УДК 539.3
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.31

Юрчук В.М.[1], к.ф.-м.н., ст.н.с.
Сінчило С.В.[2], к.ф.-м.н., ст.н.с.

Крутильні пружні хвилі. Деякі аспекти нелінійного аналізу

[1]Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: vasil_2008@ukr.net
[2]Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: rheol@inmech.kiev.ua

V.M.Yurchuk[1], Ph.D., Senior Researcher Worker.
S.V.Sinchilo[2], Ph.D., Senior Researcher Worker.

Torsional elastic waves. Some aspects of nonlinear analysis

[1]Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine, 3, Petr Nesterov str., Kyiv 03057
e-mail: vasil_2008@ukr.net
[2]Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine, 3, Petro Nesterov str., Kyiv 03057
e-mail: rheol@inmech.kiev.ua

Проаналізовано особливості використання граничних умов у нелінійній задачі поширення крутильної хвилі для середовища, що пружно деформується, та має зовнішню межу. Коротко описано постановку та хвильовий аналіз у лінійному (класичному) підході, оскільки лінійний розв'язок використовується в роботі як перше наближення у нелінійному підході. Першою особливістю для крутильної хвилі є суттєве ускладнення при нелінійному підході граничних умов через різницю між формою границі до і після деформації (при лінійному підході форма границі не змінюється). Другою особливістю є значне ускладнення математичного представлення граничних умов за рахунок появи додаткових нелінійних членів. Для крутильної хвилі виявлено, що використання умови відсутності напружень на граничній поверхні (припущення вільної межі) може бути не зовсім коректним.

Ключові слова: граничні умови; нелінійна крутильна хвиля; п'ятиконстантний потенціал Мурнагана; особливості аналізу граничних умов.

The features of the use of boundary conditions in the nonlinear problem of torsional wave propagation for an elastically deformable medium with an external boundary are analyzed. The formulation and wave analysis in the linear (classical) approach are briefly described, since the linear solution is used in the work as a first approximation in the nonlinear approach. The first feature for a torsional wave is a significant complication in the nonlinear approach of the boundary conditions due to the difference between the shape of the boundary before and after the deformation (in the linear approach, the shape of the boundary does not change). The second feature is the significant complication of the mathematical representation of the boundary conditions due to the appearance of additional nonlinear terms. For a torsional wave, it was found that the use of the condition of absence of stresses on the boundary surface (assumption of a free boundary) may not be completely correct.

Keywords: boundary conditions; nonlinear torsional wave; five-constant Murnaghan potential; peculiarities of analysis of boundary conditions.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

Предметом проведеного дослідження є граничні умови, які необхідно задовольняти при аналізі поширення крутильної хвилі в пружних матеріалах у рамках лінійного та нелінійного підходів. Історичний досвід аналізу пружних хвиль у матеріалах з-поміж спостережених багатьох загальних важливих фактів [1 - 4] містить два, які є суттєвими для проведеного дослідження. Перший полягає у тому, що постановка задачі і отриманий при лінійному підході розв’язок складають, як правило, основу в реалізації нелінійного підходу. Другий стосується хронології аналізу нелінійних хвиль у матеріалах – спочатку досліджувалися вільні (біжучі) хвилі, які за означенням поширюються в пружних середовищах (матеріалах), що не мають внутрішніх чи зовнішніх границь, і лише згодом вивчалися хвилі в пружних середовищах з границями. Тому так сталося, що нелінійні пружні хвилі в середовищах з границями вивчені менше.

Нелінійний підхід починається з вибору нелінійної моделі деформування. Найбільш поширеною моделлю є п'ятиконстантна модель Мернагана [3].

2. Необхідна інформація щодо нелінійної моделі Мернагана.

У даному дослідженні модель Мернагана має наступний потенціал

$$W=\frac{1}{2}\lambda\left(\varepsilon_{mm}\right)^2+\mu\left(\varepsilon_{ik}\right)^2+ \\ +\frac{1}{3}A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km}+B\left(\varepsilon_{ik}\right)^2\varepsilon_{mm}+\frac{1}{3}C\left(\varepsilon_{mm}\right)^3 \quad (1)$$

де λ, μ – пружні константи другого порядку (константи Ляме); A, B, C – пружні константи третього порядку (константи Мернагана). В потенціалі (1) використано записаний через вектор деформації $\vec{u}=\{u_k\}$ нелінійний тензор деформації Коші – Гріна у вигляді

$$\varepsilon_{nm}=\frac{1}{2}(u_{n,m}+u_{m,n}+u_{n,i}u_{i,m}) \quad (2)$$

Розглянемо необхідну інформація щодо класичної задачі теорії пружності про поширення крутильної хвилі.

3. Класична крутильна хвиля.

Гармонічна крутильна хвиля збуджується імпульсом $u_\vartheta(t)=u_\vartheta^o e^{i\omega t}$ у напрямку осі симетрії Oz кругового поперечного перерізу циліндра $z=0$. В циліндрі виникає гармонічна у часі крутильна хвиля, яка поширюється вздовж його осі. Для лінійної крутильної хвилі в пружному циліндрі потрібно наступне: циліндричні координати (r, ϑ, z), деформований стан є осесиметричним і тому не залежить від координати, а також відсутність радіальних і осьових зміщення $u_r(r, z, t)= =u_z(r, z, t)=0$ (ці ж особливості зберігаються і при нелінійному описі). Тоді система з трьох рівнянь руху циліндра спрощується до вигляду

$$u_{\vartheta,rr}+(1/r)u_{\vartheta,r}-\left(1/r^2\right)u_\vartheta+u_{\vartheta,zz}-\left(1/v_T^2\right)u_{\vartheta,tt}=0. \quad (3)$$

Припустимо, що колове зміщення u_θ є гармонічним у часі і просторі

$$u_\vartheta(r,z,t)=\tilde{u}_\vartheta(r)e^{i(k_z z-\omega t)} \quad (4)$$

Тоді розв'язок (4) є гармонічною крутильною хвилею, оскільки кожен поперечний переріз циліндра здійснює гармонічне коливання у коловому напрямку з заданою частотою ω у часі і за просторовою координатою z рухається хвиля з довжиною $\lambda=(2\pi/k_z)$ та хвильовим числом k_z.

З постановки задачі випливає, що необхідні компоненти тензорів напружень та деформацій є такими:

$\sigma_{rr}=2\mu\varepsilon_{rr}+\lambda e=0;\ \sigma_{r\vartheta}=2\mu\varepsilon_{r\vartheta};\ \sigma_{rz}=2\mu\varepsilon_{rz}=0;$
$\varepsilon_{rr}=0;\ \varepsilon_{r\vartheta}=(1/2)\left[u_{\vartheta,r}-(1/r)u_\vartheta\right];\ \ \varepsilon_{rz}=0;\ e=0.$

Далі амплітуда хвилі, що залежить від радіуса, визначається з рівняння

$$u^o_{\vartheta,rr}+(1/r)u^o_{\vartheta,r}+\left[k_z^2-k_T^2-\left(1/r^2\right)\right]u^o_\vartheta=0. \quad (5)$$

Розв'язок рівняння (5) виражається через функцію Бесселя 1-го роду і 1-го індексу $\tilde{u}(r)=\tilde{u}^o J_1(\beta r),\ \beta=\sqrt{k_T^2-k_z^2}$ і розв'язок (4) у вигляді крутильної хвилі набуває вигляду

$$u_\vartheta(r, z, t)=\tilde{u}^o_\vartheta J_1(\beta r)e^{i(k_z z-\omega t)}. \quad (6)$$

Невідоме хвильове число k_z і відповідна швидкість $v_z=(\omega/k_z)$ визначаються з умови відсутності напружень на боковій поверхні циліндра $r=r^o$

$$\sigma_{rr}(r^o, z, t)=\sigma_{r\vartheta}(r^o, z, t)=\sigma_{rz}(r^o, z, t)=0. \quad (7)$$

При підстановці розв'язку (6) у граничну умо-ву $\sigma_{r\vartheta}(r^o, z, t)=0$ отримують трансцендентне рівняння $\beta r^o J_0(\beta r^o)=2J_1(\beta r^o)$ для знаходжен-ня хвильового числа k_z.

4. Нелінійний підхід до аналізу крутильної хвилі.

Процедура отримання основного нелінійного хвильового рівняння полягає у використанні циліндричних координат $\theta^1=r,\ \theta^2=\vartheta,\ \theta^3=z$ і виборі відповідної конфігурації. Такою конфігурацією є осесиметрична конфігурація з віссю симетрії Oz, яка залежить від координат r, z і не залежить від координати ϑ.

Із класичного рівняння руху $\nabla_k\left[\sigma^{ki}\left(\delta_i^n+\nabla_i u^n\right)\right]= =\rho\ddot{u}^i$ і визначальних рівнянь, які відповідають п'ятиконстантній моделі Мернагана, отримується нове скорочене нелінійне хвильове рівняння [2]

$$(v_T)^2\left[Lu_\vartheta \equiv \left(u_{\vartheta,rr} + (1/r)u_{\vartheta,r} - \left(1/r^2\right)u_\vartheta + u_{\vartheta,zz}\right)\right] - u_{\vartheta,tt} = \\ = \frac{B}{2\mu}\left[\left(u_{\vartheta,r}\right)^2 + \frac{1}{r}u_{\vartheta,r}u_\vartheta + \frac{2}{r^2}{u_\vartheta}^2 + \left(u_{\vartheta,z}\right)^2\right]Lu_\vartheta. \quad (8)$$

Відзначимо необхідні властивості рівняння (8): у лівій частині воно повністю співпадає з лінійним хвильовим рівнянням для крутильної хвилі [5], у правій частині містить доданки, які є кубічно нелінійними щодо зміщення і тому крутильні хвилі є виключно кубічно нелінійними в рамках реалізованого підходу. Наступною особливістю рівняння (8) є те, що нелінійна частина цього рівняння включає лише одну з трьох пружних констант третього порядку – B.

У нелінійній теорії пружності розрізняють два типи нелінійностей в основних рівняннях – геометричну і фізичну. Геометрична виникає, коли в записі тензора деформації враховуються квадратично нелінійні доданки, тобто доданки з множниками у вигляді пружних констант Ляме μ, λ. З хвильового рівняння (8) і конститутивних рівнянь, випливає, що такі доданки відсутні. Присутні лише нелінійні доданки з множниками у вигляді пружних констант Мернагана A, B, що свідчить про фізичну нелінійність.

Наостанок, можна застосувати до аналізу наближеного розв'язку рівняння (8) метод обмеження на градієнт зміщення [6].

Розв'язок рівняння (8) представляється у вигляді хвилі з невідомим хвильовим числом і невідомою амплітудою

$$u_\vartheta(r, z, t) = \tilde{u}_\vartheta(r)e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (9)$$

У результаті нелінійне хвильове рівняння (8) перетворюється на якби лінійне рівняння зі змінною швидкістю хвилі v_K

$$u_{\vartheta,rr} + (1/r)u_{\vartheta,r} + \left((k_z)^2 - (k_K)^2 - \left(1/r^2\right)\right)u_\vartheta = 0, \quad (10)$$

де

$$v_K = c_T\sqrt{1 - \frac{B}{2\mu}\left[\left(u_{\vartheta,r}\right)^2 + \frac{1}{r}u_{\vartheta,r}u_\vartheta + \frac{2}{r^2}{u_\vartheta}^2 + \left(u_{\vartheta,z}\right)^2\right]},$$

$$k_K = (\omega/v_K), \quad (11)$$

За методом обмеження на градієнт зміщення, вводять обмеження на змінну швидкість (11)

$$\frac{B}{2\mu}M(u_\vartheta) \ll 1, \quad M(u_\vartheta) = \left[\left(u_{\vartheta,r}\right)^2 + \frac{1}{r}u_{\vartheta,r}u_\vartheta + \frac{2}{r^2}{u_\vartheta}^2 + \left(u_{\vartheta,z}\right)^2\right]. \quad (12)$$

Використаємо лінійний розв'язку (6) у записі через функцію Бесселя

$$u_\vartheta(r,z,t) = \tilde{u}^o J_1(\beta_K r)e^{i(k_z z - \omega t)}, \ \beta_K = \sqrt{k_K^2 - k_z^2}. \quad (13)$$

Далі метод використовує ще одне обмеження

$$\delta = r\frac{Bk_z^2}{4\mu}M(u_\vartheta) \quad (14)$$

і наближене представлення функції Бесселя $J_1\left(\sqrt{k_K^2 - k_z^2}\,r\right)$, в результаті чого з (13) отримується наближений розв'язок у такому вигляді

$$u_\vartheta(r,z,t) = \tilde{u}_\vartheta^o e^{i(k_z z - \omega t)}\left\{J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - r\left(\tilde{u}_\vartheta^o\right)^3\frac{Bk_T^2}{8\mu} \times \right. \\ \times e^{2i(k_z z - \omega t)} \times \left[r^2\left(k_T^2 - k_z^2\right) + r\sqrt{k_T^2 - k_z^2} + 2 - (k_z)^2\right] \times \\ \left. \times \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right)\right]\left[J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right)\right]^2\right\}. \quad (15)$$

В аналізі крутильної хвилі відбуваються два види спотворення. Одне показує еволюцію хвилі при зміні відстані від центру до поверхні циліндра (добавка містить r як множник). Друге спотворення пов'язане з тим, що на поверхні циліндра лінійна гармонічна хвиля отримує постійну добавку у вигляді третьої гармоніки, тобто, хвиля спотворюється до вигляду модульованої хвилі, але ця добавка не змінюється з відстанню поширення хвилі в осьовому напрямку.

5. Граничні умови

Для граничних умов в нелінійній задачі про крутильні хвилі, визначимо, як і в лінійній задачі, хвильове число k_Z і швидкість хвилі $v_Z = (\omega/k_Z)$ з умови відсутності напружень на бічній поверхні циліндра $r = r^o$

$$\sigma_{rr}\left(r^o, z, t\right) = \sigma_{r\vartheta}\left(r^o, z, t\right) = \sigma_{rz}\left(r^o, z, t\right) = 0. \quad (16)$$

Далі слід вирахувати напруження з (16) через деформації і зміщення. Формула для нормального напруження σ_{rr} через зміщення не показана нижче з тих міркувань, що в ній немає доданків першого порядку, але є доданки другого і четвертого порядків. Формули для дотичних напружень є такими:

$$\sigma_{r\vartheta} = \mu\left(u_{\vartheta,1} + \frac{u_\vartheta}{r}\right) + \left(\frac{1}{12}A + \frac{1}{2}B\right)\left(u_{\vartheta,r}\right)^3 - \\ -\left(\frac{1}{4}A - B\right)\frac{u_\vartheta}{r}\left(u_{\vartheta,z}\right)^2 + \frac{1}{2}B\left[u_{\vartheta,r}\left(u_{\vartheta,z}\right)^2 + \frac{u_\vartheta}{r}\left(u_{\vartheta,r}\right)^2\right] \quad (17)$$

$$\sigma_{rz} = \left(2\mu + \frac{1}{12}A\right)u_{\vartheta,r}u_{\vartheta,z} + \left(2\mu - \frac{1}{12}A\right)\frac{1}{r}u_{\vartheta}u_{\vartheta,z} -$$
$$-\frac{1}{6}A\left(\frac{1}{r^2}\left(u_{\vartheta}\right)^2 u_{\vartheta,r}u_{\vartheta,z} - \frac{1}{r^3}\left(u_{\vartheta}\right)^3 u_{\vartheta,z}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}B\left[\left(\left(u_{\vartheta,r}\right)^3 u_{\vartheta,z} - \frac{1}{r}u_{\vartheta}u_{\vartheta,z}\left(u_{\vartheta,r}\right)^2\right) + \right. \tag{18}$$
$$\left. +\left(u_{\vartheta,r}\left(u_{\vartheta,z}\right)^3 - \frac{1}{r}u_{\vartheta}\left(u_{\vartheta,z}\right)^3\right)\right].$$

Формула (17) включає лінійну частину, яка відповідає лінійному класичному підходу, і чотири доданки, які є кубічно нелінійними. Формула (18) включає два доданки другого порядку нелінійності та шість доданків четвертого порядку.

Всі три напруження на поверхні циліндра включають нелінійні доданки і не можуть прирівнюватись до нуля, так, як у такому випадку для знаходження– хвильового числа – задаються три рівняння. Тоді задача стає переозначеною.

Виникає питання про перехід від лінійної задачі до спорідненої з нею нелінійної. У лінійній випливає, що два напруження з граничних умов є нульовими завжди і всюди.

Тому раціонально зберегти в граничних умовах одну граничну умову щодо дотичного напруження $\sigma_{r\vartheta}$, характерного для крутильної хвилі. Щодо нормального σ_{rr} та дотичного σ_{rz} напру-жень на поверхні циліндра в нелінійній постанов-ці можна вважати, що вони не будуть нульовими і можуть бути вирахувані при відомому хвильо-вому числі.

Тому, поява в задачі нормального напруження σ_{rr}, яке лише нелінійно залежить від зміщення u_{ϑ}, узгоджується з результатами відповідної задачі статики.

Загальні висновки.

Особливістю для крутильної хвилі є ускладнення в нелінійному підході граничних умов внаслідок відмінності між формою границі до і після деформування. В лінійному підході форма границі не змінюється. Також значне ускладнення математичного запису граничних умов через появу додаткових нелінійних доданків.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

Список використаних джерел

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. – Москва: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Гузь А*. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах / А.Гузь. – *Saarbrucken: LAP LAMBERT* Academic Publishing, 2016. – 505 с.
3. *Зарембо Л.К.* Введение в нелинейную акустику / Л.К.Зарембо, В.А. Красильников. – Москва: Наука, 1966. – 519 с.
4. *Крылов В.В.*Введение в физическую акустику / В.В. Крылов, В.А. Красильников– Москва: Наука, 1986. – 432 с.
5. *Рущицький Я.Я.* Пружна крутильна хвиля і відповідне нелінійне хвильове рівняння / Я.Я. Рущицький // Доп. НАН України. – 2022. – № 2. – С. 39 – 45.
6. *Rushchitsky J.J.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 1/ J.J. Rushchitsky, J.J., V.M. Yurchuk // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 5. – P. 581 – 589

References

1. VIKTOROV, I. A. (1981) *Zvukovyie poverhnostny volnyi v tverdyih telah.* Moscow: Science.
2. GUZ, A. (2016) *Uprugie volnyi v telah s nachalnyimi (ostatochnyimi) napryazheniyami: v 2-h chastyah. Ch. 1. Obschie voprosyi. Volnyi v beskonechnyih telah i poverhnostnyie volnyi v nelineynuyu akustiku.* Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing.
3. ZAREMBO, L.K., KRASILNIKOV, V.A. (1966) *Vvedenie v nelineynuyu akustiku.* Moscow: Nauka.
4. KRYLOV, V.V., KRASILNIKOV, V.A. (1986) *Vvedenie v fizicheskuyu akustiku.* Moscow: Nauka.
5. RUSCHITSKY, J.J. (2022) Pruzhna krutylna khvylia i vidpovidne neliniine khvylove rivniannia. In *Dop. NAN of Ukraine.* No. 2. pp. 39 - 45
6. RUSHCHITSKY, J.J., YURCHUK, V.M. (2020) Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 1 In *Int. Appl. Mech.* **56**, N 5. pp. 581 – 589

Надійшла до редколегії 15.08.2023