Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЮСИПІВ ТАРАС ВАСИЛЬОВИЧ

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ ГЛОБАЛЬНИХ АТРАКТОРІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ БЕЗ ЄДИНОСТІ

Спеціальність 111 — математика

Галузь знань 11 — математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня *доктора філософії*

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

____________________ *Т. В. Юсипів*

Науковий керівник *Капустян Олексій Володимирович,*
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2024

Анотація

Юсипів Т. В. Робастна стійкість глобальних атракторів еволюційних систем без єдиності. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 "Математика". – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2024.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню стійкості глобальних атракторів нелінійних еволюційних систем без єдиності по відношенню до зовнішніх збурень.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, наведено список конференцій та наукових семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію.

Перший розділ роботи присвячений огляду літератури по даній тематиці та методики проведення дисертаційних досліджень. Наведено основні положення теорії стійкості від входу до стану для систем диференціальних рівнянь. Також висвітлено роботи авторів, які займалися застосуванням цієї теорії до дослідженням якісної поведінки розв'язків як скінченновимірних, так і нескінченновимірних дисипативних систем.

В другому розділі викладені основні положення теорії глобальних атракторів нелінійних еволюційних рівнянь у випадку неєдиності розв'язку задачі Коші. Детально проаналізовано як автономний випадок (теорія м-напівпотоків), так і неавтономний випадок, де основним об'єктом дослідження виступають сімейства м-напівпроцесів. Введено поняття локаль-

ної стійкості від входу до стану та властивості асимптотичного підсилення відносно глобального атрактору для нескінченновимірної еволюційної системи. Доведено властивість асимптотичної стійкості глобального атрактору м-напівпотоку у формі робастної оцінки. На основі цього результату одержано достатні умови локальної стійкості від входу до стану для абстрактної неавтономної збуреної системи відносно атрактору незбуреної системи. Для рівномірних атракторів м-напівпроцесів одержано результат про напівнеперервну зверху залежність від параметру. На основі цього результату встановлено властивість асимптотичного підсилення для неавтономних еволюційних систем без єдиності відносно атракторів автономних незбурених систем.

В третьому розділі досліджується асимптотична поведінка розв'язків нелінійних параболічних систем зі збуреннями в правій частині та стійкість глобальних атракторів по відношенню до цих збурень. Доведено результати про глобальну розв'язність, регулярність та виведені апріорні оцінки розв'язків для загальних нелінійних неавтономних параболічних рівнянь. Для параболічної системи типу реакція-дифузія з гладкою нелінійністю та збуренням, що містить фазову змінну та не гарантує єдиність розв'язку задачі Коші, доведено результат про локальну стійкість глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень. Для загальної системи типу реакція-дифузія з негладкою нелінійністю та неавтономних збуренням доведено властивість асимптотичного підсилення для глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень. Також розглянуто дисипативну еволюційну систему, що складається з параболічної нелінійної системи та системи звичайних диференціальних рівнянь, що збурюються вхідними обмеженими сигналами. Доведено, що глобальний атрактор незбуреної системи є стійким в сенсі ISS щодо величини збурень.

В четвертому розділі досліджується якісна поведінка розв'язків нелінійного гіперболічного рівняння зі збуреннями в правій частині та стійкість глобального атрактору по відношенню до цих збурень. Доведено результати про глобальну розв'язність, регулярність та виведені апріорні оцінки розв'язків для загального нелінійного неавтономного гіперболічного рівняння. Для загального хвильового рівняння з негладкою нелінійністю та неавтономним збуренням доведено властивість асимптотичного підсилення для глобального атрактору незбуреного рівняння по відношенню до збурень. Для гіперболічного рівняння з гладкою нелінійністю та збуренням, що містить фазову змінну та не гарантує єдиність розв'язку задачі Коші, доведено результат про локальну стійкість та асимптотичне підсилення для глобального атрактору незбуреного рівняння по відношенню до збурень.

У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

– одержано достатні умови локальної стійкості щодо неавтономних збурень для глобального атрактору абстрактної нескінченновимірної еволюційної системи без єдиності;

– встановлено робастну оцінку типу асимптотичного підсилення для неавтономних еволюційних систем без єдиності відносно атракторів автономних незбурених систем;

– для параболічної системи типу реакція-дифузія з гладкою нелінійністю та збуренням, що містить фазову змінну та не гарантує єдиність розв'язку задачі Коші, доведено результат про локальну стійкість глобального атрактору незбуреної системи по відношенню до збурень;

– для загальної системи типу реакція-дифузія з негладкою нелінійністю та неавтономних збуренням доведено властивість асимптотичного підсилення для глобального атрактору незбуреної системи по відношенню до збурень;

– доведено робастну стійкість атрактору дисипативної еволюційної системи, що складається з параболічної нелінійної системи та системи звичайних диференціальних рівнянь, що збурюються вхідними обмеженими сигналами;

– для загального нелінійного гіперболічного рівняння з негладкою функцією взаємодії та неавтономних збуренням доведено властивість асимптотичного підсилення для глобального атрактору незбуреної системи по відношенню до збурень;

– для гіперболічного рівняння з гладкою нелінійністю та збуренням, що містить фазову змінну та не гарантує єдиність розв'язку задачі Коші, доведено результат про локальну стійкість та асимптотичне підсилення для глобального атрактору незбуреної системи по відношенню до збурень.

Результати роботи доповнюють абстрактну теорію стійкості еволюційних нескінченновимірних систем без єдиності розв'язку та можуть бути використані в подальшому для дослідження якісної поведінки розв'язків дисипативних диференціальних рівнянь в частинних похіднихь. Одержані в роботі результати також можуть мати прикладне значення, зокрема, при дослідженні стійкості граничних режимів в системах з зовнішніми сигналами.

Ключові слова: диференціальне рівняння, асимптотична поведінка, стійкість, нелінійне еволюційне рівняння, збурення, динамічна система, напівпотік, омега-гранична множина, атрактор, параболічне рівняння, гіперболічне рівняння, система реакції-дифузії.

Abstract

Yusypiv T. V. Robust stability of global attractors of evolutionary systems without uniqueness. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Doctor of Philosophy thesis undertaken in specialty 111 – Mathematics – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2024.

The dissertation is devoted to the study of the stability of global attractors of nonlinear evolutionary systems without unity in relation to external disturbances.

The dissertation consists of annotations in Ukrainian and English, an introduction, four sections of the main part, conclusions, a list of used sources and an appendix.

The introduction substantiates the relevance of the topic, indicates the connection of the work with scientific programs, plans, topics, establishes the goal and task, object, subject and methods of research, provides the scientific novelty and practical significance of the obtained results, characterizes the personal contribution of the recipient, provides a list of conferences and scientific seminars at which the dissertation passed approval.

The first section of the work is devoted to the review of the literature on this topic and the methodology of dissertation research. The main provisions of the theory of input to state stability for systems of differential equations are given. Also highlighted are the works of authors who applied this theory to the study of the qualitative behavior of solutions of both finite-dimensional and infinite-dimensional dissipative systems.

In the second chapter, the main provisions of the theory of global attractors of nonlinear evolutionary equations in the case of non-uniqueness of the solution of the Cauchy problem are outlined. Both the autonomous case (theory of m-semiflows) and the non-autonomous case, where families of m-semiprocesses are the main object of research, are analyzed in detail. The concept of local input to the state stability and properties of asymptotic gain with respect to the global

attractor for an infinite-dimensional evolutionary system are introduced. The property of asymptotic stability of the global attractors of m-semiflows is proved in the form of a robust estimate. Based on this result, sufficient conditions of local input to the state stability for an abstract non-autonomous perturbed system with respect to the attractor of the unperturbed system are obtained. For uniform attractors of m-semiprocesses, a result is obtained about the upper-semicontinuous dependence on the parameter. On the basis of this result, the property of asymptotic gain is established for non-autonomous evolutionary systems without uniqueness with respect to the attractors of autonomous undisturbed systems.

In the third chapter, the asymptotic behavior of the solutions of nonlinear parabolic systems with perturbations in the right-hand side and the stability of global attractors with respect to these perturbations are investigated. Results on global resolvability, regularity and derived a priori estimates of solutions for general nonlinear non-autonomous parabolic equations are proved. For a parabolic system of the reaction-diffusion type with a smooth nonlinearity and a disturbance containing a phase variable and not guaranteeing the uniqueness of the solution of the Cauchy problem, a result on the local stability of the global attractor of the undisturbed system with respect to disturbances is proved. For a general system of the reaction-diffusion type with non-smooth nonlinearity and non-autonomous disturbances, the property of asymptotic gain for the global attractor of the undisturbed system with respect to disturbances is proved. The dissipative evolutionary system consisting of of a parabolic nonlinear system and a system of ordinary differential equations perturbed by input bounded signals is considered. It is proved that the global attractor of the unperturbed system is stable in the sense of ISS regarding the magnitude of disturbances.

The fourth chapter investigates the qualitative behavior of the solutions of the nonlinear hyperbolic equation with perturbations in the right-hand side and the stability of the global attractor with respect to these perturbations. The results on global resolvability, regularity and derived a priori estimates of solutions for a general nonlinear non-autonomous hyperbolic equation are proved. For the general wave equation with non-smooth nonlinearity and non-autonomous perturbations, the asymptotic gain property for the global attractor of the unperturbed equation with respect to perturbations is proved. For a hyperbolic equation with a smooth nonlinearity and a perturbation, which contains a phase variable and does not guarantee the uniqueness of the solution of the Cauchy problem, a result on the local stability and asymptotic gain of the global attractor of the unperturbed equation with respect to perturbations is proved.

The following new scientific results were obtained in the dissertation:

– sufficient conditions of local stability with respect to non-autonomous perturbations are obtained for the global attractor of an abstract infinite-dimensional evolutionary system without uniqueness;

– a robust estimate of the type of asymptotic gain is established for non-autonomous evolutionary systems without uniqueness with respect to the attractors of autonomous undisturbed systems;

– for a parabolic system of the reaction-diffusion type with a smooth nonlinearity and a disturbance that contains a phase variable and does not guarantee the uniqueness of the solution of the Cauchy problem, a result on the local stability of the global attractor of the undisturbed system with respect to disturbances is proved;

– for a general system of the reaction-diffusion type with non-smooth nonlinearity and non-autonomous perturbations, the asymptotic gain property for the global attractor of the undisturbed system with respect to perturbations is proved;

– the robust stability of the attractor of the dissipative evolutionary system consisting of parabolic nonlinear system and system of ordinary differential equations perturbed by input bounded signals is obtained;

– for a general nonlinear hyperbolic equation with a non-smooth interaction function and non-autonomous perturbations, the asymptotic gain property for the global attractor of the undisturbed system with respect to perturbations is proved.

– for a hyperbolic equation with a smooth nonlinearity and a disturbance, which contains a phase variable and does not guarantee the uniqueness of the solution of the Cauchy problem, a result on the local stability and asymptotic gain of the global attractor of an undisturbed system with respect to disturbances is proved.

The results of the work supplement the abstract stability theory of evolutionary infinite-dimensional systems without uniqueness of the solution and can be used in the future to study the qualitative behavior of solutions of dissipative partial differential equations. The results obtained in the work can also be of applied value, in particular, when studying the stability of limit regimes in systems with external signals.

Keywords: differential equation, asymptotic behavior, stability, nonlinear evolution equation, perturbation, dynamical system, semiflow, omega-limit set, attractor, parabolic equation, hyperbolic equation, reaction-diffusion system.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Kapustyan O.V., Kurylko O.B., Yusypiv T.V., *Robust stability of the global attractor of the reaction-diffusion system,* Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics, No. 3, (2021), P. 46–50, DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.6

2. Капустян О.В., Юсипів Т.В., *Стійкість граничних режимів для загального випадку систем типу реакція-дифузія,* Науковий вісник Ужгородського університету, Т. 41, №2, (2022), С. 48–60, DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).48-60

3. Kapustyan O.V., Sobchuk V.V., Yusypiv T.V., Pankov A.V., *Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniqueness,* Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA), Vol.30., No. 3, (2022), P. 49–61, DOI: http://dx.doi.org/10.15421/142208

4. Капустян О.В., Юсипів Т.В., *Стійкість до збурень для атрактора дисипативної системи типу PDE–ODE,* Нелінійні коливання, Т. 24, № 3, (2021), С. 336–341; translation in Journal of Mathematical Sciences, Vol. 272, No. 2, (2023), P. 236–243, DOI: http://doi.org/10.1007/s10958-023-06413-1

5. Kapustyan O.V., Kurylko O.B., Yusypiv T.V., Pankov A.V., *Stability w.r.t. disturbances for the global attractor of multi-valued semiflow generated by nonlinear wave equation,* Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA), Vol. 31, No. 1, (2023), P. 111–124, DOI: http://dx.doi.org/10.15421/142306

6. Капустян О.В., Юсипів Т.В., *Робастна стійкість атрактора нелінійного хвильового рівняння без единості розв'язку,* Нелінійні коливання, Т. 25, № 2-3, (2022), С. 198–206; translation in Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274, No. 6, (2023), P. 850–860, DOI: http://doi.org/http://doi.org/10.1007/s10958-023-06648-y.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Kapustyan O., Perestyuk M., Yusypiv T., Dashkovskiy S. Robust Stability of Global Attractors for Reaction-Diffusion System w.r.t. Disturbances // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2021". Tbilisi, Georgia, 2021. P. 159–162.

2. Kapustyan O.V., Yusypiv T.V. Robust stability of attractor for RD-system without uniqueness // The nonlinear analysis and applications 2022: Materials of 5th International conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine VALERY SERGEEVICH MELNIK, Part 1. Kyiv, NTUU "Igor Sikorsky KPI", 2022. P. 26.

3. Капустян О.В., Юсипів Т.В. Робастна стійкість атрактора системи типу реакція-дифузія без єдиності // Матеріали XI Міжнародної науково-практичної конференції "Математика. Інформаційні технології. Освіта". Луцьк, Україна, 2022. С. 15–16.

4. Капустян О., Юсипів Т. Стійкість щодо збурень атрактора хвильового рівняння // Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації: матеріали III Міжнародної наук.-практ. інтернет-конф. Запоріжжя: ТДАТУ, 2022. С. 46–48.

5. Kapustyan O., Sobchuk V., Yusypiv T., Laptiev O., Shestak I., Zinchenko K. Robust stability of limit regimes in distributed signal transmission RD systems // 2022 IEEE 4th Internetional Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT). USA, 2022. P. 168–172.

6. Kapustyan O., Perestyuk M., Yusypiv T., Dashkovskiy S. Robust stability for the attractors of a nonlinear wave equations // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2022". Tbilisi, Georgia, 2022. P. 102 – 107.

7. Нікіфоров І., Юсипів Т. Робастна стійкість глобальних атракторів еволюційних систем без єдиності // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції "Шевченківська весна 2023". К.: Київський університет, 2023. С. 40–41.

8. Юсипів Т.В. Стійкість від входу до стану для еволюційних систем без єдиності // Матеріали Міжнародної конференції юних математиків. К.: Інститут математики національної академії наук України, 2023.

9. Капустян О.В., Глок С.І., Юсипів Т.В. Стійкість щодо збурень для атрактора системи типу PDE-ODE // Матеріали XII Міжнародної науково-практичної конференції "Математика. Інформаційні технології. Освіта". Луцьк, Україна, 2023. С. 23–25.

10. Капустян О.В., Юсипів Т.В. Стійкість від входу до стану для атракторів еволюційних систем без єдиності // Матеріали Міжнародної наукової конференції "МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ"присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Чернівці, Україна, 2023. С. 215–216.

11. Капустян О.В., Юсипів Т.В. Дослідження стійкості від входу до стану для атракторів еволюційних систем без єдиності // Матеріали XIX Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, присвяченої 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ, Україна, 2023. С. 37–38.

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$L(X,Y)$ – простір обжених лінійних операторів, що діють з банахового простору X в банахів простір Y з нормою $\|\cdot\|$

$L(X) := L(X,X)$

$\mathbb{C}(X,Y)$ – простір неперервних функцій з X в Y зі стандартною sup-нормою

$\mathbb{C}(X) := \mathbb{C}(X,X)$

2^X – сукупність всіх підмножин множини X

$P(X)$ – сукупність всіх непорожніх підмножин X

$\beta(X)$ – сукупність всіх непорожніх та обмежених підмножин X

$C(X)$ – сукупність всіх непорожніх замкнених підмножин X

$K(X)$ – сукупність всіх непорожніх компактних підмножин X

$\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$

$\mathbb{R}_d = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 | t \geq \tau\}$

$\mathbb{R}_{+d} = \{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2_+ | t \geq \tau\}$, де $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$

$\mathbb{C}_0^k(\Omega)$ – простір k разів неперервно-диференційовних функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$ з компактним в Ω носієм

$L_p(\Omega)$ – простір інтегровних функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$ степеня p з нормою $\|f\|_{L_p(\Omega)} = (\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$

$W_0^{p,k}(\Omega)$ – замикання простору $\mathbb{C}_0^k(\Omega)$ по нормі простору $W^{p,k}(\Omega)$

$H^k(\Omega) = W^{2,k}(\Omega)$, $H_0^k(\Omega) = W_0^{2,k}(\Omega)$

Нехай (X,ρ) – повний метричний простір. Надалі для будь-яких $A, B \in X$ будемо використовувати наступні позначення:

$\mathrm{dist}(A,B) = \sup\limits_{x\in A} \inf\limits_{y \in B} \rho(x,y)$ – напівметрика Хаусдорфа;

$\mathrm{dist}_H(A,B) = \max\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(B,A)\}$ – метрика Хаусдорфа;

$O_\varepsilon(A) = \{x \in X | \inf\limits_{y\in A} \rho(x,y) < \varepsilon\}$;

для довільного $x_0 \in X$ $B_r(x_0) = \{x \in X | \rho(x,x_0) \leq r\}$; $B_r = B_r(0)$;

$cl_X A = \bar{A}$ – замикання в X множини A;

якщо X - нормований простір, то для $A \subset X$, $\Theta \subset X$ будемо використовувати позначення

$\|A\|_\Theta = \mathrm{dist}(A, \Theta)$.

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена дослідженню питання стійкості глобального атрактора, породженого незбуреною дисипативною динамічною системою при наявності обмежених зовнішніх збурень.

Обґрунтування вибору теми дослідження. В останні 20-30 років можна відмітити суттєвий прогрес у розробці та застосуванні різноманітних методів теорії нелінійного керування, зокрема задачі аналізу та синтезу нелінійних систем управління. Значною мірою на це вплинув науково-технічний прогрес, але ключовим фактором була розробка адекватного теоретичного апарату аналізу та синтезу нелінійних систем.

Опис процесів керування в нелінійних системах є важливою задачею, а поведінка таких систем не може бути описана лінійними функціями стану або лінійними диференціальними рівняннями. Аналізу та синтезу нелінійних систем присвячено багато наукових досліджень. Особливе місце в них займає завдання формалізації умов стійкості нелінійної системи за наявності вхідних сигналів, тобто, визначення робасності системи відносно зовнішніх збурень.

Ще в 90-х роках XX ст. була розвинена ціла серія методів нелінійного керування, що отримали назву «конструктивних» [18]. До них можна віднести також розглянуту в даній роботі концепцію стійкості динамічних систем від входу до стану (input-to-state stability) [19]-[30]. Вона відноситься до методів нелінійного керування та включає як базову властивість робастну стійкість. Це фундаментальна властивість еволюційних процесів, яка відіграє важливу роль для багатьох застосувань. Загальновідомо, що глобальна асимптотично стійка рівновага лінійної та скінченновимірної системи є робастною, тобто для будь-якого істотно обмеженого зовнішнього збурення, що подається на вхід системи, відповідний розв'язок залишається обмеженим протягом всього часу та прямує до певного околу точки рівноваги, коли час прямує до нескінченності. Розмір цього околу залежить лише від норми збурення. Для нелінійних систем це в загальному випадку не вірно [19]. Тому виникла потреба в створенні відповідної теорії робастної стійкості для нелінійних систем, яка спирається на поняття «стійкості від входу до стану» [19, 23] для випадку скінченновимірних систем. Як пізніше виявилося, це поняття можна застосувати до вивчення стійкості положення рівноваги у випадку нескінченновимірних систем [31–34]. Протягом останнього десятиліття багато авторів працювали над поширенням теорії ISS на цей клас систем. Значна кількість з цих поширень були розроблені для систем, що задаються диференціальними рівняннями в частинних похідних [35–39].

Важливо зазначити, що майже всі результати, що стосуються стійкості в сенсі ISS для вказаних систем, були розроблені для випадку єдиного асимптотично стійкого положення рівноваги системи без збурень. Проте відомо, що при вивченні дисипативних нескінченновимірних систем ключовим об'єктом вивчення якісної теорії є глобальний атрактор – максимальна компактна інваріантна підмножина фазового простору, що притягує всі траєкторії рівномірно по обмежених початкових даних [40–43]. Відомо, що багато нелінійних нескінченновимірних дисипативних еволюційних систем мають нетривіальний глобальний атрактор, що містить в собі як асимптотично стійкі положення рівноваги, так і інші граничні режими системи. У даній роботі вивчається питання робастності саме такої множини щодо зовнішніх збурень еволюційної системи. Питанням існування та властивостей глобальних атракторів було присвячено багато монографій [42–44] та статей [45–57]. Робастність такого об'єкту по відношенню до зовнішніх збурень в термінах теорії ISS вперше було встановлено в [35, 58] для випадку параболічного рівняння. В даній роботі теорія стійкості від входу до стану вперше застосована до еволюційних нелінійних рівнянь без єдиності розв'язку задачі Коші, тобто в ситуації, коли умови на нелінійні доданки гарантують глобальну розв'язність і дисипативність, проте не гарантують єдиності відповідного розв'язку. В роботі встановлюється локальна властивість стійкості від входу до стану (local ISS) для глобальних атракторів систем типу реакції-дифузії і хвильового рівняння, що зазнають збурень, величина яких залежить від стану системи. Також, використовуючи загальну схему, запропоновану в [35], в роботі доводиться властивість асимптотичного підсилення (Asymptotic Gain) відносно глобальних атракторів для нелінійних параболічних та гіперболічних рівнянь з негладкими функціями взаємодії з адитивними неавтономними збуреннями.

Мета і завдання дослідження відповідно до предмета та об'єкта дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження стійкості глобального атрактора, породженого незбуреною дисипативною нескінченновимірною еволюційною системою без єдиності при наявовності зовнішніх збурень, та застосування до вивчення асимптотичної поведінки розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного та гіперболічного типу з зовнішніми збуреннями.

Об'єктом дослідження є нескінченновимірні дисипативні еволюційні системи без єдиності розв'язку.

Предметом дослідження є стійкість атракторів нелінійних еволюційних систем без єдиності по відношенню до зовнішніх збурень.

Методи дослідження. У процесі дослідження, проведеного у дисертаційній роботі, застосовуються методи теорії стійкості від входу до стану нелінійних диференціальних рівнянь [27, 59, 60], методи теорії глобальних атрактрів нескінченновимірних еволюційних систем без єдиності [40, 41], методи якісної теорії нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного та гіперболічного типу [42, 43], методи робастної стійкості положень рівноваги нескінченновимірних систем [33, 61].

Наукова новизна отриманих результатів. Всі результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими та математично обґрунтованими. Основні з них такі:

– одержано достатні умови локальної стійкості щодо неавтономних збурень для глобального атрактору абстрактної нескінченновимірної еволюційної системи без єдиності;

– встановлено робастну оцінку типу асимптотичного підсилення для неавтономних еволюційних систем без єдиності відносно атракторів автономних незбурених систем;

– для параболічної системи типу реакція-дифузія з гладкою нелінійністю та збуренням, що містить фазову змінну та не гарантує єдиність розв'язку задачі Коші, доведено результат про локальну стійкість глобального атрактору незбуреної системи по відношенню до збурень;

– для загальної системи типу реакція-дифузія з негладкою нелінійністю та неавтономних збуренням доведено властивість асимптотичного підсилення для глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень;

– доведено робастну стійкість атрактору дисипативної еволюційної системи, що складається з параболічної нелінійної системи та системи звичайних диференціальних рівнянь, що збурюються вхідними обмеженими сигналами;

– для гіперболічного рівняння з гладкою нелінійністю та збуренням, що містить фазову змінну та не гарантує єдиність розв'язку задачі Коші, доведено результат про локальну стійкість глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень;

– для загального нелінійного гіперболічного рівняння з негладкою функцією взаємодії та неавтономних збуренням доведено властивість асимптотичного підсилення для глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень.

Особистий внесок здобувача. Основні результати роботи, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Визначення основного плану дослідження, постановка задач та загальне керівництво роботою належить науковому керівнику О. В. Капустяну. Результати дисертації здобувачем було опубліковано в 17 наукових працях, з яких 6 статей [1]–[6] та 11 тез у матеріалах наукових конференцій [7]–[17]. У статтях [1],[2],[3], написаних у співавторстві з О.В. Капустяном, науковому керівнику належить постановка задачі та обговорення методів доведення основних результатів;

у статтях [4], [5], [6] Капустяну О.В. належить постановка задач та обговорення методів доведення основних результатів, Панькову А.В. належить ознайомлення автора з деякими допоміжними результатами теорії атракторів м-напівпотоків, Собчуку В.В. та Курилку О.Б. належить обговорення шляхів можливого застосування одержаних результатів при моделюванні складних процесів.

Статті [1, 2] надруковано у науковому фаховому виданні України категорії "А", що індексується у наукометричній базі MathSciNet, повна англомовна версія видання індексовна в наукометричній базі Scopus та входить до квартиля Q3. Стаття [3] опублікована у виданні, що внесено до переліку наукових фахових видань України категорії "Б". Стаття [4] опублікована у виданні, що внесено до переліку наукових фахових видань України категорії "Б" та індексується в наукометричних базах Scopus. Статті [5, 6] надруковано у науковому фаховому виданні України категорії "А", що індексується у наукометричній базі Scopus та в 2023 році увійшло до квартиля Q3 (стаття [6]).

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідалися та обговорювалися на таких наукових конференціях та наукових семінарах різного рівня:

1. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2021"(Тбілісі, Грузія, 18-20 грудня 2021 р.)

2. The nonlinear analysis and applications 2022: Materials of 5th International conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine VALERY SERGEEVICH MELNIK (Київ, Україна, 4-6 квітня 2022 р.)

3. XI Міжнародна науково-практична конференція "Математика. Інформаційні технології. Освіта"(Луцьк, Україна, 3-5 червня 2022 р.)

4. III Міжнародна науково-практична конференція "Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації"(Запоріжжя, Україна, 30 вересня 2022 р.)

5. IEEE 4th Internetional Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT) (США, 15-17 грудня 2022 р.)

6. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2022"(Тбілісі, Грузія, 17-19 грудня 2022 р.)

7. XXI Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна – 2023» (Київ, Україна, 14 квітня 2023 р.)

8. Міжнародна конференція юних математиків (Київ, Україна, 1-3 червня 2023 р.)

9. XII Міжнародна науково-практична конференція "Математика. Інформаційні технології. Освіта"(Луцьк, Україна, 2-4 червня 2023 р.)

10. Міжнародна наукова конференція "МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ"присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, Україна, 28-30 вересня 2023 р.)

11. XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського (Київ, Україна, 11-12 жовтня 2023 р.)

12. Науковий семінар з диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Керівники семінару – професор, доктор фізико-математичних наук О. М. Станжицький та професор, доктор фізико-математичних наук О. В. Капустян. За участі професорів, докторів фізико-математичних наук – М. Ф. Городнього., І. О. Парасюка та В. В. Собчука. (Київ, Україна, 21 березня 2024 р.)

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновку, списку використаних джерел та додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Загальний обсяг роботи становить 128 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації — 96 сторінок. Список використаних джерел займає 11 сторінок і налічує 103 найменування. Додаток займає 5 сторінок і містить список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дисертаційне дослідження виконане відповідно до індивідуального плану аспіранта кафедри диференціальних та інтегральних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, затвердженого вченою радою механіко-математичного факультету, і в рамках державної бюджетної дослідницької наукової теми 21БНН-06 « Виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напряму "Математичні науки і природничі науки" » Київського національного університету імені Тараса Шевченка (номер державної реєстрації 0121U112941).

Практичне значення отриманих результатів. Результати роботи доповнюють абстрактну теорію стійкості еволюційних нескінченновимірних систем без єдиності розв'язку та можуть бути використані в подальшому для дослідження якісної поведінки розв'язків дисипативних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Одержані в роботі результати також можуть мати прикладне значення, зокрема, при дослідженні стійкості граничних режимів в системах з зовнішніми сигналами.

Подяка. *Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику — доктору фізико-математичних наук, професору Капустяну Олексію Володимировичу — за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну підтримку, увагу та допомогу в роботі.*

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Цей розділ присвячений огляду відомих результатів, що стосуються тематики дисертації.

Як вже було відзначено, 90-ті роки ознаменувалися появою цілої серії методів дослідження нелінійних систем, які отримали назву «конструктивних» [18]. Зокрема, концепція стійкості від входу до стану (input-to-state stability, ISS), що була введена Зонтагом в [19] наразі широко використовується для дослідження властивостей стійкості систем керування відносно зовнішніх входів. В зв'язку з цим, важливими є роботи [26, 27], які дозволяють формалізувати умови стійкості нелінійної системи до вхідних збурень або, іншими словами, формалізувати поняття «робастної стійкості».

Загальновідомо, що для лінійної стаціонарної системи

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ – вектори стану та входу відповідно, гурвіцевська стійкість матриці A (всі власні вектори матриці мають від'ємні дійсні частини) означає глобальну асимптотичну стійкість при $u = 0$. Для довільного (вимірного) входу u та початкових умов $x_0 \in \mathbb{R}^n$ розв'язок системи можна зобразити у вигляді

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \tau \geq 0.$$

В цьому разі, існують додатні константи a та b такі, що $|e^{At}| \leq ae^{-bt}, t \geq 0$

і для розв'язків системи існує верхня оцінка

$$|x(t)| \le ae^{-bt}|x_0| + a\int\limits_0^t e^{-b(t-\tau)}|B||u(\tau)|d\tau \le ae^{-bt}|x_0| + c\sup_{t\ge 0}|u(t)|, \quad (1.2)$$

де $c = a|B|/b$. Як обов'язково випливає з останньої оцінки, для кожного $|u(t)| \to 0$ при $t \to \infty$ виконується, що $|x(t)| \to 0$ при $t \to \infty$, а також обмеженість входу u означає обмеженість вектора стану $x(t)$. Отримана оцінка збігається з формулюванням стійкості оператора входу-виходу лінійної системи з простору L_∞ в простір L_∞ [62]. Інші критерії стійкості, подібні до «з L_∞ в L_∞» формулюються в термінах оператора входу-виходу наступним чином:

$$\text{«з } L_2 \text{ в } L_\infty\text{»: } |x(t)| \le ae^{-bt}|x_0| + c\int\limits_0^t |u(\tau)|d\tau,$$

$$\text{«з } L_2 \text{ в } L_2\text{»: } \int\limits_0^t |x(\tau)|d\tau \le a|x_0| + c\int\limits_0^t |u(\tau)|d\tau.$$

Для лінійної системи існування будь-якої з цих оцінок означає виконання решти з них, тобто якщо лінійна система є асимптотично стійкою при нульовому вході, то вона має обмежені розв'язки для будь-якого обмеженого входу. Інтуїтивне поширення цієї властивості на клас нелінійних стаціонарних систем виявляється некоректним, як видно з такого прикладу [63]:

$$\dot{x} = -3x + (1 + 2x^2)u.$$

Дана система є глобально асимптотично стійкою для нульового входу, але для початкових умов $x_0 = 2, u(t) = 1$ відповідний розв'язок

$$x(t) = (3 - e^t)/(3 - 2e^t)$$

прямує до нескінченності за скінченний час. Більш того, як видно з наступного прикладу, для будь-якого сталого входу $u(t) \geq 2$ система

$$\dot{x} = -x + xu$$

є нестійкою, але як показано в [25] для асимптотично спадного входу, його розв'язки визначені для всіх $t \geq 0$ і асимптотично прямують до 0 (для цього достатньо розглянути функцію Ляпунова $V(x) = \frac{1}{2}x^2$), тобто система стійка в сенсі «з L_2 в L_∞» проте нестійка в сенсі «з L_∞ в L_∞». Отже, виявляється, що для нелінійних систем властивість глобальної стійкості до зовнішніх обмежених і/або затухаючих збурень не випливає з глобальної (експоненціальної) стійкості за відсутності входів. Відповідь на питання, коли нелінійна система має стійкість до зовнішніх збурень, дає теорія стійкості систем від входу до стану, основні передумови якої викладені нижче.

Розглядається нелінійна динамічна система, задана наступним чином

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1.3}$$

або

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \tag{1.4}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор стану, а $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор входу для систем (1.3) та (1.4). В деяких випадках можна розглядати такі системи з виходом $y = h(x)$, де $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Нехай функція $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ з (1.3) та, відповідно, функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ та $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ з (1.4) є неперервними та локально ліпшицевими (неперервно диференційовними), $f(0, 0) = 0$ та, відповідно, $f(0) = 0$. Вважається, що керування чи вхід систем (1.3) та (1.4) є вимірною та локально обмеженою функцією $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$. Множина всіх функцій, що задовольняють умову

$$\|u\| = \operatorname*{ess\,sup}_{t \geq 0} |u(t)| < +\infty$$

позначається як $M_{\mathbb{R}^m}$. Символом $x(t, x_0, u)$ позначається траєкторія системи (1.3) при $t \geq 0$ та початковій умові $x_0 \in \mathbb{R}^n$ та $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ (іноді, якщо зрозуміло з контексту, можна використовувати $x(t)$ замість $x(t, x_0, u)$). Важливо визначити робастну стійкість цих систем до входів, вказати необхідні та достатні умови стійкості, охарактеризувати цю властивість у термінах функцій Ляпунова та показати зв'язок між властивостями глобально асимптотичної та робастної стійкості. Оскільки система (1.3) є узагальненням системи (1.4), то всі визначення нижче розглядаються для першої системи, а там, де необхідно, зроблені спеціальні посилання на другу.

Понад три десятиліття тому було запропоноване визначення робастної стійкості системи (1.3), сформульоване шляхом узагальнення оцінки, встановленої для стійких лінійних систем [19]. Для її формулювання необхідно спочатку ввести такі класи функцій порівняння [63]:

Означення 1.0.1. $\mathcal{K} := \{\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ |\ \gamma$ *є строго зростаючою,* $\gamma(0) = 0\}$,
$\mathcal{K}_\infty := \{\gamma \in \mathcal{K} |\ \gamma$ *є необмеженою*$\}$,
$\mathcal{L} := \{\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ |\ \gamma$ *є неперервною і спадаючою,* $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0\}$,
$\mathcal{KL} := \{\beta : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+ |\ \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}, \forall t \geq 0, \beta(r, \cdot) \in \mathcal{L}, \forall r > 0\}$.

Означення 1.0.2. *Система* (1.3) *називаєтся стійкою в сенсі ISS, якщо для будь-якого входу* $u \in M_{\mathbb{R}^m}$ *та* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *існують функції* $\beta \in \mathcal{KL}$ *та* $\gamma \in \mathcal{K}$ *такі, що*

$$|x(t, x_0, u)| \leq \beta(|x_0|, t) + \gamma(\|u\|), \forall t \geq 0. \tag{1.5}$$

Функція γ при цьому називається *нелінійним підсиленням.* В силу того, що для довільних $a, b \in \mathbb{R}_+$ має місце співвідношення $\max\{a, b\} \leq a + b \leq 2\max\{a, b\}$, можна дати еквівалентне формулювання властивості стійкості в сенсі ISS:

$$|x(t, x_0, u)| \leq \max\{\beta(|x_0|, t), \gamma(\|u\|)\} \tag{1.6}$$

для будь-яких $x_0 \in \mathbb{R}^n, u \in M_{\mathbb{R}^m}$ та деяких $\beta \in \mathcal{KL}, \gamma \in \mathcal{K}$. Для розв'язків лінійної системи (1.1) згадана оцінка (1.2), очевидно, задовольняє означення стійкості в сенсі ISS при $\beta(s, t) = ase^{-bt}$ та $\gamma(s) = cs$. Функції класів $\mathcal{KL}$ і $\mathcal{K}$ дозволяють коротко в загальному вигляді позначити оцінки розв'язків нелінійних систем, як це робиться з використанням лінійних підсилень і експоненціальних оцінок в лінійних системах. Зауважимо, що для можливих застосувань доцільно визначати більш точні оцінки стійкості в сенсі ISS для розв'язків системи. Залежно від системи, для цього може бути зручніше використовувати (1.6) замість (1.5). Існує більш загальна форма цієї визначальної нерівності [64], яка особливо корисна при розгляді з'єднань систем від входу до стану, де сигнали більш ніж однієї системи вводяться в одну систему. Розглянемо розширений опис властивості ISS та еквівалентні засоби для його визначення, для чого введемо деякі супутні властивості динамічних систем.

Означення 1.0.3. [23] *Система* (1.3)

(a) називається 0-локально стійкою (0-LS), якщо в точці $x_0 = 0$ *для* $u = 0$ *відображення* $x_0 \to x$ *є неперервним (локально стійким в сенсі Ляпунова у початку координат);*

(b) має асимптотичне підсилення, якщо для будь-яких $u \in M_{\mathbb{R}^m}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ *існує функція* $\gamma \in \mathcal{K}$*, нелінійний асимптотичний коефіцієнт системи, такий що*

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |x(t, x_0, u)| \leq \gamma(\|u\|);$$

(c) має рівномірне асимптотичне підсилення, якщо верхня границя з останньої нерівності існує рівномірно по x_0 *та* u*, тобто існує функція* $\gamma \in \mathcal{K}$ *така, що* $\forall \varepsilon > 0, \forall \kappa > 0\ \exists T(\varepsilon, \kappa) > 0$*:*

$$|x_0| \leq \kappa \implies \sup_{t \geq T(\varepsilon, \kappa)} |x(t, x_0, u)| \leq \gamma(\|u\|) + \varepsilon;$$

(d) має граничну властивість, якщо для будь-яких $u \in M_{\mathbb{R}^m}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ *існує функція* $\rho \in \mathcal{K}$ *така, що*

$$\inf_{t \geq 0} |x(t, x_0, u)| \leq \rho(\|u\|).$$

Умова (b) останнього означення може бути інтерпретована як «гранична обмеженість» для всіх розв'язків системи рівномірно за початковими умовами. Також на цю умову можна дивитися як на розширення умови притягнення на випадок $u \neq 0$. Умова (d) передбачає, що для будь-яких початкових умов $u \in M_{\mathbb{R}^m}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ їх відповідна траєкторія системи $x(t, x_0, u)$ належить $\rho(\|u\|)$-околові початку координат але не обов'язково залишається там (за властивістю граничності ця траєкторія може бути необмеженою).

Означення 1.0.4. [20] *Система* (1.3) *називається робастно стійкою,* *якщо існує функція $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ така, що з будь-якого допустимого, можливо нестаціонарного, закону керування зворотнім зв'язком*

$$u = k(t, x),$$

який рівномірно (по k), глобально, асимптотично стабілізує систему (1.3) *випливає, що виконується умова*

$$|k(t, x)| \leq \rho(|x|) \ \forall x \in \mathbb{R}^n \textit{ та майже всіх } t \geq 0.$$

Під допустимим законом керування зворотним зв'язком розуміємо такий закон $k(t, x)$, що для $x(0) \in \mathbb{R}^n$ розв'язок системи

$$\dot{x} = f(x, k(t, x))$$

існує і визначений, принаймні для малих t і два такі розв'язки збігаються на інтервалі свого існування. Функція $k(t, x)$ також може представляти як невраховану динаміку, так і зовнішнє збурення $k(t)$. У цьому випадку ρ називається запасом стійкості, і, згідно з визначенням, якщо зовнішнє збурення k обмежене по амплітуді запасом стійкості ρ, то система зберігає стійкість (є асимптотично стійкою, робастно стійкою до збурень, обмежених ρ) . Важливість і зв'язок зі стійкістю в сенсі ISS властивостей, введених у визначеннях (1.2) і (1.3), пояснюється наступною теоремою.

Теорема 1.0.1. [21, 23] *Для системи* (1.3) *наступні властивості еквівалентні:*

– *стійкість в сенсі ISS;*
– *наявність рівномірного асимптотичного підсилення;*
– *0-локальна стійкість та наявність асимптотичного підсилення;*
– *0-локальна стійкість та наявність граничної властивості;*
– *робастна стійкість.*

Таким чином, властивість стійкості в сенсі ISS може бути введена безпосередньо через поняття робастної стійкості або асимптотичного підсилення за входом. Ці еквівалентні визначення дають краще розуміння особливостей стійкості в сенсі ISS, які приховані в оцінці (1.5) для (1.1). Відзначимо ще одну відмінність стійкості в сенсі ISS – її інваріантність до перетворення координат. Якщо x — вектор стану системи, то, вводячи гомеоморфне перетворення до нових координат $\hat{x} = S(x)$, де S – неперервна та існує неперервна функція S^{-1}, $S(0) = 0$, отримуємо, що в нова система координат $\hat{x}$ – також стійка в сенсі ISS із зміненими функціями β і γ. Підкреслимо, що загалом будь-яка властивість стійкості не є незалежною від нелінійного перетворення координат. Наприклад, властивість експоненціальної стійкості не є такою [27]. Властивість стійкості в сенсі ISS та інші поняття можуть бути легко узагальнені на інші типи систем, такі як дискретні, гібридні або системи із затримкою, а також на більш загальні класи систем, як показано в [65–67].

Для аналізу на стійкість автономних систем (при $u = 0$) традиційно використовується апарат функцій Ляпунова [68]. Ця властивість стійкості передбачає наявність у системи входу. Фундаментальним досягненням прямого методу Ляпунова є можливість аналізувати (асимптотичну) поведінку розв'язків системи без обчислення власне розв'язків як функції часу та початкових умов, що є складно розв'язною проблемою для нелінійних систем. При цьому перевіряються нерівності для деяких функцій вектора стану та їх похідних з підстановкою функцій правої частини системи. Даний підхід, в рамках теорії дисипативних систем, спочатку було поширено на системи з входом [69, 70], де для оцінки розв'язків системи використовувалися нерівності, що залежать від входу, виходу і стану системи, для похідних відповідних додатно визначених функцій (що мали назву «норми постачання»). Виявляється, що такі й подібні до них нерівності також дозволяють визначити якісні та кількісні характеристики поведінки розв'язків збурених систем без розрахунку власне розв'язків у часовій області.

Означення 1.0.5. [19] *Гладка функція $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ називається ISS стійкою функцією Ляпунова, якщо для неї існують функції $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha_3, \chi \in \mathcal{K}$ такі, що мають місце співвідношення*

$$\begin{gathered} \alpha_1(|x|) \le V(x) \le \alpha_2(|x|) \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ |x| \ge \chi(|u|) \implies L_{f(x,u)}V(x) \le -\alpha_3(|x|) \ \forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Варто зауважити, що загалом коефіцієнт підсилення χ відрізняється від коефіцієнта підсилення γ, введеного у визначенні стійкості в сенсі ISS. Поняття динамічної стійкості від входу до стану (ISDS), що було введене в [71], є еквівалентним поняттю стійкості в сенсі ISS та додатково враховує ефект послаблення впливу попередніх значень вхідних даних на поточні значення вектора стану. Більш того, визначення ISDS та відповідна функція ISDS Ляпунова вводяться таким чином, щоб відповідні коефіцієнти підсилення співпадали. Еквівалентне визначення ISS-функції Ляпунова одержимо, якщо умову (1.0.5) замінити на наступну:

$$DV(x)f(x,u) \leq \theta(|u|) - \alpha(|x|) \ \forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \tag{1.8}$$

де функції $\alpha, \theta \in \mathcal{K}_\infty$.

Теорема 1.0.2. [19, 21] *Система* (1.3) *є стійкою в сенсі ISS тоді й тільки тоді, якщо для неї існує ISS-функція Ляпунова.*

Слід зауважити, що при $u = 0$ ISS-функція Ляпунова звужується до стандартної функції Ляпунова для асимптотично стійкої системи. Як показано у [72] якщо система має функцію Ляпунова, то вона також має гладку «експоненційну» функцію Ляпунова $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ таку, що

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|),\ DV(x)f(x,u) \leq \theta(u) - V(x)$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ та деяких $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty, \theta \in \mathcal{K}$.

З того часу були розроблені різні методи перевірки стійкості в сенсі ISS на випадок скінченновимірних систем [27, 59, 60]. Також було встановлено, що метод Ляпунова разом з теоремами слабкого підсилення може бути застосований до дослідження стійкого керування системою [64, 73–75]. Крім систем, визначених звичайними диференціальними рівняннями, концепція ISS застосовувалася до гібридних, комутуючих та імпульсних систем [76–78].

Стійкість в сенсі ISS на випадок нескінченновимірних систем досліджувалася для випадку систем типу реакція-дифузія (reaction-diffusion system, RDS) [61], а також для систем із запізненням [75, 79]. В [33] досліджувалися як локальні так і глобальні властивості стійкості в сенсі ISS для нескінченновимірних систем. Перший основний результат вказаного дослідження полягає в тому, що для абстрактних систем керування за певних припущень про клас вхідних функцій з існування (локальної чи глобальної) функції ISS-Ляпунова випливає (локальна чи глобальна) стійкість системи в сенсі ISS. Також введено визначення локальної функції ISS-Ляпунова для випадку нескінченновимірних систем та показано, що воно узгоджується зі стандартним визначенням локальної функції ISS-Ляпунова для скінченновимірних систем. В згаданому дослідженні використовуються методи теорії напівгруп та розглядаються нескінченновимірні системи, породжені диференціальними рівняннями в абстрактних просторах, а для дослідження взаємозв'язків в сенсі ISS між n підсистемами узагальнюється теорема слабкого підсилення для скінченновимірних систем [64, 80] на випадок нескінченновимірних. Ця теорема дозволяє побудувати функцію Ляпунова для всього взаємозв'язку, якщо відомі функції Ляпунова для підсистем і виконується умова слабкого підсилення. Наявність зв'язку в сенсі ISS випливає з існування для нього функції Ляпунова.

Аналогічним чином можна досліджувати локальні властивості стійкості в сенсі ISS нелінійних систем керування [81], але можливий і інший тип результатів, а саме – техніка лінеаризації для нескінченновимірних динамічних систем (без входів) [82]. В роботі [33] також доведено теорему лінеаризації для нелінійних систем керування над гільбертовими просторами, яка надає форму локальної ISS-функції Ляпунова для нелінійних систем, у випадку коли лінійна апрокимація системи є стійкою в сенсі ISS.

Якісна поведінка розв'язків еволюційної системи без єдиності розв'язку вивчається в рамках теорії глобальних атракторів. Систематичне вивчення глобальних атракторів для випадків автономних і неавтономних процесів розпочалося з роботи [83]. У цій роботі для періодичного диференціального рівняння на площині з умовою точкової дисипативності було показано, що з існування глобального атрактора випливає існування періодичного розв'язку. Теорія глобальних атракторів нескінченновимірних систем була започаткована в 70-х роках минулого сторіччя в роботах O.A. Ladyzhenskaya [84], де вивчалася динаміка двовимірної системи рівнянь Нав'є-Стокса та в роботах J.K. Hale [85–87], які стосувалися досліджeння якісної поведінки розв'язків функціонально-диференціальних рівнянь. В роботі [84] для двовимірної системи рівнянь Нав'є-Стокса було доведено існування компактного в фазовому просторі глобального атрактора, а також знайдена перша числова характеристика скінченновимірності динаміки нескінченновимірної системи на атракторі – оцінка числа визначальних мод.

Важливий вклад в розвиток класичної теорії глобальних атракторів зробили також M.I. Vishik, R. Temam, І.Д. Чуєшов та їхні учні. Окрему увагу дослідників привертала задача оцінки розмірності глобального атрактора, оскільки в разі позитивної відповіді це означало, що поведінку нескінченновимірної еволюційної системи з часом можна описати за допомогою скінченної кількості параметрів. Сучасний стан класичної теорії глобальних атракторів разом із застосуваннями до числених задач математичної фізики можна знайти в [42, 43, 88]. Разом з тим, розроблена теорія не дозволяла розглядати такі задачі, як:

еволюціні рівняння, для яких поряд з глобальною розв'язністю невідомими є результати щодо єдиності розв'язку задачі Коші;

еволюційні включення;

неавтономні еволюціні рівняння та включення;

стохастично та випадково збурені еволюціні рівняння та включення.

В зв'язку з цим, вкінці минулого сторіччя з'являється ряд робіт відомих математиків, які привели до появи нових напрямків в теорії глобальних атракторів нескінченновимірних динамічних систем:

теорія m-напівпотоків, розроблена в роботах В.С. Мельника [89] та знайшла свій розвиток і застосування до еволюційних включень і еволюційних рівнянь без єдиності розв'язку в роботах його учнів J. Valero та О.В. Капустяна [90];

теорія узагальнених потоків, розроблена J.M. Ball спеціально для дослідження тривимірної системи рівнянь Нав'є-Стокса, і яка згодом була ним успішно застосована до автономного гіперболічного рівняння з дисипацією [91];

теорія дисперсних динамічних систем D.N. Cheban та Д.С. Факіх, яка в силу досить жорстких обмежень краще слугувала для дослідження скінченновимірних еволюційних об'єктів без єдиності [92];

теорія траєкторних атракторів, незалежно розроблена G.R. Sell, M.I. Vishik та V.V. Chepyzhov і дозволила досліджувати еволюційні рівняння без єдиності (зокрема, і тривимірну систему рівнянь Нав'є-Стокса) шляхом виходу з фазового простору в простір траєкторій, на якому діє класична напівгрупа зсувів [44, 88].

Слід відзначити, що перша робота, присвячена робастній стійкості глобального атрактору відносно збурень [35] була опублікована в 2020 році і розглядала найпростіший випадок параболічного дисипативного рівняння з гладкою нелінійністю. В даній роботі буде розглянуто значно ширший клас задач, що включає в себе згадані вище еволюційні системи без єдиності. При цьому будемо суттєво використовувати конструкції і результати теорії м-напівпотоків і м-напівпроцесів та їх атракторів.

1.1 Висновки до розділу 1

Цей розділ є допоміжним і не містить нових результатів.

У ньому викладено основні поняття і сформульовано відомі результати, що стосуються тематики дисертації і свідчать про актуальність і новизну задач, які досліджуються в дисертаційній роботі.

Розділ 2

РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ АТРАКТОРІВ МНОГОЗНАЧНИХ НАПІВПОТОКІВ

2.1 Атрактори многозначних напівпотоків: загальні поняття

Даний підрозділ носить допоміжний характер. Переважна частина згаданих тут результатів міститься в [41, 90, 93–95].

Нехай (X, ρ) – повний метричний простір.

Означення 2.1.1. *Відображення $G : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto P(X)$ називається многозначним напівпотоком (m-напівпотоком) на X, якщо:*

1) $G(0, x) = x \ \forall x \in X$;

2) $G(t + s, x) \subset G(t, G(s, x)) \ \forall t, s \geq 0, \forall x \in X$.

При цьому, якщо в другій умові має місце рівність, то m-напівпотік G називається строгим.

Означення 2.1.2. *Множина $A \subset X$ називається притягуючою для m-напівпотоку G, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$, $B \in \beta(X)$ $\exists T = T(\varepsilon, B)$ таке, що $G(t, B) \subset O_\varepsilon(A), \forall t \geq T$, тобто виконується*

$$\mathrm{dist}(G(t, B), A) \to 0, \ t \to +\infty. \tag{2.1}$$

Для фіксованої множини $B \subset X$ та $s \in \mathbb{R}_+$ задамо наступні множини:

$$\gamma_s(B) = \bigcup_{t \geq s} G(t, B), \ \omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} cl_X(\gamma_s(B)).$$

Означення 2.1.3. *Множина* $\omega(B)$ *називається* ω*-граничною множиною множини* B.

Означення 2.1.4. m*-напівпотік* G *називається асимптотично компактним, якщо для кожного* $B \in \beta(X)$ $\exists A(B) \in K(X)$ *така, що*

$$\mathrm{dist}(G(t,B), A(B)) \to 0, t \to +\infty \text{ в } X. \tag{2.2}$$

Було встановлено [90], що за умови

$$\forall B \in \beta(X) \ \exists T = T(B) : \bigcup_{t \geq T} G(t,B) \in \beta(X)$$

m-напівпотік G є асимптотично компактним тоді й лише тоді, коли

$$\forall B \in \beta(X), \forall t_n \nearrow +\infty$$

будь-яка послідовність $\xi_n \in G(t_n, B)$ є предкомпактною.

Означення 2.1.5. *Множина* $\Theta \subset X$ *називається глобальним атрактором* m*-напівпотоку* G*, якщо:*

1) Θ *є притягуючою множиною;*

2) Θ *є напівінваріантною множиною, тобто* $\Theta \subset G(t,\Theta)$ $\forall t \geq 0$*;*

3) Θ *є мінімальною притягуючою множиною, тобто для довільної притягуючої множини* Y *виконується* $\Theta \subset cl_X Y$.

Означення 2.1.6. *Припустимо, що* m*-напівпотік* $G : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto P(X)$ *має компактний, інваріантний глобальний атрактор* Θ*. Тоді* Θ *називається стійким, якщо* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *таке, що*

$$G(t, O_\delta(\Theta)) \subset O_\varepsilon(\Theta) \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

З [90] (теореми 2.12–2.22, с.22–29) випливає наступна теорема.

Теорема 2.1.1. *I) Нехай* m*-напівпотік* G *задовольняє наступним умовам:*

1) $\exists B_0 \in \beta(X)$ $\forall B \in \beta(X)$ $\exists T = T(B)$ $\forall t \geq T$ $G(t,B) \subset B_0$*;*

2) G *є асимптотично компактним;*

3) для довільних $t \geq 0$ *відображення* $X \ni x \mapsto G(t,x)$ *має замкнений графік.*

Тоді множина

$$\Theta = \bigcup_{B \in \beta(X)} \omega(B) = \omega(B_0) \tag{2.3}$$

є компактним глобальним атрактором для G, причому Θ єдиний і максимальний в класі обмежених напівінваріантних множин.

II) Якщо G задовольняє 1)–3) та є строгим, то Θ інваріантний, тобто

$$\Theta = G(t, \Theta)\ \forall t \geq 0.$$

III) Якщо G задовольняє 1)–3) і, крім того, $\forall t \geq 0$ відображення $x \mapsto G(t,x)$ є напівнеперервним зверху [96]*, зв'язнозначним і множина B_0 – зв'язна, то й Θ – зв'язна.*

IV) Нехай G має компактний, інваріантний глобальний атрактор Θ і виконана умова:

$$\text{якщо } y_n \in G(t_n, x_n), t_n \to t_0, x_n \to x_0,$$
$$\text{то по підпослідовності } y_n \to y_0 \in G(t_0, x_0).$$

Тоді атрактор Θ – стійкий.

При дослідженні структури атрактора важливим є поняття траєкторії.

Означення 2.1.7. *Відображення $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto X$ називається траєкторією m-напівпотоку G, якщо*

$$\varphi(t+s) \in G(t, \varphi(s))\ \forall s \geq 0,\ \forall t \geq 0.$$

Означення 2.1.8. *Відображення $\varphi : \mathbb{R} \mapsto X$ називається повною траєкторією m-напівпотоку G, якщо*

$$\varphi(t+s) \in G(t, \varphi(s))\ \forall s \in \mathbb{R},\ \forall t \geq 0.$$

Нехай для будь-яких $t \in \mathbb{R}_+,\ x \in X$ m-напівпотік G має наступну структуру

$$G(t,x) = \{\varphi(t) |\ \varphi(\cdot) \text{ – траєкторія } G,\ \varphi(0) = x\}. \tag{2.4}$$

Лема 2.1.1. ([90], лема 2.25, с.31) *Нехай m-напівпотік G має глобальний атрактор Θ, задовольняє* (2.4)*, а також наступну умову: для кожної* *траєкторії* $\varphi_n(\cdot) \in G(\cdot, x_n)$ *при* $x_n \to x$ *існує послідовність така, що*

$$\varphi_n(t) \to \varphi(t) \in G(t, x) \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Тоді глобальний атрактор Θ *складається з повних обмежених траєкторій* m*-напівпотоку* G*, тобто*

$$\begin{aligned} &\Theta = \{\psi(0) |\ \psi(\cdot) \text{ – повна обмежена траєкторія } G\} = \\ &= \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{\psi(t) |\ \psi(\cdot) \text{ – повна обмежена траєкторія } G\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Лема 2.1.2. ([90], лема 2.27, с.33) *Нехай* m*-напівпотік* G *строгий, задовольняє умову* (2.4) *та існує притягуюча множина* $B_0 \in \beta(X)$*, тобто* $\forall B \in \beta(X)\ \exists T = T(B)$ *така, що*

$$G(t, B) \to B_0 \text{ при } t \to +\infty.$$

Тоді виконується (2.5).

2.2 Многозначні напівпроцеси, локальна стійкість від входу до стану та властивість асимптотичного підсилення

Нехай Σ – деякий повний метричний простір, на якому задано m-напівпотік $\{T(h) : \Sigma \mapsto P(\Sigma)\}_{h \geq 0}$.

Означення 2.2.1. $S_\sigma : \mathbb{R}_d \times X \mapsto P(X)$ *називають сім'єю многозначних процесів (МП), якщо* $\forall \sigma \in \Sigma$ *виконані умови:*

1) $S_\sigma(\tau, \tau, x) = x \ \forall x \in X,\ \forall \tau \in \mathbb{R}$,

2) $S_\sigma(t, \tau, x) \subseteq S_\sigma(t, s, S_\sigma(s, \tau, x)) \ \forall t \geq s \geq \tau \ \forall x \in X$,

3) $S_\sigma(t + h, \tau + h, x) \subseteq S_{T(h)\sigma}(t, \tau, x)$,

де для $A \subset X,\ B \subset \Sigma$ $S_B(t, s, A) = \bigcup_{\sigma \in B} \bigcup_{x \in A} S_\sigma(t, s, x)$.

При цьому, якщо в умовах 2), 3) має місце рівність, то сім'ю МП $\{S_\sigma |\ \sigma \in \Sigma\}$ називають *строгою.*

Означення 2.2.2. *Відображення* $S : \mathbb{R}_{+d} \times X \mapsto P(X)$*, що задовольняє умови 1)-3) попереднього означення для довільних* $t \geq \tau \geq 0$ *називається многозначним напівпроцесом (МНП).*

Розглянемо сім'ю МП $\{S_\sigma |\ \sigma \in \Sigma\}$ та відображення $S_\Sigma : \mathbb{R}_{+d} \times X \mapsto P(X)$, що задається наступним чином:

$$S_\Sigma(t, \tau, x) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma(t, \tau, x).$$

Означення 2.2.3. *Множина* $A \subset X$ *називається рівномірно притягуючою для сім'ї МП* $\{S_\sigma |\ \sigma \in \Sigma\}$*, якщо для довільних* $\tau \in \mathbb{R},\ B \in \beta(X)$

$$\mathrm{dist}(S_\Sigma(t, \tau, B), A) \to 0,\ t \to +\infty,$$

тобто $\forall \varepsilon > 0,\ \tau \in \mathbb{R},\ B \in \beta(X)$ *існує* $T = T(\tau, \varepsilon, B)$ *таке, що*

$$S_\Sigma(t, \tau, B) \subset O_\varepsilon(A)\ \forall t \geq T.$$

Для $B \subset X$ та $(s, \tau) \in \mathbb{R}_d$ означимо наступні множини

$$\gamma^\tau_{s,\sigma}(B) = \bigcup_{t \geq s} S_\sigma(t, \tau, B),$$

$$\gamma^\tau_{s,\Sigma}(B) = \bigcup_{t \geq s} S_\Sigma(t, \tau, B),$$

$$\omega_\Sigma(\tau, B) = \bigcap_{s \geq \tau} cl_X(\gamma^\tau_{s,\Sigma}(B)).$$

Зрозуміло, що $\omega_\Sigma(\tau, B) = \bigcap\limits_{s \geq p} cl_X(\gamma^\tau_{s,\Sigma}(B))\ \forall p \geq \tau.$

Означення 2.2.4. *Сім'я МП* $\{S_\sigma |\ \sigma \in \Sigma\}$ *називається рівномірно асимптотично компактною, якщо для довільних* $\tau \in \mathbb{R},\ B \in \beta(X)$ *існує множина* $A(B) \in K(X)$ *така, що*

$$S_\sigma(t, \tau, B) \to A(B),\ t \to +\infty \text{ в } X.$$

Відомо [97], що якщо $\forall \tau \in \mathbb{R},\ \forall B \in \beta(X)\ \exists T = T(\tau, B,$ така, що

$\gamma_{T,\Sigma}^{\tau}(B) \in \beta(X)$, то умова рівномірної асимптотичної компактності еквівалентна наступній:

$$\forall \tau \in \mathbb{R},\ \forall B \in \beta(X),\ \forall t_n \nearrow \infty$$

будь-яка послідовність $\xi_n \in S_\Sigma(t_n, \tau, B)$ *є предкомпактною.*

Означення 2.2.5. *Множина* $\Theta_\Sigma \subset X$ *називається рівномірним глобальним атрактором сім'ї МП* $\{S_\sigma|\ \sigma \in \Sigma\}$*, якщо:*
1) Θ_Σ *– рівомірно притягуюча множина;*
2) для довільної рівномірно притягуючої множини Y *виконується* $\Theta_\Sigma \subset cl_X Y$*.*

Означення 2.2.6. *Глобальний атрактор* $\Theta_\Sigma \subset X$ *називається інваріантним (напівінваріантним) відносно сім'ї МП* $\{S_\sigma|\ \sigma \in \Sigma\}$*, якщо* $\forall (t, \tau) \in \mathbb{R}_d$

$$\Theta_\Sigma = S_\Sigma(t, \tau, \Theta_\Sigma)\ (\Theta_\Sigma \subset S_\Sigma(t, \tau, \Theta_\Sigma)).$$

Означення 2.2.7. *Нехай* Θ_Σ *– компактний, інваріантний глобальний атрактор сім'ї МП* $\{S_\sigma|\ \sigma \in \Sigma\}$*. Кажуть, що* Θ_Σ *є стійким, якщо*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (t, \tau) \in \mathbb{R}_d$$

$$S_\Sigma(t, \tau, O_\delta(\Theta_\Sigma)) \subset O_\varepsilon(\Theta_\Sigma).$$

Подальші достатні умови існування атрактора випливають з ([98], теореми 22-25), ([97], теореми 2.2-2.10), проте в [98] формула (2.6) доведена при більш жорстких припущеннях, а m-напівпотік $T(h)$ вважається визначеним $\forall h \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.2.1. *I) Нехай сім'я МП* $\{S_\sigma|\ \sigma \in \Sigma\}$ *задовольняє умови:*

1) $\exists B_0 \in \beta(X)\ \forall B \in \beta(X),\ \forall \tau \in \mathbb{R}\ \exists T = T(\tau, B)$

$$S_\Sigma(t, \tau, B) \subset B_0\ \forall t \geq T;$$

2) $\{S_\sigma|\ \sigma \in \Sigma\}$ *є рівномірно асимптотично компактною.*

Тоді $\{S_\sigma|\ \sigma\in\Sigma\}$ *має компактний глобальний атрактор*

$$\Theta_\Sigma=\bigcup_{\tau\in\mathbb{R}}\bigcup_{B\in\beta(X)}\omega_\Sigma(\tau,B)=\omega_\Sigma(0,B_0)=\omega_\Sigma(\tau,B_0)\ \forall\tau\in\mathbb{R}. \tag{2.6}$$

II) Якщо $\{S_\sigma|\ \sigma\in\Sigma\}$ *задовольняє 1), 2),* $\{T(h):\ \Sigma\mapsto P(\Sigma)\}_{h\geq 0}$ *є асимптотично компактним і* $\forall t\geq\tau$ *відображення*

$$(x,\sigma)\mapsto S_\sigma(t,\tau,x) \tag{2.7}$$

має замкнений графік, то Θ_Σ *є напівінваріантним.*

Якщо, крім того, Σ *– компакт,* $\{T(h):\ \Sigma\mapsto\Sigma\}_{h\geq 0}$ *– неперервна напівгрупа,* $\forall h\geq 0\ T(h)\Sigma=\Sigma$ *і в умовах 2), 3) означення 2.2.1 мають місце рівності, то* Θ_Σ *є інваріантним.*

III) Якщо $\{S_\sigma|\ \sigma\in\Sigma\}$ *задовольняє 1), 2),* Σ *– зв'язний метричний простір,* $\{T(h):\ \Sigma\mapsto P(\Sigma)\}_{h\geq 0}$ *є асимптотично компактним і* $\forall t\geq\tau$ *відображення* (2.7) *є напівнеперервним зверху і зв'язнозначним,* B_0 *– зв'язна множина, то* Θ_Σ *– зв'язна множина.*

IV) Якщо $\{S_\sigma|\ \sigma\in\Sigma\}$ *має компактний, інваріантний атрактор* Θ_Σ *і виконана умова:*

$$\text{якщо } y_n\in S_\Sigma(t_n,\tau,x_n),\ t_n\to t_0,\ x_n\to x_0, \tag{2.8}$$

$$\text{то по підпослідовності } y_n\to y_0\in S_\Sigma(t_0,\tau,x_0), \tag{2.9}$$

то Θ_Σ *– стійкий.*

Наслідок 2.2.1. *Якщо для сім'ї МП* $\{S_\sigma|\ \sigma\in\Sigma\}$ *виконується:*
1) $\forall h\geq 0\ T(h)\Sigma=\Sigma$*;*
2) $\forall(t,\tau)\in\mathbb{R}_d,\ \forall h\geq 0,\ \forall\sigma\in\Sigma,\ \forall x\in X$

$$S_\sigma(t+h,\tau+h,x)=S_{T(h)\sigma}(t,\tau,x),$$

то умови пункту I) теореми 2.2.1 достатньо перевірити для $\tau=0$.
Якщо, крім того, $\{T(h):\ \Sigma\mapsto\Sigma\}_{h\geq 0}$ *– однозначна напівгрупа, то всі умови теореми 2.2.1 достатньо перевірити для* $\tau=0$.

В еволюційних задачах без єдиності многозначні напівпотоки та напівпроцеси будуються на основі поняття розв'язку, що дає більше інформації про структуру відповідного многозначного відображення і, тим самим, робить умови теорем більш конструктивними.

Розглянемо абстрактну еволюційну (автономну) систему, що характеризується нормованим фазовим простором $(X, \|\cdot\|)$ та сім'єю відображень (розв'язків) $K \subset \mathbb{C}([0,+\infty); X)$ таких, що задовольняють наступні умови:

(K1) $\forall x \in X\ \exists \varphi \in K$ така що $\varphi(0) = x$;

(K2) $\varphi_\tau(\cdot) := \varphi(\cdot + \tau) \in K$, $\forall \tau \geq 0$, $\forall \varphi \in K$.

Якщо розглянути сім'ю розв'язків K (незбуреної) еволюційної системи, що задовольняють властивості (K1), (K2), то отримаємо відображення $G : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$,

$$G(t,x) = \{\varphi(t) \mid \varphi \in K,\ \varphi(0) = x\},$$

що задовольняє напівгрупову властивість:

$G(0,x) = x,\ G(t+s,x) \subset G(t, G(s,x))$, $\forall x \in X$, $\forall t, s \geq 0$,

а отже, є м-напівпотоком в сенсі означення (2.1.1).

Більш того, можна стверджувати, що

$$\varphi(t+s) \in G(t, \varphi(s)), \quad \forall \varphi \in K,\ \forall t, s \geq 0.$$

Додатково будемо вимагати виконання умови

(K3) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in K$ таких, що $\varphi_2(0) = \varphi_1(s)$ функція

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & 0 \leq t \leq s, \\ \varphi_2(t-s), & t > s \end{cases}$$

належить до K.

Тоді напівпотік G є строгим, тобто,

$$G(t+s,x) = G(t, G(s,x)).$$

Має місце наступна лема.

Лема 2.2.1. [41] *Припустимо, що виконуються умови* (K1)–(K3) *а також наступні умови*

(G1) *існує обмежена множина $B_0 \subset X$ така, що для будь-якої обме-*

женої $B \subset X$ $\exists T = T(B)$ $\forall t \geq T$ $G(t, B) \subset B_0$ (дисипативність),

(G2) $\forall t_n \nearrow \infty$, *для будь-якої обмеженої* $B \subset X$, $\forall \xi_n \in G(t_n, B)$ *послідовність* $\{\xi_n\}$ *є передкомпактною (асимптотична компактність),*

(G3) $\forall t > 0$, $\forall x_n \to x_0$, $\forall \xi_n \in G(t, x_n)$, $\xi_n \to \xi_0$ *виконується:* $\xi_0 \in G(t, x_0)$ *(замкненість графіка).*

Тоді m*-напівпотік* G *має інваріантний глобальний атрактор* Θ, *тобто,*

$$\Theta = G(t, \Theta) \ \ \forall t \geq 0.$$

Більше того, якщо виконана умова

(G4) $\forall t_n \to t_0 \geq 0$, $\forall x_n \to x_0$, $\forall \xi_n \in G(t_n, x_n)$ *по послідовності* $\xi_n \to \xi_0 \in G(t_0, x_0)$,

то Θ *є стійким в сенсі* (2.15).

Нехай дана еволюційна система зазнає збурень $d \in D$, де множина D задовольняє властивість

(D) $D \subseteq L^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, $0 \in D$, D є трансляційно-інваріантною, тобто,

$$d_h(\cdot) = d(\cdot + h) \in d, \quad \forall h \geq 0, \ \forall d(\cdot) \in D.$$

Позначимо як $K_d^{\tau} \subset \mathbb{C}([\tau, +\infty); X)$ сім'ю відображень, для яких виконані наступні умови:

(S1) $\forall x \in X$, $\forall \tau \geq 0$, $\forall d \in D$ $\exists \varphi \in K_d^{\tau} :$ $\varphi(\tau) = x$,

(S2) $\varphi|_{[s,+\infty)} \in K_d^s$, $\forall \varphi \in K_d^{\tau}$, $\forall s \geq \tau$,

(S3) $\varphi(\cdot + h) \in K_{d(\cdot+h)}^{\tau}$, $\forall \varphi \in K_d^{\tau+h}$, $\forall h \geq 0$.

Позначимо як $\{S_d : \mathbb{R}^2_{\geq} \times X \mapsto 2^X\}_{d \in D}$, де $\mathbb{R}^2_{\geq} = \{(t, s)| \ t \geq s \geq 0\}$, сім'ю многозначних відображень

$$S_d(t, \tau, x) := \{\varphi(t)| \ \varphi \in K_d^{\tau}, \ \varphi(\tau) = x\}. \tag{2.10}$$

Тоді відомо [50], що $\{S_d\}_{d \in D}$ породжує сім'ю m-напівпроцесів, тобто, $\forall d \in D$, $\forall t \geq s \geq \tau \geq 0$, $\forall x \in X$, $\forall h \geq 0$

$$S_d(t, \tau, x) = x,$$

$$S_d(t, \tau, x) \subset S_d(t, s, S_d(s, \tau, x)),$$

$$S_d(t+h,\tau+h,x)\subset S_{d(\cdot+h)}(t,\tau,x).$$

Легко переконатися, що $\{S_d\}_{d\in D}$ задовольняє властивість коциклу:

$$S_d(t+h,0,x)\subset S_d(t+h,h,S_d(h,0,x))\subset S_{d(\cdot+h)}(t,0,S_d(h,0,x)),$$

і $\forall\varphi\in K_d^\tau$

$$\varphi(t)\in S_d(t,s,\varphi(s)).$$

Зокрема, $\forall\varphi\in K_d^0,\ \forall t,h\geq 0$

$$\varphi(t+h)\in S_d(t+h,h,\varphi(h))\subset S_{d(\cdot+h)}(t,0,\varphi(h)). \tag{2.11}$$

(S4) Більше того, якщо $\forall s\geq\tau,\ \forall\psi\in K_d^\tau,\ \forall\varphi\in K_d^s$ з $\psi(s)=\varphi(s)$ функція

$$\Theta(p)=\begin{cases}\psi(p), & p\in[\tau,s],\\ \varphi(p), & p\geq s\end{cases}$$

належить K_d^τ, то має місце включення $S_d(t,\tau,x)\subset S_d(t,s,S_d(s,\tau,x))$.

(S5) Якщо $\forall h\geq 0,\ \forall\varphi\in K_{d(\cdot+h)}^\tau$ виконується $\varphi(\cdot-h)\in K_d^{\tau+h}$, то має місце включення $S_d(t+h,\tau+h,x)\subset S_{d(\cdot+h)}(t,\tau,x)$.

Отже, за виконання умов (D), (S1)–(S5) для сім'ї напівпроцесів $\{S_d\}_{d\in D}$ є строгим, тобто,

$$\begin{aligned} S_d(t,\tau,x)&=S_d(t,s,S_d(s,\tau,x)),\\ S_d(t+h,\tau+h,x)&=S_{d(\cdot+h)}(t,\tau,x),\\ S_d(t+h,0,x)&=S_{d(\cdot+h)}(t,0,S_d(h,0,x)).\end{aligned}$$

Зокрема, у випадку незбуреної системи ($d\equiv 0$)

$$S_0(t+h,0,x)=S_0(t,0,S_0(h,0,x)),$$

а отже S_0 є строгим m-напівпотоком.

Подальше дослідження буде стосуватися властивості стійкості $\{S_d\}_{d\in D}$ відносно глобального атрактора Θ m-напівпотоку G незбуреної системи, тобто,

$$G(t,x) := S_0(t,0,x).$$

Лема 2.2.2. *Припустимо, що* $G : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$ *є строгим m-напівпотоком, що має інваріантний стійкий глобальний атрактор* Θ. *Також припустимо, що виконана умова*

$$\forall B \in \beta(X) \text{ множина } \bigcup_{t\geq 0} G(t,B) \text{ є обмеженою.} \tag{2.12}$$

Тоді $\exists \beta \in \mathcal{KL}\ \forall x \in X,\ \forall t \geq 0$

$$\|G(t,x)\|_\Theta \leq \beta(\|x\|_\Theta, t). \tag{2.13}$$

Доведення. Спочатку покажемо, що $\exists \alpha \in \mathcal{K}_\infty$ така, що

$$\forall x \in X,\ \forall t \geq 0\ \ \|G(t,x)\|_\Theta \leq \alpha(\|x\|_\Theta). \tag{2.14}$$

В силу властивості стійкості маємо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \geq 0\ \ G(t, O_\delta(\Theta)) \subset O_\varepsilon(\Theta) \tag{2.15}$$

Користуючись (2.15), позначимо

$$\bar{\delta}(\varepsilon) := \begin{cases} 0, & \varepsilon = 0, \\ \sup \delta, & (\varepsilon, \delta) \text{ задовольняє } (2.15). \end{cases}$$

Тоді $\bar{\delta}(\varepsilon) > 0,\ \varepsilon > 0,\ \bar{\delta}(0) = 0,\ \bar{\delta}$ є зростаючою, але не обов'язково неперервною. Отже, визначимо для будь-якого $\kappa \in (0,1)$

$$\xi(\varepsilon) := \begin{cases} \kappa \int\limits_0^\varepsilon \bar{\delta}(s)\, ds, & \varepsilon \in [0,1], \\ \dfrac{\kappa}{\varepsilon} \int\limits_0^\varepsilon \bar{\delta}(s)\, ds, & \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Тоді $\xi \in \mathcal{K}$ і $\forall \varepsilon > 0\ \xi(\varepsilon) \leq \kappa \bar{\delta}(\varepsilon) < \bar{\delta}(\varepsilon)$. Доведемо що $\xi \in \mathcal{K}_\infty$. Для цього досить показати, що $\bar{\delta}(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to \infty$, тобто,

$$\forall R > 0 \;\; \exists r \;\; \forall \varepsilon > r : \;\; \bar{\delta}(\varepsilon) > R.$$

Припустимо протилежне:

$$\exists R_0 > 0 \;\; \forall r \;\; \exists \varepsilon > r : \;\; \bar{\delta}(\varepsilon) \le R_0. \tag{2.16}$$

В силу припущення (2.12) $\exists r_0 \;\; \forall \varepsilon > r_0$

$$G(t, O_{R_0+1}(\Theta)) \subset O_\varepsilon(\Theta) \; \forall t \ge 0,$$

отже, $\bar{\delta}(\varepsilon) \ge R_0 + 1$, що суперечить (2.16). Тепер виберемо

$$\alpha(r) = \xi^{-1}(r).$$

Тоді $\forall x \in X$ підставимо у (2.15) $\varepsilon = \alpha(\|x\|_\Theta)$. Таким чином, $\|x\|_\Theta < \bar{\delta}(\varepsilon)$ і $\forall t \ge 0$

$$\|G(t, x)\|_\Theta < \varepsilon = \alpha(\|x\|_\Theta).$$

В силу (Θ2) $\forall r > 0, \;\forall x \in X : \|x\|_\Theta \le r$ і $\forall \eta > 0$

$$\exists T = T(\eta, r) > 0 \;\; \forall t \ge T \;\; \|G(t, x)\|_\Theta < \eta. \tag{2.17}$$

Введемо функції

$$\overline{T}(\eta, r) = \inf T(\eta, r), \;\; (\eta, r) \text{ задовольняє (2.17)},$$
$$W_r(\eta) = \frac{r}{\eta} \int_{\frac{\eta}{r}}^{\eta} \bar{T}(s, r) ds + \frac{r}{\eta},$$
$$U_r = W_r^{-1},$$
$$\psi(r, s) = \min\{\alpha(r), \inf_{\rho > r} U_\rho(s)\}.$$

Після цього можна повторити без змін аргументи з [63, p. 665] і одержати (2.13) з

$$\beta(r, s) = \int_r^{r+1} \psi(\lambda, s)\, d\lambda + \frac{r}{(r+1)(s+1)}.$$

Лема доведена. $\square$

Формулювання леми (2.2.2) дозволяє довести основний результат стосовно локальної стійкості для абстрактних систем, викладений в наступній теоремі.

Теорема 2.2.2. *Припустимо, що m-напівпотік* S_0 *породжений сім'єю відображень* K, *задовольняє властивості* (K1), (K2), S_0 *є строгим, має компактні значення та стійкий інваріантний глобальний атрактор* Θ.

Крім того, існує локально обмежена функція $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *така, що* $\forall r > 0,\ \forall t \geq 0$

$$\|x_1\| \leq r,\ \|x_2\| \leq r \ \Rightarrow\ \operatorname{dist}(S_0(t,0,x_1), S_0(t,0,x_2)) \leq e^{c(r)t}\|x_1 - x_2\|. \tag{2.18}$$

Припустимо, що $\{S_d\}_{d\in D}$ *– сім'я m-напівпроцесів, що задовольняє* (D), (S1)–(S3), *де* $d \in D$ *– збурення початкої системи* S_0.

Припустимо, що $\exists \sigma \in \mathcal{K}$, *існує неперервна функція* $b : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ *така, що* $\forall r > 0\ \varlimsup\limits_{t\to 0+} \frac{b(r,t)}{t} < \infty$ *і* $\forall t \geq 0$

$$\|d\|_\infty \leq r,\ \|x\| \leq r \ \Rightarrow\ \operatorname{dist}(S_d(t,0,x), S_0(t,0,x)) \leq b(r,t)\sigma(\|d\|_\infty). \tag{2.19}$$

Припустимо, що

$$\forall r > 0 \text{ множина } \bigcup_{t\geq 0} \bigcup_{\|d\|_\infty \leq r} \bigcup_{\|x\|\leq r} S_d(t,0,x) \text{ є обмеженою.} \tag{2.20}$$

Тоді $\{S_d\}_{d\in D}$ *є локально стійкою в сенсі ISS відносно атрактора* Θ, *тобто, виконуєтьcя*

$$\|x\|_\Theta \leq r,\ \|d\|_\infty \leq r \ \Rightarrow\ \forall t \geq 0\ \|S_d(t,0,x)\|_\Theta \leq \beta(\|x\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \tag{2.21}$$

де $\|d\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\geq 0} |d(t)|$.

Доведення. Спочатку покажемо, що $\forall r > 0\ \exists \underline{\psi}, \overline{\psi}, \alpha \in \mathcal{K}$, існує ліпшицева неперервна функція V з константою Ліпшиця що дорівнює 1 така, що

$$\underline{\psi}(\|x\|_\Theta) \le V(x) \le \overline{\psi}(\|x\|_\Theta) \ \forall \|x\|_\Theta \le r, \tag{2.22}$$

$$\dot{V}_0(x) := \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{1}{t}\mathrm{dist}(V(S_0(t,0,x)), V(x)) \le -\alpha(\|x\|_\Theta) \ \forall \|x\|_\Theta \le r, \tag{2.23}$$

де тут і надалі для $A \subset X, \ V(A) = \bigcup\limits_{a\in A} V(a)$.

Для цього виберемо функцію β з властивості (2.13), зафіксуємо $r_0 > 0$ а також $\forall \varepsilon > 0$ нехай функція $T = T(r_0, \varepsilon)$ така, що

$$\beta(r_0, t) \le \varepsilon \ \ \forall t \ge T. \tag{2.24}$$

Поставимо

$$V^\varepsilon(x) := e^{-(c_0+c)T} \sup_{t\ge 0}(e^{ct}\eta_\varepsilon(\|S_0(t,0,x)\|_\Theta)), \|x\|_\Theta < r_0,$$

де $c_0 = c(r_0)$ взято з (2.18), $c > 0$ фіксоване протягом усього доведення теореми, $\eta_\varepsilon(r) := \max\{0, r-\varepsilon\}$. В силу (2.24)

$$V^\varepsilon(x) = e^{-(c_0+c)T} \sup_{t\in[0,T]} (e^{ct}\eta_\varepsilon(\|S_0(t,0,x)\|_\Theta)).$$

Використовуючи елементарні властивості η_ε:

$$\eta_\varepsilon(r) \le r, \ \ |\eta_\varepsilon(r_1) - \eta_\varepsilon(r_2)| \le |r_1 - r_2|,$$

отримуємо такі властивості V^ε:

$$V^\varepsilon(x) \le e^{-c_0T} \sup_{t\in[0,T]} \eta_\varepsilon(\|S_0(t,0,x)\|_\Theta) \le \beta(\|x\|_\Theta, 0), \quad \forall \|x\|_\Theta \le r_0$$

та

$$
\begin{aligned}
|V^\varepsilon(x) - V^\varepsilon(y)| \le{}& e^{-(c_0+c)T} \\
&\times \sup_{t\in[0,T]} |e^{ct}\eta_\varepsilon(\|S_0(t,0,x)\|_\Theta) - e^{ct}\eta_\varepsilon(\|S_0(t,0,y)\|_\Theta)| \\
&\le e^{-c_0T} \sup_{t\in[0,T]} |\|S_0(t,0,x)\|_\Theta) - \|S_0(t,0,y)\|_\Theta)| \\
&\le e^{-c_0T} \sup_{t\in[0,T]} \operatorname{dist}(S_0(t,0,x), S_0(t,0,y)) \\
&\le e^{-c_0T} e^{c_0T} \|x-y\| \\
&= \|x-y\|, \quad \forall\, \|x\|_\Theta \le r_0, \quad \forall\, \|y\|_\Theta \le r_0.
\end{aligned}
$$

Тут використовується нерівність

$$\operatorname{dist}(A,B) \le \operatorname{dist}(A,C) + \operatorname{dist}(C,B)$$

з $A = S_0(t,0,x),\ B = \Theta,\ C = S_0(t,0,y)$.

В силу компактності Θ маємо, що $\forall \|x\|_\Theta < r_0$

$$\|x\|_\Theta = \inf_{\xi\in\Theta} \|x-\xi\| = \|x-\xi_0\|,\ \xi_0 \in \Theta.$$

Тепер, в силу (2.18)

$$\operatorname{dist}(S_0(t,0,x), S_0(t,0,\xi_0)) \le e^{c_0t}\|x-\xi_0\|.$$

Інваріантність Θ означає включення

$$S_0(t,0,\xi_0) \subset \Theta.$$

Тому,

$$\operatorname{dist}(S_0(t,0,x), S_0(t,0,\xi_0)) \ge \|S_0(t,0,x)\|_\Theta.$$

Отже, із строгої нерівності $\|x\|_\Theta < r_0$ отримуємо, що при достатньо малих $\tau > 0$

$$\|S_0(\tau,0,x)\| < r_0.$$

Тоді $\forall \varphi \in K: \ \varphi(0) = x$, в силу строгості S_0 отримуємо:

$$\begin{aligned} V^\varepsilon(\varphi(\tau)) &= e^{-(c_0+c)T} \sup_{t\geq 0}(e^{ct}\eta_\varepsilon(\|S_0(t,0,\varphi(\tau))\|_\Theta)) \\ &\leq e^{-(c_0+c)T} \sup_{t\geq 0}(e^{ct}\eta_\varepsilon(\|S_0(t+\tau,0,x)\|_\Theta)) \\ &\leq e^{-c\tau}V^\varepsilon(x) \text{ для достатньо малих } \tau > 0. \end{aligned}$$

В силу компактності $S_0(t,0,x)$ виводимо: для достатньо малих $\tau > 0$ $\exists \varphi \in K, \ \varphi(0) = x$ така, що

$$\operatorname{dist}\left(V^\varepsilon(S_0(\tau,0,x)), V^\varepsilon(x)\right) = V^\varepsilon(\varphi(\tau)) - V^\varepsilon(x) \leq (e^{-c\tau}-1)V^\varepsilon(x).$$

Отже,

$$\dot{V}_0^\varepsilon(x) := \overline{\lim_{t\to 0+}} \frac{1}{t}\operatorname{dist}(V^\varepsilon(S_0(t,0,x)), V^\varepsilon(x)) \leq -cV^\varepsilon(x), \ \|x\|_\Theta < r_0.$$

Тепер, для будь-яких $\|x\|_\Theta \leq r_0$, покладемо

$$V(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} V^{\frac{1}{k}}(x).$$

Тоді, з попередніх аргументів отримаємо, що

$$\begin{gathered} V(x) \leq \beta(\|x\|_\Theta, 0), \ \|x\|_\Theta \leq r_0, \\ |V(x) - V(y)| \leq \|x-y\|, \ \|x\|_\Theta \leq r_0, \ \|y\|_\Theta \leq r_0, \end{gathered}$$

$\forall \varphi \in K, \ \varphi(0) = x$ для достатньо малих $\tau > 0$

$$V(\varphi(\tau)) \leq e^{-c\tau}V(x), \ \text{і, отже,}$$

$$\operatorname{dist}\left(V(S_0(\tau,0,x)), V(x)\right) \leq (e^{-c\tau}-1)V(x).$$

Таким чином,

$$\dot{V}_0(x) \leq -cV(x), \ \|x\|_\Theta < r_0.$$

Більше того, нерівність

$$\sup_{t\geq 0}\Big(e^{ct}\eta_{\frac{1}{k}}(\|S_0(t,0,x)\|_\Theta)\Big)\geq \eta_{\frac{1}{k}}(\|x\|_\Theta)$$

означає, що

$$V(x)\geq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}e^{-(c_0+c)T(\frac{1}{k})}\eta_{\frac{1}{k}}(\|x\|_\Theta),\ \|x\|_\Theta\leq r_0.$$

Остаточно, позначивши

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(r) &= \beta(r,0)+r,\\
\underline{\psi}(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}e^{-(c_0+c)T(\frac{1}{k})}\eta_{\frac{1}{k}}(r),\\
\alpha(r) &= c\underline{\psi}(r),
\end{aligned}$$

ми отримуємо (2.22),(2.23).

Тоді $\forall\|x\|_\Theta<1,\ \forall d\in D:\ \|d\|_\infty\leq 1,\ \forall\varphi\in K_d^0:\varphi(0)=x$, розглянемо для $t>0$ верхню праву похідну Діні [99]

$$\overline{D}^+V(\varphi(t))=\overline{\lim_{\tau\to 0+}}\frac{1}{\tau}(V(\varphi(t+\tau))-V(\varphi(t))).$$

Відповідно до властивості (2.11)

$$\varphi(t+\tau)\in S_d(t+\tau,0,x)\subset S_{d(\cdot+t)}(\tau,0,\varphi(t)).$$

З властивості (2.20), для деякого $r_0>0$, $\|\varphi(t)\|<r_0\ \forall t\geq 0$. Зафіксуємо r_0 з усіх попередніх аргументів. Отже, зважаючи на (2.19), можемо написати

$$\begin{aligned}
V(\varphi(t+\tau))-V(\varphi(t)) &\leq \operatorname{dist}\left(V(S_{d(\cdot+t)}(\tau,0,\varphi(t))),V(\varphi(t))\right)\\
&\leq \operatorname{dist}\Big(V(S_{d(\cdot+t)}(\tau,0,\varphi(t))),V(S_0(\tau,0,V(S_{d(\cdot+t)}(\tau,0,\varphi(t)))))\Big)\\
&\quad+\operatorname{dist}\left(V(S_0(\tau,0,V(S_{d(\cdot+t)}(\tau,0,\varphi(t))))),V(\varphi(t))\right)\\
&\leq b(r_0,\tau)\sigma(\|d\|_\infty)+(e^{-c\tau}-1)V(\varphi(t)).
\end{aligned}$$

Це означає, що

$$\overline{D}^{+} V(\varphi(t)) \leq -cV(\varphi(t)) + \overline{b}\sigma(\|d\|_{\infty}), \quad \forall t > 0, \tag{2.25}$$

де $\overline{b} = \overline{\lim\limits_{\tau \to 0+}} \frac{b(r_0,\tau)}{\tau}$.

Використовуючи властивості верхньої межі, з (2.25) отримаємо наступне:

$$\overline{D}^{+} \left(V(\varphi(t)) e^{ct} \right) \leq -\overline{D}^{+} \left(-\frac{\overline{b}\sigma(\|d\|_{\infty})}{c} e^{ct} \right),$$

$$\overline{D}^{+} \left(V(\varphi(t)) e^{ct} - \frac{\overline{b}\sigma(\|d\|_{\infty})}{c} e^{ct} \right) \leq 0. \tag{2.26}$$

Тоді нерівність (2.26) означає (див. [99]), що

$$V(\varphi(t)) e^{ct} - \frac{\overline{b}\sigma(\|d\|_{\infty})}{c} e^{ct} \leq V(x) - \frac{\overline{b}\sigma(\|d\|_{\infty})}{c}, \quad \forall t \geq 0.$$

Отже,

$$V(\varphi(t)) \leq V(x) e^{-ct} + \frac{\overline{b}}{c}\sigma(\|d\|_{\infty}), \quad \forall t \geq 0.$$

Отсаточно,

$$\underline{\psi}(\|\varphi(t)\|_{\Theta}) \leq \overline{\psi}(\|x\|_{\Theta}) e^{-ct} + \frac{\overline{b}}{c}\sigma(\|d\|_{\infty}),$$

$$\|\varphi(t)\|_{\Theta} \leq \underline{\psi}^{-1}(\overline{\psi}(\|x\|_{\Theta}) e^{-ct} + \frac{\overline{b}}{c}\sigma(\|d\|_{\infty})) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\underline{\psi}^{-1} \left(2\overline{\psi}(\|x\|_{\Theta}) e^{-ct} \right) + \frac{1}{2}\underline{\psi}^{-1} \left(\frac{2\overline{b}}{c}\sigma(\|d\|_{\infty}) \right). \tag{2.27}$$

Якщо позначити

$$\beta(r,s) := \frac{1}{2}\underline{\psi}^{-1} \left(2\overline{\psi}(\|x\|_{\Theta}) e^{-cs} \right),$$
$$\gamma(r) := \frac{1}{2}\underline{\psi}^{-1} \left(\frac{2\overline{b}}{c}\sigma(r) \right),$$

то з нерівності 2.27 випливає необхідна локальна властивість ISS (2.21).

Теорема доведена. □

Означення 2.2.8. [44] *Компактна множина* $\Theta_\Sigma \subset X$ *називається рівномірним атрактором* $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, *якщо для будь-якої обмеженої множини* $B \subset X$

$$\operatorname{dist}(S_\Sigma(t,0,B),\Theta_\Sigma) \to 0,\ t\to\infty$$

і Θ_Σ *є мінімальною в класі таких множин.*

Наступна лема гарантує існування рівномірного атрактора у $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$.

Лема 2.2.3. [44] *Нехай* $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ *– сім'я m-напівпроцесів,* Σ *– трансляційно-інваріанта підмножина деякого метричного простору і виконуються умови:*
1) існує обмежена множина $B_0 \subset X$ *така, що для будь-якої обмеженої множини* $B \subset X$ *існує* $T = T(B)$ *таке, що* $\forall t \geq T \quad S_\Sigma(t,0,B) \subset B_0$;
2) $\forall\{\sigma_n\} \subset \Sigma,\ \forall t_n \nearrow \infty,\ \forall$ *обмеженої послідовності* $\{x_n\} \subset X$ *послідовність* $\{\xi_n \in S_{\sigma_n}(t_n,0,x_n)\}_{n\geq 1}$ *– предкомпактна.*
Тоді $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ *має рівномірний атрактор* Θ_Σ.
Якщо, крім того, виконується умова
3) відображення $\Sigma \times X \ni (\sigma,x) \mapsto S_\sigma(t,0,x) \subset X$ *має замкнений графік, то*

$$\Theta_\Sigma \subset S_\Sigma(t,0,\Theta_\Sigma).$$

Зауваження 2.2.1. *В умові 1) можна вважати, що*

$$B_0 = \{x \in X|\ \ \|x\|_X \leq R_0\}.$$

Зауваження 2.2.2. *Для* $\Sigma = \{0\}$ *умови 1)-3) мають вигляд:*

$$\forall t \geq T \quad G(t,B) \subset B_0,$$

кожна послідовність $\xi_n \in G(t_n,B)$ *– предкомпактна,*

відображення $x \mapsto G(t,x)$ *має замкнений графік;*

і гарантують [95], *що* $\Theta := \Theta_{\{0\}}$ *– глобальний атрактор m-напівпотоку* G.

Теорема 2.2.3. *Нехай для кожного* $d \in D \subset L^\infty(\mathbb{R}_+)$ *існує трансляційно-інваріантна множина* $\Sigma(d)$ *така, що сім'я* m*-напівпроцесів* $\{S_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma(d)}$ *задовольняє умови 1)-3) Леми* (2.2.3),

$$\Sigma(0) = \{0\}, \ \forall\ d \in D\ d \in \Sigma(d),$$

$\forall r_0 > 0\ \exists$ *мн.* B_0 *така, що умова 1) Леми* (2.2.3) *виконується* $\forall \|d\|_\infty \le r_0$,

$$\textit{тобто}\ \exists\ T = T(r_0, B)\ \forall t \ge T \quad \bigcup_{\|d\|_\infty \le r_0} S_{\Sigma(d)}(t, 0, B) \subset B_0, \tag{2.28}$$

і крім того, виконуються умови
1) $\|d_k\|_\infty \to 0,\ t_k \to \infty \ \Rightarrow\ \xi_k \in S_{\Sigma(d_k)}(t_k, 0, B_0)$ *– предкомпактна,*
2) $\|d_k\|_\infty \to 0,\ x_k \to x,\ \xi_k \in S_{\Sigma(d_k)}(t, 0, x_k),\ \xi_k \to \xi \ \Rightarrow\ \xi \in S_0(t, 0, x).$
Тоді $\exists\gamma \in \mathcal{K}\ \forall x \in X,\ \forall d \in D$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \mathrm{dist}(S_d(t, 0, x), \Theta) \le \gamma(\|d\|_\infty).$$

Доведення. Спочатку доведемо, що

$$\mathrm{dist}(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta) \to 0,\ \|d\|_\infty \to 0. \tag{2.29}$$

Нехай це не так. Тоді $\exists d_k \to 0,\ \exists\varepsilon > 0,\ \exists z_k \in \Theta_{\Sigma(d_k)}$ такі, що

$$\mathrm{dist}(z_k, \Theta) \ge \varepsilon.$$

В силу 1) по підпослідовності $z_k \to z$. Дійсно, $z_k \in \Theta_{\Sigma(d_k)} \subset S_{\Sigma(d_k)}(t_k, 0, \Theta_{\Sigma(d_k)}) \subset S_{\Sigma(d_k)}(t_k, 0, B_0)$. Виберемо $t > 0$ так, щоб

$$\mathrm{dist}(G(t, B_0), \Theta) < \varepsilon.$$

Тоді $z_k \in \Theta_{\Sigma(d_k)} \subset S_{\Sigma(d_k)}(t_k, 0, \Theta_{\Sigma(d_k)})$, тобто $\exists\eta_k \in \Theta_{\Sigma(d_k)} \subset B_0$ таке, що $z_k \in S_{\Sigma(d_k)}(t, 0, \eta_k)$. В силу 1) по підпослідовності $\eta_k \to \eta \in B_0$. Тоді з 2)

$$z_k \to z \in G(t, \eta) \subset G(t, B_0) \subset O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Theta),$$

що протирічить припущенню.

Тепер, для фіксованих $d \in D,\ x \in X$ маємо:

$$\operatorname{dist}(S_d(t,0,x),\Theta) \le \operatorname{dist}(S_d(t,0,x),z) + \operatorname{dist}(z,\Theta).$$

Але $S_d(t,0,x) \subset S_{\Sigma(d)}(t,0,x)$, отже

$$\operatorname{dist}(S_d(t,0,x),\Theta) \le \operatorname{dist}(S_{\Sigma(d)}(t,0,x),\Theta_{\Sigma(d)}) + \operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(d)},\Theta).$$

З властивості притягнення:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \operatorname{dist}(S_{\Sigma(d)}(t,0,x),\Theta_{\Sigma(d)}) = 0. \tag{2.30}$$

Покладемо

$$\gamma_0(s) := \sup_{\|d\|_\infty \le s} \operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(d)},\Theta).$$

Тоді

$$\operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(d)},\Theta) \le \gamma_0(\|d\|_\infty).$$

Функція $\gamma_0(s)$ приймає скінченні значення для кожного $s > 0$. Дійсно,

$$\gamma_0(s) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(d_n)},\Theta),\ \|d_n\|_\infty \le s.$$

Тоді, в силу (2.28) існує замкнена куля $B = B(s)$ така, що $\forall n \ge 1\ \ \Theta_{\Sigma(d_n)} \subset B$. Отже, $\gamma_0(s) \le \operatorname{dist}(B,\Theta) + 1 < \infty$. Таким чином, $\gamma_0 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ неспадна, $\gamma_0(0) = 0$ і, в силу (2.29), $\gamma_0(s) \to 0,\ s \to 0$. Тоді з [99] випливає існування $\gamma \in \mathcal{K}$ такої, що $\forall s \ge 0\ \gamma_0(s) \le \gamma(s)$. Отже, в силу (2.30), $\forall d \in D,\ \forall x \in X$:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \operatorname{dist}(S_d(t,0,x),\Theta) \le \gamma(\|d\|_\infty).$$

Теорема доведена. □

2.3 Висновки до розділу 2

У даному розділі досліджується многозначні напівпотоки та напівпроцеси, породжені еволюційними системами без єдиності, та стійкість їх атракторів. Детально проаналізовано структуру і властивості м-напівпотоків, породжених еволюційними автономними системами без єдиності, а також вивчено структуру м-напівпроцесів, що виникають при наявності неавтономних збурень. Доведено результат про асимптотичну стійкість глобального атрактору м-напівпроцесу у формі робастної оцінки. На основі цього доведено теорему про локальну стійкість від входу до стану атрактору еволюційної системи без єдиності за наявності збурень. Використовуючи результат про напівнеперервну зверху залежність атрактору м-напівпроцесу від параметру доведено теорему про робастну стійкість глобального атрактору відносно збурень у формі асимптотичного підсилення. Результати, описані в даному розділі, опубліковані в [5], [13], [14].

Розділ 3

РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ АТРАКТОРІВ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

У цьому розділі ми використаємо абстрактні результати, одержані в попередньому розділі, для того щоб встановити робастну стійкість атракторів систем типу реакція-дифузія і PDE-ODE відносно зовнішніх збурень.

В подальшому будуть використані наступні відомі результати.

При фунціональній постановці задачі будемо використовувати наступну лему про узагальнену похідну.

Лема 3.0.1. [100] *Нехай X – банахів простір, X' – спряжений до X, $u, g \in L^1(a, b; X)$. Тоді наступні твердження еквівалентні:*
1) $u(t) = \xi + \int\limits_a^t w(s)ds$, $\xi \in X$ для м.в. $t \in (a, b)$;
2) $\forall\ \varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(a, b)$ $\int\limits_a^b u(t)\varphi'(t)dt = -\int\limits_a^b w(t)\varphi(t)dt$, тобто $w = \frac{du}{dt}$ в узагальненому сенсі;
3) $\forall\ \eta \in X'$ $\frac{d}{dt}\langle u, \eta\rangle = \langle w, \eta\rangle$ в сесні скалярних розподілів на (a, b).
Якщо виконуються 1)-3), то, зокрема, $u(\cdot)$ м.с. дорівнює деякій неперервній функції із $[a, b]$ в X.

При обгрунтуванні граничних переходів будемо використовувати наступні леми.

Лема 3.0.2 (Лема Ліонса). [101] Нехай $Q \subset \mathbb{R}^m$ – обмежена область, $g, g_k \in L^p(Q)$, $p > 1$ такі, що

$$\|g_k\|_{L^p(Q)} \le C, \quad g_k \to g \text{ м.с. на } Q$$

Тоді $g_k \to g$ слабо в $L^p(Q)$.

Лема 3.0.3 (**Лема Діні**). [94] *Нехай на відрізку $[\tau, T]$ задані неперервні, монотонно не зростаючі функції $\{f_n\}_{n\geq 1}$, f, причому $f_n(t) \to f(t)$ м.с. на $[\tau, T]$. тоді:*
а) $\forall\ t_0 \in (\tau, T)\quad f_n(t_0) \to f(t_0)$;
б) $\forall\ t_0 \in (\tau, T)\quad \forall\ t_n \to t_0\quad f_n(t_n) \to f(t_0)$;
в) якщо $f_n(\tau) \to f(\tau)$, то $\forall\ t_n \searrow \tau\ f_n(t_n) \to f(\tau)$.

Лема 3.0.4 (**Лема про компактність**). [101] *Нехай X_0, X, X_1 - банахові простори, X_0, X_1 - рефлексивні, $X_0 \subset X \subset X_1$, вкладення $X_0 \subset X$ - компактне, $p_0 > 0,\ p_1 > 0,\ T > 0$ - задані. Нехай послідовність функцій $\{v_n\}$ така, що*

1) $\{v_n\}$ обмежена в $L^{p_0}(0, T; X_0)$;

2) $\{\frac{dv_n}{dt}\}$ обмежена в $L^{p_1}(0, T; X_1)$.

Тоді деяка підпослідовність $\{v_n\}$ є збіжною в $L^{p_0}(0, T; X)$.

3.1 Глобальна розв'язність та апріорні оцінки

Відносно невідомої функції $y = y(t, x)$ розглядається задача

$$\begin{cases} y_t = a\triangle y(t, x) - f(t, y(t, x)) + h(t, x) + g(y(t, x))d(t),\ (t, x) \in (\tau, T) \times \Omega, \\ y(t, x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

де константа $a > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ – початковий момент часу, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область і виконані наступні умови:

$$\begin{aligned} &f \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}),\ g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}),\ h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega)),\ d \in L^2_{loc}(\mathbb{R}) \\ &\exists\ C_1,\ C_2 > 0,\ C_3 > 0\ \alpha > 0,\ p \geq 2\ \forall\ (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ &|f(t, y)| \leq C_1(1 + |y|^{p-1}),\ f(t, y)y \geq \alpha|y|^p - C_2,\ |g(y)| \leq C_3 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Надалі $a, \Omega, C_1, C_2, C_3, \alpha, p$ будемо називати константами задачі (3.1).

Фазовим простором задачі (3.1) є простір $L^2(\Omega)$, норму і скалярний добуток в якому позначатимемо $\|\cdot\|$ і $(\cdot, \cdot)$ відповідно. Через $\|\cdot\|_{H^1_0}$ і $((\cdot, \cdot))$ будемо позначати норму і скалярний добуток в $H^1_0(\Omega)$.

Оскільки в силу умов (3.2) $|f(t,y)|^q \leq \widetilde{C}_1(1+|y|^p)$, де $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то маємо наступне означення розв'язку (3.1):

Означення 3.1.1. *Функція* $y = y(t,x) \in L^2(\tau,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau,T;L^p(\Omega))$ *називається розв'язком задачі* (3.1) *на* (τ,T), *якщо для довільного* $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ *в сенсі скалярних розподілів на* (τ,T)

$$\frac{d}{dt}(y,v) + a((y,v)) + (f(t,y),v) - (h,v) - (g(y)d,v) = 0, \tag{3.3}$$

тобто $\forall\ \eta \in \mathbb{C}_0^\infty(\tau,T)$

$$-\int_\tau^T (y,v)\eta_t dt + \int_\tau^T \Big(a((y,v)) + (f(t,y),v) - (h,v) - (g(y)d(t),v)\Big)\eta dt = 0 \tag{3.4}$$

Наступні результати узагальнюють відомі результати з [90].

Лема 3.1.1. [92, 102] *Якщо* $y \in L^2(\tau,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau,T;L^p(\Omega))$, $y_t = \eta_1 + \eta_2 \in L^2(\tau,T;H^{-1}(\Omega)) + L^q(\tau,T;L^q(\Omega))$, *то* $y \in \mathbb{C}([\tau,T];L^2(\Omega))$, *відображення* $t \mapsto \|y(t)\|$ *є абсолютно неперервним на* $[\tau,T]$ *і м.с. на* $[\tau,T]$ *виконується рівність*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = \langle y_t, y\rangle = \langle \eta_1, y\rangle + \langle \eta_2, y\rangle, \tag{3.5}$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *– спарювання між* $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ *і* $H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega)$.

Розглянемо клас функцій

$$W_\tau^T = L^2(\tau,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau,T;L^p(\Omega)) \cap \mathbb{C}([\tau,T];L^2(\Omega))$$

Лема 3.1.2. *Для довільних* $y_\tau \in L^2(\Omega)$, $T > \tau$ *задача (3.1) за умов (3.2) має принаймні один розв'язок в класі* W_τ^T, *для якого* $y(\tau) = y_\tau$.

Крім того, для довільного $y \in W_\tau^T$ *– розв'язку (3.1) справедливі оцінки:*

$\forall\ t \geq s,\ t, s \in [\tau, T]$

$$\begin{aligned} &\|y(t)\|^2 + a\int_s^t \|y(\tau)\|^2_{H_0^1} d\tau + 2\alpha \int_s^t \|y(\tau)\|^p_{L^p} d\tau \leq \\ &\|y(s)\|^2 + C_4 \int_s^t (\|h(\tau)\|^2 + |d(\tau)|^2 + 1) d\tau \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\|y(t)\|^2 \leq \|y(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} + C_5 \int_s^t (\|h(\tau)\|^2 + |d(\tau)|^2 + 1) e^{-\delta(t-\tau)} d\tau \tag{3.7}$$

причому додатні константи C_4, C_5, δ залежать лише від констант задачі (3.1).

Доведення. Спочатку покажемо, що вибір класу W_τ^T диктується самою постановкою задачі (3.1). Нехай $y = y(t,x) \in L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\Omega))$ – розв'язок (3.1). Оскільки для $s \geq \max\{1; (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})n\}$ $H_0^s(\Omega) \subset L^p(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, то $H^{-1}(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega)$, $L^q(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega)$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Отже $L^2(\tau, T; H^{-1}(\Omega)) + L^q(\tau, T; L^q(\Omega)) \subset L^q(\tau, T; H^{-s}(\Omega))$. Застосуємо лему 3.0.1 для $y = y(t,x) \in L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\Omega)) \subset L^q(\tau, T; H^{-s}(\Omega))$ – розв'язку (3.1), $w = a\triangle y - f(t,y) + h(t,x) + g(y)d(t) \in L^2(\tau, T; H^{-1}(\Omega)) + L^q(\tau, T; L^q(\Omega)) + L^2(\tau, T; L^2(\Omega)) \subset L^q(\tau, T; H^{-s}(\Omega))$, $X = H^{-s}(\Omega)$. Тоді з (3.3) маємо, що $y' = w$, отже в силу леми 3.1.1 будь-який розв'язок (3.1) $y = y(t,x)$ з класу $L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\Omega))$ належить $\mathbb{C}([\tau, T]; L^2(\Omega))$, відображення $t \mapsto \|y(t)\|^2$ є абсолютно неперервним на $[\tau, T]$ і м.с. на $[\tau, T]$ виконується рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = -a\|y(t)\|^2_{H_0^1} - (f(t, y(t)), y(t)) + (h(t), y(t)) + (g(y)d(t), y(t)) \tag{3.8}$$

Вкладення $y \in \mathbb{C}([\tau, T]; L^2(\Omega))$ дозволяє для задачі (3.1) ставити задачу Коші виду

$$y(t,x)|_{t=\tau} = y_\tau(x) \in L^2(\Omega)$$

і шукати розв'язок лише в класі $L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\Omega))$.

Існування розв'язку встановимо методом гальоркінських апроксимацій. Нехай $\{w_j\}_{j=1}^\infty \subset H_0^s(\Omega)$ – ортонормований базис в $L^2(\Omega)$, $P_N : L^2(\Omega) \mapsto$

$[w_1, ..., w_N]$ – ортопроектор, $\forall\, y \in L^2(\Omega)$ $P_N y = \sum\limits_{j=1}^{N} (y, w_j) w_j$. Для довільного $N \geq 1$ розглянемо $y^N = y^N(t,x) = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j^N(t) w_j(x)$, де невідомі функції $\{c_j^N(\cdot)\}_{j=1}^N$ задовольняють наступну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} (y_t^N, w_j) + a((y^N, w_j)) + (f(t, y^N), w_j) - (g(y^N), w_j) d(t) = (h(t), w_j), \\ j = \overline{1, N} \\ y^N(\tau) = y_\tau^N \to y_\tau \quad \text{в } L^2(\Omega) \end{cases} \tag{3.9}$$

В силу неперервності функцій

$$(t, s_1, ..., s_N) \mapsto \int\limits_\Omega f(t, \sum_{i=1}^{N} s_i w_i(x)) w_j(x) dx,$$

$$(s_1, ..., s_N) \mapsto \int\limits_\Omega g(\sum_{i=1}^{N} s_i w_i(x)) w_j(x) dx,$$

і вимірності відображень $t \mapsto d(t)$, $t \mapsto (h(t), w_j)$ за теормемою Каратеодорі для довільного $N \geq 1$ існує $T_N > \tau$ таке, що розв'язок (3.9) y^N існує принаймні на $[\tau, T_N]$. Виведемо апріорні оцінки, з яких зокрема, буде випливати $T_N = T$.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y^N(t)\|^2 + a\|y^N(t)\|^2_{H_0^1} + (f(t, y^N(t)), y^N(t)) =$$

$$(h(t), y^N(t)) + d(t)(g(y^N(t)), y^N(t)),$$

$$\frac{d}{dt}\|y^N(t)\|^2 + 2a\|y^N(t)\|^2_{H_0^1} + 2\alpha\|y^N(t)\|^p_{L^p} \leq$$

$$2|(h(t), y^N(t))| + 2|d(t)||(g(y^N(t)), y^N(t))| + 2C_2|\Omega|,$$

$$\frac{d}{dt}\|y^N(t)\|^2 + a\|y^N(t)\|^2_{H_0^1} + \alpha\|y^N(t)\|^p_{L^p} \leq C_4(\|h(t)\|^2 + |d(t)|^2 + 1), \tag{3.10}$$

де константа $C_4 > 0$ за рахунок обмеженості функції g не залежить від N.

Тоді для $t \geq s$

$$\begin{array}{l} \|y^N(t)\|^2 + a\int\limits_s^t \|y^N(\tau)\|^2_{H_0^1} d\tau + \alpha\int\limits_s^t \|y^N(\tau)\|^p_{L^p} d\tau \leq \\ \|y^N(s)\|^2 + C_4\int\limits_s^t (\|h(\tau)\|^2 + |d(\tau)|^2 + 1) d\tau \end{array}. \tag{3.11}$$

З оцінки (3.11) одразу маємо, що $T_N = T$ і послідовність $\{y^N\}$ обмежена в W_τ^T. Крім того, в силу (3.9)

$$y_t^N = P_N w(y^N) = P_N(a\triangle y^N - f(t, y^N) + h(t,x) + d(t)g(y^n)),$$

отже, послідовність $\{y_t^N\}$ обмежена в $L^2(\tau, T; H^{-1}(\Omega))+$ $L^q(\tau, T; L^q(\Omega)) \subset L^q(\tau, T; H^{-s}(\Omega))$. Тоді, в силу леми про компактність 3.0.4 існує функція $y = y(t,x) \in L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\Omega)) \cap$ $L^\infty(\tau, T; L^2(\Omega))$ така, що по підпослідовності

$$\begin{gathered} y^N \to y \text{ слабо } \text{ в } L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\Omega)), \\ y^N \to y \text{ сильно } \text{ в } L^2(\tau, T; L^2(\Omega)), \\ y^N(t) \to y(t) \text{ в } L^2(\Omega) \text{ для м.в. } t \in (\tau, T), \\ y^N(t,x) \to y(t,x) \text{ для м.в. } (t,x) \in (\tau, T) \times \Omega. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Звідси, зокрема,

$$f(t, y^N(t,x)) \to f(t, y(t,x)) \text{ для м.в. } (t,x) \in (\tau, T) \times \Omega,$$

$$g(y^N(t,x)) \to g(y(t,x)) \text{ для м.в. } (t,x) \in (\tau, T) \times \Omega.$$

Оскільки в силу (3.11) послідовність $\{f(t, y^N)\}$ обмежена в $L^q(\tau, T; L^q(\Omega))$, а послідовність $\{g(y^N)\}$ обмежена в $L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$, то по підпослідовності

$$f(t, y^N) \to \chi_1 \text{ слабо } \text{ в } L^q(\tau, T; L^q(\Omega)),$$

$$g(y^N) \to \chi_2 \text{ слабо } \text{ в } L^2(\tau, T; L^2(\Omega)).$$

Тоді в силу леми Ліонса $\chi_1 = f(t,y)$, $\chi_2 = g(y)$. Цей факт, разом зі збіжностями (3.12) дозволяє в рівності

$$-\int\limits_0^T (y^N, w_j)\eta_t dt + \int\limits_0^T (a((y^N, w_j))+ \tag{3.13}$$

$$+(f(t, y^N), w_j) - (h(t), w_j) - d(t)(g(y^N), w_j))\eta dt = 0$$

перейти до границі при $N \to \infty$ для кожного фіксованого $j \geq 1$ і в силу повноти системи $\{w_j\}$ в $L^p(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ отримати, що гранична функція y задовольняє (3.4). Отже $y = y(t,x) \in L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\Omega))$ – розв'язок (3.1), що в силу леми 3.1.1 означає $y \in W_\tau^T$. Залишилося довести, що $y(\tau) = y_\tau$. З леми про компактність $y^N(\tau) \to y(\tau)$ в $H^{-s}(\Omega)$, але за побудовою $y^N(\tau) \to y_\tau$ в $L^2(\Omega)$, що і приводить до рівності $y(\tau) = y_\tau$.

Тепер нехай $y \in W_\tau^T$ – довільний розв'язок (3.1). Тоді м.с. на $[\tau, T]$ справедлива рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = -a\|y(t)\|^2_{H_0^1} - (f(t, y(t)), y(t))+ \tag{3.14}$$

$$+(h(t), y(t)) + d(t)(g(y(t)), y(t)),$$

з якої для всіх $t, s \in [\tau, T]$, $t \geq s$ маємо

$$\|y(t)\|^2 + 2a\int\limits_s^t \|y(\tau)\|^2_{H_0^1} d\tau + 2\int\limits_s^t (f(t,y), y)d\tau =$$
$$\|y(s)\|^2 + 2\int\limits_s^t (h(\tau), y(\tau))d\tau + 2\int\limits_s^t d(\tau)(g(y(\tau)), y(\tau))d\tau$$

звідки стандартним чином маємо (3.6). Крім того, з (3.14) маємо, що для м.в. $t \in [\tau, T]$

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 + \delta\|y(t)\|^2 \leq C_5(\|h(t)\|^2 + |d(t)|^2 + 1) \tag{3.15}$$

з константами $\delta > 0$, $C_5 \geq 0$, що залежать лише від констант задачі (3.1). Звідси, застосовуючи лему Гронуола, маємо (3.7).

Лема доведена. $\square$

Зауваження 3.1.1. *Крім оцінок (3.6),(3.7) для всіх $t \geq s$, $t, s \in [\tau, T]$*

справедлива оцінка

$$\|y(t)\|^2 \leq \|y(s)\|^2 + \int_s^t (h(p), y(p))dp + C_2|\Omega|(t-s) + \int_s^t d(p)(g(y(p)), y(p))dp$$

Тепер розглянемо послідовність задач (3.1) (будемо позначати їх $(3.1)_n$, $n \geq 0$, $(3.1)_0 = (3.1)$), де замість функцій $h(t,x)$ і $d(t)$, що визначатимуть збуреня, стоять функції $h_n(t,x)$, $d_n(t)$ відповідно, що мають наступні властивості: для довільних $T > \tau$, $\theta \in L^2(\tau,T;L^2(\Omega))$, $\psi \in L^2(\tau,T)$

$$\begin{gathered}\int_\tau^T \int_\Omega (h_n(t,x) - h(t,x))\theta(t,x)dxdt \to 0,\ n \to \infty, \\ \int_\tau^T (d_n(t) - d(t))\psi(t)dt \to 0,\ n \to \infty\end{gathered} \tag{3.16}$$

Тоді з теореми 3.1.2 для довільних $T > \tau$, $n \geq 0$, $y^n_\tau \in L^2(\Omega)$, задача $(3.1)_n$ має принаймні один розв'язок в класі W^T_τ.

Лема 3.1.3. *Нехай $\{y^n\} \subset W^T_\tau$ – послідовність розв'язків задач $(3.1)_n$, причому $y^n(\tau) \to y_\tau$ слабо в $L^2(\Omega)$. Нехай задана послідовність $\{t_n\} \subset [\tau,T]$ така, що $t_n \to t_0 \in [\tau,T]$. Тоді існує $y \in W^T_\tau$ – розв'язок (3.1) такий, що $y(\tau) = y_\tau$ і принаймні по підпослідовності $y^n(t_n) \to y(t_0)$ слабо в $L^2(\Omega)$.*
Якщо $t_0 \in (\tau,T)$, то по підпослідовнотсі $y^n(t_n) \to y(t_0)$ сильно в $L^2(\Omega)$.
Якщо ж $y^n(\tau) \to y_\tau$ сильно в $L^2(\Omega)$, то для $t_n \searrow \tau$ по підпослідовності $y^n(t_n) \to y_\tau$ сильно в $L^2(\Omega)$.

Доведення. Оскільки в силу (3.16)

$$\{h_n\} \text{ обмежена в } L^2(\tau,T;L^2(\Omega)),$$

$$\{d_n\} \text{ обмежена в } L^2(\tau,T),$$

то з оцінок (3.6),(3.7) маємо, що послідовність $\{y^n\}$ обмежена в W^T_τ. Тоді послідовність $y^n_t = a\triangle y^n - f(t,y^n) + h_n(t,x) + d_n(t)g(y_n)$ – обмежена в $L^2(\tau,T;H^{-1}(\Omega))+ L^q(\tau,T;L^q(\Omega)) \subset L^q(\tau,T;H^{-s}(\Omega))$, отже, аналогічно міркуванням з попередньої леми, існує функція $y = y(t,x) \in$

$L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\Omega)) \cap L^\infty(\tau, T; L^2(\Omega))$ така, що по підпослідовності

$$\begin{gathered} y^n \to y \text{ слабо в } L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(\tau, T; L^p(\Omega)), \\ y^n \to y \text{ сильно в } L^2(\tau, T; L^2(\Omega)), \\ y^n(t) \to y(t) \text{ в } L^2(\Omega) \text{ для м.в. } t \in (\tau, T), \\ y^n(t,x) \to y(t,x) \text{ для м.в. } (t,x) \in (\tau, T) \times \Omega. \end{gathered} \tag{3.17}$$

Звідси, зокрема, маємо, що $f(t, y^n) \to f(t, y)$ слабо в $L^q(\tau, T; L^q(\Omega))$. Крім того,

$$g(y^n(t,x)) \to g(t, y(t,x)) \text{ для м.в. } (t,x) \in (\tau, T) \times \Omega,$$

що в силу обмеженості g дозволяє скористатись теоремою Лебега і стверджувати, що

$$g(y^n) \to g(y) \text{ в } L^2(\tau, T; L^2(\Omega)),$$

$$\forall\, v \in L^2(\Omega)\ (g(y^n), v) \to (g(y), v) \text{ в } L^2(\tau, T).$$

Тоді в рівності

$$-\int_\tau^T (y^n, v)\eta_t dt + \int_\tau^T (a((y^n, v)) + (f(t, y^n), v) - (h_n, v) - d_n(t)(g(y^n), v))\eta dt = 0$$

можемо перейти до границі при $n \to \infty$ і отримати, що $y \in W_\tau^T$ – розв'язок (3.1).

Далі, розглядаючи y^n, y_t^n як елементи простору $L^1(\tau, T; H^{-s}(\Omega))$, з леми 3.1.2 маємо для всіх $t, s \in [\tau, T]$, $t \geq s$

$$y^n(t) = y^n(s) + \int_s^t y_t^n dt,$$

де рівність розуміється в просторі $H^{-s}(\Omega)$. Звідси

$$\|y^n(t) - y^n(s)\|_{H^{-s}} \leq$$

$$\int_s^t \|y_t^n\|_{H^{-s}} \leq (\int_\tau^T \|y_t^n\|_{H^{-s}}^q)^{\frac{1}{q}} (t-s)^{\frac{1}{p}} \leq C_6 (t-s)^{\frac{1}{p}},$$

де константа $C_6 > 0$ не залежить від n. З цієї нерівності, теореми Асколі-Арцела і обмеженості послідовності $\{y^n(t_n)\}$ в $L^2(\Omega)$, виводимо, що по під-послідовності $y^n(t_n) \to y(t_0)$ слабо в $L^2(\Omega)$.
Доведемо, що у випадку $t_0 \in (\tau, T)$ ця збіжність є сильною. Для цього використаємо лему (3.0.3). Розглянемо функції:

$$J_n(t) = \|y^n(t)\|^2 - \int\limits_\tau^t (h_n(p), y^n(p))dp - C_2|\Omega|t - \int\limits_\tau^t d_n(p)(g(y^n(p)), y^n(p))dp$$

$$J(t) = \|y(t)\|^2 - \int\limits_\tau^t (d(p), y(p))dp - C_2|\Omega|t - \int\limits_\tau^t d(p)(g(y(p)), y(p))dp.$$

З попередніх міркувань $J_n(\cdot),\ J(\cdot) \in \mathbb{C}([\tau, T])$, $\|y^n(t)\| \to \|y(t)\|$ м.с. на $[\tau, T]$ і в силу зауваження 3.1.1 функції $J_n(\cdot),\ J(\cdot)$ є монотонно не зростаючими на $[\tau, T]$. Оскільки $h_n \to h$ слабо в $L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$, $y^n \to y$ сильно в $L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$, $g(y^n) \to g(y)$ сильно в $L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$, то $\forall\ t \in [\tau, T]$

$$\int\limits_\tau^t ((h_n(p), y^n(p))dp \to \int\limits_\tau^t ((h(p), y(p))dp,$$

$$\int\limits_\tau^t d_n(p)(g(y^n(p)), y^n(p))dp \to \int\limits_\tau^t d(p)(g(y(p)), y(p))dp.$$

Звідси $J_n(t) \to J(t)$ для м.в. $t \in [\tau, T]$. В силу леми 3.0.3 $\forall\ t_n \to t_0 \in (\tau, T)$ $J_n(t_n) \to J(t_0)$, і якщо $J_n(\tau) \to J(\tau)$, то для будь-якої $t_n \searrow \tau$ $J_n(t_n) \to J(\tau)$. Звідси $\limsup \|y^n(t_n)\| \le \|y(t_0)\|$, але оскільки $y^n(t_n) \to y(t_0)$ слабо в $L^2(\Omega)$, то справедлива нерівність $\liminf \|y^n(t_n)\| \ge \|y(t_0)\|$. Отже, $y^n(t_n) \to y(t_0)$ сильно в $L^2(\Omega)$.

Лема доведена. $\square$

3.2 Локальна стійкість від входу до стану в системі реакція-дифузія

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ розглянемо наступну загальну систему типу реакції-дифузії:

$$\begin{cases} y_t = a\Delta y - f(y) + h(x) + g(y)d(t), \ x \in \Omega, \ t > 0, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

де $y = y(t,x) = (y^1(t,x), \dots, y^N(t,x))$ – невідомі вектор-функції, $h = (h^1, \dots, h^N)$, $f = (f^1, \dots, f^N)$ – задані вектор-функції, $g = ((g^{ij}))_{i,j=1}^N$ – задані матричнозначні функції, a – дійсна матриця, розмірності $N \times N$ така, що $\frac{1}{2}(a + a^*) \geq \mu I$, $\mu > 0$, $d = (d^1, \dots, d^N)$ – зовнішні сигнали (збурення).

Припустимо, що всі компоненти функцій $f, \ g$ належать класу $\mathbb{C}(\mathbb{R}), \ h \in (L^2(\Omega))^N, \ \exists C_1, C_2, C_3 > 0, \ \gamma_i > 0, p_i \geq 2, \ i = \overline{1, N}$ такі, що $\forall v \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{i=1}^N |f^i(v)|^{\frac{p_i}{p_i-1}} \leq C_1(1 + \sum_{i=1}^N |v^i|^{p_i}), \tag{3.19}$$

$$\sum_{i=1}^N f^i(v)v^i \geq \sum_{i=1}^N \gamma_i |v^i|^{p_i} - C_2, \tag{3.20}$$

$$|g(v)| := \Big(\sum_{i,j=1}^N |g^{ij}(v)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C_3. \tag{3.21}$$

Також будемо вважати, що зовнішні сигнали обмежені, тобто

$$\forall \ i = 1, ..., N \quad d^i \in L^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Надалі будемо використовувати такі функціональні простори:

$$H = (L^2(\Omega))^N \text{ з нормою } \| \cdot \|, \ V = (H_0^1(\Omega))^N \text{ з нормою } \| \cdot \|_V,$$

$$D = (L^\infty(\mathbb{R}_+))^N \text{ з нормою } \| \cdot \|_\infty.$$

Позначимо

$$p = (p_1, \ldots, p_N),\ L^p(\Omega) = L^{p_1}(\Omega) \times \ldots \times L^{p_N}(\Omega).$$

Тоді, з заміною просторів скалярнозначних функцій на їх векторнозначні аналоги, справедливі всі результати попереднього підрозділу. Зокрема, в припущеннях (3.19)–(3.21) для будь-яких збурень $d \in D$ задача (3.18) є глобально розв'язною в слабкому сенсі у фазовому просторі H тобто, для будь-якої $y_0 \in H$ існує (можливо не єдина) функція $y = y(t,x) \in L^2_{loc}(0,+\infty; V) \bigcap L^p_{loc}(0,+\infty; L^p(\Omega))$ така, що для будь-яких $T > 0,\ v \in V \cap L^p(\Omega)$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} y(t,x)v(x)dx + \int\limits_{\Omega}\Big(a\nabla y(t,x)\nabla v(x)+$$
$$+f(y(t,x))v(x) - h(x)v(x) - g(y(t,x))d(t)v(x)\Big)dx = 0.$$

в сенсі скалярних розподілів на $(0,T)$, а також $y(0,x) = y_0(x)$. Також справедливо включення $y \in \mathbb{C}([0,+\infty); H)$. Кожен слабкий розв'язок (3.18) належить до класу абсолютно неперервних функцій, що діють з $[0,T]$ в H для кожного $T > \tau$ і для додатніх констант δ, C для майже всіх $t > 0$ в силу (3.15)

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 + \delta\|y(t)\|^2 \leq C(1 + \|d\|^2_\infty).$$

Отже,

$$\|y(t)\|^2 \leq \|y_0\|^2 e^{-\delta t} + \frac{C}{\delta}(1 + \|d\|^2_\infty),\ \forall t \geq 0. \tag{3.22}$$

Більше того, якщо $y_0^n \to y_0$ слабо в $H,\ d_n \to d$ слабо в $L^2(0,T)$ $\forall T > 0$ то по підпослідовності в силу леми 3.1.3

$$\forall t > 0\ y_n(t) \to y(t) \text{ in } H, \tag{3.23}$$

де y – розв'язок (3.18) з вихідним даними y_0 та збуреннями d.

Розглянемо незбурену систему ($d \equiv 0$)

$$\begin{cases} y_t = a\Delta y - f(y) + h(x),\ x \in \Omega,\ t > 0, \\ y|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Відомо [42], що відповідний m-напівпотік

$$S(t, y_0) = \{y(t) |\ y(\cdot) \text{ є слабким розв'язком (3.24)},\ y(0) = y_0\} \tag{3.25}$$

задовольняє умовам (K1)-(K3), (G1)-G4) леми 2.2.1, а отже, має компактний інваріантний стійкий глобальний атрактор Θ в H, тобто, існує компактна множина $\Theta \subset H$ така, що

(i) $\Theta = S(t, \Theta),\ t \geq 0$,

(ii) для кожної обмеженої множини $B \subset H$

$$\mathrm{dist}(S(t, B), \Theta) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Більше того, в силу оцінки (3.22) виконується властивість обмеженості (2.12), а отже, існує $\beta \in \mathcal{KL}$ $\forall y_0 \in H,\ \forall t \geq 0$ виконується:

$$\|S(t, y_0)\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t).$$

Тепер покажемо, що цей атрактор є стійким щодо неавтономних обмежених збурень. Покладемо для $d \in D$, $\tau \geq 0$

$$K_d^\tau \subset \mathbb{C}([\tau, +\infty); H)$$

$$K_d^\tau = \{y(t) |\ y(\cdot) \text{ є розв'язком ((3.18)) зі збуренням d на } [\tau, +\infty)\} \tag{3.26}$$

Тоді, очевидно, виконуються умови (D), (S1)-(S5) підрозділу 2.2, а отже, сім'я многозначних відображень

$$S_d(t, \tau, y_\tau) := \{y(t) |\ y(\cdot) \in K_d^\tau,\ y(\tau) = y_\tau\}, \tag{3.27}$$

породжує сім'ю строгих м-напівпроцесів.

Справедлива наступна теорема

Теорема 3.2.1. *Припустимо, що має місце* (3.19) – (3.21) *і, крім того, компоненти f належать до класу $C^1(\mathbb{R}^n)$, а відповідна матриця Якобі Df задовольняє таку нерівність:*

$$\exists L > 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n \ Df(v) \geq -L. \tag{3.28}$$

Тоді атрактор Θ незбуреної системи (3.24) *є локально робастно стійким по відношенню до збурень $d \in D = (L^\infty(\mathbb{R}_+))^N$, тобто для сім'ї м-напівпроцесів $\{S_d\}_{d\in D}$, що задається формулою* (3.27)*, виконується:*

$\exists r > 0, \ \exists \beta \in \mathcal{KL}, \ \exists \gamma \in \mathcal{K}$ *такі, що*

$$\|y_0\|_\Theta \leq r, \ \|d\|_\infty \leq r \ \Rightarrow \ \forall t \geq 0$$

$$\|S_d(t, 0, y_0)\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \tag{3.29}$$

Доведення. Перевіримо виконання умов теореми 2.2.2. Умова обмеженості 2.20 випливає з апріорної оцінки (3.22).

Перевіримо умову (2.18). Відомо [42], що за умови (3.28) задача (3.24) є однозначно глобально розв'язною в фазовому просторі H, отже м-напівпотік (3.25) є однозначним. Нехай $u(t) = S(t, y_0)$, $v(t) = S(t, z_0)$ і $w(t) = u(t) - v(t)$. Тоді для м.в. $t > 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 \leq 2L\|w(t)\|^2.$$

Отже, з леми Гронуола і в силу неперервності $t \mapsto \|w(t)\|$ виводимо, що для всіх $t \geq 0$

$$\|w(t)\| \leq \|w(0)\|e^{Lt},$$

тобто для всіх $y_0, z_0 \in H$

$$dist(S(t, y_0), S(t, z_0)) \leq e^{Lt}\|y_0 - z_0\|.$$

Перевіримо умову (2.19). Нехай $u(\cdot) \in K_d^0$, $u(0) = y_0$, тобто $u(t) \in S_d(t, 0, y_0)$, і $v(t) = S(t, y_0)$. Для різниці $w(t) = u(t) - v(t)$ для м.в. $t > 0$ маємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 \leq 2L\|w(t)\|^2 + C_3\|w(t)\|\|d\|_\infty.$$

Тоді $\forall\ T > 0\ \forall\ t \in [0, T]$

$$\|w(t)\|^2 \le 2L \int_0^t \|w(s)\|^2 ds + 2C_3 \sup_{s\in[0,T]} \|w(s)\| \|d\|_\infty T$$

Використовуючи при фіксованому $T > 0$ Лему Гронуола, одержуємо: $\forall\ t \in [0, T]$

$$\|w(t)\|^2 \le 2C_3 \sup_{s\in[0,T]} \|w(s)\| \|d\|_\infty T e^{2LT}.$$

З останньої нерівності виводимо:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|^2 \le 2C_3 \sup_{s\in[0,T]} \|w(s)\| \|d\|_\infty T e^{2LT}.$$

Отже, в силу довільності $T > 0$, остаточно отримуємо:

$$\forall\ t \ge 0\ \|w(t)\| \le 2C_3 \|d\|_\infty t e^{2Lt}.$$

Тоді для $\sigma(s) = s$, $D(r, t) = te^{2Lt}$ одержуємо (2.19). Теорема доведена.

$\square$

3.3 Властивість асимптотичного підсилення в системі реакція-дифузія

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ розглянемо систему реакція-дифузія

$$\begin{cases} y_t = a\Delta y - f(y) + g(x) + d(t, x),\ x \in \Omega, t > 0, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.30}$$

де $y = y(t, x) = (y^1(t, x), ..., y^N(t, x))$ – невідома вектор-функція, $f = (f^1, ..., f^N)$, $g = (g^1, ..., g^N)$ – задані функції, a – дійсна матриця $N \times N$ така, що $\frac{1}{2}(a + a^*) \ge \mu I$, $\mu > 0$, $d = (d^1, ..., d^N)$ – зовнішні збурення.

Припустимо, що виконуються наступні властивості:

$$g \in (L^2(\Omega))^N, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N),$$

$\exists\ C_1, C_2 > 0,\ \gamma_i > 0,\ p_i \geq 2,\ i = \overline{1, N}$ такі, що $\forall\ v \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{i=1}^{N} |f^i(v)|^{\frac{p_i}{p_i-1}} \leq C_1(1 + \sum_{i=1}^{N} |v^i|^{p_i}),$$

$$\sum_{i=1}^{N} f^i(v)v^i \geq \sum_{i=1}^{N} \gamma_i |v^i|^{p_i} - C_2.$$

як і в попередньому підрозділі, будемо використовувати функціональні простори:

$$H = (L^2(\Omega))^N,\ V = (H_0^1(\Omega))^N,\ L^p(\Omega) = L^{p_1}(\Omega) \times ... \times L^{p_N}(\Omega), p = (p_1, ..., p_N).$$

Вважаємо

$$d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H),\ \|d\|_\infty \leq R_0.$$

Тоді з результатів підрозділу 3.1 виводимо, що для будь-яких збурень $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ (навіть для $d \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H)$) задача (3.30) є глобально розв'язною у слабкому сенсі у фазовому просторі H, тобто для будь-якого $y_0 \in H$ існує функція $y = y(t, x) \in L^2_{loc}(0, +\infty; V) \bigcap L^p_{loc}(0, +\infty; L^p(\Omega))$ така, що для будь-яких $T > 0,\ v \in V \cap L^p(\Omega)$

$$\frac{d}{dt} \int\limits_\Omega y(t, x)v(x)dx + \int\limits_\Omega \Big(a\nabla y(t, x)\nabla v(x) +$$
$$+ f(y(t, x))v(x) - g(x)v(x) - d(t, x)v(x) \Big) dx = 0$$

в сенсі скалярних розподілів на $(0, T)$, $y \in \mathbb{C}([0, +\infty); H)$ та $y(0, x) = y_0(x)$. Єдиність такого розв'язку не гарантується.

Розглянемо незбурену систему $(d \equiv 0)$

$$\begin{cases} y_t = a\Delta y - f(y) + g(x),\ x \in \Omega, t > 0, \\ y|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Аналогічно попередньому підрозділу, можемо стверджувати, що відповідний m-напівпотік

$$S(t,y_0)=\{y(t)|\ y(\cdot)\ \text{є слабким розв'язком (3.31)},\ y(0)=y_0\} \qquad (3.32)$$

задовольняє умовам (K1)-(K3), (G1)-G4) леми 2.2.1, а отже, має компактний інваріантний стійкий глобальний атрактор Θ в H

Дана властивість гарантує, що будь-який розв'язок (3.31) прямує до Θ при $t\to\infty$. Нас цікавить довгострокова поведінка відповідних розв'язків у випадку системи (3.30), на яку діє зовнішнє збурення d.

Далі буде доведено, що за певних припущень щодо збурень глобальний атрактор є робастним в тому сенсі, що існує $\gamma\in\mathcal{K}$ таке, що для будь-якого $y_0\in H$ та будь-якого $d\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$ виконується

$$\lim_{t\to\infty}\sup\|S_d(t,y_0)\|_\Theta\le\gamma(\|d\|_\infty). \qquad (3.33)$$

Варто зазначити, що на відміну від попереднього підрозділу, ця оцінка є глобальною по відношенню до початкових даних. В науковій літературі властивість такого типу називають асимптотичне підсилення (Asymptotic Gain) [33].

Вважаємо, що $d\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$, $\|d\|_\infty\le R_0$. Опираючись на [44], розглянемо множину

$$\Sigma(d)=cl_{L^{2,\omega}_{loc}(\mathbb{R}_+;H)}\{d(\cdot+\tau)\,|\,\tau\ge0\},$$

де cl_XA означає замикання множини A в топології простору X. Відомо, що $\Sigma(d)$ є інваріантною щодо зсувів, компактною в $L^{2,\omega}_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$ множиною, і

$$\forall h\in\Sigma(d)\ \|h\|_+^2:=\sup\int_t^{t+1}\|h(s)\|_H^2dx\le\|d\|_\infty^2. \qquad (3.34)$$

Розглянемо сім'ю множинозначних відображень

$$\{S_h:\mathbb{R}_+\times H\mapsto 2^H\}, \qquad (3.35)$$

де $S_h(t,y_0)=\{y(t)\,|\,y(\cdot)$ є розв'язком (3.30) зі збуренням $\alpha=h,\ y(0)=y_0\}_{h\in\Sigma(d)}$.

Виявляється, що властивість робастної стійкості типу (3.33) можна встановити, використовуючи властивості рівномірних атракторів (3.35). Позначимо $S_\Sigma(t, y_0) = \bigcup\limits_{h\in\Sigma} S_h(t, y_0)$.

Означення 3.3.1. *Компактна множина $\Theta_\Sigma \subset H$ називається рівномірним атрактором сім'ї $\{S_h\}_{h\in\Sigma}$, якщо для довільної обмеженої $B \subset H$*

$$\mathrm{dist}(S_\Sigma(t, B), \Theta_\Sigma) \to 0 \tag{3.36}$$

і Θ_Σ є мінімальною замкненою множиною, що задовольняє (3.36).

Теорема 3.3.1. [44, 50] *Для кожного збурення d, $\|d\|_\infty \le R_0$, сім'я відображень $\{S_h\}_{h\in\Sigma(d)}$, що визначена в* (3.35), *має рівномірний атрактор $\Theta_{\Sigma(d)}$, причому*

$$\Theta_{\Sigma(d)} \subset S_{\Sigma(d)}(t, \Theta_{\Sigma(d)}) \ \forall t \ge 0. \tag{3.37}$$

Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 3.3.2. *Для розв'язків задачі* (3.30) *з обмеженими збуреннями $\|d\|_\infty \le R_0$ існує функція $\gamma \in K$ така, що $\forall y_0 \in H$*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|S_d(t, y_0)\|_\Theta \le \gamma(\|d\|_\infty), \tag{3.38}$$

де $\Theta \subset H$ – глобальний атрактор незбуреної системи (3.31).

Доведення. Припустимо, що має місце гранична рівність

$$\mathrm{dist}(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta) \to 0, \|d\|_\infty \to 0. \tag{3.39}$$

Доведемо, що з (3.39) випливає (3.38). Дійсно, за побудовою $\Sigma(0) = \{0\}$ і $d \in \Sigma(d)$. Отже, для $y_0 \in H$, $z \in \Theta_{\Sigma(d)}, t > 0$, $y(t) \in S_d(t, y_0)$ маємо: для $\theta \in \Theta$

$$\|y(t) - \theta\|_H \le \|y(t) - z\|_H + \|z - \theta\|_H \ \Rightarrow$$

$$\inf_{\theta\in\Theta} \|y(t) - \theta\|_H \le \|y(t) - z\|_H + \inf_{\theta\in\Theta} \|z - \theta\|_H \Rightarrow$$

$$\inf_{\theta\in\Theta}\|y(t)-\theta\|_H \le \inf_{z\in\Theta_{\Sigma(d)}}\|y(t)-z\|_H +$$
$$+\sup_{z\in\Theta_{\Sigma(d)}}\inf_{\theta\in\Theta}\|z-\theta\|_H \Rightarrow$$

$$\|y(t)\|_\Theta \le \operatorname{dist}(y(t),\Theta_{\Sigma(d)}) + \operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(d)},\Theta) \Rightarrow$$

$$\|S_d(t,y_0)\|_\Theta \le \operatorname{dist}(S_{\Sigma(d)}(t,y_0),\Theta_{\Sigma(d)}) +$$
$$+\operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(d)},\Theta).$$

Оскільки $\Theta_{\Sigma(d)}$ – рівномірний атрактор, то з (3.36) для кожного d маємо:

$$\operatorname{dist}(S_{\Sigma(d)}(t,u_0),\Theta_{\Sigma(d)}) \to 0, t\to+\infty.$$

Покладемо $\gamma(s) := \sup\limits_{\|d\|_\infty\le s}\operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(d)},\Theta) + s$. В силу (3.39) $\gamma \in K$ і $\operatorname{dist}(\Theta_{\Sigma(d)},\Theta) \le \gamma(\|d\|_\infty)$, що і означає виконання (3.38).

Отже, доведемо (3.39). З [50] маємо наступні властивості розв'язків задачі (3.30) при

$$d = h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H), \|h\|_+ < \infty :$$

1) дисипативність: $\forall y_0 \in H$ $\forall h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$, $\|h\|_+ < \infty$ $\forall y(\cdot) \in S_h(\cdot,y_0)$ $\forall t\ge 0$

$$\|y(t)\|_H^2 \le \|y_0\|_H^2 e^{-\delta t} + K(\|h\|_+^2+1), \tag{3.40}$$

де додатні константи δ, K залежать лише від констант задачі (3.30);

2) залежність від y_0, h: якщо $h_n \to h$ в $L^{2,\omega}_{loc}(\mathbb{R}_+;H)$, $y_0^n \to y_0$ слабо в H, то по деякій підпослідовності для $t>0$:

$$S_{h_n}(t,y_0^n) \ni y_n(t) \to y(t) \in S_h(t,y_0) \text{ в } H. \tag{3.41}$$

Тепер від супротивного припустимо, що (3.39) не має місця. Це означає, що $\exists d_n \to 0$ в $L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$ $\exists\varepsilon>0$ $\exists z_n \in \Theta_{\Sigma(d_n)}$ такі, що

$$\operatorname{dist}(z_n,\Theta) \ge \varepsilon. \tag{3.42}$$

З (3.40) виводимо: $\forall y(\cdot) \in S_{\Sigma(d)}(\cdot, y_0)$ $\forall t \geq 0$

$$\|y(t)\|_H^2 \leq \|y_0\|_H^2 e^{-\delta t} + K(\|d\|_\infty^2 + 1). \tag{3.43}$$

Оскільки в силу [50] $\xi \in \Theta_\Sigma \Leftrightarrow \xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$, де $\xi_n \in S_\Sigma(t_n, B)$ де $t_n \nearrow \infty$, $B \subset H$ – обмежена, то з (3.43) маємо:

$$\forall \xi \in \Theta_{\Sigma(d)} \ \|\xi\|_H^2 \leq K(\|d\|_\infty^2 + 1),$$

тобто існує обмежена $B_0 \subset H$ така, що $\forall d$, $\|d\|_\infty \leq R_0$

$$\Theta_{\Sigma(d)} \subset B_0.$$

Тоді $z_n \in \Theta_{\Sigma(d_n)} \subset S_{\Sigma(d_n)}(t, \Theta_{\Sigma(d_n)}) \subset S_{\Sigma(d_n)}(t, B_0)$.

Отже, $z_n = y_n(t) \in S_{h_n}(t, \xi_n)$, де $\xi_n \to \xi$ слабо в H, $\|h_n\|_+ \leq \|h_n\|_\infty \to 0$. Звідси $h_n \to 0$ в $L^{2,\omega}_{loc}(\mathbb{R}_+; H)$ і за властивістю (3.41) по підпослідовності

$$y_n(t) \to y(t) \in S(t, \xi) \subset S(t, B_0). \tag{3.44}$$

В силу рівномірного притягнення можемо вибрати $t > 0$ так, щоб

$$\operatorname{dist}(S(t, B_0), \Theta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді з (3.44)

$$z_n \to y(t) \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Theta),$$

що суперечить (3.42).

Теорема доведена. □

3.4 Робастна стійкість в системі ODE-PDE

Розглядається дисипативна еволюційна система, що складається з параболічної системи типу реакція-дифузія та системи звичайних диференціальних рівнянь, що збурюються вхідними обмеженими сигналами. Доводиться, що глобальний атрактор незбуреної системи є стійким в сенсі ISS щодо величини збурень.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – обмежена область. Розглядаємо задачу

$$\begin{cases} y_t = A \triangle y - f(y) + B(x)v(t) + D(x)d_1(t) \\ y|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{3.45}$$

$$\frac{dv}{dt} = -F(v) + \int\limits_{\Omega} G(x)y(x,t)dx + d_2(t) \tag{3.46}$$

Тут A – $N \times N$ матриця, $\frac{1}{2}(A + A^*) \geq \nu_1 I$,

$y = y(x,t) = (y^1, ..., y^N), v = v(t) = (v^1, ..., v^M)$ – невідомі функції, $B, D, G \in L^2(\Omega)$ – задані матриці відповідних розмірностей, $d_1 \in L^\infty(0, +\infty; \mathbb{R}^N), d_2 \in L^\infty(0, +\infty; \mathbb{R}^M)$ – вхідні «збурюючі» сигнали, і для всіх $y, w \in \mathbb{R}^N, u \in \mathbb{R}^M$ виконуються умови:

$$\begin{gathered} f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), F \in C^1(\mathbb{R}^M; \mathbb{R}^M), \\ \sum_{i=1}^N f^i(y)y^i \geq \nu_2 \cdot \sum_{i=1}^N |y^i|^{p_i} - c_1, \\ \sum_{i=1}^N |f^i(y)|^{\frac{p_i}{p_i-1}} \leq c_2(\sum_{i=1}^N |y^i|^{p_i} + 1), \\ (Df(y)w, w)_{\mathbb{R}^N} \geq -c_3 \cdot \|w\|^2_{\mathbb{R}^N}, \\ \sum_{i=1}^M F^i(u)u^i \geq \nu_3 \|u\|^2_{\mathbb{R}^M} - c_4, \end{gathered} \tag{3.47}$$

де $\nu_1, \nu_2, \nu_3, c_1, c_2, c_3, c_4$ – задані додатні константи, $p_i \geq 2, i = \overline{1, N}$.

Надалі будемо використовувати позначення:

$$p = (p_1, ..., p_N), q = (q_1, ..., q_N), q_i = \frac{p_i}{p_i - 1}$$

$$L^p(\Omega) = L^{p_1}(\Omega) \times ... \times L^{p_N}(\Omega)$$

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^{p_1}(0, T; L^{p_1}(\Omega)) \times ... \times L^{p_N}(0, T; L^{p_N}(\Omega))$$

$$H = (L^2(\Omega))^N, \ V = (H_0^1(\Omega))^N$$

$\mathbb{AC}([0, T]; \mathbb{R}^M)$ – простір абсолютно неперервних функцій із $[0, T]$ в $\mathbb{R}^M$.

За умов (3.47) задача (3.45),(3.46) для довільних збурень $d = \{d_1, d_2\} \in$ та для довільних початкових даних $z_0 = \{y_0, v_0\}$ з фазового простору $X = (L^2(\Omega))^N \times \mathbb{R}^M$ та $\forall\ T > 0$ має єдиний слабкий розв'язок [35]:

$$z = \{y, v\} \in (L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; L^p(\Omega))) \times \mathbb{AC}([0, T]; \mathbb{R}^M).$$

Продовжуючи кожен такий розв'язок на $[0, +\infty)$, введемо позначення:

$$S_d(t, z_0) := z(t),$$

$z(\cdot)$ – розв'язок (3.45), (3.46) зі збуренням d, $z(0) = z_0$. Ми доведемо, що за відсутності збурень ($d \equiv 0$) напівгрупа S_0 має глобальний атрактор $\Theta \subset X$, тобто існує компактна множина $\Theta \subset X$, яка є інваріантною:

$$S_0(t, \Theta) = \Theta\ \forall\ t > 0$$

і рівномірно притягуючою:

$$\mathrm{dist}(S_0(t, B), \Theta) \to 0, t \to \infty \text{ для будь-якої обмеженої } B \subset X,$$

де тут і надалі

$$\mathrm{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|_X$$

За наявності збурень S_d вже не є напівгрупою, і виникає питання про те, як залежить відхилення траєкторій збуреної системи S_d від множини Θ в залежності від величини

$$\|d\|_\infty := \max\{\operatorname*{ess\,sup}_{t \geq 0} \|d_1(t)\|_{\mathbb{R}^N}, \operatorname*{ess\,sup}_{t \geq 0} \|d_2(t)\|_{\mathbb{R}^M}\}$$

При цьому, відхилення точки $z \in X$ від множини $\Theta \subset X$ будемо оцінювати за допомогою величини:

$$\|z\|_\Theta := \inf_{\theta \in \Theta} \|z - \theta\|_X$$

Наступна теорема доводить, що Θ є стійким в сенсі ISS, тобто

$$\exists\ r > 0, \exists\ \beta \in \mathcal{KL}, \exists\ \gamma \in \mathcal{K} \text{ такі, що}$$

$$\forall\ \|z_0\|_\Theta \leq r\ \forall\ \|d\|_\infty \leq r\ \forall\ t \geq 0$$

$$\|S_d(t, z_0)\|_\Theta \leq \beta(\|z_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty). \tag{3.48}$$

Теорема 3.4.1. *За умов (3.47) при $d = 0$ напівгрупа S_0 має глобальний атрактор Θ в фазовому просторі X, який є стійким щодо збурень в сенсі (3.48).*

Доведення. Спочатку доведемо існування глобального атрактору у S_0. Згідно [43] для цього достатньо встановити, що S_0 є дисипативною, неперервною і асимптотично компактною.

Встановимо деякі апріорні оцінки для $z(t) = \{y(t), v(t)\} = S_d(t, z_0),\ v \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{R}^M)$. Оскільки для $y \in L^2(0, T; V) \cap L^p(0, T; L^p(\Omega))$, в силу (3.47)

$$A \triangle y - f(y) + B \cdot v + D \cdot d\ \in\ L^2(0, T; V^*) + L^q(0, T; L^q(\Omega)) + L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

$$\subset L^2(0, T; V^*) + L^q(0, T; L^q(\Omega)),$$

то згідно [44] $y : [0, T] \mapsto H$ є абсолютно неперервною функцією, і після множення (3.45) на y скалярно в H, (3.46) на V скалярно в R^M одержуємо: для м.в. $t > 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|_H^2 + \nu_1\|y(t)\|_V^2 + \nu_2\|y(t)\|_{L^p}^p \leq$$

$$\leq c_1|\Omega| + \|B\|_{L^2} \cdot \|v(t)\|_{\mathbb{R}^M} + \|D\|_{L^2} \cdot \|d\|_\infty \tag{3.49}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \nu_3\|v(t)\|_{\mathbb{R}^M}^2 \leq c_4 + \|G\|_{L^2} \cdot \|y(t)\|_H + \|d\|_\infty \tag{3.50}$$

З (3.49), (3.50), нерівності Юнга і нерівності Пуанкаре виводимо, що існують $\nu > 0, c > 0$, що залежать лише від констант задачі та $\|B\|_{L^2}, \|G\|_{L^2}$ такі, що для м.в. $t > 0$

$$\frac{d}{dt}(\|y(t)\|_H^2 + \|v(t)\|_{\mathbb{R}^M}^2) + \nu(\|y(t)\|_H^2 + \|v(t)\|_{\mathbb{R}^M}^2) \leq c + \|d\|_\infty(1 + \|D\|_{L^2}).$$

Звідси, в силу неперервності $z(\cdot) = \{y(\cdot), v(\cdot)\} : [0, +\infty) \mapsto X$ виводимо:

$$\forall\ t \geq 0\ \|z(t)\|_X^2 \leq \|z_0\|_X^2 e^{-\nu t} + \frac{c}{\nu} + \frac{1 + \|D\|_{L^2}}{\nu} \cdot \|d\|_\infty \tag{3.51}$$

З (3.51) при $d = 0$ одержуємо дисипативність S_0.

Тепер розглянемо $z_1 - z_2$, де $z_1 = \{y_1, v_1\}$, $z_2 = \{y_2, v_2\}$ – розв'язки (3.45), (3.46) при $d_1 = d_2 = 0$. Використовуючи оцінку (3.51) при $d = 0$, одержуємо для кожного розв'язку:

$$\sup_{t \geq 0} \|z(t)\|_x^2 \leq \|z_0\|_X^2 + \frac{c}{\nu} \tag{3.52}$$

Звідси виводимо:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_1 - y_2\|_H^2 + \nu_1\|y_1 - y_2\|_V^2 \leq c_3\|y_1 - y_2\|_H^2 + \|B\|_{L^2}\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M}\|y_1 - y_2\|_H$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M}^2 \leq \sup_{\|v\|_{\mathbb{R}^M} \leq r_0} \|DF(v)\| \cdot \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M}^2 + \|G\|_{L^2}\|y_1 - y_2\|_H\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M},$$

де $r_0 = \sqrt{\max\{\|z_1(0)\|_X^2, \|z_2(0)\|_X^2\} + \frac{c}{\nu}}$.

Отже, з деякою константою $c(r_0) > 0$ одержуємо

$$\forall\ t \geq 0\ \|z_1(t) - z_2(t)\|_X \leq e^{c(r_0)t}\|z_1(0) - z_2(0)\|_X \tag{3.53}$$

З (3.53) випливає неперервність S_0.

Доведемо асимптотичну компактність S_0, тобто предкомпактність послідовності $\{\xi_n = S_0(t_n, z_0^n)\}$, де $t_n \to +\infty$, $\{z_0^n\}$ – обмежена в X.

Оскільки $\{\xi_n = S_0(1, S_0(t_n - 1, z_0^n))\}$, то в силу (3.51) достатньо показати предкомпактність $\{S_0(1, z_0^n)\}$, $\|z_0^n\|_X \leq r$.

Нехай $z_n(t) = \{y_n(t), v_n(t)\} = S_0(t, z_0^n)$, $\|z_0^n\|_X \leq r$.

Обмеженість, а отже предкомпактність $\{v_n(1)\}$ в $\mathbb{R}^M$ випливає з (3.51).

Доведемо, що

$$\|y_n(1)\|_V \leq K(r) \tag{3.54}$$

з деякою константою $K(r)$, яка не залежить від n. Тоді з компактності вкладення $V \subset H$ одержимо предкомпактність $\{y_n(1)\}$ в H.

Виведемо (3.54), слідуючи міркуванням з [35], які обгрунтовуються переходом до гальоркінських апроксимацій задачі (3.45), (3.46). Домножимо (3.45) на $\triangle y_n$ в H. З урахуванням умов (3.47) одержимо нерівність:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_n(t)\|_V^2 + \nu_1\| \triangle y_n(t)\|_H^2 \leq$$

$$\leq c_3\|y_n(t)\|_V^2 + \|B\|_{L^2}\|v_n(t)\|_{\mathbb{R}^M}\| \triangle y_n(t)\|_H + \|f(0)\|_{\mathbb{R}^N}\| \triangle y_n(t)\|_H. \quad (3.55)$$

Оскільки

$$\sup_{t\geq 0}\|v_n(t)\|_{\mathbb{R}^M} \leq \sqrt{r^2 + \frac{c}{\nu}}, \quad (3.56)$$

то з (3.55) виводимо:

$$\frac{d}{dt}\|y_n(t)\|_V^2 + \lambda\|y_n(t)\|_V^2 \leq c(r)(\|y_n(t)\|_V^2 + 1) \quad (3.57)$$

з деякими додатніми константами λ і $c(r)$.

Після множення (3.57) на $te^{\lambda t}$ маємо:

$$\frac{d}{dt}(t\|y_n(t)\|_V^2 e^{\lambda t}) \leq c(r)(\|y_n(t)\|_V^2 + 1)te^{\lambda t} + \|y_n(t)\|_V e^{\lambda t}.$$

Інтегруючи останню нерівність від 0 до 1, одержуємо:

$$\|y_n(1)\|_V^2 \leq (c(r) + 1)\int_0^1 \|y_n(t)\|_V^2 dt + c(r). \quad (3.58)$$

З нерівностей (3.49) і (3.56) одержуємо:

$$\nu_1 \int_0^1 \|y_n(t)\|_V^2 dt \leq \frac{1}{2}r^2 + c_1(\Omega) + \|B\|_{L^2}\sqrt{r^2 + \frac{c}{\nu}}. \quad (3.59)$$

З (3.58) і (3.59) виводимо оцінку (3.54).

Таким чином, напівргупа S_0 має глобальний атрактор $\Theta \subset X$. Встановимо його робастну стійкість в сенсі (3.48). Скористаємось Теоремою 2.2.2 розділу 2. Оцінки (3.52), (3.53) гарантують умови обмеженості і неперервності S_0. Залишилось довести, що $\exists\ \sigma_2 \in \mathcal{K}$ і неперервна функція

$\varphi : [0, +\infty)^2 \mapsto [0, +\infty)$ такі, що $\forall\ r > 0$

$$\overline{\lim_{t \to 0+}} \frac{\varphi(r,t)}{t} < \infty$$

і

$$\|z_0\|_X \le r, \|d\|_\infty \le r \implies \|S_d(t, z_0) - S_0(t, z_0)\|_X \le \varphi(r,t)\sigma_2(\|d\|_\infty)\ \forall\ t \ge 0.$$

Оскільки властивість (3.48) носить локальний характер, то без обмеження загальності можемо вважати, що $\|d\|_\infty \le 1$.
Нехай $z_1(t) = \{y_1(t), v_1(t)\} = S_d(t, z_0)$, $z_2(t) = \{y_2(t), v_2(t)\} = S_0(t, z_0)$. Тоді, аналогічно до виводу оцінки (3.53) маємо:

$$\frac{d}{dt}\|z_1 - z_2\|_X^2 \le 2c_3\|y_1 - y_2\|_H^2 + 2 \sup_{\|v\| \le r} \|DF(v)\|\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{R}^M}^2 +$$

$$+(\|B\|_{L^2} + \|G\|_{L^2})\|z_1 - z_2\|_X^2 + 4 \cdot (\|D\|_{L^2} + 1)\|z_1 - z_2\|_X\|d\|_\infty,$$

де r_0 визначається з оцінки:

$$\max\{\sup_{t \ge 0} \|v_1(t)\|_{\mathbb{R}^M}, \sup_{t \ge 0} \|v_2(t)\|_{\mathbb{R}^M}\} \le$$

$$\le \sqrt{r^2 + \frac{c}{\nu} + \frac{1 + \|D\|_{L^2}}{\nu} \cdot \|d\|_\infty} \le \sqrt{r^2 + \frac{c}{\nu} + \frac{1 + \|D\|_{L^2}}{\nu}} =: r_0.$$

Позначимо $\bar{c}(r) = 2c_3 + \|B\|_{L^2} + \|G\|_{L^2} + \sup\limits_{\|v\|_{\mathbb{R}^M} \le r_0} \|DF(v)\|$, $\bar{D} = 4(\|D\|_{L^2} + 1)$.
Тоді $\forall\ T \ge t \ge 0$ маємо

$$\frac{d}{dt}\|z_1 - z_2\|_X^2 \le \bar{c}(r) \cdot \|z_1 - z_2\|_X^2 + \bar{D} \cdot \sup_{t \in [0,T]} \|z_1(t) - z_2(t)\|_X \cdot \|d\|_\infty.$$

Після інтегрування від 0 до t:

$$\|z_(t) - z_2(t)\|_X^2 \le \bar{c}(r) \cdot \int_0^t \|z_1(s) - z_2(s)\|_X^2 ds + \bar{D} \cdot T \cdot \sup_{t \in [0,T]} \|z_(t) - z_2(t)\|_X \cdot \|d\|_\infty.$$

Тоді з Леми Гронуола виводимо:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z_1(s) - z_2(s)\|_X \leq \bar{D} \cdot T \cdot e^{\bar{c}(r)T} \cdot \|d\|_\infty,$$

звідки і випливає 3) з $\varphi(r,t) = \bar{D} \cdot t \cdot e^{\bar{c}(r)t}$.

Теорема доведена. □

3.5 Висновки до розділу 3

В даному розділі на основі одержаних абстрактних результатів про якісну поведінку еволюційних систем без єдиності, одержаних в другому розділі, досліджується робастна сійкість атракторів по відношенню до збурень для ряду дисипативних нелінійних параболічних систем. В підрозділі 3.1 викладено результати щодо глобальної розв'язності та апріорних оцінок для загальних параболічних рівнянь з негладкою функцією взаємодії типу реакція-дифузія. В підрозділі 3.2 для параболічної системи типу реакція-дифузія з гладкою нелінійністю та збуренням, що містить фазову змінну та не гарантує єдиність розв'язку задачі Коші, доведено результат про локальну стійкість глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень. В підрозділі 3.3 для загальної системи типу реакція-дифузія з негладкою нелінійністю та неавтономних збуренням доведено властивість асимптотичного підсилення для глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень. В підрозділі 3.4 доведено робастну стійкість атрактору дисипативної еволюційної системи, що складається з параболічної нелінійної системи та системи звичайних диференціальних рівнянь, що збурюються вхідними обмеженими сигналами. Результати, викладені в розділі, опубліковані в [1, 3, 4].

Розділ 4

РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ АТРАКТОРІВ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

4.1 Властивість асимптотичного підсилення у випадку неавтономних збурень

Спочатку наведемо результати про глобальну розв'язність та властивості розв'язків для неавтономного розподіленого збурення, що випливають з [97].

Розглядається задача

$$\begin{cases} y_{tt} + \gamma y_t - \triangle y + f(t,y) = h(t,x), \ (t,x) \in (\tau, T) \times \Omega, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

де константа $\gamma > 0$, $\tau \in \mathbb{R}_+$ – початковий момент часу, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з гладкою границею, $n \geq 3$ і виконані наступні умови:

$$\begin{gathered} f, f'_t \in \mathbb{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \ h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \\ \exists \ C_i > 0, \ i = 1,2,3, \ \alpha > 0, \ \ \forall \ (t,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ |f(t,y)| + |f'_t(t,y)| \leq C_1(1 + |y|^{\frac{n}{n-2}}) \\ F(t,y) := \int\limits_0^y f(t,s)ds, \ \ F(t,y) \geq -\frac{\lambda}{2}y^2 - C_2, \\ f(t,y)y - F(t,y) - \frac{1}{\alpha}F'_t(t,y) \geq -\frac{\lambda}{2}y^2 - C_3 \end{gathered} \tag{4.2}$$

де $\lambda \in (0, \lambda_1)$, $\alpha \in (0, \frac{\gamma}{2})$, $\alpha(\gamma - \alpha) < \lambda_1 - \lambda$, $\lambda_1 > 0$ - перше власне число $-\triangle$ в $H^1_0(\Omega)$.

Надалі $\gamma, C_i, i = 1,2,3, \lambda, \alpha, \Omega$ будемо називати константами задачі (4.1).

Зауваження 4.1.1. *Всі подальші результати цього розділу залишаються вірними і у випадку розмірностей області* $n = 1, 2$. *У випадку* $n = 2$ *можна вважати, що в* (4.2) *функція* f *має довільний поліноміальний ріст через вкладення* $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $\forall\ p \geq 1$, *а у випадку* $n = 1$ *припущення* (4.2) *не потрібне через вкладення* $H_0^1(\Omega) \subset \mathbb{C}(\overline{\Omega})$.

Оскільки $F,\ F_t' \in \mathbb{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, то існує константа $C_4 > 0$, що залежить лише від констант задачі (4.1) така, що $\forall (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$|F(t, y)| + |F_t'(t, y)| \leq C_4(1 + |y|^{\frac{2n-2}{n-2}}) \tag{4.3}$$

Будемо позначати $\|\cdot\|, (\cdot, \cdot)$ і $\|\cdot\|_{H_0^1}, ((\cdot, \cdot))$ норму і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$ відповідно.

Фазовим простором задачі (4.1) є простір

$$X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

норма в якому визначається наступним чином:

$$\forall\ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X \quad \|z\|_X = \left(\|u\|_{H_0^1}^2 + \|v\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Розв'язок задачі (4.1) будемо розуміти в сенсі наступного означення.

Означення 4.1.1. *Функція* $\varphi(\cdot) = \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y_t(\cdot) \end{pmatrix} \in L^\infty(\tau, T; X)$ *називається розв'язком задачі* (4.1) *на* (τ, T), *якщо* $\forall \psi \in H_0^1(\Omega)\ \forall \eta \in \mathbb{C}_0^\infty(\tau, T)$

$$-\int_\tau^T (y_t, \psi)\eta_t + \int_\tau^T (\gamma(y_t, \psi) + ((y, \psi)) + (f(t, y), \psi) - (h, \psi))\eta = 0. \tag{4.4}$$

Розглянемо клас функцій

$$W_\tau^T = \mathbb{C}([\tau, T]; X).$$

В силу умов (4.2), (4.3) для довільної функції $\varphi(\cdot) = \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y_t(\cdot) \end{pmatrix} \in W_\tau^T$

коректно означені наступні функціонали:

$$\begin{gathered}V(t,\varphi(t))=\tfrac{1}{2}\|y_t(t)\|^2+\tfrac{1}{2}\|y(t)\|^2_{H_0^1}+(F(t,y(t)),1),\\ I(t,\varphi(t))=V(t,\varphi(t))+\tfrac{\gamma}{2}(y_t(t),y(t)),\\ H(t,\varphi(t))=(F'_t(t,y(t)),1)+\gamma(F(t,y(t)),1)-\tfrac{\gamma}{2}(f(t,y(t)),y(t))+\\ +\tfrac{\gamma}{2}(h(t),y(t))+(h(t),y_t(t)).\end{gathered}$$

Теорема 4.1.1. [97] *Для довільних* $\varphi_\tau=\begin{pmatrix}y_\tau\\ v_\tau\end{pmatrix}\in X$*,* $T>\tau$ *задача (4.1) за умов (4.2) має принаймні один розв'язок в класі* W_τ^T*, для якого* $\varphi(\tau)=\varphi_\tau$*.*

Крім того, для довільного $\varphi(\cdot)=\begin{pmatrix}y(\cdot)\\ y_t(\cdot)\end{pmatrix}\in W_\tau^T$ *– розв'язку (4.1) справедлива оцінка* $\forall\ t\geq s,\ t,s\in[\tau,T]$

$$\begin{gathered}\|y_t(t)\|^2+\|y(t)\|^2_{H_0^1}\leq C_5\Big((\|y_t(s)\|^2+\|y(s)\|^{\frac{2n-2}{n-2}}_{H_0^1})e^{-\alpha(t-s)}+\\ +\int_s^t(1+\|h(p)\|^2)e^{-\alpha(t-p)}dp+1\Big),\end{gathered}\tag{4.5}$$

де константа $C_5>0$ *залежить лише від констант задачі* (4.1)*.*

При цьому, функції $V(\cdot,\varphi(\cdot))$*,* $I(\cdot,\varphi(\cdot))$*,* $H(\cdot,\varphi(\cdot))$ *є абсолютно неперервними на* $[\tau,T]$ *і для м.в.* $t\in[\tau,T]$

$$\frac{d}{dt}V(t,\varphi(t))=-\gamma\|y_t(t)\|^2+(F'_t(t,y(t)),1)+(h(t),y_t(t)),\tag{4.6}$$

$$\begin{gathered}\tfrac{d}{dt}(y_t(t),y(t))=\|y_t(t)\|^2-\gamma(y_t(t),y(t))-\|y(t)\|^2_{H_0^1}-\\ -(f(t,y(t)),y(t))+(h(t),y(t)),\end{gathered}\tag{4.7}$$

$$\frac{d}{dt}I(t,\varphi(t))=-\gamma I(t,\varphi(t))+H(t,\varphi(t)).\tag{4.8}$$

Тепер розглянемо послідовність задач (4.1) (будемо позначати їх $(4.1)_n$, $n\geq 0$, $(4.1)_0=(4.1)$), де замість функцій $h(t,x)$ стоять функції $h_n(t,x)$ відповідно, що мають одну з наступних властивостей: для довільних $T > \tau$

$$\forall\, \eta \in L^2(\tau, T; L^2(\Omega)) \quad \int_\tau^T \int_\Omega (h_n(t,x) - h(t,x))\eta(t,x)dxdt \to 0,\ n \to \infty \tag{4.9}$$

або

$$\int_\tau^T \int_\Omega |h_n(t,x) - h(t,x)|^2 dxdt \to 0,\ n \to \infty \tag{4.10}$$

Тоді з теореми 4.1.1 для довільних $T > \tau$, $n \geq 0$, $\varphi_\tau \in X$, задача $(4.1)_n$ має принаймні один розв'язок в класі W_τ^T.

Теорема 4.1.2. [97] *Нехай $\{\varphi^n\} \subset W_\tau^T$ – послідовність розв'язків задач $(4.1)_n$, причому h_n збігаються до h в сенсі (4.9), $\varphi^n(\tau) \to \varphi_\tau$ слабо в X. Нехай задана послідовність $\{t_n\} \subset [\tau, T]$ така, що $t_n \to t_0 \in [\tau, T]$. Тоді існує $\varphi \in W_\tau^T$ – розв'язок (4.1) такий, що $\varphi(\tau) = \varphi_\tau$ і принаймні по підпослідовності $\varphi^n(t_n) \to \varphi(t_0)$ слабо в E.*

Якщо ж h_n збігаються до h в сенсі (4.10), і $\varphi^n(\tau) \to \varphi_\tau$ сильно в X, то принаймні по підпослідовності $\varphi^n(t_n) \to \varphi(t_0)$ сильно в X.

Перейдемо до аналізу незбуреної задачі, яка щодо існування глобального атрактору у випадку негладкої функції взаємодії вперше була розглянута в роботі [91].

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ розглядається задача

$$\begin{cases} y_{tt} + \gamma y_t - \triangle y + f(y) = 0,\ t > 0 \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

де $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$,

$$\exists c > 0\ \forall s \in \mathbb{R}\ |f(s)| \leq c(1 + |s|^{\frac{n}{n-2}}), \tag{4.12}$$

$$\varliminf_{s \to \infty} \frac{f(s)}{s} > -\lambda_1. \tag{4.13}$$

Тоді відомо [91], що в фазовому просторі

$$X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

задача (4.11) для кожного $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X$ має (можливо, неєдиний) розв'язок $z(\cdot) = \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y_t(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}([0,+\infty); X)$, $z(0) = z_0$, і всі розв'язки (4.11) породжують строгий m-напівпотік $S : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$

$$S(t, z_0) = \{z(t) |\ z(\cdot) \text{ розв'язок (4.11)},\ z(0) = z_0\},$$

для якого в X існує компактний інваріантний глобальний атрактор.

Тепер розглянемо збурену задачу

$$\begin{cases} y_{tt} + \alpha y_t - \triangle y + f(y) = d(t,x),\ t > 0 \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4.14}$$

де $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, – вхідний (збурюючий) сигнал.

Позначимо

$$S_d(t, 0, z_0) = \{z(t) |\ \ z(\cdot) \text{ розв'язок (4.14)},\ z(0) = z_0\}.$$

Основним результатом підрозділу є встановлення при певних умовах властивості асимптотичного підсилення (AG) по відношенню до атрактора Θ незбуреної ($d \equiv 0$) системи [103]:

$$\exists \gamma \in \mathcal{K}\ \ \forall z_0 \in X,\ \forall d \in D \subseteq L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) :$$

$$\varlimsup_{t\to\infty} \operatorname{dist}(S_d(t, 0, z_0), \Theta) \le \gamma(\|d\|_\infty),$$

де D – деяка трансляційно інваріантна множина вхідних сигналів.

Підсилимо умову (4.13) до такої:

$\exists c_1, c_2, c_3 > 0$ такі, що для $F(s) := \int\limits_0^s f(p)dp$ для всіх $s \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$F(s) \ge -ms^2 - c_1,\ f(s) \cdot s - c_2 F(s) + ms^2 \ge c_3, \tag{4.15}$$

де $m \in (0, \lambda_1)$ достатньо мале.

Умови (4.12), (4.15) дозволяють скористатись результатами Теореми 4.1.1 і стверджувати, що $\forall \tau \geq 0$, $\forall z_\tau \in X$, $\forall d \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ задача (4.14) має принаймні один розв'язок $z \in \mathbb{C}([\tau, +\infty); X) :\ z(\tau) = z_\tau$. Більше того, сім'я відображень

$$K_d^\tau \subset \mathbb{C}([\tau, +\infty); X)$$

$$K_d^\tau = \{z(t) |\ z(\cdot) \text{ є розв'язком } ((4.14)) \text{ зі збуренням d на } [\tau, +\infty)\} \quad (4.16)$$

задовольняє умови (S1)-(S5) підрозділу 2.2, а отже відображення $\{S_d : \mathbb{R}_\geq \times X \mapsto 2^X\}$ такі, що

$$S_d(t, \tau, z_\tau) = \{z(t) |\ z(\cdot) \in K_d^\tau,\ z(\tau) = z_\tau\} \quad (4.17)$$

породжує сім'ю строгих m-напівпроцесів для будь-якої трансляційно-інваріантної $D \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$. Крім того, для кожного розв'язку (4.14) $z = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}$ справедлива оцінка

$$\forall t \geq \tau \geq 0 \quad \|y_t(t)\|^2_{L^2} + \|y(t)\|^2_{H_0^1} \leq$$

$$c_4 \left((\|y_t(\tau)\|^2_{L^2} + \|y(\tau)\|^{\frac{2n-2}{n-2}}_{H_0^1}) \cdot e^{-\delta(t-\tau)} + 1 + \int\limits_\tau^t \|d(p)\|^2 e^{-\delta(t-p)} dp \right),$$

де $c_4 > 0$, $\delta > 0$ не залежать від z.

Зокрема, якщо $\sup\limits_{t\geq 0} \int\limits_t^{t+1} \|d(p)\|^2 dp < \infty$, то $\forall t \geq \tau \geq 0$

$$\|z(t)\|^2_X \leq c_5 \left(\|z(\tau)\|^{\frac{2n-2}{n-2}}_X \cdot e^{-\delta(t-\tau)} + 1 + \sup_{t\geq 0} \int\limits_t^{t+1} \|d(p)\|^2 dp \right). \quad (4.18)$$

В якості D виберемо всі функції з $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, для яких виконуються властивості

$$\forall\ h \geq 0 \text{ множина } \{ \int\limits_t^{t+h} d(p) dp \mid t \geq 0\} \text{ є предкомпактною в } L^2(\Omega) \quad (4.19)$$

$$\sup_{t\geq 0}\int\limits_t^{t+1} \|d(s+l)-d(s)\|^2 ds \leq \varkappa(|l|), \tag{4.20}$$

де $\varkappa$ може залежати від d і $\varkappa(p)\to 0,\ p\to 0+$.

Очевидно, що умова (4.19) гарантовано має місце у випадку зосередженого збурення, тобто коли

$$d(t,x)=h(x)d(t),\ h\in L^2(\Omega) \text{ фіксоване.}$$

Інша достатня умова виконання (4.19) грунтується на Лемі про компактність: якщо

$$d\in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;H^1_0(\Omega),\ d_t\in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+;H^{-s}(\Omega),p>1,$$

$$\sup_{t\geq 0}\int\limits_t^{t+1}\Big(\|d(s)\|^2_{H^1_0}+\|d_t(s)\|^p_{H^{-s}}\Big)ds<\infty$$

то має місце (4.19).

За виконання умов (4.19), (4.20) відомо [44], що $\forall d\in D$ множина

$$\Sigma(d):=cl_{L^2_{loc}(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega))}\{d\cdot+h)|\ \ h\geq 0\}$$

є трансляційно-інваріантною, компактною в $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$,

$$d\in\Sigma(d),\ \Sigma(0)=\{0\}$$

і, крім того, $\forall v\in\Sigma(d)$

$$\sup_{t\geq 0}\int\limits_t^{t+1}\|v(s)\|^2ds\leq \sup_{t\geq 0}\int\limits_t^{t+1}\|d(s)\|^2ds\leq\|d\|^2_\infty. \tag{4.21}$$

За виконання (4.20) сім'я m-напівпроцесів $\{S_v\}_{v\in\Sigma(d)}$, означена в (4.17), задовольняє умови Леми 2.2.3, а отже, має рівномірний атрактор $\Theta_{\Sigma(d)}$.

Теорема 4.1.3. *Нехай параметри збуреної задачі* (4.14) *задовольняють* *умови* (4.12), (4.15), (4.20). *Тоді* $\exists \gamma \in \mathcal{K}\ \ \forall z_0 \in X,\ \forall d \in D$

$$\varlimsup_{t\to\infty} \operatorname{dist}(S_d(t,0,z_0),\Theta) \le \gamma(\|d\|_\infty),$$

де Θ *– глобальний атрактор незбуреної задачі* (4.11).

Доведення. Перевіримо умови 1), 2) Теореми 2.2.3. Нехай $\|d_k\|_\infty \to 0,\ v_k \in \Sigma(d_k)$. Тоді в силу (4.21) $v_k \to 0$ в $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$. Якщо для $t > 0$ $\xi_k \in S_{v_k}(t,0,z_k^0),\ z_k^0 \to z^0,\ \xi_k \to \xi$, то $\xi_k = z_k(t)$, де $z_k(\cdot)$ – розв'язок (4.14) зі збуренням v_k і початковим даним z_k^0.

Використовуючи Теорему 4.1.2, одержуємо

$$\xi_k = z_k(t) \to \xi = z(t) \in S_0(t,0,z_0),$$

що і означає виконання умови 2).

Тепер нехай $v_k \to 0$ в $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, $t_k \nearrow \infty$, $\xi_k \in S_{v_k}(t_k,0,z_k^0),\ \|z_k^0\|_X \le r_0$.

Тоді по підпослідовності

$$z_k^0 \to z^0 \text{ слабо в } X.$$

Таким чином, $\xi_k = z_k(t_k),\ z_k(\cdot)$ – розв'язок (4.14) з $d = v_k,\ z_k(0) = z_k^0$.

З оцінок (4.18), (4.21) виводимо, що ξ_k – обмежена в X, отже, по підпослідовності

$$\xi_k \to \xi \text{ слабо в } X.$$

Більше того, можемо вибрати підпослідовність так, що $\forall N \ge 1$

$$z_k(t_k - N) \to \xi_N \text{ слабо в } X.$$

Крім того, $\forall t \ge 0$ для достатньо великих k маємо:

$$z_k(t_k - N + t) \in S_{v_k}(t_k - N + t, t_k - N, z_k(t_k - N)) \subset S_{v_k(\cdot + t_k - N)}(t, 0, z_k(t_k - N)).$$

Покладемо $\bar{v_k}(t) := v_k(t + t_k - N)$. Тоді $\forall T > 0$

$$\int\limits_0^T \|\bar{v_k}(t)\|^2 dt = \int\limits_{t_k-N}^{T+t_k-N} \|v_k(s)\|^2 ds \le T \cdot \sup_{t\ge 0} \int\limits_t^{t+1} \|v_k(s)\|^2 ds \le T \cdot \|d_k\|_\infty^2.$$

Отже, $\bar{v_k} \to 0$ в $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$. Тоді з Теореми 4.1.2 для $\bar{z_k}(t) = z_k(t + t_k - N)$ маємо $\forall t \ge 0$

$$\bar{z_k}(t) \to \bar{z}(t) \text{ слабо в } X,$$

$$\bar{z}(t) \in S_0(t, 0, \xi_N).$$

Зокрема,

$$\bar{z_k}(N) = \xi_k \to \bar{z}(N) = \xi \text{ слабо в } X.$$

З теореми 4.1.1 маємо, що що кожен розв'язок (4.14) $z(\cdot)$ задовольняє рівність

$$\frac{d}{dt} I(z(t)) + \gamma I(z(t)) = H_d(t, z(t)), \tag{4.22}$$

де

$$I(z) = \frac{1}{2}\|y_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla y\|^2 + (F(y), 1) + \frac{\gamma}{2}(y_t, y),$$

$$H_d(t, z) = \gamma(F(y), 1) - \frac{\gamma}{2}(f(y), y) + \frac{\gamma}{2}(d(t), y) + (d(t), y_t).$$

Запишемо (4.22) для $\bar{z_k}$. Після інтегрування по $[0, N]$ маємо:

$$I(\xi_k) = I(z_k(t_k - N))e^{-\gamma N} + \int\limits_0^N e^{\alpha(p-N)} \cdot H_{\bar{v_k}}(p, \bar{z_k}(p)) dp. \tag{4.23}$$

Оскільки $H_0^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$, то з оцінки (4.18) та умови (4.12) випливає, що послідовності $\{F(\bar{y_k})\}$, $\{f(\bar{y_k})\bar{y_k}\}$ – обмежені в $L^{\frac{2n}{2n-2}}((0, N) \times \Omega)$.

Тоді за Лемою Ліонса $\forall N \ge 0$

$$\int\limits_0^N e^{\gamma(p-N)} \cdot H_{\bar{v_k}}(p, \bar{z_k}(p)) dp \to \int\limits_0^N e^{\gamma(p-N)} \cdot H_0(\bar{z}(p)) dp, \ k \to \infty,$$

де $H_0(\bar{z}) = \gamma(F(\bar{y}), 1) - \frac{\gamma}{2}(f(\bar{y}), \bar{y})$. З оцінки (4.18) $\exists c_6 > 0\ \ \forall t \geq 0,\ \forall k \geq 1$

$$|I(z_k(t))| \leq c_6, \tag{4.24}$$

де c_6 не залежить від N.

Тоді з (4.23), (4.24) виводимо:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} I(\xi_k) \leq c_6 \cdot e^{-\gamma N} + \int\limits_0^N e^{-\gamma(p-N)} \cdot H_0(\bar{z}(p))dp =$$

$$= c_6 e^{-\gamma N} + I(\xi) - I(\xi_N)e^{-\gamma N} \leq 2 \cdot c_6 e^{-\gamma N} + I(\xi).$$

Звідси

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{2}\|\xi_k\|_X^2 \leq 2 \cdot c_6 e^{-\gamma N} + \frac{1}{2}\|\xi\|_X^2.$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $N \to \infty$, одержуємо

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|\xi_k\|_X \leq \|\xi\|_X.$$

Враховуючи слабку збіжність, одержуємо предкомпактність $\{\xi_k\}$ в X.

Теорема доведена. $\square$

4.2 Стійкість від входу до стану у випадку збурення, величина якого залежить від фазової змінної

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ відносно невідомої функції $y(t, x)$ розглядається задача

$$\begin{cases} y_{tt} + \gamma y_t - \triangle y(t,x) + f(y(t,x)) = g(y(t,x))d(t),\ t > 0, \\ y(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4.25}$$

де $\gamma > 0$, $f, g \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ – задані, $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ – збурення.

Будемо вважати, що $f(y)$ – задана нелінійна функція, а збурення $g(y)d(t)$

– з негладкою функцією g. В цьому підрозділі буде доведено (див. Лему 4.2.1), що при досить загальних умовах на f, g задача (4.25) є глобально розв'язною (в слабкому сенсі) у фазовому просторі $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. При цьому, єдиність не гарантується. Далі буде встановлено властивості стійкості щодо будь-яких обмежених збурень типу local ISS у випадку гладкої функції f і властивість AG для більш вузького класу збурень, але без умови гладкості f, для атрактора m-напівпотоку незбуреної задачі ($d \equiv 0$).

Розглянемо многозначне відображення $S_d : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$,

$$S_d(t, z_0) = \{z(t) \mid z = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix} \text{ – розв'язок (4.25), } z(0) = z_0\} \tag{4.26}$$

При $d \equiv 0$ (незбурена задача) многозначене відображення $S_0 : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$ є многозначною напівгрупою (m-напівпотоком), для якої існує глобальний атрактор $\Theta \subset X$, тобто $\Theta = S_0(t, \Theta)$ $\forall t \geq 0$ і $\forall r > 0$

$$\sup_{\|z_0\| \leq r} \text{dist}(S_0(t, z_0), \Theta) \to 0, t \to \infty.$$

Накладаючи на f додаткову умову гладкості, ми зможемо оцінити відхилення траєкторії збуреної задачі від атрактору для будь-якого обмеженого збурення d в термінах local ISS: $\forall t \geq 0$

$$\|S_d(t, z_0)\|_\Theta \leq \beta(\|z_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \tag{4.27}$$

для $\|z_0\|_\Theta \leq r, \ \|d\|_\infty \leq r$ при деякому $r > 0$.

Без додаткових припущень на гладкість f для достатньо широкого класу збурень d вдається встановити властивість асимптотичного підсилення: $\forall z_0 \in X$

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \|S_d(t, z_0)\|_\Theta \leq \gamma(\|d\|_\infty). \tag{4.28}$$

Спочатку встановимо розв'язність та апріорні оцінки для задачі (4.25).

Будемо вважати, що $\exists\ m, c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ такі, що $\forall s \in \mathbb{R}$

$$|f(s)| \leq c_1(1 + |s|^{\frac{n}{n-2}}), \tag{4.29}$$

$$F(s) \geq -as^2 - c_2,\ f(s) \cdot s - F(s) + as^2 \geq -c_3, \tag{4.30}$$

$$|g(s)| \leq c_4, \tag{4.31}$$

де $a < \frac{\lambda_1}{2}$, λ_1 – перше власне число оператора $-\triangle$ в $H_0^1(\Omega)$, $F(s) = \int\limits_0^s f(t)dt$.

Розв'язок (4.25) будемо розуміти в слабкому сенсі Означення 4.1.1., тобто функція $z(\cdot) = \begin{pmatrix} y(\cdot) \\ y_t(\cdot) \end{pmatrix} \in L^\infty(0,T;X)$ є слабким розв'язком (4.25) на $(0,T)$, якщо $\forall \psi \in H_0^1(\Omega),\ \forall \eta \in C_0^\infty(0,T)$ виконується

$$-\int\limits_0^T (y_t,\psi)\eta_t + \int\limits_0^T \left(\gamma(y_t,\psi) + ((y,\psi)) + (f(y),\psi) - (g(y),\psi)dt\right)\eta = 0. \tag{4.32}$$

Якщо $z \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;X)$ задовольняє (4.32) $\forall t > 0$, то z – глобальний слабкий розв'язок (4.25) (надалі – розв'язок).

Лема 4.2.1. *За умов* (4.29)-(4.31) $\forall z_0 \in X,\ \forall d \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *існує принаймні один розв'язок* (4.25) *з* $z|_{t=0} = z_0$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що оскільки $H_0^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ для $n \geq 3$, $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)\ \forall p \geq 1$ для $n = 2$, $H_0^1(\Omega) \subset \mathbb{C}(\bar{\Omega})$ для $n = 1$, то $\forall n \geq 1$ з умов (4.29), (4.31) виводимо: для $y \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

$$f(y) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ g(y)d(t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Тому з [43] для розв'язку (4.25) маємо: $\forall T > 0$

$$z = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix} \in \mathbb{C}([0,T];X), \text{ зокрема умова } z|_{t=0} = z_0 \text{ має сенс.}$$

Існування розв'язку (4.25) встановлюється методом гальоркінських апроксимацій [43]. Нехай $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X, T > 0$ – задані. Для кожного $m \geq 1$ розглядаємо апроксимації

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)\omega_i,$$

де $\{\omega_i\}$ – власні функції оператора $-\triangle$ в $H_0^1(\Omega)$, $\{g_{im}(\cdot)\}$ – розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_m,\omega_j)+\gamma\frac{d}{dt}(y_m,\omega_j)+(y_m,\omega_j)_{H_0^1}+$$

$$+(f(y_m),\omega_j)-d(t)(g(y_m),\omega_j)dt=0,\ j=\overline{1,m} \tag{4.33}$$

$$y_m|_{t=0}=y_m(0)\to y_0 \text{ в } H_0^1,\ y_m'|_{t=0}=y_m'(0)\to y_1 \text{ в } L^2.$$

За Теоремою Каратеодорі розв'язок (4.33) існує на $[0,T_m]$. Виведемо апріорні оцінки, з яких, зокрема, буде випливати, що $T_m=T$. Розглянемо функцію

$$Y_m(t)=\frac{1}{2}\|y_m'(t)\|^2+\frac{1}{2}\|y_m(t)\|^2_{H_0^1}+(F(y_m(t)),1)+\delta(y_m'(t),y(m)),$$

де $\delta\in(0,\gamma)$ виберемо пізніше.

В силу (4.33) маємо:

$$\frac{dY_m}{dt}=-(\gamma-\delta)\|y_m'(t)\|^2-\delta\|y_m(t)\|^2_{H_0^1}-\gamma\delta(y_m',y_m)-$$

$$-\delta(f(y_m),y_m)+(y_m',g(y_m))\cdot d(t)-\delta(y_m,g(y_m))\cdot d(t)=$$

$$=-\delta Y_m(t)+\left(-\gamma+\frac{3\delta}{2}\right)\|y_m'(t)\|^2-\frac{\delta}{2}\|y_m(t)\|^2_{H_0^1}+\delta\left((F(y_m),1)-(f(y_m),y_m)\right)-$$

$$-\gamma\delta(y_m',y_m)+\delta^2(y_m',y_m)+(y_m',g(y_m))d(t)-\delta(y_m,g(y_m))d(t)\le$$

$$\le-\delta Y_m(t)+\left(-\gamma+\frac{3\delta}{2}\right)\|y_m'(t)\|^2-\frac{\delta}{2}\|y_m(t)\|^2_{H_0^1}+\delta m\|y_m\|^2-\delta c_3-$$

$$-\delta(\gamma-\delta)(y_m',y_m)+(y_m',g(y_m))d(t)-\delta(y_m,g(y_m))d(t).$$

Враховуючи нерівність Пуанкаре

$$\|y_m\|^2_{H_0^1}\ge\lambda_1\|y_m\|^2$$

та умову

$$\lambda_1-2a>0,$$

з останньої нерівності виводимо, що для достатньо малих $\delta \in (0, \gamma)$ знайдеться така константа $c_5 > 0$:

$$\frac{d}{dt} Y_m(t) \leq -\delta Y_m(t) + c_5(1 + |d|^2). \tag{4.34}$$

З оцінки (4.34), умови (4.30) і нерівності Пуанкаре:

$$\frac{1}{2}\|y_m'\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{\lambda_1}\right)\|y_m\|^2_{H_0^1} + \delta(y_m', y_m) - c_2|\Omega| \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\|y_m'(0)\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m(0)\|^2_{H_0^1} + (F(y_m(0)), 1) + \delta(y_m'(0), y_m(0))\right) e^{-\delta t} +$$

$$+\frac{c_5}{\alpha} + c_5 \cdot \int\limits_0^t |d(s)|^2 e^{-\delta(t-s)} ds.$$

З цієї оцінки для достатньо малих δ з деякою константою c_6 та для будь-яких $m \geq 1$ випливає наступне:

$$\|y_m'(t)\|^2 + \|y_m(t)\|^2_{H_0^1} \leq \tag{4.35}$$

$$c_6 \left((\|y_m'(0)\|^2 + \|y_m(0)\|^2_{H_0^1} + \|y_m(t)\|^{\frac{2n-2}{n-2}}_{H_0^1}) e^{-\delta t} + 1 + \int\limits_0^t |d(s)|^2 e^{-\delta(t-s)} ds \right).$$

Ця оцінка дозволяє стверджувати, що розв'язки y_m системи (4.33) існують на $[0, T]$ і для деякої функції $z = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix} \in L^\infty(0, T; X)$ по підпослідовності

$$\begin{aligned} &y_m \to y \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; H_0^1), \\ &y_m' \to y_t \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; L^2). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Звідси за Лемою про комактність

$$y_m \to y \text{ в } L^\infty(0, T; L^2) \text{ і м.с. в } (0, T) \times \Omega. \tag{4.37}$$

Тоді за Лемою Ліонса

$$f(y_m) \to f(y),\ g(y_m) \to g(y) \text{ слабо в } L^\infty(0,T;L^2) \tag{4.38}$$

і, переходячи до границі в (4.33), одержуємо, що $z = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}$ задовольняє (4.32), $z(0) = z_0$. Звідси z – шуканий розв'язок (4.25), причому виконується оцінка (4.35). Лема доведена. □

Зауваження 4.2.1. *Оскільки для розв'язку* (4.25) $z = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}$

$$f(y),\ g(y)d(t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

то з [43] слідує, що функції

$$t \mapsto \|y_t(t)\|^2 + \|y(t)\|^2_{H_0^1},\ t \mapsto (F(y(t)),1)\,,\ t \mapsto (y_t(t), y(t))$$

є абсолютно неперервними, отже, для функції

$$Y(t) = \frac{1}{2}\|y_t\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2_{H_0^1} + (F(y(t)),1) + \delta(y_t, y)$$

ми можемо повторити всі міркування з (4.34) та (4.35) і одержати, що будь-який розв'язок (4.25) задовольняє (4.35).

Більше того, якщо $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, то з (4.35) маємо, що кожен розв'язок (4.25) $z = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}$ задовольняє оцінку: $\forall t \geq 0$

$$\|y_t(t)\|^2 + \|y(t)\|^2_{H_0^1} \leq$$

$$c_6 \left((\|y_t(0)\|^2 + \|y(0)\|^2_{H_0^1} + \|y(0)\|^{\frac{2n-2}{n-2}}_{H_0^1})e^{-\delta t} + 1 + \frac{1}{\delta}\|d\|^2_\infty \right). \tag{4.39}$$

При цьому, в оцінках (4.35), (4.39) при $n = 1,2$ доданок зі ступенем $\frac{2n-2}{n-2}$ відсутній.

Лема 4.2.2. *Нехай* $\{z_n = \begin{pmatrix} y \\ y_{n_t} \end{pmatrix}\}$ *– послідовність розв'язків* (4.25) *на* $(0,T)$ *зі збуреннями* $\{d_n\} \subset L^2(0,T)$ *і початковими даними* $\{z_n^0\} \subset$

$X,\ t_n \to t_0$. *Якщо*

$$z_n^0 \to z^0 \text{ слабо в } X,\ d_n \to d \text{ слабо в } L^2(0,T), \tag{4.40}$$

то існує розв'язок (4.25) $z = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}$ *на* $(0,T)$ *такий, що* $z(0) = z_0$ *і по підпослідовності*

$$z_n(t_n) \to z(t_0) \text{ слабо в } X. \tag{4.41}$$

Якщо ж збіжності в (4.40) *сильні, то*

$$z_n(t_n) \to z(t_0) \text{ в } X.$$

Доведення. Нехай виконується (4.40). Використовуючи оцінку (4.35) та Лему про компактність, аналогічно (4.37) можемо стверджувати, що z_n збігається до z в сенсі (4.36), (4.37) і, крім того, $\forall t \in [0,T]$.

$$y_n(t_n) \to y(t_0) \text{ в } L^2(\Omega),\ y_{n_t}(t_n) \to y_t(t_0) \text{ в } H^{-1}(\Omega). \tag{4.42}$$

В силу (4.37) і Теореми Лебега

$$(g(y_n), \psi) \to (g(y), \psi) \text{ в } L^2(0,T). \tag{4.43}$$

Тоді можна перейти до границі в (4.32) і одержати, що $z = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}$ є розв'язком (4.25), $z(0) = z_0$.

Оцінка (4.35), збіжності (4.42) і компактність вкладення $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ одразу гарантують виконання (4.41).

Нехай збіжності в (4.40) сильні. Враховуючи зауваження (4.2.1) для абсолютно-неперервної функції

$$V_n(t) = \frac{1}{2}\|y_{n_t}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|y_n(t)\|^2_{H_0^1} + (F(y_n(t)), 1)$$

маємо рівність: для м.в. $t \in (0,T)$

$$\frac{d}{dt}V_n(t) = -\gamma\|y_{n_t}(t)\|^2 + (g(y_n(t)), y_{n_t}(t)) \cdot d_n(t).$$

Отже, для всіх $t \in [0, T]$, зокрема для $t = t_n$, маємо:

$$\frac{1}{2}\left(\|y_{n_t}(t_n)\|^2 + \|y_n(t_n)\|^2_{H_0^1}\right) + \gamma \int\limits_0^{t_n} \|y_{n_t}(s)\|^2 ds = V_n(0) - (F(y_n(t_n)), 1) +$$

$$+ \int\limits_0^{t_n} (g(y_n(s)), y_{n_t}(s))\, d_n(s) ds. \tag{4.44}$$

Обгрунтуємо перехід до границі в правій частині (4.44). Очевидно, що $V_n(0) \to V(0)$. В силу (4.42)

$$F(y_n(t_n, x)) \to F(y(t_0, x)) \text{ для м.в. } x \in \Omega.$$

Крім того, в силу компактності вкладення $H_0^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Omega)$ маємо

$$y_n(t_n) \to y(t_0) \text{ в } L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Omega).$$

Оскільки, в силу (4.29)

$$|F(s)| \le c_7 \left(1 + |s|^{\frac{2n-2}{n-2}}\right),$$

то за теоремою Лебега

$$(F(y_n(t_n)), 1) \to (F(y(t_0)), 1)\,. \tag{4.45}$$

В силу (4.37) і Теореми Лебега $g(y_n) \to g(y)$ в $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Тоді з (4.36) і сильної збіжності $d_n \to d$ в $L^2(0, T)$ маємо:

$$\int\limits_0^T (g(y_n(\tau)), y_{n_t}(\tau))\, d_n(\tau) d\tau \to \int\limits_0^T (g(y(\tau)), y_t(\tau))\, d(\tau) d\tau. \tag{4.46}$$

З оцінки (4.35)

$$\int\limits_{t_0}^{t_n} |\, (g(y_n(s)), y_{n_t}(s))\, d_n(s)| ds \le c \int\limits_{t_0}^{t_n} |d_n(s)| ds \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отже, з (4.46) виводимо можливість граничного переходу в останньому доданку рівності (4.44). Тоді з (4.44) виводимо:

$$\frac{1}{2}\varliminf_{n\to\infty}\left(\|y_{n_t}(t_n)\|^2+\|y_n(t_n)\|^2_{H_0^1}\right)+\gamma\int\limits_0^{t_0}\|y_t(s)\|^2ds\le$$

$$\le V(0)-(F(y(t_0)),1)+\int\limits_0^{t_0}\left(g(y(s)),y_t(s)\right)d(s)ds= \tag{4.47}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\|y_t(t_0)\|^2+\|y(t_0)\|^2_{H_0^1}\right)+\gamma\int\limits_0^{t_0}\|y_t(s)\|^2ds.$$

З (4.47) виводимо $\varliminf\limits_{n\to\infty}\|z_n(t_n)\|_X\le\|z(t_0)\|_X$, що разом з (4.41) гарантує сильну збіжність $z_n(t_n)$ до $z(t_0)$ в X. Лема доведена. $\square$

Тепер встановимо властивість local ISS для задачі (4.25).

Спочатку розглянемо незбурену задачу

$$\begin{cases}y_{tt}+\gamma y_t-\triangle y(t,x)+f(y(t,x))=0,\ t>0,\ x\in\Omega,\\ y(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0.\end{cases} \tag{4.48}$$

За умов (4.29), (4.30) відомо [91], що m-напівпотік

$$S_0(t,z_0)=\{z(t)\mid z=\begin{pmatrix}y\\ y_t\end{pmatrix}\text{ – розв'язок (4.48)}, z(0)=z_0\} \tag{4.49}$$

має в фазовому просторі $X=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ глобальний атрактор Θ. З Леми (4.2.2) і оцінки (4.39) одразу випливають наступні властивості S_0:

$$\forall t_n\to t_0\ge0,\ \forall z_0^n\to z_0,\ \forall\xi_n\in S_0(t_n,z_0^n)$$

$$\text{по підпослідовності } \xi_n\to\xi_0\in S_0(t_0,z_0), \tag{4.50}$$

$$\forall r>0 \text{ множина } \{S_0(t,z_0)\mid t\ge0,\ \|z_0\|_X\le r\}\text{ – обмежена в } X. \tag{4.51}$$

Властивості (4.50), (4.51) гарантують стійкість Θ в наступному сенсі [5]:

$$\exists \beta \in \mathcal{KL}\ \forall z_0 \in X,\ \forall t \geq 0\ \|S_0(t, z_0)\|_\Theta \leq \beta(\|z_0\|_\Theta, t). \tag{4.52}$$

Тепер розглянемо сім'ю $\{S_d\}_{d \in D}$, означену в (4.26), де $D = L^\infty(\mathbb{R}_+)$, що описують динаміку збуреної задачі (4.25).

Крім умов (4.29)-(4.31) зробимо додаткове припущення:

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ та } \exists c_8 > 0\ \forall s \in \mathbb{R}\ |f'(s)| \leq c_8(1 + |s|^r),\ r < \frac{n}{n-2}. \tag{4.53}$$

Відомо [44], що умова (4.53) гарантує єдиність розв'язку задачі (4.48), тобто відображення S_0 з (4.49) є однозначним. При цьому, оскільки функція g, що характеризує величину збурень, може бути неліпшицевою, умова (4.53) не гарантує єдиність для збуреної задачі (4.25).

Теорема 4.2.1. *Нехай виконуються умови* (4.29)-(4.31), (4.53). *Тоді сім'я*

$$\{S_d\}_{d \in D},\ D = L^\infty(\mathbb{R}_+)$$

має властивість local ISS, тобто $\exists r > 0,\ \exists \beta \in \mathcal{KL},\ \exists \gamma \in \mathcal{K}$ *такі, що*

$$\forall \|z_0\|_\Theta \leq r,\ \forall \|d\|_\infty \leq r,\ \forall t \geq 0$$

$$\|S_d(t, z_0)\|_\Theta \leq \beta(\|z_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty). \tag{4.54}$$

Доведення. Згідно Теоремі 2.2.2 достатньо встановити наступні властивості:

$$\forall r > 0 \text{ множина } \{S_d(t, z_0) \mid t \geq 0,\ \|d\|_\infty \leq r,\ \|z_0\|_X \leq r\} \text{ – обмежена в } X, \tag{4.55}$$

$$\forall r > 0\ \exists c(r) > 0\ \forall \|z_0^{(1)}\|_X \leq r,\ \|z_0^{(2)}\|_X \leq r,\ \forall t \geq 0$$

$$\|S_0(t, z_0^{(1)}) - S_0(t, z_0^{(2)})\|_X \leq e^{c(r)t}\|z_0^{(1)} - z_0^{(2)}\|_X, \tag{4.56}$$

$$\exists \kappa \in \mathcal{K},\ \exists \text{ неперервна } \eta : \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}_+ \text{ такі, що } \forall r > 0$$

$$\overline{\lim_{t \to 0+}} \frac{\eta(r, t)}{t} < \infty \text{ і } \forall t \geq 0,\ \forall \|z_0\|_X \leq r,\ \forall \|d\|_\infty \leq r$$

$$\mathrm{dist}(S_d(t,z_0),S_0(t,z_0))\le\eta(r,t)\sigma(\|d\|_\infty). \tag{4.57}$$

Властивість (4.55) є наслідком оцінки (4.39). Властивість (4.56) випливає з наступних міркувань: для $\|y_1\|_{H_0^1}\le r$, $\|y_2\|_{H_0^1}\le r$ з (4.53), нерівності Гельдера та вкладення $H_0^1(\Omega)\subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ маємо

$$\int\limits_\Omega |f(y_1)-f(y_2)|^2dx\le$$

$$c\left(1+\|y_1\|^{\frac{n}{n-2}}_{L^{\frac{2n}{n-2}}}+\|y_2\|^{\frac{n}{n-2}}_{L^{\frac{2n}{n-2}}}\right)\|y_1-y_2\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}}\le c(r)\|y_1-y_2\|^2_{H_0^1}. \tag{4.58}$$

Нехай $z^{(1)}=\begin{pmatrix}y^{(1)}\\ y_t^{(1)}\end{pmatrix}$, $z^{(2)}=\begin{pmatrix}y^{(2)}\\ y_t^{(2)}\end{pmatrix}$ – розв'язки (4.48), $\|z^{(1)}(0)\|_X\le r$, $\|z^{(2)}(0)\|_X\le r$. Тоді з (4.58) для $\omega(t)=y^{(1)}(t)-y^{(2)}(t)$ виводимо:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\omega_t\|^2+\|\omega\|^2_{H_0^1}\right)+\gamma\|\omega_t\|^2\le c^{\frac12}(r)\|\omega\|_{H_0^1}\cdot\|\omega_t\|,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\|\omega_t\|^2+\|\omega\|^2_{H_0^1}\right)\le c^{\frac12}(r)\left(\|\omega_t\|^2+\|\omega\|^2_{H_0^1}\right).$$

Із Леми Гронуола одержуємо (4.56).

Покажемо виконання (4.57). Нехай $z^{(1)}=\begin{pmatrix}y^{(1)}\\ y_t^{(1)}\end{pmatrix}$ – довільний розв'язок (4.25) зі збруеннням d, $\|d\|_\infty\le r$ і початковою умовою z_0, $z^{(2)}=\begin{pmatrix}y^{(2)}\\ y_t^{(2)}\end{pmatrix}$ – єдиний розв'язок (4.48) з початковою умовою z_0, $\|z_0\|_X\le r$. Тоді для $\omega(t)=y^{(1)}(t)-y^{(2)}(t)$ маємо оцінку: $\forall t\in(0,T)$

$$\frac{d}{dt}\left(\|\omega_t\|^2+\|\omega\|^2_{H_0^1}\right)\le$$

$$\le c^{\frac12}(r)\left(\|\omega_t\|^2+\|\omega\|^2_{H_0^1}\right)+c_4\cdot|\Omega|^{\frac12}\cdot\|d\|_\infty\cdot\sup_{t\in[0,T]}\left(\|\omega_t\|+\|\omega\|_{H_0^1}\right).$$

Інтегруючи по $[0,t]$, одержуємо:

$$\|\omega_t(t)\|^2+\|\omega(t)\|^2_{H_0^1}\le c^{\frac12}(r)\int\limits_0^t\left(\|\omega_t(s)\|^2+\|\omega(s)\|^2_{H_0^1}\right)ds+$$

$$+c_4 \cdot T \cdot |\Omega|^{\frac{1}{2}} \cdot \|d\|_\infty \cdot \sup_{t\in[0,T]} \left(\|\omega_t\| + \|\omega\|_{H_0^1}\right). \tag{4.59}$$

Після застосування Леми Гронуола з (4.59) одержуємо: існують $c > 0,\ \eta(r) > 0$ такі, що

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z^{(1)}(t) - z^{(2)}(t)\|_X \le c \cdot \|d\|_\infty \cdot T \cdot e^{\eta(r)T},$$

звідки виводимо властивість (4.57). Теорема доведена. □

Встановимо властивість асимптотичного підсилення для задачі (4.25).

Покажемо, що за умов (4.29)-(4.31) для достатньо широкого класу збурень $D_1 \subset L^\infty(\mathbb{R}_+)$ глобальний атрактор Θ m-напівпотоку S_0 є стійким в сенсі AG, тобто виконується робастна оцінка (4.28).

В якості множини D_1 візьмемо всі функції $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, для яких

$$\sup_{t\ge 0} \int\limits_t^{t+1} |d(s+\tau) - d(s)|^2 ds \le \psi(|l|), \tag{4.60}$$

де ψ може залежати від d і $\psi(p) \to 0,\ p \to 0+$.

Властивість (4.60) виконується, наприклад, для абсолютно неперервних функцій $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, у яких $d' \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Множина D_1 є трансляційно-інваріантною, тобто

$$\forall d \in D_1,\ \forall h \ge 0\ T(h)\cdot d(\cdot) := d(\cdot + h) \in D_1.$$

Як було показано в попередньому підрозділі, умова (4.60) гарантує, що $\forall d \in D_1$ множина

$$\Sigma(d) := cl_{L^2_{loc}}\{d(\cdot + h) \mid h \ge 0\}$$

є трансляційно-інваріантною, компактною в $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $d \in \Sigma(d),\ \Sigma(0) = 0$ і $\forall \sigma \in \Sigma(d)$

$$\sup_{t\ge 0} \int\limits_t^{t+1} |\sigma(s)|^2 ds \le \sup_{t\ge 0} \int\limits_t^{t+1} |d(s)|^2 ds \le \|d\|^2_\infty. \tag{4.61}$$

З (4.61), зокрема, маємо: $d_n \to 0$ в $L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\sigma_n \in \Sigma(d_n)\ \Rightarrow \sigma_n \to 0$ в

$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 4.2.2. *Нехай виконуються умови* (4.29)-(4.31), (4.60). *Тоді сім'я m-напівпроцесів* $\{S_d\}_{d\in D_1}$, *породжена розв'язками збуреної задачі* (4.25) *має властивість AG відносно глобального атрактору* Θ *незбуреної системи* (4.48), *тобто*

$$\exists\gamma\in\mathcal{K}\ \forall d\in D_1,\ \forall z_0\in X$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|S_d(t,z_0)\|_\Theta\le\gamma(\|d\|_\infty). \tag{4.62}$$

Доведення. Позначимо $S_{\Sigma(d)}(t,z_0):=\bigcup\limits_{\sigma\in\Sigma(d)}S_\sigma(t,z_0)$.

Оскільки $\forall t\ge 0,\ \forall d\in D_1,\ \forall\sigma\in\Sigma(d)$ в силу (4.61)

$$\int\limits_0^t|\sigma(s)|^2e^{-\gamma(t-s)}ds\le\frac{1}{\gamma}\|d\|^2_\infty, \tag{4.63}$$

то з (4.35) виводимо: $\exists c>0\ \forall r>0\ \exists T(r)\ \forall t\ge T(r),\ \forall\|z_0\|_X\le r,\ \forall z(\cdot)$ – розв'язку (4.25) з $z(0)=z_0$ і збуренням $\sigma\in\Sigma(d)$ виконується оцінка

$$\|z(t)\|_X\le c(1+\|d\|_\infty). \tag{4.64}$$

Враховуючи властивість дисипативності (4.64), компактність $\Sigma(d)$ та оцінку (4.61), згідно Теореми 2.2.3 для одержання робастної оцінки (4.62) достатньо встановити наступні властивості:

$$\sigma_n\to\sigma \text{ в } L^2_{loc}(\mathbb{R}_+),\ z_0^n\to z_0 \text{ в } X,\ \xi_n\in S_{\sigma_n}(t,z_0^n),\ \xi_n\to\xi \text{ в } X\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\xi\in S_\sigma(t,z_0), \tag{4.65}$$

$$\sigma_n\to\sigma \text{ в } L^2_{loc}(\mathbb{R}_+),\ z_0^n\to z_0 \text{ слабо в } X,\ t_n\nearrow\infty,\ \xi_n\in S_{\sigma_n}(t,z_0^n)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{\xi_n\} \text{ предкомпактна в } X. \tag{4.66}$$

Властивість (4.65) випливає з Леми (4.2.2). Доведемо (4.66).

Покладемо $\xi_n=z_n(t_n)$, де $z_n(\cdot)$ є розв'язком (4.25) з $d=\sigma_n,\ z_n(0)=z_0^n$.

З оцінок (4.35), (4.61) та припущення (4.66) виводимо, що послідовність

$\{\xi_n\}$ є обмеженою в X. Отже, по підпослідовності

$$\xi_n \to \xi \text{ слабо в } X. \tag{4.67}$$

Ми можемо виділити таку підпослідовність, що $\forall M \geq 1$

$$z_n(t_n - M) \to \xi_M \text{ слабо в } X.$$

Більше того, $\forall t \geq 0$ для достатньо великого n, за властивістю коциклу, матимемо:

$$z_n(t_n - M + t) \in S_{\sigma_n(\cdot + t_n - M)}(t, 0, z_n(t_n - M)).$$

Виберемо $\bar{\sigma_n}(t) := \sigma_n(t + t_n - M)$. Припущення (4.66) дозволяє стверджувати, що для деякого $\bar{\sigma}$ виконується:

$$\bar{\sigma_n} \to \bar{\sigma} \text{ в } L^2_{loc}(\mathbb{R}_+). \tag{4.68}$$

Отже, тому з леми 4.2.2 для $\bar{z_n}(t) = z_n(t + t_n - M)$ маємо, що $\forall t \geq 0$

$$\bar{z_n}(t) \to \bar{z}(t) \text{ слабо в } X,$$

$$\bar{z}(t) \in S_{\bar{\sigma}}(t, 0, \xi_M).$$

Зокрема,

$$\bar{z_n}(M) = \xi_n \to \bar{z}(M) = \xi \text{ слабо в } X.$$

Аналогічно Теоремі 4.1.1 виводимо, що кожен розв'язок (4.25) $z(\cdot)$ зі збуренням $d(\cdot)$ задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt} I(z(t)) + \gamma I(z(t)) = H_d(t, z(t)), \tag{4.69}$$

де

$$I(z) = \frac{1}{2}\|y_t\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2_{H_0^1} + (F(y), 1) + \frac{\gamma}{2}(y_t, y),$$

$$H_d(t, z) = \gamma(F(y(t)), 1) - \frac{\gamma}{2}(f(y(t)), y(t)) + \frac{\gamma}{2}(g(y(t)), y(t))d(t) + (g(y(t)), y_t(t))d(t).$$

Запишемо (4.69) для $\bar{z_n}$ і після інтегрування по $[0, M]$ отримаємо:

$$I(\xi_n) = I(z_n(t_n - M))e^{-\gamma M} + \int\limits_0^M e^{\gamma(p-M)} \cdot H_{\bar{\sigma_n}}(p, \bar{z_n}(p))dp. \tag{4.70}$$

Застосовуючи до $\{\bar{z}_n\}$ ті ж самі аргументи, що й в (4.45) та (4.46) та беручи до уваги сильну збіжність (4.68), виводимо: $\forall M \geq 0$

$$\int\limits_0^M e^{\gamma(p-M)} \cdot H_{\bar{\sigma_n}}(p, \bar{z_n}(p))dp \to \int\limits_0^M e^{\gamma(p-M)} \cdot H_{\bar{\sigma}}(p, \bar{z}(p))dp \text{ as } n \to \infty.$$

З оцінки (4.35) маємо: $\exists c > 0\ \ \forall t \geq 0,\ \ \forall n \geq 1$

$$|I(z_n(t))| \leq c, \tag{4.71}$$

де стала c не залежить від M.

Тоді з (4.70) та (4.71) виводимо, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} I(\xi_n) \leq c \cdot e^{-\gamma M} + \int\limits_0^M e^{-\gamma(p-M)} \cdot H_{\bar{\sigma}}(\bar{z}(p))dp =$$

$$= ce^{-\gamma M} + I(\xi) - I(\xi_M)e^{-\gamma M} \leq 2ce^{-\gamma M} + I(\xi).$$

Таким чином,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{2}\|\xi_n\|_X^2 \leq 2ce^{-\gamma M} + \frac{1}{2}\|\xi\|_X^2.$$

Переходячи до границі при $M \to \infty$, отримуємо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\xi_n\|_X \leq \|\xi\|_X.$$

Поєднуючи цю нерівність зі слабкою збіжністю (4.67), отримуємо, що для послідовність $\{\xi_n\}$ є передкомпактною в X. Теорема доведена. □

4.3 Висновки до розділу 4

В даному розділі на основі результатів про якісну поведінку еволюційних систем без єдиності, одержаних в другому розділі, досліджується робастна сійкість атракторів по відношенню до збурень для нелінійного хвильового рівняння з дисипацією. В підрозділі 4.1 викладено результати щодо глобальної розв'язності та апріорних оцінок для загального хвильового рівняння з негладкою функцією взаємодії та на їх основі для неавтономних збурень доведено властивість асимптотичного підсилення для глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень. В підрозділі 4.2 розглянуто хвильове рівняння зі збуренням, що містить фазову змінну та не гарантує єдиність розв'язку задачі Коші. Встановлено результати про глобальну розв'язность та регулярність розв'язків та доведено результат про локальну стійкість та асимптотичне підсилення для глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень. Результати, викладені в розділі, опубліковані в [2, 6]

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню стійкості глобальних атракторів нелінійних еволюційних систем без єдиності по відношенню до зовнішніх збурень.

Перший розділ роботи присвячений огляду літератури по даній тематиці та методики проведення дисертаційних досліджень. Наведено основні положення теорії стійкості від входу до стану для систем диференціальних рівнянь. Також висвітлено роботи авторів, які займалися застосуванням цієї теорії до дослідженням якісної поведінки розв'язків як скінченновимірних, так і нескінченновимірних дисипативних систем.

У другому розділі досліджується многозначні напівпотоки та напівпроцеси, породжені еволюційними системами без єдиності, та стійкість їх атракторів. Детально проаналізовано структуру і властивості м-напівпотоків, породжених еволюційними автономними системами без єдиності, а також вивчено структуру м-напівпроцесів, що виникають при наявності неавтономних збурень. Доведено результат про асимптотичну стійкість глобального атрактору м-напівпроцесу у формі робастної оцінки. На основі цього доведено теорему про локальну стійкість від входу до стану атрактору еволюційної системи без єдиності за наявності збурень. Використовуючи результат про напівнеперервну зверху залежність атрактору м-напівпроцесу від параметру доведено теорему про робастну стійкість глобального атрактору відносно збурень у формі асимптотичного підсилення.

У третьому даному розділі на основі одержаних абстрактних результатів про якісну поведінку еволюційних систем без єдиності, одержаних в другому розділі, досліджується робастна сійкість атракторів по відношенню до збурень для ряду дисипативних нелінійних параболічних систем. В підрозділі 3.1 викладено результати щодо глобальної розв'язності та апріорних оцінок для загальних параболічних рівнянь з негладкою функцією взаємодії типу реакція-дифузія. В підрозділі 3.2 для параболічної системи типу реакція-дифузія з гладкою нелінійністю та збуренням, що містить фазову змінну та не гарантує єдиність розв'язку задачі Коші, доведено результат про локальну стійкість глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень. В підрозділі 3.2 для загальної системи типу реакція-дифузія з негладкою нелінійністю та неавтономних збуренням доведено властивість асимптотичного підсилення для глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень. В підрозділі 3..3 доведено робастну стійкість атрактору дисипативної еволюційної системи, що складається з параболічної нелінійної системи та системи звичайних диференціальних рівнянь, що збурюються вхідними обмеженими сигналами.

В четвертому розділі на основі результатів про якісну поведінку еволюційних систем без єдиності, одержаних в другому розділі, досліджується робастна сійкість атракторів по відношенню до збурень для нелінійного хвильового рівняння з дисипацією. В підрозділі 4.1 викладено результати щодо глобальної розв'язності та апріорних оцінок для загального хвильового рівняння з негладкою функцією взаємодії та на їх основі для неавтономних збурень доведено властивість асимптотичного підсилення для глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень. В підрозділі 4.2 розглянуто хвильове рівняння зі збуренням, що містить фазову змінну та не гарантує єдиність розв'язку задачі Коші. Встановлено результати про глобальну розв'язность та регулярність розв'язків та доведено результати про локальну стійкість та асимптотичне підсилення глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень.

У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

– одержано достатні умови локальної стійкості щодо неавтономних збурень для глобального атрактору абстрактної нескінченновимірної еволюційної системи без єдиності;

– встановлено робастну оцінку типу асимптотичного підсилення для неавтономних еволюційних систем без єдиності відносно атракторів автономних незбурених систем;

– для параболічної системи типу реакція-дифузія з гладкою нелінійністю та збуренням, що містить фазову змінну та не гарантує єдиність розв'язку задачі Коші, доведено результат про локальну стійкість глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень;

– для загальної системи типу реакція-дифузія з негладкою нелінійністю та неавтономних збуренням доведено властивість асимптотичного підсилення для глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень;

– доведено робастну стійкість атрактору дисипативної еволюційної системи, що складається з параболічної нелінійної системи та системи звичайних диференціальних рівнянь, що збурюються вхідними обмеженими сигналами;

– для загального нелінійного гіперболічного рівняння з негладкою функцією взаємодії та неавтономних збуренням доведено властивість асимптотичного підсилення для глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень;

– для гіперболічного рівняння з гладкою нелінійністю та збуренням, що містить фазову змінну та не гарантує єдиність розв'язку задачі Коші, доведено результат про локальну стійкість та асимптотичне підсилення для глобального атрактру незбуреної системи по відношенню до збурень.

Результати роботи доповнюють абстрактну теорію стійкості еволюційних нескінченновимірних систем без єдиності розв'язку та можуть бути використані в подальшому для дослідження якісної поведінки розв'язків дисипативних диференціальних рівнянь в частинних похіднихь. Одержані в роботі результати також можуть мати прикладне значення, зокрема, при дослідженні стійкості граничних режимів в системах з зовнішніми сигналами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Капустян О.В., Юсипів Т.В. Стійкість до збурень для атрактора дисипативної системи типу PDE–ODE // Нелінійні коливання. 2021. Т. 24, № 3. С. 336–341; translation in Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 272, no. 2. P. 236–243. DOI: http://doi.org/10.1007/s10958-023-06413-1.

2. Капустян О.В., Юсипів Т.В. Робастна стійкість атрактора нелінійного хвильового рівняння без єдиності розв'язку // Нелінійні коливання. 2022. Т. 25, № 2-3. С. 198–206; translation in Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 274, no. 6. P. 850–860. DOI: http://doi.org/http://doi.org/10.1007/s10958-023-06648-y.

3. Капустян О.В., Юсипів Т.В. Стійкість граничних режимів для загального випадку систем типу реакція-дифузія // Науковий вісник Ужгородського університету. 2022. Т. 41, №2. С. 48–60. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).48-60.

4. Kapustyan O.V., Kurylko O.B., Yusypiv T.V. Robust stability of the global attractor of the reaction-diffusion system // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics. 2021. No. 3. P. 46–50. DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.6.

5. Kapustyan O.V., Sobchuk V.V., Yusypiv T.V., Pankov A.V. Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniqueness // Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA). 2022. Vol.30., no. 3. P. 49–61. DOI: http://dx.doi.org/10.15421/142208.

6. Kapustyan O.V., Kurylko O.B., Yusypiv T.V., Pankov A.V. Stability w.r.t. disturbances for the global attractor of multi-valued semiflow generated by

nonlinear wave equation // Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA). 2023. Vol. 31, no. 1. P. 111–124. DOI: http://dx.doi.org/10.15421/142306.

7. Kapustyan O., Perestyuk M., Yusypiv T., Dashkovskiy S. Robust Stability of Global Attractors for Reaction-Diffusion System w.r.t. Disturbances // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2021". Tbilisi, Georgia, 2021. P. 159–162.
8. Kapustyan O.V., Yusypiv T.V. Robust stability of attractor for RD-system without uniqueness // The nonlinear analysis and applications 2022: Materials of 5th International conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine VALERY SERGEEVICH MELNIK, Part 1. Kyiv, NTUU "Igor Sikorsky KPI", 2022. P. 26.
9. Капустян О.В., Юсипів Т.В. Робастна стійкість атрактора системи типу реакція-дифузія без єдиності // Матеріали XI Міжнародної науково-практичної конференції "Математика. Інформаційні технології. Освіта". Луцьк, Україна, 2022. С. 15–16.
10. Капустян О., Юсипів Т. Стійкість щодо збурень атрактора хвильового рівняння // Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації: матеріали III Міжнародної наук.-практ. інтернет-конф. Запоріжжя: ТДАТУ, 2022. С. 46–48.
11. Kapustyan O., Sobchuk V., Yusypiv T., Laptiev O., Shestak I., Zinchenko K. Robust stability of limit regimes in distributed signal transmission RD systems // 2022 IEEE 4th Internetional Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT). USA, 2022. P. 168–172.
12. Kapustyan O., Perestyuk M., Yusypiv T., Dashkovskiy S. Robust stability for the attractors of a nonlinear wave equations // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2022". Tbilisi, Georgia, 2022. P. 102 – 107.
13. Нікіфоров І., Юсипів Т. Робастна стійкість глобальних атракторів еволюційних систем без єдиності // Матеріали XXI Міжнародної науково-

практичної конференції "Шевченківська весна 2023". К.: Київський університет, 2023. С. 40–41.

14. Юсипів Т.В. Стійкість від входу до стану для еволюційних систем без єдиності // Матеріали Міжнародної конференції юних математиків. К.: Інститут математики національної академії наук України, 2023.

15. Капустян О.В., Глок С.І., Юсипів Т.В. Стійкість щодо збурень для атрактора системи типу PDE-ODE // Матеріали XII Міжнародної науково-практичної конференції "Математика. Інформаційні технології. Освіта". Луцьк, Україна, 2023. С. 23–25.

16. Капустян О.В., Юсипів Т.В. Стійкість від входу до стану для атракторів еволюційних систем без єдиності // Матеріали Міжнародної наукової конференції "МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ"присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Чернівці, Україна, 2023. С. 215–216.

17. Капустян О.В., Юсипів Т.В. Дослідження стійкості від входу до стану для атракторів еволюційних систем без єдиності // Матеріали XIX Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, присвяченої 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ, Україна, 2023. С. 37–38.

18. Kokotovi’c P., Arcak M. Constructive Nonlinear Control: A Historical Perspective // Automatica J. IFAC. 2001. Vol. 37, no 5. P. 637–662.

19. Sontag E.D. Smooth stabilization implies coprime factorization // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. Vol. 34, no 4. P. 435–443.

20. Sontag E.D. Further Facts about Input to State Stabilization // IEEE Trans. Automat. Control. 1990. Vol. 35, no 4. P. 473–476.

21. Sontag E.D., Wang Y. On characterizations of the input-to-state stability property // Systems & Control Letters. 1995. Vol. 24, no 5. P. 351–359.

22. Sontag E.D.,and Teel A. Changing Supply Functions in Input/State Stable Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1995. Vol. 40, no 8. P. 1476–1478.

23. Sontag E.D., Wang Y. New characterizations of input-to-state stability // IEEE Trans. Autom. Contr. 1996. Vol. 24. P. 1283–1294.

24. Sontag E.D. Mathematical control theory: deterministic finite-dimensional systems // Springer. 1998.

25. Sontag E.D. Comments on Integral Variants of ISS // Syst. Control Lett. 1998. Vol. 34, no 1-2. P. 93–100.

26. Sontag E.D. The ISS philosophy as a unifying framework for stability-like behavior // Nonlinear control in the year 2000. V. 259. Lecture Notes Control Inform. Sci. London: Springer. 2001. P. 443–467.

27. Sontag E.D. Input-to-state stability: basic concepts and results // Nonlinear and optimal control. V. 1932. Lecture Notes Math. Berlin: Springer. 2008. P. 163–220.

28. Malisoff M., Rifford L., and Sontag E.D. Global Asymptotic Controllability Implies Input-to-State Stabilization // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 42. no 6. P. 2221–2238.

29. Mironchenko A. Local input-to-state stability: Characterizations and counterexamples // Systems & Control Letters. 2016. Vol. 87. P. 23–28.

30. Mironchenko A. Input-to-state Stability: Theory and Applications // Springer. 2023.

31. Mironchenko A. and Prieur Ch. Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: Recent results and open questions // SIAM Review. 2020, Vol. 62. P. 529–614.

32. Jacob B., Mironchenko A., Schwenninger F. Input-to-state stability for infinite-dimensional systems // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2022, Vol. 34. P. 215–216.

33. Dashkovskiy S., Mironchenko A. Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems // Mathematics of Control, Signals and Systems. 2013. Vol. 25, no 1. P. 1–35.

34. Mironchenko A. and Wirth F. Characterizations of input-to-state stability for infinite-dimensional systems // IEEE Trans. Autom. Contr. 2018. Vol. 63. P. 1602–1617.

35. Dashkovskiy S., Kapustyan O., and Schmid J. A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction-diffusion equations // Mathematics of Control, Signals and Systems. 2020. Vol. 32, no 3. P. 309–326.

36. Dashkovskiy S., Kapustyan O., and Slynko V. Robust stability of a nonlinear ODE-PDE system // SIAM Journal on Control and Optimization. 2023. Vol. 61, no 3. P. 1760–1777.

37. Jacob B., Schwenninger F. Input-to-state stability of unbounded bilinear control systems // arXiv:1811.08470. 2018.

38. Karafyllis, I. and Krstic, M. Input-to-state stability for PDEs // Communications and Control Engineering Series. Springer, Cham. 2019.

39. Schmid J. Weak input-to-state stability: Characterizations and counterexamples // Math. Contr. Sign. Syst. 2019. Vol. 31. P. 433–454.

40. Gorban N.V., Kapustyan A.V., Kapustyan E.A., Khomenko O.V. Strong global attractors for the three-dimensional Navier-Stokes system of equations in unbounded domain of channel type // Journal of Automation and Information Sciences. 2015. Vol. 47, no 11. P. 48–59.

41. Kapustyan O.V., Kasyanov P.O., Valero J. Structure of the global attractor for weak solutions of a reaction-diffusion equation // Appl. Math. Inf. Sci. 2015. Vol. 9, no 5. P. 2257–2264.

42. Robinson J.C. Infinite-Dimensional Dynamical Systems // Cambridge University Press. 2001.

43. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics // Berlin: Springer. 1988. 500 p.

44. Chepyzhov V.V. and Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics // American Mathematical Society. 2002. Vol. 49.

45. Kapustyan A.V., Mel'nik V.S. Global attractors of multivalued semidynamical systems and their approximations // Cybernetics and Systems Analysis. 1998. Vol. 34. P. 719–725.

46. Melnik V.S., Kapustyan A.V. On global attractors of multivalued semidynamic systems and their approximations // Doklady Akademii Nauk. 1999. Vol. 366. P. 445–448.

47. Kapustyan A.V., Valero J. Attractors of multivalued semiflows generated by differential inclusions and their approximations // Abstract and Applied Analysis. 2000. Vol. 5. P. 33–46.

48. Kapustyan A.V. Global attractors of a nonautonomous reaction-diffusion equation // Differential Equations. 2002. Vol. 38. P. 1467–1471.

49. Kapustyan A.V., Melnik V.S., Valero J. Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2003. Vol. 13. P. 1969–1983.

50. Kapustyan O.V., Kasyanov P.O., Valero J., Zgurovsky M.Z. Structure of uniform global attractor for general non-autonomous reaction-diffusion system // Continuous and distributed systems. 2014. Vol. 211. P. 221–237.

51. Kapustyan O.V., Perestyuk M.O. Global Attractors in impulsive infinite-dimensional systems // Ukrainian Mathematical Journal. 2016. Vol. 68, no 4. P. 517–528.

52. Dashkovskiy S., Kapustyan O., Romaniuk I. Global attractors of impulsive parabolic inclusions // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2017. Vol. 22, no 5. P. 1875–1886.

53. Kapustyan O.V., Perestyuk M.O., Romaniuk I.V. Stability of global attractors of impulsive infinite-dimensional systems // Ukrainian Mathematical Journal. 2018. Vol. 70, no 1. P. 30–42.

54. Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O., Romaniuk I. Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. Vol. 458, no 1. P. 193–218.

55. Dashkovskiy S., Kapustyan O., Perestyuk Y. Stability of uniform attractors of impulsive multi-valued semiflows // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2021. Vol. 40. P. 101025.

56. Dashkovskiy S., Kapustyan O.V. Robustness of global attractors: abstract framework and application to dissipative wave equations // Evolution Equations and Control Theory. 2022. Vol. 11, no 5. P. 1565—1577.

57. Schmid J., Kapustyan O. and Dashkovskiy S. Asymptotic gain results for attractors of semilinear systems // arXiv:1909.06302. 2020.

58. Kasyanov P.O., Toscano L., Zadoianchuk N.V. Long-time behavior of solutions for autonomous evolution hemivariational inequality with multidimensional reaction-displacement law // Abstract and Applied Analisys. 2012.

59. Dashkovskiy S., Efimov D., Sontag E. Input to state stability and allied system properties // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72. P. 1579–1614.

60. Jayawardhana B., Logemann H., Ryan E.P. Infinite-dimensional feedback systems: the circle criterion and input-to-state stability // Commun. Inf. Syst. 2008. Vol. 8, no 4. P. 413–414.

61. Dashkovskiy S., Mironchenko A. On the uniform input-to-state stability of reaction-diffusion systems // In: Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control. Atlanta, Georgia, USA. 2010. P. 6547–6552.

62. Doyle J., Francis B., and Tannenbaum A. Feedback Control System // New York: MacMillan. 1992.

63. Khalil H.K. Nonlinear systems. Third edition // Prentice Hall. New Jersey. 2002.

64. Dashkovskiy S.N., Rüffer B.S., Wirth, F.R. Small Gain Theorems for Large Scale Systems and Construction of ISS Lyapunov Functions // SIAM Journal on Control and Optimization. 2010. Vol. 48, no 6. P. 4089–4118.

65. Karafyllis I., and Jiang Z.-P. A Small-gain Theorem for a Wide Class of Feedback Systems with Control Applications // SIAM J. Control Optim. 2007. Vol. 46, no 4. P. 1483–1517.

66. Pepe P., Karafyllis I., and Jiang Z.-P. On the Liapunov-Krasovskii Methodology for the ISS of Systems Described by Coupled Delay Differential and Difference Equations // Automatica J. IFAC. 2008. Vol. 44, no 9. P. 2266–2273.

67. Teel A.R. Connections between Razumikhin-type Theorems and the ISS Nonlinear Small Gain Theorem // IEEE Trans. Automat. Control. 1998. Vol. 43, no 7. P. 960–964.

68. Lyapunov A.M. Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya (General Problem of Motion Stability) // Khar'kov: Khar'kov. Mat. Obshch. 1892. (in Russian)

69. Polushin I.G., Fradkov A.L., and Hil D.J. Passivity and Passification of Nonlinear Systems // Autom. Remote Control. 2000. Vol. 3. P. 355–388.

70. Willems J.C. Dissipative Dynamical Systems. Part I: General Theory // Arch. Rational Mechanics Anal. 1972. Vol. 45. P. 321–351.

71. Grüne L. Input-to-state dynamical stability and its Lyapunov function characterization // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. Vol. 47, no 9. P. 1283–1294.

72. Praly L., and Wang Y. Stabilization in Spite of Matched Unmodeled Dynamics and an Equivalent Definition of Input-to-State Stability // Math. Control Sygnals Syst. 1996. Vol. 9, no 1. P. 1–33.

73. Dashkovskiy S., Rüffer B.S., Wirth F.R. An ISS small gain theorem for general net works // Math. Control Signals Systems. 2007. Vol. 19, no 2. P. 93–122.

74. Jiang Z.P., Mareels I.M.Y., Wang Y. A Lyapunov formulation of the nonlinear small gain theorem for interconnected ISS systems // Automatica J. IFAC. 1996. Vol. 32, no 8. P. 1211–1215.

75. Karafyllis, I., Jiang, Z.P. A vector small-gain theorem for general non-linear control systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2011.

76. Cai C., Teel A. Characterizations of input-to-state stability for hybrid systems // Systems and Control Letters. 2009. Vol. 58, no 1. P. 47-53.

77. Hespanha J.P., Liberzon D., Teel A.R. Lyapunov conditions for input-to-state stability of impulsive systems // Automatica J. IFAC. 2008. Vol. 44, no 11. P. 2735–2744.

78. Vu L., Chatterjee D., Liberzon D. Input-to-state stability of switched systems and switching adaptive control // Automatica J. IFAC. 2007. Vol. 43, no 4. P. 639-646.

79. Pepe P., Jiang Z.P. A Lyapunov-Krasovskii methodology for ISS and iISS of time-delay systems // Systems Control Lett. 2006. Vol. 55, no 12. P. 1006-1014.

80. Dashkovskiy S., Rüffer B.S., Wirth F.R. An ISS Lyapunov function for networks of ISS systems // Proceedings of the 17th Inernational Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS). Kyoto, Japan. 2006. P. 77–82.

81. Dashkovskiy S.N., Rüffer B.S. Local ISS of large-scale interconnections and estimates for stability regions // Systems & Control Letters. 2010. Vol. 59. no 3–4. P. 241–247.

82. Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations // Lecture Notes in Mathematics. 1981. Vol. 840. Springer-Verlag. Berlin.

83. Levinson N. Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order // Annals of Math. 1944. Vol. 45. P. 724–737.

84. Ladyzhenskaya O.A. A dynamical system generated by the Navier-Stokes equations // Journal of Soviet Mathematics. 1975. Vol. 3. P. 458–479.

85. Hale J.K., LaSalle J.P., Slemrod M. Theory of general class of dissipative processes // J. Math. Ana. Appl. 1972. Vol. 39. P. 177–191.

86. Hale J.K., Kato J. Phase space of retarted equations with infifnite delay // Tohoku Math. J. 1978. Vol. 21. P. 11–41.

87. Hale J.K. Asymptotic behavior of dissipative systems // Providence: AMS. 1987.

88. Sell G.R., You Y. Dynamics of Evolutionary Equations // Springer. 2002.

89. Melnik V.S., Valero J. On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions // Set-Valued Analysis. 1998. Vol. 6. P. 83–111.

90. Kapustyan O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V. Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness // Kyiv: Naukova Dumka. 2008. 215 p.

91. Ball J.M. Global attractors for damped semilinear wave equations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2004. Vol. 10. P. 31–52.

92. Cheban D.N., Kloeden P.E., Schmalfuss B. Relations of pullback attractors and global attractors for nonautonomous dynamical systems // Nonlinear Dynamics and System Theory. 2002. Vol. 2, no 1. P. 9–28.

93. Капустян О.В. Існування та апроксимації глобальних атракторів нелінійних еволюційних рівнянь // Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2000. 114 с.

94. Kapustyan O., Valero J., Pereguda O. Random attractor for the reaction diffusion equation pertubed by a stochastic Cadag process // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2006. Vol. 73. P. 57–69.

95. Melnik V.S. Multivalued dynamics of nonlinear infinite-dimensional systems // Preprint, Academy of Science of Ukraine, Institute of Cybernetics. 1994. Vol. 94, no 17.

96. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis // Boston: Birkhausser. 1990. 410 p.

97. Капустян О.В. Глобальні атрактори неавтономних многозначних динамічних систем // Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2007. 291 с.

98. Kapustyan A.V., Valero J. On the Kneser property for the complex Ginzburg-Landau equation and the Lotka-Voltera system with diffusion // J. Math. Anal. Appl. 2009. P. 254–272.

99. Royden H.I., Fitzpatrick P.M. Real Analysis (Fourth Edition) // China Machine Press. 2010.

100. Gaevskii H., Greger K., Zaharias K. Nonlinear Operator Equations and Operator Differential Equations // Mir. 1978. (in Russian)

101. Lions J.-L. Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems // Dunod-Gauthier-Villars, Paris. 1969.

102. Vishik M.I., Chepyzhov V.V. Averaging trajectory attractors of evolutionary equations with rapidly oscillating terms // Sb. Math. 2001. Vol. 192, no 11. P. 13–50.

103. Schmid J., Kapustyan O., Dashkovskiy S. Asymptotic gain results for attractors of semilinear systems // Mathematical Control and Related Fields. 2021.

ДОДАТОК

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Kapustyan O.V., Kurylko O.B., Yusypiv T.V., *Robust stability of the global attractor of the reaction-diffusion system,* Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics, No. 3, (2021), P. 46–50, DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.6

2. Капустян О.В., Юсипів Т.В., *Стійкість граничних режимів для загального випадку систем типу реакція-дифузія,* Науковий вісник Ужгородського університету, Т. 41, №2, (2022), С. 48–60, DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).48-60

3. Kapustyan O.V., Sobchuk V.V., Yusypiv T.V., Pankov A.V., *Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniqueness,* Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA), Vol.30., No. 3, (2022), P. 49–61, DOI: http://dx.doi.org/10.15421/142208

4. Капустян О.В., Юсипів Т.В., *Стійкість до збурень для атрактора дисипативної системи типу PDE–ODE,* Нелінійні коливання, Т. 24, № 3, (2021), С. 336–341; translation in Journal of Mathematical Sciences, Vol. 272, No. 2, (2023), P. 236–243, DOI: http://doi.org/10.1007/s10958-023-06413-1

5. Kapustyan O.V., Kurylko O.B., Yusypiv T.V., Pankov A.V., *Stability w.r.t. disturbances for the global attractor of multi-valued semiflow generated by nonlinear wave equation,* Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA), Vol. 31, No. 1, (2023), P. 111–124, DOI: http://dx.doi.org/10.15421/142306

6. Капустян О.В., Юсипів Т.В., *Робастна стійкість атрактора нелінійного хвильового рівняння без єдиності розв'язку,* Нелінійні коливання, Т. 25, № 2-3, (2022), С. 198–206; translation in Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274, No. 6, (2023), P. 850–860, DOI: http://doi.org/http://doi.org/10.1007/s10958-023-06648-y.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Kapustyan O., Perestyuk M., Yusypiv T., Dashkovskiy S. Robust Stability of Global Attractors for Reaction-Diffusion System w.r.t. Disturbances // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2021". Tbilisi, Georgia, 2021. P. 159–162.

2. Kapustyan O.V., Yusypiv T.V. Robust stability of attractor for RD-system without uniqueness // The nonlinear analysis and applications 2022: Materials of 5th International conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine VALERY SERGEEVICH MELNIK, Part 1. Kyiv, NTUU "Igor Sikorsky KPI", 2022. P. 26.

3. Капустян О.В., Юсипів Т.В. Робастна стійкість атрактора системи типу реакція-дифузія без єдиності // Матеріали XI Міжнародної науково-практичної конференції "Математика. Інформаційні технології. Освіта". Луцьк, Україна, 2022. С. 15–16.

4. Капустян О., Юсипів Т. Стійкість щодо збурень атрактора хвильового рівняння // Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації: матеріали III Міжнародної наук.-практ. інтернет-конф. Запоріжжя: ТДАТУ, 2022. С. 46–48.

5. Kapustyan O., Sobchuk V., Yusypiv T., Laptiev O., Shestak I., Zinchenko K. Robust stability of limit regimes in distributed signal transmission RD systems // 2022 IEEE 4th Internetional Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT). USA, 2022. P. 168–172.

6. Kapustyan O., Perestyuk M., Yusypiv T., Dashkovskiy S. Robust stability for the attractors of a nonlinear wave equations // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2022". Tbilisi, Georgia, 2022. P. 102 – 107.

7. Нікіфоров І., Юсипів Т. Робастна стійкість глобальних атракторів еволюційних систем без єдиності // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції "Шевченківська весна 2023". К.: Київський університет, 2023. С. 40–41.

8. Юсипів Т.В. Стійкість від входу до стану для еволюційних систем без єдиності // Матеріали Міжнародної конференції юних математиків. К.:

Інститут математики національної академії наук України, 2023.

9. Капустян О.В., Глок С.І., Юсипів Т.В. Стійкість щодо збурень для атрактора системи типу PDE-ODE // Матеріали XII Міжнародної науково-практичної конференції "Математика. Інформаційні технології. Освіта". Луцьк, Україна, 2023. С. 23–25.

10. Капустян О.В., Юсипів Т.В. Стійкість від входу до стану для атракторів еволюційних систем без єдиності // Матеріали Міжнародної наукової конференції "МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ"присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Чернівці, Україна, 2023. С. 215–216.

11. Капустян О.В., Юсипів Т.В. Дослідження стійкості від входу до стану для атракторів еволюційних систем без єдиності // Матеріали XIX Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, присвяченої 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ, Україна, 2023. С. 37–38.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції

1. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2021"(Tbilisi, Georgia, 2021).

2. The nonlinear analysis and applications 2022: Materials of 5th International conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine VALERY SERGEEVICH MELNIK (Kyiv, Ukraine, 2022).

3. XI Міжнародна науково-практична конференція "Математика. Інформаційні технології. Освіта"(Луцьк, Україна, 2022).

4. III Міжнародна науково-практична конференція "Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації"(Запоріжжя, Україна, 2022).

5. IEEE 4th Internetional Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT) (USA, 2022).

6. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE – 2022"(Tbilisi, Georgia, 2022).

7. XXI Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна – 2023» (Київ, 2023).

8. Міжнародна конференція юних математиків (Київ, Україна, 2023).

9. XII Міжнародна науково-практична конференція "Математика. Інформаційні технології. Освіта"(Луцьк, Україна, 2023).

10. Міжнародна наукова конференція "МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ"присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Чернівці, Україна, 2023).

11. XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського (Київ, Україна, 2023).

Наукові семінари

1. Науковий семінар з диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Керівники семінару – професор, доктор фізико-математичних наук О. М. Станжицький та професор, доктор фізико-математичних наук О. В. Капустян. За участі професорів, докторів фізико-математичних наук – М. Ф. Городнього., І. О. Парасюка та В. В. Собчука. (Київ, Україна, 21 березня 2024 р.)