

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.7>

О. В. Иванов¹, д.ф.-м.н., проф.
І. В. Орловський², к.ф.-м.н., доц.

A. V. Ivanov¹, Dr of Sci., Prof.
I. V. Orlovskiy², Ph.D., Associate Professor

**Виявлення прихованих періодичностей
в моделях з дискретним часом та
сильно залежним випадковим шумом**

**Detection of hidden periodicities in
models with discrete time and long range
dependent random noise**

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Іго-
ря Сікорського", Україна, 03056, м. Київ, пр-т
Перемоги, 37

National Technical University of Ukraine "Igor
Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute" Ukraine,
03056, Kyiv, Peremogi avenue 37

e-mail: ¹ alexntuu@gmail.com,

e-mail: ¹ alexntuu@gmail.com

² orlovskiy@matan.kpi.ua

² orlovskiy@matan.kpi.ua

У статті отримано достатні умови консистентності періодограмної оцінки амплітуди та кутової частоти тригонометричної моделі регресії з дискретним часом та сильно залежним випадковим шумом.

Ключові слова: тригонометрична модель регресії, сильно залежний випадковий шум, сингулярний спектр, періодограма оцінка, сильна консистентність.

Trigonometric regression models take a special place among various models of nonlinear regression analysis and signal processing theory. The problem of estimating the parameters of such models is called the problem of detecting hidden periodicities, and it has many applications in natural and technical sciences.

The paper is devoted to the study of the problem of detecting hidden periodicities in the case when we observe only one harmonic oscillation with discrete time, where random noise is a local functional of Gaussian random sequence with singular spectrum. In particular, the random sequence in the model can be strongly dependent.

For estimation of unknown parameters the periodogram estimator is chosen. Sufficient conditions of the consistency of the amplitude and angular frequency periodogram estimator of the model described above are obtained in the paper.

The proof of Lemmas 1 and 2 gave an important asymptotic properties of the random noise functional related to the periodogram estimator which necessary for the proof of the main results. Series expansion of random noise in terms of Hermite polynomials and the Diagram formula are main tools that were used to obtain this lemmas.

Key Words: trigonometric regression model, long-range dependent random noise, singular spectrum, periodogram estimator, strong consistency.

Статтю представив д.ф.-м.н. Розора І.В.

Вступ

Тригонометричні моделі регресії займають особливе місце серед різноманітних моделей нелінійного регресійного аналізу та теорії обробки сигналів. Задача оцінювання параметрів таких моделей називається задачею виявлення прихованих періодичностей, яка має багато застосувань в природничих та технічних науках.

Задачі виявлення прихованих періодичностей розв'язуються протягом сторіч та ма-

ють велику бібліографію.

Важливе місце у теорії оцінювання параметрів тригонометричних моделей займають періодограмні оцінки, які вперше розглядав А. Шустер [1, 2], якому і належить сам термін "періодограма". Асимптотичні властивості періодограмних оцінок параметрів тригонометричної моделі вивчалися багатьма авторами і ми зішлемось тільки на значно пізніші роботи Г.П. Гречки та А.Я. Дороговцева [3], Б.Г. Квіна та Е.Дж. Хеннана [4], П.С. Кнопова [5], О.В. Іванова та Б.М. Жу-

раковського [6].

Окрім періодограмного підходу в оцінюванні амплітуд та кутових частот тригонометричної моделі широко використовуються оцінки найменших квадратів. Зішлемось тут на роботи П. Уїтла [7], А.М. Уолкера [8], Е.Дж. Хеннана [9] для моделей з дискретним часом, та роботи О.В. Іванова [10, 11], О.В. Іванова та Б.М. Жураковського [12], О.В. Іванова, М.М. Леоненка, М.Д. Руйз-Медіни та Б.М. Жураковського [13] для моделей з неперервним часом.

У статті розглядаються періодограмні оцінки кутової частоти та амплітуди гармонічного коливання у моделі спостережень з дискретним часом та випадковим шумом, що має сингулярний спектр. Зокрема, цей випадковий шум може бути сильно залежним. Результати статті продовжують дослідження роботи О.В. Іванова та Б.М. Жураковського [6], розширюючи її на випадок дискретного часу.

1 Постановка задачі

На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ розглянемо модель регресії

$$X_j = A_0 \cos \varphi_0 j + \varepsilon_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

де $A_0 \neq 0$, $\varphi_0 \in (\varphi, \overline{\varphi})$, $0 < \varphi < \overline{\varphi} < \pi$, а випадковий шум ε задовольняє наступній умові.

A₁. ε_j , $j \in \mathbb{Z}$, є локальним функціоналом від гауссівської стаціонарної послідовності ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, з нульовим середнім, тобто $\varepsilon_j = G(\xi_j)$, де $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, така борелева функція, що $E\varepsilon_0 = 0$, $E\varepsilon_0^4 < \infty$.

За умови **A₁** функція $G(x)$ розкладається в ряд

$$G(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(x), \quad (2)$$

де

$$C_m = \int_{\mathbb{R}} G(x) H_m(x) \varphi(x) dx, \quad m \geq 1,$$

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$ за поліномами Чебишева-Ерміта

$$H_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^m}{dx^m} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3)$$

Тоді

$$\varepsilon_j = G(\xi_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(\xi_j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Означення 1.1. Періодограмною оцінкою частоти φ_0 назовемо таку випадкову величину $\varphi_N \in (\varphi, \overline{\varphi})$, для якої

$$Q_N(\varphi_N) = \sup_{\varphi_N \in (\varphi, \overline{\varphi})} Q_N(\varphi),$$

де

$$Q_N(\varphi) = \left| \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N X_j e^{i\varphi j} \right|^2.$$

В свою чергу, оцінку амплітуди A_0 знаходимо як значення $A_N = Q_N^{\frac{1}{2}}(\varphi_N)$.

2 Діаграмна формула

Розглянемо наступний допоміжний результат, необхідний для отримання результатів статті. Більш детальну інформацію щодо діаграмної формули можна знайти у [14].

Означення 2.1. Діаграмою порядку $(l_1, \dots, l_p)$ будемо називати граф Γ з $l_1 + \dots + l_p$ вершинами, якщо:

- а) множина вершин Γ зображається у вигляді $V = \bigcup_{j=1}^p W_j$, де $W_j = \{(j, k) : k = \overline{1, l_j}\}$ – j -й рівень Γ , $j = \overline{1, p}$;
- б) кожна з вершин має ступінь 1;
- в) якщо ребро $((j_1, k_1), (j_2, k_2)) \in \Gamma$, тоді $j_1 \neq j_2$, тобто ребра Γ проходять між різними рівнями.

Позначимо через $L = L(l_1, \dots, l_p)$ множину всіх діаграм Γ порядку $(l_1, \dots, l_p)$, а через $R(V)$ множину ребер графа $\Gamma \in L$. Для ребра

$$\omega = ((j_1, k_1); (j_2, k_2)) \in R(V), \quad j_1 < j_2,$$

покладемо $d_1(\omega) = j_1$, $d_2(\omega) = j_2$.

Означення 2.2. Діаграма Γ називається регулярною, якщо всі її рівні можна розбити на пари так, щоб не було такого ребра, яке проходить між рівнями, що належать різним парам. Множина регулярних діаграм позначимо $L^* \subset L$. Якщо діаграма $\Gamma \in L \setminus L^*$, тоді її називають нерегулярною.

Діаграмна формула

Нехай $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ - гаусівський вектор з нульовим середнім, $E\xi_i\xi_j = B(i, j)$, $i, j = \overline{1, p}$; $H_{l_1}(x), \dots, H_{l_p}(x)$ - поліноми Чебишева-Ерміта порядків $l_1, \dots, l_p$. Тоді

$$E \left(\prod_{j=1}^p H_{l_j}(\xi_j) \right) = \sum_{\Gamma \in L} \prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)).$$

3 Випадкові послідовності, які мають сингулярний спектр

Припустимо додатково, що

A₂. ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, - стаціонарна гаусівська послідовність з коваріаційною функцією (к.ф.)

$$B(n) = E\xi_0\xi_n = \sum_{k=0}^r a_k B_{\alpha_k, \varkappa_k}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

де $r \geq 0$,

$$B_{\alpha_k, \varkappa_k}(n) = \frac{\cos(\varkappa_k n)}{(1 + n^2)^{\alpha_k/2}},$$

$$0 \leq \varkappa_0 < \varkappa_1 < \dots < \varkappa_r < \pi, \quad 0 < \alpha_k < 1, \quad k = \overline{0, r},$$

$$\sum_{k=0}^r a_k = 1, \quad a_k > 0.$$

Таку модель к.ф., для неперервного часу, було введено у роботі [15] з метою отримання прикладу спектральної щільності, що має хоч і складний, але явний вигляд, а також, можливо, сингулярності, розташовані не в нулі, як у випадку сильно залежного процесу. Умова **A₂** також використовувалася з тією ж метою в роботах [16, 13, 17, 18]. Представлення спектральної щільності такого процесу у випадку дискретного часу можна знайти у роботах [16, 18].

Розглянемо деякі асимптотичні властивості випадкових послідовностей, що мають сингулярний спектр, які необхідні для отримання основних результатів статті.

Введемо позначення

$$\eta_N = \frac{1}{N} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda j} \varepsilon_j \right|. \quad (6)$$

Lemma 1. Якщо виконуються умови **A₁** та **A₂**, то

$$E\eta_N^2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Доведення. Оскільки

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda j} \varepsilon_j \right|^2 &= \sum_{j,k=1}^N e^{-i\lambda(j-k)} \varepsilon_j \varepsilon_k = \\ &= \sum_{j=1}^N \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N 2 \cos \lambda(k-j) \varepsilon_j \varepsilon_k = \\ &= \sum_{j=1}^N \varepsilon_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \cos \lambda j \sum_{k=1}^{N-j} \varepsilon_{k+j} \varepsilon_k, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} E\eta_N^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N E\varepsilon_j^2 + \\ &+ 2E \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \sum_{j=1}^{N-1} \cos \lambda j \sum_{k=1}^{N-j} \varepsilon_{k+j} \varepsilon_k \leq \\ &\leq \frac{1}{N} E\varepsilon_1^2 + \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} E \left| \sum_{k=1}^{N-j} \varepsilon_{k+j} \varepsilon_k \right|. \quad (7) \end{aligned}$$

Використовуючи представлення (4) випадкової послідовності ε_j через поліноми Чебишева-Ерміта та співвідношення (див., наприклад [14])

$$E H_m(\xi_j) H_l(\xi_k) = \delta_k^l m! B^m(j-k),$$

де δ_k^l - символ Кронекера, отримаємо

$$E\varepsilon_j^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2}{(m!)^2} E H_m^2(\xi_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2}{(m!)} < \infty. \quad (8)$$

З (8) випливає, що для будь-якого $\epsilon > 0$ можна вказати $n = n(\epsilon)$ таке, що

$$G(x) = G_1(x) + G_2(x), \quad (9)$$

$$G_1(x) = \sum_{m=1}^n \frac{C_m}{m!} H_m(x),$$

$$G_2(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(x),$$

причому

$$E G_2^2(\xi) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{C_m^2}{m!} \leq \epsilon^2. \quad (10)$$

Використовуючи (9), можна переписати (7) у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \eta_N^2 &\leq \frac{1}{N} \mathbb{E} \varepsilon_1^2 + \\ &+ \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^{N-j} (G_1(\xi_{k+j}) + G_2(\xi_{k+j})) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (G_1(\xi_k) + G_2(\xi_k)) \right| \leq \frac{1}{N} \mathbb{E} \varepsilon_1^2 + \\ &+ \sum_{i,l=1}^2 \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^{N-j} G_i(\xi_{k+j}) G_l(\xi_k) \right| = \\ &= \frac{1}{N} \mathbb{E} \varepsilon_1^2 + S_{11,N} + S_{12,N} + S_{21,N} + S_{22,N}. \end{aligned}$$

Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського та (10), отримуємо

$$\begin{aligned} S_{12,N} &= \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^{N-j} G_1(\xi_{k+j}) G_2(\xi_k) \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} \mathbb{E} |G_1(\xi_{k+j}) G_2(\xi_k)| \leq \\ &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} (\mathbb{E} G_1^2(\xi_{k+j}))^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E} G_2^2(\xi_k))^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) (\mathbb{E} G_1^2(\xi_1))^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E} G_2^2(\xi_1))^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{(N-1)}{N} \epsilon (\mathbb{E} G_1^2(\xi_1))^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon (\mathbb{E} G_1^2(\xi_1))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Аналогічним чином можна отримати нерівності для $S_{21,N}$ та $S_{22,N}$:

$$\begin{aligned} S_{21,N} &\leq \epsilon (\mathbb{E} G_1^2(\xi_k))^{\frac{1}{2}}, \\ S_{22,N} &\leq \epsilon^2. \end{aligned}$$

Перейдемо до розгляду $S_{11,N}$:

$$\begin{aligned} S_{11,N} &= \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^{N-j} G_1(\xi_{k+j}) G_1(\xi_k) \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{N-j} G_1(\xi_{k+j}) G_1(\xi_k) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4=1}^n \left(\prod_{q=1}^4 \frac{C_{s_q}}{s_q!} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \sum_{k,l=1}^{N-j} \mathbb{E} H_{s_1}(\xi_{k+j}) H_{s_2}(\xi_{l+j}) H_{s_3}(\xi_k) H_{s_4}(\xi_l) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Застосовуючи діаграмну формулу при $p = 4$, отримуємо

$$\begin{aligned} S_{11,N} &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{s_1, s_2, s_3, s_4=1}^n \left(\prod_{q=1}^4 \frac{C_{s_q}}{s_q!} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \sum_{k,l=1}^{N-j} \sum_{\Gamma \in L} \prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2 \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4=1}^n \left(\prod_{q=1}^4 \frac{C_{s_q}}{s_q!} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\Gamma \in L} \frac{1}{N^2} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} \prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Оскільки n – фіксоване, то кількість наборів $s_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, обмежена та для кожного набору (s_1, s_2, s_3, s_4) кількість діаграм скінчена, тоді достатньо оцінити доданки

$$\frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} \prod_{\omega \in R(V)} B(d_1(\omega), d_2(\omega)) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} |B(j)| &= \left| \sum_{j=0}^r D_j B_{\alpha_j, \kappa_j}(j) \right| \leq \\ &\leq (1 + j^2)^{-\frac{\alpha}{2}} = \tilde{B}(j), \end{aligned} \quad (13)$$

де $\alpha = \min(\alpha_0, \dots, \alpha_r)$.

Розглянемо можливі типи діаграм Γ , що входять у суму (11).

I. Нехай $\Gamma \in L^*(s_1, s_2, s_3, s_4)$. Оскільки Γ має чотири рівні $(1, 2, 3, 4)$, то, для регулярної діаграми, можливі три випадки розбиття на пари

- (i) $(1, 2), (3, 4)$;
- (ii) $(1, 3), (2, 4)$;
- (iii) $(1, 4), (2, 3)$.

Розглянемо окремо кожен з них, враховуючи, що

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\xi_{k+j}, \xi_{l+j}, \xi_k, \xi_l).$$

(i). При цьому розбитті $s_1 = s_2 = r_1$, $s_3 = s_4 = r_2$ та (12) має вигляд

$$W_{1,N} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1+r_2}(k-l) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^2(k-l) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

З (13) випливає, що

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^{N-j} B^2(k-l) &= \sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} (N-j-|t|) B^2(t) \leq \\ &\leq (N-j) \sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} \tilde{B}(t) \leq \\ &\leq (N-j) \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{N-j-1} t^{-\alpha} \right) \leq \\ &\leq (N-j) \left(1 + 2 \int_0^{N-j} t^{-\alpha} dt \right) = \\ &= (N-j) \left(1 + \frac{2(N-j)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \\ &= (N-j)^{2-\alpha} \left(\frac{2}{1-\alpha} + (N-j)^{-(1-\alpha)} \right) \leq \\ &\leq \frac{3-\alpha}{1-\alpha} (N-j)^{2-\alpha} < \frac{3}{1-\alpha} (N-j)^{2-\alpha}. \end{aligned}$$

Тоді, підставляючи отриманий результат в (14), отримаємо

$$\begin{aligned} W_{1,N} &\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{1-\frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{N}. \end{aligned} \quad (15)$$

Функція $g(t) = (1-t)^{1-\frac{\alpha}{2}}$, $t \in [0, 1]$, є монотонно спадною. В свою чергу, права частина рівності (15) є інтегральною сумою для функції $g(t)$. Тому

$$\begin{aligned} W_{1,N} &\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^1 (1-t)^{1-\frac{\alpha}{2}} dt = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha}(2-\frac{\alpha}{2})} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned} \quad (16)$$

(ii). Для даного розбиття $s_1 = s_3 = r_1$, $s_2 = s_4 = r_2$, і (12) прийме вигляд

$$\begin{aligned} W_{2,N} &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1+r_2}(j) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) |B(j)| \leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) \tilde{B}(j) \leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) j^{-\alpha} = \\ &= \frac{1}{N^{\alpha}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right) \left(\frac{j}{N} \right)^{-\alpha} \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Маємо, в правій частині останньої рівності, інтегральну суму функції $g(t) = (1-t)t^{-\alpha}$ на відрізьку $[0, 1]$. Оскільки функція $g(t)$ є монотонно спадною на $(0, 1]$, то

$$\begin{aligned} W_{2,N} &\leq \frac{1}{N^{\alpha}} \int_0^1 (1-t)t^{-\alpha} dt = \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \cdot \frac{1}{N^{\alpha}}. \end{aligned} \quad (17)$$

(iii). В цьому випадку $s_1 = s_4 = r_1$, $s_2 = s_3 = r_2$ та доданок $W_{3,N}$ суми (12) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} W_{3,N} &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1}(k-l+j) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot B^{r_2}(k-l-j) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Розглянемо суму

$$\begin{aligned}
 S_{4,N} &= \sum_{k,l=1}^{N-j} B^{r_1}(k-l+j) B^{r_2}(k-l-j) \leq \\
 &\leq \sum_{k,l=1}^{N-j} \tilde{B}(k-l+j) \tilde{B}(k-l-j) \leq \\
 &= \sum_{t=-(N-j-1)}^{N-j-1} (N-j-|t|) \tilde{B}(t+j) \tilde{B}(t-j) \leq \\
 &\leq (N-j) \left(\tilde{B}^2(j) + \sum_{t=1}^{N-j-1} \tilde{B}(t+j) \tilde{B}(t-j) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{t=-(N-j-1)}^{-1} \tilde{B}(t+j) \tilde{B}(t-j) \right) \leq \\
 &\leq (N-j) \left(\tilde{B}(j) + \sum_{k=j+1}^{N-1} \tilde{B}(k) + \sum_{k=-N+1}^{-1-j} \tilde{B}(k) \right) \\
 &\leq 2(N-j) \sum_{k=j}^{N-1} \tilde{B}(k) \leq 2(N-j) \sum_{k=j}^{N-1} k^{-\alpha} \leq \\
 &\leq 2(N-j) N^{1-\alpha} \sum_{k=j}^{N-1} \left(\frac{k}{N} \right)^{-\alpha} \frac{1}{N} \leq \\
 &\leq 2(N-j) N^{1-\alpha} \int_0^1 t^{-\alpha} dt = \frac{2(N-j) N^{1-\alpha}}{1-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Використовуючи знайдену оцінку $S_{4,N}$ до (18), будемо мати

$$\begin{aligned}
 W_{3,N} &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} (N-j)^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1-\alpha}{2}} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \leq \\
 &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{1-\alpha}} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}}.
 \end{aligned}$$

В результаті отримуємо, що, у випадку регулярних діаграм, $S_{11,N}$ прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$.

II. Нехай Γ є нерегулярною діаграмою. Тоді в добутку суми (12) завжди буде присутній множник $B(k-l)$, який з'являється в результаті з'єднання ребер 1 і 2 чи 3 і 4, або множник $B(j)$, який з'являється в результаті з'єднання ребер 1 і 3 чи 2 і 4. Якщо діаграма Γ не буде мати вказаних множників, тоді діаграма є регулярною, що протирічить сформульованому припущенню.

Оскільки $B(0) = 1$, то добуток в сумі (12) можна мажорувати $B(k-l)$ або $B(j)$.

При наявності множника $B(k-l)$, отримаємо оцінку, аналогічну (15), а саме:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left[\sum_{k,l=1}^{N-j} |B(k-l)| \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \\
 &\leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha(2-\frac{\alpha}{2})}} \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Для $B(j)$ оцінка знаходиться аналогічно. $\square$

Покажемо, що результати лемми 1 є вірними і в тому випадку, коли в умові A_2 α_k можуть набувати довільних додатних значень.

Якщо $\alpha = \min(\alpha_0, \dots, \alpha_r) < 1$, то доведення повністю повторює доведення лемми 1.

Нехай $\alpha > 1$. Тоді нам достатньо показати, що $S_{11,N} \rightarrow 0$, при $N \rightarrow \infty$.

Розглянемо відповідні доданки в (13) при можливих випадках регулярної діаграми Γ . Враховуючи (12) та міркування при доведенні лемми 1, маємо

$$\begin{aligned}
 W_{1,N} &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{k,l=1}^{N-j} B^2(k-l) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{N-j-1} t^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= c_1 \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \leq \\
 &\leq c_1 \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \tilde{c}_1 \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}},
 \end{aligned}$$

де

$$\tilde{c}_1 = \frac{2}{3} c_1 = \frac{2}{3} (1 + 2\zeta(\alpha)),$$

$$\zeta(\alpha) = \sum_{t=1}^{\infty} t^{-\alpha}. \text{ Аналогічно маємо}$$

$$W_{2,N} \leq \tilde{c}_2 \frac{1}{N}, \quad \tilde{c}_2 = \zeta(\alpha),$$

$$W_{3,N} \leq \tilde{c}_3 \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}, \quad \tilde{c}_3 = \frac{2}{3} (\zeta(\alpha))^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення для нерегулярних діаграм є аналогічним до відповідного доведення у леммі 1.

Нехай $\alpha = 1$. Тоді оцінки та висновки для $W_{1,N}, W_{2,N}, W_{3,N}$ отримуються аналогічно. Проведемо, наприклад, доведення для $W_{1,N}$.

Розглянемо представлення часткових сум гармонічного ряду

$$\sum_{j=1}^N j^{-1} = \ln N + \gamma + \epsilon_N,$$

де $\gamma = 0,577\dots$ - постійна Ейлера-Маскерони, $\epsilon_N \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$. Тоді для $N > N_0$

$$\sum_{j=1}^N j^{-1} \leq \ln N + \gamma + 1. \quad (20)$$

Із (20) маємо

$$\begin{aligned} W_{1,N} &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{N-j-1} t^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} (3 + 2\gamma + 2 \ln N)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{3} \frac{(\ln N)^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{N} \leq \\ &\leq \frac{2\sqrt{3} (\ln N)^{\frac{1}{2}}}{3} \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

З даних оцінок випливає, що сума (12) прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$, тобто $E\eta^2(N) \rightarrow 0$.

4 Випадкові процеси, що задовольняють умові сильної залежності

Введемо умову сильної залежності.

A₃. $\xi_j, j \in \mathbb{Z}$, - стаціонарна гауссівська послідовність з к.ф. вигляду

$$B(j) = \frac{L(|j|)}{|j|^\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad B(0) = 1,$$

де $L(t), t \geq 0$, - монотонна, неспадна, повільно змінна на нескінченності функція.

Lemma 2. Якщо для моделі (1) виконуються умови **A₁**, **A₃**, тоді

$$E\eta_N^2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

де η_N задано (6).

Доведення. Доведення для випадкового шуму, що задовольняє умовам **A₁**, **A₃** повністю повторює доведення леми 1.

Присутні відмінності в доведенні $S_{11,N} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$. Тому продемонструємо ці відмінності на доданку $W_{1,N}$.

$$\begin{aligned} W_{1,N} &\leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{N-j-1} L(t)t^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 2L(N) \sum_{t=1}^{N-j-1} t^{-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{L^{\frac{1}{2}}(N)}{N^2} \left(1 + \frac{2}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)^{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \\ &\leq \frac{L^{\frac{1}{2}}(N)}{N^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\alpha} (2-\frac{\alpha}{2})}. \end{aligned}$$

Доведення для $W_{2,N}, W_{3,N}$ та нерегулярних діаграм є аналогічними.

Тоді маємо, що $E\eta^2(N) \rightarrow 0$, при $N \rightarrow \infty$. $\square$

5 Консистентність

Theorem 5.1. Якщо для моделі (1) виконуються умови **A₁**, **A₂** або **A₁**, **A₃**, тоді

$$\varphi_N \xrightarrow{P} \varphi_0, \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Доведення. Зафіксуємо φ та розглянемо поведінку $Q_N(\varphi)$, при $N \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} Q_N(\varphi) &= \frac{4A_0^2}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \right|^2 + \\ &+ \frac{8A_0}{N^2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \sum_{j=1}^N \varepsilon_j e^{-i\varphi j} \right\} + \quad (21) \\ &+ \frac{4}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j e^{i\varphi j} \right|^2 = S_{5,N} + S_{6,N} + S_{7,N}. \end{aligned}$$

З лем 1, 2 та нерівності

$$\frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \right| \leq 1,$$

випливає, що

$$S_{6,N} \xrightarrow{P} 0, \quad S_{7,N} \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Розглянемо поведінку $\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j}$ у 3 (22) та наступних випадках:

1. Якщо $\varphi \neq \varphi_0$, то

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} &= \\ &= \frac{e^{i(\varphi+\varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi+\varphi_0)} - 1)} + \frac{e^{i(\varphi-\varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi-\varphi_0)} - 1)}. \end{aligned} \quad (22)$$

2. Якщо $\varphi = \varphi_0$, то

$$\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} = \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} + 1. \quad (23)$$

Зафіксуємо $r > 0$. Тоді, враховуючи (21),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|Q_N(\varphi_0) - A_0^2| > r\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P}\left\{|S_{5,N} - A_0^2| > \frac{r}{3}\right\} + \\ &+ \mathbf{P}\left\{|S_{6,N}| > \frac{r}{3}\right\} + \mathbf{P}\left\{|S_{7,N}| > \frac{r}{3}\right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

З (23) та того, що, при $N > N_0$,

$$\begin{aligned} |S_{5,N} - A_0^2| &= A_0^2 \left(\left| \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left| \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} \right| \right) \leq \\ &\leq \frac{8A_0^2}{\min\{|e^{2i\underline{\varphi}} - 1|^2, |e^{2i\overline{\varphi}} - 1|^2\}} \frac{1}{N} < r, \end{aligned} \quad (25)$$

де $\varphi_0 \in (\underline{\varphi}, \overline{\varphi})$, $0 < \underline{\varphi} < \overline{\varphi} < \pi$, випливає

$$\mathbf{P}\{|Q_N(\varphi_0) - A_0^2| > r\} < \varepsilon.$$

Тому

$$Q_N(\varphi_0) \xrightarrow{P} A_0^2, \quad N \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Розглянемо множини

$$\Phi_\delta = \{\varphi \in [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}] : |\varphi - \varphi_0| \geq \delta\}, \quad \delta > 0,$$

та деяке фіксоване $r > 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{\varphi \in \Phi_\delta} |Q_N(\varphi)| > r\right\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{\varphi \in \Phi_\delta} |S_{5,N}| > \frac{r}{3}\right\} + \\ &+ \mathbf{P}\left\{\sup_{\varphi \in \Phi_\delta} |S_{6,N}| > \frac{r}{3}\right\} + \mathbf{P}\left\{\sup_{\varphi \in \Phi_\delta} |S_{7,N}| > \frac{r}{3}\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S_{5,N}| &= \frac{2}{N} \left(\left| \frac{e^{i(\varphi+\varphi_0)(N+1)} - 1}{e^{i(\varphi+\varphi_0)} - 1} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{e^{i(\varphi-\varphi_0)(N+1)} - 1}{e^{i(\varphi-\varphi_0)} - 1} \right|^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{4}{N} \left(\frac{1}{\min\{|e^{2i\underline{\varphi}} - 1|^2, |e^{2i\overline{\varphi}} - 1|^2\}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|e^{i\delta} - 1|^2} \right) < r, \end{aligned} \quad (27)$$

при $N > N_0$, випливає, що

$$Q_N(\varphi) \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty$$

рівномірно на Φ_δ .

За означенням оцінки φ_N

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|\varphi_N - \varphi_0| \geq \delta) &= \\ &= \mathbf{P}(|\varphi_N - \varphi_0| \geq \delta, Q_N(\varphi_N) \geq Q_N(\varphi_0)) \leq \\ &\leq \mathbf{P}\left(\sup_{\varphi_N \in \Phi_\delta} Q_N(\varphi_N) \geq Q_N(\varphi_0)\right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$. $\square$

Lemma 3. Якщо для моделі (1) виконуються умови $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ або $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_3$, тоді

$$A_N^2 = Q_N(\varphi_N) \xrightarrow{P} A_0^2, \quad N \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Доведення. Розглянемо

$$\begin{aligned} 0 \leq Q_N(\varphi_N) - Q_N(\varphi_0) &= \\ &= 4A_0^2 \frac{1}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N j} \right|^2 - \\ &\quad - 4A_0^2 \frac{1}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_0 j} \right|^2 + \Lambda_N, \\ \Lambda_N &\xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N j} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N^* j} \right|,$$

де $\varphi_N^* \in [\underline{\varphi}, \bar{\varphi}]$ – точка максимуму. Якщо $\varphi_N^* \neq \varphi_0$, то з (21) та (27) випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N^* j} \right| &\leq \\ &\leq \frac{2}{N} \left(\frac{1}{\min\{|e^{2i\underline{\varphi}} - 1|^2, |e^{2i\bar{\varphi}} - 1|^2\}} + \frac{1}{|e^{i\delta} - 1|^2} \right) < r. \end{aligned}$$

Якщо $\varphi_N^* = \varphi_0$, то з (23) та (25) маємо аналогічну оцінку:

$$\begin{aligned} \frac{2}{N} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_0 j} \right| &\leq \\ &\leq \frac{4A_0^2}{\min\{|e^{2i\underline{\varphi}} - 1|^2, |e^{2i\bar{\varphi}} - 1|^2\}} \frac{1}{N} < r. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \max_{\varphi \in [\underline{\varphi}, \bar{\varphi}]} \frac{4}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi j} \right|^2 \leq 1.$$

З іншого боку,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_0 j} \right|^2 = 1.$$

З цих співвідношень випливає, що

$$Q_N(\varphi_N) - Q_N(\varphi_0) \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Враховуючи (26), отримуємо (28), і лему доведено. $\square$

Theorem 5.2. Якщо для моделі (1) виконуються умови A_1, A_2 , або A_1, A_3 , тоді

$$N(\varphi_N - \varphi_0) \xrightarrow{P} 0, \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Список використаних джерел

1. Schuster A. On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena / A. Schuster // *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity*. – 1898. – Vol. 3. – P. 13-41.
2. Schuster A. The periodogram and its optical analogue / A. Schuster // *Proceed Roy. Soc.* – 1906. – Vol. 77. – 136 p.

Доведення. З леми 3 випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_N j} \right|^2 - \\ - \frac{1}{N^2} \left| \sum_{j=1}^N \cos \varphi_0 j e^{i\varphi_0 j} \right|^2 \xrightarrow{P} 0, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (30)$$

Але (30) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{i(\varphi_N + \varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi_N + \varphi_0)} - 1)} + \frac{e^{i(\varphi_N - \varphi_0)(N+1)} - 1}{N(e^{i(\varphi_N - \varphi_0)} - 1)} \right|^2 - \\ - \left| \frac{e^{2i\varphi_0(N+1)} - 1}{N(e^{2i\varphi_0} - 1)} + 1 \right|^2 \xrightarrow{P} 0, \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\text{або } \frac{\sin \frac{(N+1)(\varphi_N - \varphi_0)}{2}}{(N+1) \sin \frac{\varphi_N - \varphi_0}{2}} \xrightarrow{P} 1, \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

За умов теореми, останнє твердження еквівалентне

$$\frac{\sin \frac{N(\varphi_N - \varphi_0)}{2}}{\frac{N(\varphi_N - \varphi_0)}{2}} \xrightarrow{P} 1, \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

В силу монотонного зростання функції $1 - \frac{\sin x}{x}$, $x \geq 0$, в околі точки нуль, для $\epsilon \in (0, 1)$, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \frac{N|\varphi_N - \varphi_0|}{2} > \epsilon \right\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ 1 - \frac{\sin \frac{N(\varphi_N - \varphi_0)}{2}}{\frac{N(\varphi_N - \varphi_0)}{2}} > 1 - \frac{\sin \epsilon}{\epsilon} \right\} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$, що і доводить теорему 5.2. $\square$

3. Гречка Г.П. Об асимптотических свойствах периодограмной оценки частоты и амплитуды гармонического колебания / Г.П. Гречка, А.Я. Дороговцев // *Вычисл. и прикл. математика*. – 1975. – №28. – С. 18-31.
4. Quinn B.G. The Estimation and Tracking of Frequency / B.G. Quinn, E.J. Hannan. – Cambridge Univ. Press. – 2001. – 266 p.
5. Кнопов П.С. Оптимальные оценки параме-

- тров стохастических систем / П.С. Кнопов. — К.: Наукова думка. — 1980. — 151 с.
6. Ivanov A.V. *Consistency and asymptotic normality of periodogram estimator of harmonic oscillation parameters* / A.V. Ivanov, B.M. Zhurakovskiy // *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. — 2013. — Vol. 89. — P. 30-39.
 7. Whittle P. *The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure* / P. Whittle // *Trabajos Estadistica*. — 1952. — Vol. 3. — P. 43-47.
 8. Walker A.M. *On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals* / A.M. Walker // *Adv. Appl. Probab.* — 1973. — Vol. 5. — P. 217-241.
 9. Hannan E.J. *The estimation of frequency* / E.J. Hannan // *J. Appl. Probab.* — 1973. — Vol. 10. — P. 510-519.
 10. Іванов А.В. Одно решение задачи о выявлении скрытых периодичностей / А.В. Иванов // *Теория Вероят. и Матем. Статист.* — 1979. — №20. — С. 44-59.
 11. Іванов О.В. Конзистентність оцінки найменших квадратів амплітуд та кутових частот суми гармонійних коливань у моделях з сильною залежністю / О.В. Іванов // *Теорія ймовір. та матем. статист.* — 2009. — Вип. 80. — С. 55-62.
 12. Жураковський Б.М. Конзистентність оцінки найменших квадратів параметрів суми гармонічних коливань у моделях із сильнозалежним шумом / Б.М. Жураковський, О.В. Іванов // *Наук. вісті НТУУ "КПІ"*. — 2010. — №4. — С. 60-66.
 13. Ivanov A.V. *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors* / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, B.M. Zhurakovsky // *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. — 2015. — V. 49, 1. — P. 156-186.
 14. Ivanov A.V. *Statistical Analysis of Random Fields* / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. — 1989. — 244 p.
 15. Anh V.V. *Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence* / V.V. Anh, V.P. Knopova, N.N. Leonenko // *Aust. NZ J. Stat.* — 2004. — Vol. 46. — P. 275-296.
 16. Ivanov A.V. *Limit theorems for weighted non-linear transformations of Gaussian processes with singular spectra* / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, I.N. Savych // *Ann. Probab.* — 2013. — Vol. 41, № 2. — P. 1088-1114.
 17. Іванов О.В. Асимптотичні властивості М-оцінок параметрів нелінійної регресії з випадковим шумом, що має сингулярний спектр / О.В. Іванов, І.В. Орловський // *Теорія ймовір. та матем. статист.* — 2015. — Вип. 93. — С. 34-49.
 18. Іванов О.В. Асимптотичні властивості М-оцінок параметрів нелінійної регресії з дискретним часом та сингулярним спектром / О.В. Іванов, І.В. Орловський // *Український математичний журнал*. — 2017. — т. 69, № 1. — С. 28-51.

References

1. Schuster A. *On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena* / A. Schuster // *Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity*. — 1898. — Vol. 3. — P. 13-41.
2. Schuster A. *The periodogram and its optical analogie* / A. Schuster // *Proceed Roy. Soc.* — 1906. — Vol. 77. — 136 p.
3. Grechka G.P. *On the asymptotic properties of the periodogram estimator of the frequency and amplitude of a harmonic oscillation* / G.P. Grechka, A.Ya. Dorogoutsev // *Vychisl. i prikl. matematika*. — 1975. — №28. — P. 18-31.
4. Quinn B.G. *The Estimation and Tracking of Frequency* / B.G. Quinn, E.J. Hannan. — Cambridge Univ. Press. — 2001. — 266 p.

5. Knopov P.S. *Optimal estimators of the stochastic systems parameters* / P.S. Knopov. — K.: Naukova dumka. — 1980. — 151 p.
6. Ivanov A.V. *Consistency and asymptotic normality of periodogram estimator of harmonic oscillation parameters* / A.V. Ivanov, B.M. Zhurakovskiy // *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. — 2013. — Vol. 89. — P. 30-39.
7. Whittle P. *The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure* / P. Whittle // *Trabajos Estadística*. — 1952. — Vol. 3. — P. 43-47.
8. Walker A.M. *On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals* / A.M. Walker // *Adv. Appl. Probab.* — 1973. — Vol. 5. — P. 217-241.
9. Hannan E.J. *The estimation of frequency* / E.J. Hannan // *J. Appl. Probab.* — 1973. — Vol. 10. — P. 510-519.
10. Ivanov A.V. *A solution of the problem of detecting hidden periodicities* / A.V. Ivanov // *Theory Probab. Math. Statist.* — 1980. — №20. — P. 51-68.
11. Ivanov A.V. *Consistency of the least squares estimator of the amplitudes and angular frequencies of a sum of harmonic oscillations in models with long-range dependence* / A.V. Ivanov // *Theor. Probability and Math. Statist.* — 2010. — №80. — P. 61-69.
12. Zhurakovskiy B.M. *Consistency of the least squares estimator of the sum of harmonic oscillations parameters in the models with strongly dependent noise* / B.M. Zhurakovskiy, O.V. Ivanov // *Naukovi Visti NTUU "KPI"*. — 2010. — №4. — P. 60-66.
13. Ivanov A.V. *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors* / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, B.M. Zhurakovskiy // *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. — 2015. — V. 49, 1. — P. 156-186.
14. Ivanov A.V. *Statistical Analysis of Random Fields* / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. — 1989. — 244 p.
15. Anh V.V. *Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence* / V.V. Anh, V.P. Knopova, N.N. Leonenko // *Aust. NZ J. Stat.* — 2004. — Vol. 46. — P. 275-296.
16. Ivanov A.V. *Limit theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian processes with singular spectra* / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, I.N. Savych // *Ann. Probab.* — 2013. — Vol. 41, № 2. — P. 1088-1114.
17. Ivanov A.V. *Asymptotic properties of M-estimators of parameters of a nonlinear regression model with a random noise whose spectrum is singular* / A.V. Ivanov, I.V. Orlovskiy // *Theor. Probability and Math. Statist.* — 2016. — № 93. — P. 33-49.
18. Ivanov O.V. *Asymptotic Properties of the M-Estimates of Parameters in a Nonlinear Regression Model with Discrete Time and Singular Spectrum* / O.V. Ivanov, I.V. Orlovskiy // *Ukrainian Mathematical Journal*. — 2017. — Vol. 69, № 1. — P. 32-61.

Надійшла до редколегії 02.06.2023