996. Т. 32, № 2. С. 216–224.
36. Баскаков А. Г. Об обратимости линейных разностных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. матем. 2001. № 5. С. 3–11.
37. Томілов Ю. В. Асимптотична поведінка однієї рекурентної послідовності в банаховому просторі // Асимптотичне інтегрування нелінійних рівнянь. К.: Ін-т матем. АН України, 1992. С. 146–153.
38. Баскаков А. Г., Пастухов А. И. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журнал. 2001. Т. 42, № 6. С. 1231–1243.
39. Баскаков А. Г. Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 6. С. 816–827.
40. Баскаков А. Г. Об условиях обратимости и фредгольмовости разностных операторов // ДАН (Россия). 2000. Т. 372, № 3. С. 295–297.

41. Городний М. Ф. Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. матем.журн. 1991. Т. 43, № 1. С. 42–46.
42. Миролобов А. А., Солдатов М. А. Линейные неоднородные разностные уравнения // М.: Наука, 1986. 127 с.
43. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Ромененко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения // К.: Наук. думка, 1986. 280 с.
44. Самойленко А. М., Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А. Инвариантные торы разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 19. С. 1904–1910.
45. Бенабдаллах М., Руткас А. Г., Соловьев А. А. Применение асимптотических разложений к исследованию бесконечной системы уравнений  $Ax_{n+1} + Bx_n = f_n$  в банаховом пространстве // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1985. № 43. С. 7–19.
46. Bondarenko M. F., Rutkas A. G. On a class of implicit difference equations // Допов. Нац. акад. наук Укр. 1998. № 7. С. 11–15.
47. Слюсарчук В. Е. Об ограниченных и почти периодических решениях неявных разностных уравнений в банаховом пространстве // Доклады АН УССР. Сер. А. 1975. № 6. С. 503–509.
48. Слюсарчук В. Е. Ограниченные и почти периодические решения разностных уравнений в банаховом пространстве // Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. К.: Ин-т математики АН УССР. 1975. С. 147–156.
49. Слюсарчук В. Ю. Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. 2013. Т. 16, № 1. С. 118–124.
50. Слюсарчук В. Ю. Майже періодичні та періодичні розв'язки нелінійних різницевих рівнянь у метричному просторі // Нелінійні коливання. 2015. Т. 18, № 1. С. 112–119.
51. Слюсарчук В. Ю. Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі // Рівне: Видавництво УДУВГП, 2006. 366 с.

52. Слюсарчук В. Ю. Оборотність нелінійних різницевих операторів // Рівне: Видавництво УДУВГП, 2006. 233 с.
53. Слюсарчук В. Е. Оценки спектров и обратимость функциональных операторов // Матем. сборник. 1983. Т. 105 (147), № 2. С. 268–285.
54. Слюсарчук В. Е. О представлении ограниченных решений линейных дискретных уравнений // Укр. мат. журн. 1987. Т. 39, № 2. С. 210–215.
55. Слюсарчук В. Ю. Умови обмеженості розв'язків нелінійного різницевого рівняння  $F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = y_n$  // Науковий вісник Чернівецького університету, Математика. 2011. Т. 1, № 3. С. 137–142.
56. Слюсарчук В. Ю. Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями // Нелінійні коливання. 2011. Т. 14, № 4. С. 536–555.
57. Слюсарчук В. Ю. Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабо регулярними операторами // Нелінійні коливання. 2012. Т. 15, № 1. С. 112–126.
58. Слюсарчук В. Ю. Різницеві рівняння з абсолютно нестійкими нульовими розв'язками // Нелінійні коливання. 2013. Т. 16, № 4. С. 536–546.
59. Ткаченко В. И. О линейных почти периодических разностных уравнениях с ограниченными решениями // Асимптотические решения нелинейных уравнений с малым параметром. К.: Инст. матем. Нац. акад. наук Укр. 1991. С. 121–124.
60. Бондаренко М. Ф., Власенко Л. А., Руткас А. Г. Периодические решения одного класса неявных разностных уравнений // Допов. Нац. акад. наук Укр. 1999. № 1. С. 9–14.
61. Самойленко А. М., Теплинский Ю. В. Предельные теоремы в теории периодических решений линейных и квазилинейных систем разностных уравнений // Диффер. уравнения. 1999. Т. 35, № 9. С. 1262–1270.
62. Preda P., Megan M. Admissibility and exponential dichotomy for linear infinity dimensional discret time systems // Seminar theor. struct. Univ. Timișoara. 1988. № 50. P. 1–20.

63. Medved M. Special solutions of linear difference equations with infinite delay // Arch. math. 1994. Т. 30, № 2. Р. 139–144.
64. Городній М. Ф., Вятчанинов О. В. Про обмеженість однієї рекурентної послідовності в банаховому просторі // УМЖ. 2009. Т. 61, № 6. С. 1293–1296.
65. Вятчанинов О. В. Сумовні зі степенем  $p$  рекурентні послідовності у банаховому просторі // Вісник Київського Університету, Серія: Фізико-математичні науки. 2010. № 2. С. 40–44.
66. Грод І. М. Існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь у банаховому просторі // Нелінійні коливання. 2013. Т. 16, № 2. С. 165–172.
67. Мазья В. Г., Сулимов М. Г. Асимптотика решений одномерных разностных уравнений с постоянными операторными коэффициентами // Матем. сб. 1987. Т. 132 (174), № 4. С. 451–469.
68. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений // М.: Мир, 1985. 376 с.
69. Покутний О. О. Розв'язки лінійних різницевих рівнянь в просторі Банаха на всій цілочисельній вісі // Вісник Київського університету, серія фіз.-мат. науки. 2006. № 1. С. 182–188.
70. Coffman S. V., Schaffer J. J. Dichotomies for linear difference equations // Math. Ann. 1967. Vol. 172. Р. 139–166.
71. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи // Київ. Інститут математики НАН України. 1995. 318 с.
72. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized unverse operators and boundary-value problems // Boston: Urtecht , 2004. 323 p.
73. Boichuk A. A. Solutions of linear and nonlinear difference equations bounded on the whole line // Nonlin. Oscillations. 2004. Vol. 4, no 1. P.16–27.

74. Романовский Р. К., Бельгарт Л. В. Об экспоненциальной дихотомии решений систем линейных разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Известий высших учебных заведений. Математика. 2010. № 10. С. 51–59.
75. Демиденко Г. В., Бондарь А. А. Экспоненциальная дихотомия систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1241–1254.
76. Городній М. Ф., Гончар І. В. Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом // Допов. Нац. акад. наук Укр. 2016. № 12. С. 12–16. DOI: doi.org/10.15407/dopovidi2016.12.012
77. Гончар І. В. Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта // Вісник КНУ ім. Т.Шевченка. Серія: фіз.-мат.науки. 2016. № 2. С. 25–28.
78. Chaikovs'kyi A., Lagoda O. Bounded Solutions of a Difference Equation With Finite Number of Jumps of Operator Coefficient // Carpathian Math. Publ. 2020. Vol. 12, no. 1, P. 165–172.
79. Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79, № 2, С.3–20. DOI: <https://doi.org/10.4213/im8248>.
80. Кабанцова Л. Ю. Линейные разностные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, №. 3. С. 285-293.
81. Keener I. P. Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells // SIAM J. Appl. Math. 1987. No 3. P. 556–572.
82. Morita Y. A periodic wave and its stability to a circular chain of weakly coupled oscillators // SIAM J. Math. Anal. 1987. Vol. 18, no 6. P.1681–1698.
83. Дороговцев А. Я. Стационарные и периодические режимы одного стохастического разностного уравнения в банаховом пространстве // Теория вероят. и мат.статист. К., 1990. № 42. С.35–42.

84. Dorogovtsev A. Ya. Necessary and sufficiens conditions for existence of stationary and periodic solutions of a stochastic difference equation in Hilbert space // *Computes Math. Appl.* 1990. Vol. 19, no 1. P. 31–37.
85. Morozan T. Bounded, periodic and almost periodic solutions of stochastic discrete-time systems // *Rev. Roumaine Math. Pure Appl.* 1987. Vol. 32, no 8. P. 711–718.
86. Morozan T. Periodic solutions of stochastic discretetime systems // *Rev. Roumaine Math. Pure Appl.* 1987. Vol. 32, no 4. P. 351–363.
87. Brandt A. The stochastic equation  $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$  with stationary coefficients // *Adv. Appl. Prob.* 1986. No 18. P. 211–220.
88. Preda P., Megan M. On the stability of linear infinite–dimensional discret – time systems // *Radovi Matem.* 1988. Vol. 4, no 1. P. 31–46.
89. Городній М. Ф., Гончар І. В. Обмежені у середньому порядку  $p$  розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта // *Теор.ймоввір. та мат.статист.* 2019. Т. 101, № 2. С. 93–97.
90. Круглов В. М. Дополнительные главы теории вероятностей // М.: Высш. шк., 1984. 264 с.
91. Городній М. Ф., Гончар І. В. Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом // *Нелінійні коливання.* 2017. Т. 20, № 1. С. 458–465.
92. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре // М.: Изд-во "Наука". Главная редакция физ.-мат. л-ры. 1971. 272 с.
93. Городній М. Ф., Печериця О. А. Обмежені розв'язки диференціального рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами // *Нелінійні коливання.* 2021. Т. 24, № 2. С. 147–157.

## ДОДАТОК

### Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

#### Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Городній М. Ф., Кравець В. П., *Обмежені розв'язки різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта*, Допов. Нац. акад. наук Укр., № 2, (2019), С. 12–16. DOI: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.02.012>

2. Городній М. Ф., Кравець В. П., *Про обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку*, Нелінійні коливання, Т. 22, № 2, (2019), С. 196–201; translation in *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 249, No 4, (2020), P. 601–608, DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04960-5>.

3. Городній М. Ф., Кравець В. П., *Обмежені розв'язки різницевого рівняння другого порядку зі стрибками операторних коефіцієнтів*, Укр. мат. журн., Т. 73, № 3, (2021), С. 47–52, DOI: <https://doi.org/10.37863/umzh.v73i3.6058>; translation in *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 73, No. 3, (2021), P. 391–398, DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-021-01932-z>.

4. Horodnii M., Kravets V., *Bounded in the mean solutions of a second-order difference equation*, *Modern Stochastics: Theory and Applications*, Vol. 8, No. 4, (2021), P. 465–473, DOI: <https://doi.org/10.15559/21-VMSTA189>.

## Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Кравець В. П. Про обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку // Матеріали XVII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2019». К.: Київський університет, 2019. С. 17-18.

2. Городній М. Ф., Кравець В. П. Обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку // Матеріали XVIII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2020». К.: Київський університет, 2020. С. 9-10.

3. Городній М. Ф., Кравець В. П. Про властивості обмежених розв'язків різницевих рівнянь зі стрибками операторних коефіцієнтів // Abstracts International Conference of Young Mathematician. Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2021. С. 64-65.

4. Городній М. Ф., Кравець В. П. Про обмежені в середньому розв'язки різницевих рівнянь другого порядку // Матеріали XX Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2022». К.: Київський університет, 2022. С. 16.

5. Kravets V. Bounded In The Mean Solutions Of A Second-Order Difference Equation // 11th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2022). Istanbul, Turkey, 2022. P. 85

6. Кравець В. П. Обмежені в середньому розв'язки одного нелінійного різницевого рівняння // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2023». К.: Київський університет, 2023. С. 27 - 28.

## Відомості про апробацію результатів дисертації

### Конференції

1. XVII Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна – 2019» (Київ, 2019).

2. XVIII Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна – 2020» (Київ, 2020).

3. Abstracts International Conference of Young Mathematician, Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine( Kyiv, 2021).

4. XX Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна – 2022» (Київ, 2022).

5. 11th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2022) ( Istanbul, Turkey, 2022).

6. XXI Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна – 2023» (Київ, 2023).

## **Наукові семінари**

1. Науковий семінар з диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Почесний керівник семінару — академік НАН України, професор, доктор фізико-математичних наук М. О. Перестюк. Наукові керівники — професор, доктор фізико-математичних наук О. М. Станжицький і професор, доктор фізико-математичних наук О. В. Капустян. (Київ, 2023).