Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2020, № 2 (134) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.5
MSC 65C60

SUFFICIENT CONDITION FOR COINCIDENCE OF THE LS AND AITKEN ESTIMATIONS OF PARAMETER OF QUADRATIC REGRESSION IN CASE HETEROSCEDASTIC DEVIATIONS

Marta Savkina
Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine, E-mail: marta@imath.kiev.ua

ДОСТАТНЯ УМОВА ЗБІГУ ОЦІНОК МНК ТА ЕЙТКЕНА ПАРАМЕТРУ КВАДРАТИЧНОЇ РЕГРЕСІЇ У ВИПАДКУ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНИХ ВІДХИЛЕНЬ

М. Ю. Савкіна
Інститут математики НАНУ, Київ, Україна, E-mail: marta@imath.kiev.ua

Abstract. In the paper in case heteroscedastic independent deviations a regression model whose function has the form $f(x) = ax^2+bx+c$, where a, b and c — are unknown parameters, is studied. Approximate values (observations) of functions $f(x)$ are registered at equidistant points of a line segment. The theorem which is proved at the paper gives a sufficient condition on the variance of the deviations at which the Aitken estimation of parameter a coincides with its estimation of the LS in the case of odd number of observation points and bisymmetric covariance matrix. Under this condition, the Aitken and LS estimations of b and c will not coincide. The proof of the theorem consists of the following steps. First, the original system of polynomials is simplified: we get the system polynomials of the second degree. The variables of both systems are unknown variances of deviations, each of the solutions of the original system gives a set variances of deviations at which the estimations of Aitken and LS parameter a coincide. In the next step the solving of the original system polynomials is reduced to solving an equation with three unknowns, and all other unknowns are expressed in some way through these three. At last it is proved that there are positive unequal values of these three unknowns, which will be the solution of the obtained equation. And all other unknowns when substituting in their expression these values will be positive.
Keywords: least square method, regression model, Aitken estimation.

Анотація. У роботі у випадку гетероскедастичних незалежних відхилень вивчається регресійна модель, функція якої має вигляд $f(x) = ax^2 + bx + c$, де a, b та c — невідомі параметри. Наближені значення (спостереження) функції $f(x)$ реєструються у рівновіддалених точках відрізку $[0, 1]$. Теорема, яку доведено в роботі, дає достатню умову на дисперсії відхилень, при яких оцінка Ейткена параметра a збігається з його оцінкою МНК у випадку непарної кількості точок спостереження та бісиметричної коваріаційної матриці. При цій умові оцінки Ейткена та МНК параметрів b та c не будуть збігатися.

Ключові слова: метод найменших квадратів, регресійна модель, оцінка Ейткена.

Вступ

Одним з припущень класичного регресійного аналізу є те, що випадкові відхилення регресійної моделі будуть по-перше незміщеними, по-друге некорельованими та гомоскедастичними. Другу умову можна записати у вигляді одиничної коваріаційної матриці, помноженої на деяке число σ^2, яке має бути дисперсією випадкових відхиленнь. Оцінка невідомих параметрів методу найменших квадратів (МНК) є незміщеною та ефективною. Послаблення припущення некорельованості та рівності дисперсій призводить до коваріаційної матриці, яка є добутком довільної додатньо визначеної матриці Λ на число σ^2. В цьому випадку властивістю незміщеності та ефективності володіє оцінка Ейткена, в формулу якої входить матриця Λ. Але, оскільки на практиці матриця Λ ніколи не буває відомою, користуваитися все одно доводиться оцінкою МНК.

В зв'язку з цим виникає задача, при яких умовах вони збігаються, а у випадку, коли вони відрізняються одна від одної, виникає задача дослідження похибки, яку ми допускаємо, коли використовуємо оцінку МНК замість оцінки Ейткена.

В [1] у випадку лінійної по параметрам моделі доведено декілька теорем, які дають необхідні та достатні умови на матрицю плану для збігу оцінки МНК та оцінки Ейткена. В статті [3] у випадку гетероскедастичних незалежних відхилень вивчається лінійна регресійна модель, функція якої має вигляд $f(x) = ax + b$. Знайдено умови на дисперсії відхилень, при яких оцінка Ейткена збігається з оцінкою МНК окремо для кожного невідомого параметру моделі. При цих умовах оцінки Ейткена та МНК параметра іншого параметру не будуть збігатися.

1. Теорема про умови збігу оцінок МНК та Ейткена старшого коефіцієнту квадратичної регресійної моделі у випадку гетероскедастичних незалежних відхилень

Розглянемо модель регресії

$$y_i = at_i^2 + bt_i + c + \epsilon_i, \quad i = 0, 1, ..., n, \tag{1}$$

де $\epsilon_0, ..., \epsilon_n$ — незалежні у сукупності випадкові величини з $E\epsilon_i = 0$ та $D\epsilon_i = \lambda_i\sigma^2$, $\lambda_i > 0$, $i = 0, 1, ..., n$.

В [2] знайдено формули для оцінки МНК та оцінки Ейткена невідомих параметрів моделі регресії загального вигляду, лінійної по параметрам. З цих формул у випадку $t_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, ..., n$, маємо такі оцінки МНК та Ейткена параметра a моделі (1):

$$\hat{a}_{MNK} = \frac{180n}{(n+1)(n+2)(n-1)(n+3)} \sum_{i=0}^{n} z(i) y_i,$$

$$\hat{a}_{AIT} = n^2 \Delta_n^{-1} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \Big(\sum_{l=0, j>l}^{n} \lambda_l \lambda_j (l-j)^2 (i-l)(i-j) \Big) y_i,$$

де

$$z(i) = \frac{n(n+2)}{12} - \Big(i - \frac{n}{2}\Big)^2, \quad \Delta_n = \sum_{i=0}^{n} i^2 \lambda_i \Big(\sum_{l=0, j>l}^{n} \lambda_l \lambda_j (l-j)^2 (i-l)(i-j) \Big).$$

В [4] доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Оцінка Ейткена та оцінка МНК параметра a в моделі (1) у випадку парного n збігаються тоді і тільки тоді, коли λ_i $(i = 0, 1, ..., n)$ є додатним розв'язком наступної системи рівнянь*

$$\lambda_i \sum_{l=0, j>l}^{n} \lambda_l \lambda_j (l-j)^2 (i-l)(i-j) =$$

$$= \frac{12 \lambda_{\frac{n}{2}} z(i)}{n(n+2)} \sum_{l=0, j>l}^{n} \lambda_l \lambda_j (l-j)^2 \Big(\frac{n}{2} - l\Big)\Big(\frac{n}{2} - j\Big), \tag{2}$$

$$i = 0, 1, ..., \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, ..., n.$$

Таким чином, для того, щоб знайти, при яких λ_i $(i = 0, 1, ..., n)$ оцінки МНК та Ейткена параметру a будуть збігатися, треба розв'язати систему рівнянь (2) відносно λ_0, λ_1, ..., λ_n.

2. Зведення системи многочленів третього ступеня (2) до системи многочленів другого ступеня

Позначимо

$$\Lambda_d = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Лема 1. *Якщо n — парне та матриця Λ_d бісиметрична, то ситему рівнянь (2) можна подати у вигляді*

$$\lambda_i \Big[-\frac{3(k^2 - k(4i+1) + 2i^2)}{k(k+1)} (k-i)^2 \lambda_k + 2 \sum_{j=1}^{k} (k-i-j)(k-i+j) \lambda_{k-j} \Big] =$$

$$= 2\alpha_i\lambda_k \sum_{j=0, j\neq i}^{k-1} \lambda_j (k-j)^2, \tag{3}$$

$$\alpha_i = \frac{2k^2 - k(6i+1) + 3i^2}{k(k+1)}, \quad i = 0, 1, ..., k-1. \tag{4}$$

Доведення. У випадку парного n та бісиметричноі матриці Λ ситема рівнянь (2) матиме вигляд

$$\lambda_i^2 2(k-i)^2\big((k-i)^2\lambda_k + 2\sum_{j=1}^{k}(k-i-j)(k-i+j)\lambda_{k-j}\big)+$$

$$+\lambda_i\left[2(k-i)^2\lambda_k\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)^2\lambda_j + S_1\right] = 4\lambda_k\left(\frac{3(i-k)^2}{k(k+1)} - 1\right)S_2, \tag{5}$$

де

$$S_1 = 4\sum_{j=0}^{k-1}(k-j)^2(j-i)(2k-j-i)\lambda_j^2+$$

$$+\sum_{l=0, l\neq i}^{k-2}\lambda_l \sum_{j=l+1, j\neq i}^{k-1}\lambda_j\Big((j-l)^2(i-l)(i-j) + (2k-j-l)^2(i-l)(i-2k+j)+$$

$$+(2k-j-l)^2(i-j)(i-2k+l) + (j-l)^2(i-2k+l)(i-2k+j)\Big),$$

$$S_2 = -4\sum_{j=0}^{k-1}(k-j)^4\lambda_j^2 + 2\sum_{l=0}^{k-2}\lambda_l\sum_{j=l+1}^{k-1}\lambda_j(k-l)(k-j)\Big((j-l)^2 - (2k-j-l)^2\Big),$$

$$i = 0, 1, ..., k-1.$$

Далі,

$$S_1 = 4\sum_{l=0, l\neq i}^{k-2}\lambda_l\sum_{j=l+1, j\neq i}^{k-1}\lambda_j\Big((k-l)^2(j-i)(2k-j-i) + (k-j)^2(l-i)(2k-l-i)\Big) =$$

$$= 4\sum_{j=1}^{k}(k-i-j)(k-i+j)\lambda_{k-j}\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_j(k-j)^2, \tag{6}$$

$$S_2 = -4\sum_{j=0}^{k-1}(k-j)^4\lambda_j^2 - 8\sum_{l=0}^{k-2}\lambda_l\sum_{j=l+1}^{k-1}\lambda_j(k-l)^2(k-j)^2 =$$

$$= -4\lambda_k\left[\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_j(k-j)^2\right]^2. \tag{7}$$

Підставимо (6) в ліву частину (5). Отримуємо

$$\lambda_i^2 2(k-i)^2\Big((k-i)^2\lambda_k + 2\sum_{j=1}^{k}(k-i-j)(k-i+j)\lambda_{k-j}\Big)+$$

$$+\lambda_i\Big[2(k-i)^2\lambda_k\sum_{j=0,j\neq i}^{k-1}\lambda_j(k-j)^2+4\sum_{j=1}^{k}\big((k-i)^2-j^2\big)\lambda_{k-j}\sum_{j=0,j\neq i}^{k-1}\lambda_j(k-j)^2\Big]=$$

$$=\lambda_i^2 2(k-i)^2\Big((k-i)^2\lambda_k + 2\sum_{j=1}^{k}(k-i-j)(k-i+j)\lambda_{k-j}\Big)+$$

$$+2\lambda_i\Big[\big((k-i)^2\lambda_k+2\sum_{j=1}^{k}(k-i-j)(k-i+j)\lambda_{k-j}\big)\sum_{j=0,j\neq i}^{k-1}\lambda_j(k-j)^2\Big]=$$

$$=2\lambda_i\Big((k-i)^2\lambda_k+2\sum_{j=1}^{k}(k-i-j)(k-i+j)\lambda_{k-j}\Big)\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_j(k-j)^2. \qquad (8)$$

Підставимо (7) в праву частину (5) та прирівняємо її до (8). Після скорочення обох частин на $\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_j(k-j)^2$ отримуємо

$$2\lambda_i\Big((k-i)^2\lambda_k+2\sum_{j=1}^{k}(k-i-j)(k-i+j)\lambda_{k-j}\Big)=$$

$$=4\lambda_k\left(\frac{3(i-k)^2}{k(k+1)}-1\right)\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_j(k-j)^2,\ \ i=0,1,...,k-1. \qquad (9)$$

Враховуючи (4) рівняння (9) прийме вигляд

$$\lambda_i\Big((k-i)^2\lambda_k+2\sum_{j=1}^{k}(k-i-j)(k-i+j)\lambda_{k-j}\Big)=2\alpha_i\lambda_k\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_j(k-j)^2,$$
$$i=0,1,...,k-1,$$

звідки випливає (3). □

3. Зведення розв'язування системи многочленів (3) до розв'язування одного рівняння з 3-ма невідомими λ_{k-2}, λ_{k-1}, λ_k

Позначимо

$$\lambda_j^* = \frac{\alpha_j\lambda_k(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})}{g_j(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)}, \qquad (10)$$

де

$$g_j(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)=(k-j-2)(k-j+2)\lambda_{k-2}+(k-j-1)(k-j+1)\lambda_{k-1}-\beta_j\lambda_k,$$

$$\beta_j=\frac{(k-j)^2(2k^2+2k-15)}{k(k+1)},\quad j=0,1,...,k-3. \qquad (11)$$

Лема 2. *Вектор* $(\lambda_0^*,\lambda_1^*,...,\lambda_{k-3}^*,\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)$ *при будь-яких* $\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k$ *перетворює рівняння системи (3), коли* $i=0,1,...,k-3$, *на тотожності.*

Доведення. Підставимо (10) в ліву частину (3). Отримуємо

$$\lambda_i^*\Big[-\frac{3(k^2-k(4i+1)+2i^2)}{k(k+1)}(k-i)^2\lambda_k+2(k-i-1)(k-i+1)\lambda_{k-1}+$$

$$+2(k-i-2)(k-i+2)\lambda_{k-2}+2\sum_{j=3}^{k}(k-i-j)(k-i+j)\lambda_{k-j}^*\Big]=$$

$$=\lambda_i^*\Big[-\frac{3(k^2-k(4i+1)+2i^2)}{k(k+1)}(k-i)^2\lambda_k+2g_j(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_{k-2})+2\beta_j\lambda_k+$$

$$+2\sum_{j=3}^{k}(k-i-j)(k-i+j)\lambda_{k-j}^*\Big]. \qquad (12)$$

Підставимо (10) в праву частину (3). Отримуємо

$$2\alpha_i\lambda_k\Big[\sum_{j=0,j\neq i}^{k-3}\lambda_j^*(k-j)^2+4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1}\Big]=$$

$$=2\alpha_i\lambda_k\Big[\sum_{j=3,j\neq k-i}^{k}j^2\lambda_{k-j}^*+4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1}\Big]\tfrac{g_i(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)}{g_i(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)}=$$

$$=\tfrac{2\alpha_i\lambda_k(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})}{g_i(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)}\Big[\sum_{j=3,j\neq k-i}^{k}j^2\tfrac{\alpha_{k-j}\lambda_k g_i(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)}{g_{k-j}(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)}+g_i(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)\Big]=$$

$$=\lambda_i^*\Big[\sum_{j=3,j\neq k-i}^{k}2j^2\alpha_{k-j}\lambda_k\Big(\frac{(k-i)^2}{j^2}-\frac{\big(1-\frac{(k-i)^2}{j^2}\big)(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})}{g_{k-j}(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)}\Big)+$$

$$+2g_i(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)\Big]=\lambda_i^*\Big[2\lambda_k(k-i)^2\sum_{j=0,j\neq i}^{k-3}\alpha_j-$$

$$-2\lambda_k\sum_{j=3,j\neq k-i}^{k}\frac{\alpha_{k-j}(j^2-(k-i)^2)(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})}{g_{k-j}(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)}+2g_i(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)\Big]=$$

$$=\lambda_i^*\Big[\lambda_k(k-i)^2\frac{(k-3)(k+10)+12ik-6i^2}{k(k+1)}+$$

$$+2\sum_{j=3}^{k}(k-i-j)(k-i+j)\lambda_{k-j}^*+2g_i(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)\Big], \qquad (13)$$

Оскільки

$$-\frac{3(k^2-k(4i+1)+2i^2)}{k(k+1)}(k-i)^2+2\beta_j=\frac{(k-3)(k+10)+12ik-6i^2}{k(k+1)},$$

з рівності (12) та (13) випливає, що у випадку $\lambda_j=\lambda_j^*, j=0,1,...,k-3$, рівняння системи (3) при $i=0,1,...,k-3$, будуть тотожностями. □

Лема 3. *Вектор* $(\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_{k-3}^*, \lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}, \lambda_k)$ *при будь-яких* λ_{k-2}, λ_{k-1}, λ_k *робить рівняння системи (3) при* $i = k-2$ *та* $i = k-1$ *рівносильними.*

Доведення. Якщо $i = k-1$, з (3) маємо таке рівняння

$$\lambda_{k-1}\left[-\frac{3(k^2-k(4k-3)+2(k-1)^2)}{k(k+1)}\lambda_k + 2\sum_{j=3}^{k}(1-j)(1+j)\lambda_{k-j}^* - 6\lambda_{k-2}\right] =$$

$$= \frac{2(-k^2-k+3)}{k(k+1)}\lambda_k\left[\sum_{j=3}^{k} j^2\lambda_{k-j}^* + 4\lambda_{k-2}\right]. \tag{14}$$

Підставимо (10) в (14). Отримуємо

$$\frac{3(k-1)(k+2)}{k(k+1)}\lambda_k\lambda_{k-1} - 6\lambda_{k-2}\lambda_{k-1} - \frac{8(-k^2-k+3)}{k(k+1)}\lambda_k\lambda_{k-2} +$$

$$+2(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})\sum_{j=3}^{k}\alpha_{k-j}D_1^{(k-j)}(\lambda_k) = 0, \tag{15}$$

де

$$D_1^{(k-j)}(\lambda_k) = \frac{\lambda_k f_1^{(k-j)}(\lambda_k)}{g_{k-j}(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)},$$

$$f_1^{(k-j)}(\lambda_k) = (1-j^2)\lambda_{k-1} + j^2\frac{k^2+k-3}{k(k+1)}\lambda_k. \tag{16}$$

Після низки перетворень отримуємо

$$D_1^{(k-j)}(\lambda_k) = -\frac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\lambda_k + \frac{w_j k(k+1)}{j^2(2k^2+2k-15)^2} +$$

$$+\frac{w_j k(k+1)}{j^2(2k^2+2k-15)^2}\cdot\frac{(j^2-4)\lambda_{k-2}+(j^2-1)\lambda_{k-1}}{g_{k-j}(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)}, \tag{17}$$

де

$$w_j = (k^2+k-3)(j^2-4)\lambda_{k-2} + (k^2+k-12)(j^2-1)\lambda_{k-1}.$$

Далі, підставимо (17) в (15). Враховуючи (11), отримуємо

$$\left[A_1\lambda_{k-1} + A_2\lambda_{k-2}\right]\lambda_k - 6\lambda_{k-2}\lambda_{k-1} +$$

$$+\frac{2(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})}{2k^2+2k-15}\sum_{j=3}^{k}\frac{\alpha_{k-j}w_j}{\beta_{k-j}}\left(1+\frac{(j^2-4)\lambda_{k-2}+(j^2-1)\lambda_{k-1}}{g_{k-j}(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)}\right) = 0, \tag{18}$$

де

$$A_1 = \frac{3(k-1)(k+2)}{k(k+1)} + \frac{5(k^2+k-3)(k^2+k-6)}{k(k+1)(2k^2+2k-15)},$$

$$A_2 = \frac{8(k^2+k-3)}{k(k+1)} + \frac{20(k^2+k-3)(k^2+k-6)}{k(k+1)(2k^2+2k-15)}.$$

Якщо $i = k-2$, з (3) маємо таке рівняння

$$\lambda_{k-2}\left[-\frac{3(k^2-k(4k-7)+2(k-2)^2)}{k(k+1)}\lambda_k + 2\sum_{j=3}^{k}(2-j)(2+j)\lambda_{k-j}^* + 6\lambda_{k-1}\right] =$$

$$= \frac{2(-k^2-k+12)}{k(k+1)}\lambda_k\Bigg[\sum_{j=3}^{k} j^2\lambda^*_{k-j} + \lambda_{k-1}\Bigg]. \tag{19}$$

Підставимо (10) в (19). Отримуємо

$$\frac{12(k^2+k-8)}{k(k+1)}\lambda_k\lambda_{k-2} + 6\lambda_{k-2}\lambda_{k-1} - \frac{2(-k^2-k+12)}{k(k+1)}\lambda_k\lambda_{k-1} +$$

$$+2\sum_{j=3}^{k}\alpha_{k-j}(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})D_2^{(k-j)}(\lambda_k) = 0, \tag{20}$$

де

$$D_2^{(k-j)}(\lambda_k) = \frac{\lambda_k f_2^{(k-j)}(\lambda_k)}{g_{k-j}(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)},$$

$$f_2^{(k-j)}(\lambda_k) = (1-j^2)\lambda_{k-1} + j^2\frac{k^2+k-12}{k(k+1)}\lambda_k.$$

Після низки перетворень отримуємо

$$D_2^{(k-j)}(\lambda_k) = -\frac{k^2+k-12}{2k^2+2k-15}\lambda_k + \frac{w_j k(k+1)}{j^2(2k^2+2k-15)^2} +$$

$$+\frac{w_j k(k+1)}{j^2(2k^2+2k-15)^2}\cdot\frac{(j^2-4)\lambda_{k-2}+(j^2-1)\lambda_{k-1}}{g_{k-j}(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)}. \tag{21}$$

Далі, підставимо (21) в (20). Враховуючи (11), отримуємо

$$\Bigg[B_1\lambda_{k-1} + B_2\lambda_{k-2}\Bigg]\lambda_k - 6\lambda_{k-2}\lambda_{k-1} +$$

$$+\frac{2(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})}{2k^2+2k-15}\sum_{j=3}^{k}\frac{\alpha_{k-j}w_j}{\beta_{k-j}}\left(1+\frac{(j^2-4)\lambda_{k-2}+(j^2-1)\lambda_{k-1}}{g_{k-j}(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},\lambda_k)}\right) = 0, \tag{22}$$

де

$$B_1 = \frac{3(k^2+k-12)}{k(k+1)} + \frac{5(k^2+k-12)(k^2+k-6)}{k(k+1)(2k^2+2k-15)},$$

$$B_2 = \frac{12(k^2+k-8)}{k(k+1)} + \frac{10(k^2+k-12)(k^2+k-6)}{k(k+1)(2k^2+2k-15)}.$$

Оскільки

$$A_1 = B_1,\ \ A_2 = B_2,$$

то рівняння (18) та (22) будуть рівносильними. □

4. Знаходження інтервалу можливих значень для λ_k

Позначимо

$$Z = \frac{k(k+1)}{2k^2+2k-15}, \tag{23}$$

$$\Omega_i = \left(1-\frac{4}{(k-i)^2}\right)\lambda_{k-2} + \left(1-\frac{1}{(k-i)^2}\right)\lambda_{k-1}, \tag{24}$$

$$i^* = k - \left[\sqrt{\frac{k(k+1)}{3}}\right].$$

Зауважимо, що

$$\Omega_i > \Omega_{i+1},\ i = 0, 1, ..., k-3. \tag{25}$$

Лема 4. *Якщо*

$$Z\Omega_{i^*} < \lambda_k < Z\Omega_{i^*-1}, \tag{26}$$

то λ_i^*, $i = 0, 1, ..., k-3$, *будуть додатними.*

Доведення. З формули (4) отримуємо

$$\alpha_i > 0,\ \text{якщо}\ 0 \le i < k - \sqrt{\frac{k(k+1)}{3}}$$

$$\alpha_i < 0,\ \text{якщо}\ k - \sqrt{\frac{k(k+1)}{3}} < i \le k.$$

Оскільки λ_i має бути додатнім, то

$$(k-i-2)(k-i+2)\lambda_{k-2} + (k-i-1)(k-i+1)\lambda_{k-1} - \beta_i\lambda_k > 0,$$
$$\text{якщо}\quad 0 < i \le i^* - 1,$$

тобто, $\lambda_k < Z\Omega_i$.

Оскільки має місце (25), то з $\lambda_k < Z\Omega_{i^*-1}$ випливає

$$\lambda_k < Z\Omega_i,\quad 0 < i \le i^* - 1.$$

Так само,

$$(k-i-2)(k-i+2)\lambda_{k-2} + (k-i-1)(k-i+1)\lambda_{k-1} - \beta_i\lambda_k < 0,$$
$$\text{якщо}\quad i^* \le i \le k-3;$$

з $\lambda_k > Z\Omega_{i^*}$ випливає

$$\lambda_k > Z\Omega_i,\quad i^* \le i \le k-3.$$

Таким чином, отримуємо (26). □

5. Знаходження умов на λ_{k-2}, λ_{k-1} для існування розв'язку рівняння (15)

Доведемо, що принаймні при деяких λ_{k-2}, λ_{k-1} розв'язок рівняння (15) на проміжку $\left[Z\Omega_{i^*}, Z\Omega_{i^*-1}\right]$ існує.

Лема 5. *Якщо*

$$\frac{k^2+k-12}{k^2+k-3}\cdot\frac{(k-i^*+1)^2-1}{(k-i^*+1)^2-4}\lambda_{k-1} < \lambda_{k-2} < \frac{k^2+k-12}{k^2+k-3}\cdot\frac{(k-i^*)^2-1}{(k-i^*)^2-4}\lambda_{k-1},$$

то на проміжку $\left[Z\Omega_{i^*}, Z\Omega_{i^*-1}\right]$ *розв'язок рівняння (15) існує.*

Доведення. Розглянемо функцію $F_1(\lambda_k)$ від змінної λ_k:

$$F_1(\lambda_k) = f_1(\lambda_k) + q_1(\lambda_k),$$

де

$$f_1(\lambda_k) = -\tfrac{3(k-1)(k+2)}{k(k+1)}\lambda_k\lambda_{k-1} + 6\lambda_{k-2}\lambda_{k-1} + \tfrac{8(-k^2-k+3)}{k(k+1)}\lambda_k\lambda_{k-2}+$$
$$+ 2(4\lambda_{k-2} + \lambda_{k-1}) \sum_{j=0, j\neq i^*}^{k-3} \alpha_j D_1^{(j)}(\lambda_k),$$

$$q_1(\lambda_k) = 2(4\lambda_{k-2} + \lambda_{k-1})\alpha_{i^*} D_1^{(i^*)}(\lambda_k). \tag{27}$$

Бачимо, що

$$F_1(\lambda_k) \in C\big(Z\Omega_{i^*}, Z\Omega_{i^*-1}\big). \tag{28}$$

Доведемо, що $F_1(\lambda_k)$ в околі точок $Z\Omega_{i^*}+0$ та $Z\Omega_{i^*-1}-0$ приймає значення різних знаків.

Очевидно, існують такі $\epsilon_1 > 0$, та $N_1(\epsilon_1) > 0$, що

$$|f_1(\lambda_k)| < N_1(\epsilon_1), \tag{29}$$

коли $Z\Omega_{i^*} < \lambda_k < Z\Omega_{i^*} + \epsilon_1$.

Знайдемо таке $\delta_1 > 0$, при якому

$$q_1(\lambda_k) < -N_1(\epsilon_1), \tag{30}$$

коли $Z\Omega_{i^*} < \lambda_k < Z\Omega_{i^*} + \delta_1$.

З (16), (23), (24) та умови

$$\lambda_{k-2} < \frac{k^2+k-12}{k^2+k-3} \cdot \frac{(k-i^*)^2-1}{(k-i^*)^2-4}\lambda_{k-1}$$

випливає

$$f_1^{(i^*)}(Z\Omega_{i^*}) = \frac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\big((k-i^*)^2-4\big)\lambda_{k-2}-$$
$$-\frac{k^2+k-12}{2k^2+2k-15}\big((k-i^*)^2-1\big)\lambda_{k-1} < 0.$$

Нехай

$$\lambda_{k-2} = \frac{k^2+k-12}{k^2+k-3} \cdot \frac{(k-i^*)^2-1}{(k-i^*)^2-4}\lambda_{k-1} - \zeta_1, \quad \zeta_1 > 0. \tag{31}$$

З (16) та (31) випливає

$$f_1^{(i^*)}(Z\Omega_{i^*} + \delta) = -\tfrac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\big((k-i^*)^2-4\big)\zeta_1 + (k-i^*)^2\tfrac{k^2+k-3}{k(k+1)}\delta < 0,$$

якщо $\delta < \delta_1^{(1)} = \frac{k(k+1)((k-i^*)^2-4)}{(k-i^*)^2(2k^2+2k-15)}\zeta_1$.

Далі,

$$g_{i^*}(\lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}, Z\Omega_{i^*} + \delta) = -\frac{(k-i^*)^2}{Z}\delta < 0, \quad \text{якщо } \delta > 0.$$

Підставимо $\lambda_k = Z\Omega_{i^*} + \delta$ в (27). Отримуємо

$$q_1(Z\Omega_{i^*}+\delta) = 2(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})|\alpha_{i^*}|Z(Z\Omega_{i^*}+\delta)\times \\ \times \frac{-\frac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\big((k-i^*)^2-4\big)\zeta_1 + (k-i^*)^2\frac{k^2+k-3}{k(k+1)}\delta}{\delta(k-i^*)^2}.$$

Отже,

$$q_1(Z\Omega_{i^*}+\delta) < -2(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})|\alpha_{i^*}|Z^2\Omega_{i^*}\times \\ \times\left(\frac{\frac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\big((k-i^*)^2-4\big)\zeta_1}{\delta(k-i^*)^2} - \frac{k^2+k-3}{k(k+1)}\right) < -N_1(\epsilon_1),$$

якщо

$$\delta < \delta_1^{(2)} = \frac{\frac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\big((k-i^*)^2-4\big)\zeta_1}{(k-i^*)^2\left(\frac{N_1(\epsilon_1)}{2(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})|\alpha_{i^*}|Z^2\Omega_{i^*}} + \frac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\right)}.$$

Таким чином, якщо $\delta < \delta_1 = \min\{\delta_1^{(1)}, \delta_1^{(2)}\}$, маємо (30).

З (29) та (31) випливає, що

$$F_1(\lambda_k) < 0, \tag{32}$$

коли $Z\Omega_{i^*} < \lambda_k < Z\Omega_{i^*} + \gamma_1$, де $\gamma_1 = \min\{\epsilon_1, \delta_1\}$.

Тепер представимо $F_1(\lambda_k)$ як

$$F_1(\lambda_k) = f_2(\lambda_k) + q_2(\lambda_k),$$

де

$$f_2(\lambda_k) = -\tfrac{3(k-1)(k+2)}{k(k+1)}\lambda_k\lambda_{k-1} + 6\lambda_{k-2}\lambda_{k-1} + \tfrac{8(-k^2-k+3)}{k(k+1)}\lambda_k\lambda_{k-2} + \\ + 2(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})\sum_{j=0, j\neq i^*-1}^{k-3}\alpha_j D_1^{(j)}(\lambda_k),$$

$$q_2(\lambda_k) = 2(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})\alpha_{i^*-1}D_1^{(i^*-1)}(\lambda_k). \tag{33}$$

Очевидно, існують такі $\epsilon_2 > 0$, та $N_2(\epsilon_2) > 0$, що

$$|f_2(\lambda_k)| < N_2(\epsilon_2), \tag{34}$$

коли

$$Z\Omega_{i^*-1} - \epsilon_2 < \lambda_k < Z\Omega_{i^*-1}.$$

Знайдемо таке $\delta_2 > 0$, при якому

$$q_2(\lambda_k) > N_2(\epsilon_2), \tag{35}$$

коли $Z\Omega_{i^*-1} - \delta_2 < \lambda_k < Z\Omega_{i^*-1}$.

З (16), (23), (24) та умови

$$\lambda_{k-2} > \frac{k^2+k-12}{k^2+k-3}\cdot\frac{(k-i^*+1)^2-1}{(k-i^*+1)^2-4}\lambda_{k-1}$$

випливає

$$f_1^{(i^*-1)}(Z\Omega_{i^*-1}) = \frac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\big((k-i^*+1)^2-4\big)\lambda_{k-2}-$$

$$-\frac{k^2+k-12}{2k^2+2k-15}\big((k-i^*+1)^2-1\big)\lambda_{k-1} > 0. \tag{36}$$

Нехай

$$\lambda_{k-2} = \frac{k^2+k-12}{k^2+k-3}\cdot\frac{(k-i^*+1)^2-1}{(k-i^*+1)^2-4}\lambda_{k-1}+\zeta_2, \quad \zeta_2>0. \tag{37}$$

З (36) та (37) випливає

$$f_1^{(i^*-1)}(Z\Omega_{i^*-1}-\delta) = \frac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\big((k-i^*+1)^2-4\big)\zeta_2-$$

$$-(k-i^*+1)^2\frac{k^2+k-3}{k(k+1)}\delta > 0,$$

якщо $\delta < \delta_2^{(1)} = \frac{k(k+1)((k-i^*+1)^2-4)}{(k-i^*+1)^2(2k^2+2k-15)}\zeta_2$.

Далі,

$$g_{i^*-1}(\lambda_{k-2},\lambda_{k-1},Z\Omega_{i^*}-\delta) = \frac{(k-i^*)^2}{Z}\delta > 0, \quad \text{якщо } \delta>0.$$

Підставимо $\lambda_k = Z\Omega_{i^*}-\delta$ в (33). Отримуємо

$$q_2(Z\Omega_{i^*-1}-\delta) = 2(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})\alpha_{i^*-1}Z(Z\Omega_{i^*-1}-\delta)\times$$

$$\times\frac{\frac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\big((k-i^*+1)^2-4\big)\zeta_2-(k-i^*+1)^2\frac{k^2+k-3}{k(k+1)}\delta}{\delta(k-i^*+1)^2}.$$

Отже,

$$q_2(Z\Omega_{i^*}-\delta) > 2(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})\alpha_{i^*-1}Z^2\Omega_{i^*-1}\times$$

$$\times\left(\frac{\frac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\big((k-i^*+1)^2-4\big)\zeta_2}{\delta(k-i^*+1)^2}-\frac{k^2+k-3}{k(k+1)}\right) > N_2(\epsilon_2),$$

якщо

$$\delta < \delta_2^{(2)} = \frac{\frac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\big((k-i^*+1)^2-4\big)\zeta_2}{(k-i^*+1)^2\left(\frac{N_2(\epsilon_2)}{2(4\lambda_{k-2}+\lambda_{k-1})|\alpha_{i^*-1}|Z^2\Omega_{i^*-1}}+\frac{k^2+k-3}{2k^2+2k-15}\right)}.$$

Таким чином, якщо $\delta<\delta_2=\min\{\delta_2^{(1)},\delta_2^{(2)}\}$, маємо (35).

З (34) та (35) випливає, що

$$F_1(\lambda_k) > 0, \tag{38}$$

коли $Z\Omega_{i^*-1}-\gamma_2<\lambda_k<Z\Omega_{i^*-1}$, де $\gamma_2=\min\{\epsilon_2,\delta_2\}$.

З (28), (30) та (38) отримуємо, що на проміжку $\big[Z\Omega_{i^*},Z\Omega_{i^*-1}\big]$ розв'язок рівняння (15) існує. $\square$

6. Достатня умова збігу оцінок МНК та Ейткена старшого коефіцієнту квадратичної регресійної моделі у випадку діагональної бісиметричної коваріаційної матриці та парного n

Теорема 2. *Якщо в моделі (1) n — парне, λ_{k-1} — будь-яке додатне значення, $\lambda_{k-2} = \tilde{\lambda}_{k-2}$, де $\tilde{\lambda}_{k-2}$ — будь-яке значення з інтервалу*

$$\left(\frac{k^2+k-12}{k^2+k-3}\cdot\frac{(k-i^*+1)^2-1}{(k-i^*+1)^2-4}\lambda_{k-1}, \frac{k^2+k-12}{k^2+k-3}\cdot\frac{(k-i^*)^2-1}{(k-i^*)^2-4}\lambda_{k-1}\right),$$

$\lambda_k = \lambda_k^*$, де λ_k^* — розв'язок рівняння (15) на проміжку $\left[Z\Omega_{i^*}, Z\Omega_{i^*-1}\right]$, $\lambda_j = \lambda_j^*$, $j = 0, 1, ..., k-3$, де λ_j^* визначаєтся за формулою (10), $\lambda_{k+1} = \lambda_{k-1}$, $\lambda_{k+2} = \lambda_{k-2}$, $\lambda_{k+j} = \lambda_{k-j}$, $j = 3, 4, ..., k$, то оцінка Ейткена та оцінка МНК параметра a в моделі (1) збігаються.

Доведення. Згідно лемі 5 розв'язок рівняння (15) при будь-якому додатньому λ_{k-1} та $\lambda_{k-2} = \tilde{\lambda}_{k-2}$ існує. Отже, вектор $(\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_{k-3}^*, \tilde{\lambda}_{k-2}, \lambda_{k-1}, \lambda_k^*)$ є розв'язком рівняння системи (3) при $i = k-1$, а також згідно лемі 3 при $i = k-2$.

Вектор $(\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_{k-3}^*, \lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}, \lambda_k)$ при будь-яких $\lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}, \lambda_k$ згідно лемі 2 є розв'язком рівняння системи (3) при $i = 0, 1, ..., k-3$, а отже, і при $\lambda_{k-2} = \tilde{\lambda}_{k-2}$ та $\lambda_k = \lambda_k^*$.

Таким чином, вектор $(\lambda_0^*, \lambda_1^*, ..., \lambda_{k-3}^*, \tilde{\lambda}_{k-2}, \lambda_{k-1}, \lambda_k^*)$ є розв'язком системи (3), а отже, згідно лемі 1 і системи (2). ☐

Заключні зауваження

У роботі у випадку гетероскедастичних незалежних відхилень вивчається регресійна модель, функція якої має вигляд $f(x) = ax^2 + bx + c$, де a, b та c — невідомі параметри. Наближені значення (спостереження) функції $f(x)$ реєструються у рівновіддалених точках відрізку $[0, 1]$. Теорема, яку доведено в роботі, дає достатню умову на дисперсії відхилень, при яких оцінка Ейткена параметра a збігається з його оцінкою МНК у випадку непарної кількості точок спостереження та бісиметричної коваріаційної матриці. При цій умові оцінки Ейткена та МНК параметра b та c не будуть збігатися.

Доведення теореми складається з таких кроків. Спочатку спрощено вихідну систему многочленів: отримано систему многочленів другого ступеня. Змінні обох систем — невідомі значення дисперсій відхилень, кожен з розв'язків вихідної системи дає множину дисперсій відхилень, при яких оцінки Ейткена та МНК параметра a збігаються. На наступному кроці розв'язування вихідної системи многочленів зведено до розв'язування рівняння з трьома невідомими, а всі інші невідомі виражено певним чином через ці три. Насамкінець доведено, що існують додатні не рівні між собою значення цих трьох невідомих, які будуть розв'язком отриманого рівняння. А всі інші невідомі при подстановці в їх вираз цих значень будуть додатними.

Література

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. Москва: Мир, 1976. 756 с.
2. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессии. Москва: Финансы и статистика, 1981. 304 с.
3. Савкіна М. Ю. Умови збігу оцінок МНК та Ейткена параметрів моделі лінійної регресії. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2018. № 3 (129). С. 36–44.
4. Савкіна М. Ю. Умови збігу оцінок МНК та Ейткена старшого коефіцієнту моделі квадратичної регресії. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2019. № 3 (132). С. 33–41.

Надійшла: 28.10.2020 / Прийнята: 10.12.2020

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СОВПАДЕНИЯ ОЦЕНОК МНК И ЭЙТКЕНА ПАРАМЕТРА КВАДРАТИЧНОЙ РЕГРЕССИИ В СЛУЧАЕ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧЕСКИХ ОТКЛОНЕНИЙ

М. Ю. Савкина

Институт математики НАНУ, Киев, Украина, E-mail: marta@imath.kiev.ua

Аннотация. В работе в случае гетероскедастических независимых отклонений изучается регрессионная модель с функцией вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — неизвестные параметры. Приближенные значения (наблюдения) функции $f(x)$ регистрируются в равноудаленных точках отрезка $[0, 1]$. Доказанная в работе теорема дает достаточное условие на дисперсии отклонений, при которых оценка Эйткена параметра a совпадает с его оценкой МНК в случае нечетного количества точек наблюдения и бисимметричной ковариационной матрицы. При этом условии оценки Эйткена и МНК параметров b и c не будут совпадать.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, регрессионная модель, оценка Эйткена.