Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

ЖУЧОК ЮЛІЯ ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 512.579, 512.53

ВІДНОСНО ВІЛЬНІ ТРІОЇДИ

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Дисертація
на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Науковий керівник –
Кириченко Володимир Васильович,
доктор фізико-
математичнихнаук,професор

Київ – 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Однією з важливих мов для виразу властивостей алгебраїчних систем є мова тотожностей. Проблематика, пов'язана з вивченням тотожностей, обумовила формування широкого напряму в алгебрі, який називається теорією многовидів. Термін ,,многовид" був введений Ф. Холом у 1949 році. Починаючи з класичної роботи американського математика Г. Біркгофа [1], проводяться інтенсивні дослідження многовидів алгебраїчних систем. У другій половині 20 ст. теорія многовидів перетворена в один із центральних напрямів сучасної алгебри. Їй присвячено багато книг та наукових статей (див., наприклад, [2 – 5]). Многовиди відіграють особливу роль в базах даних – вони пов'язані з важли-вою в теорії програмування ідеєю типу даних [6]. Сьогодні теорія многовидів алгебраїчних систем має багату проблематику, розвивається активно й плідно.

Одним із напрямів досліджень теорії многовидів є дослідження вільних систем у многовидах. Многовиди завжди володіють вільними системами, а елементи заданого многовиду можна охарактеризувати як гомоморфні образи вільних систем. Конструкції різних вільних систем можна знайти, наприклад, в книгах [6 – 8]. Важливими прикладами многовидів є такі класи, як клас усіх напівгруп, клас усіх груп, клас усіх кілець, клас усіх решіток, клас усіх алгебр Буля.

Іншим змістовним класом алгебраїчних систем є клас тріоїдів. Тріоїдом називається непорожня множина з трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$, які задовольняють вісім аксіом:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \quad (T1)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \quad (T2)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (T3)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), (T4)$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), (T5)$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), (T6)$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), (T7)$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z). (T8)$$

Теорія тріоїдів бере свій початок з основоположної праці Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [9] і має широке застосування в теорії триалгебр. Нагадаємо, що триалгебра є лінійним аналогом тріоїда. Поняття триалгебри та тріоїда виникли в контексті алгебраїчної топології під час дослідження планарних дерев. Триалгебри та тріоїди мають зв'язки з алгебрами Хопфа [10], з алгебрами Лейбніца [11] та з операторами Рота–Бакстера [12]. Триалгебри вивчалися в роботах Ж.-С. Новеллі і Ж.-І. Тібона [10, 13], Ж. М. Касаса [14], К. Ібрахімі–Фарда [12]. Першим результатом про тріоїди є опис вільного тріоїда рангу 1 [9]. У [15] вивчаються конгруенції на тріоїдах за допомогою методу напівретракцій. Деякі найменші конгруенції на тріоїдах з обмеженнями на операції описано в [16]. Вивчення ендоморфізмів однопороджених вільних тріоїдів здійснено у роботі [17]. Тріоїди є предметом вивчення оглядової статті [18], вони також вивчалися у роботах [19 – 23].

Якщо дві конкретні операції триалгебри (тріоїда) збігаються, то отримуємо поняття діалгебри (дімоноїда) [24]. Нагадаємо, що діалгеброю називається векторний простір над полем, наділений двома бінарними білінійними асоціативними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють аксіоми $(T1)-(T3)$. Якщо у визначенні діалгебри замість векторного простору над полем взяти множину та опустити білінійність операцій $\dashv, \vdash$, то отримуємо поняття дімоноїда. Поняття діалгебри та дімоноїда були введені Ж.-Л. Лоде під час вивчення феномену періодичності в алгебраїчній K-теорії. Нагадаємо, що будь-яка асоціативна алгебра дає алгебру Лі, якщо покласти $[x, y] = xy - yx$. Діалгебри пов'язані з алгебрами Лейбніца аналогічно тому як пов'язані між собою асоціативні алгебри і алгебри Лі. Вони є універсальними обгортуючими для алгебр Лейбніца та вивчалися в роботах різних математиків. Так, в [25] наведено базис Грьобнера–Ширшова для діалгебр. Многовиди діалгебр вивчалися в [26, 27]. Діалгебрам та їх зв'язкам з потрійними системами присвячено роботу [28]. Першим результатом про дімоноїди є опис Ж.-Л. Лоде вільного дімоноїда [24]. Розвитку теорії дімоноїдних многовидів присвячено роботи [29 – 37]. Декомпозиції дімоноїдів у дісполуки піддімоноїдів та деякі найменші конгруенції на дімоноїдах з обмеженнями на операції охарактеризовано в [29, 31 – 39]. У роботі [40] побудовано вільний добуток дімоноїдів. У [40, 41] досліджено структурні властивості вільних добутків дімоноїдів. Нещодавно в [42] було показано, що будь-який дімоноїд ізоморфно занурюється в деякий дімоноїд, побудований із напівгрупи. Вивченню властивостей дімоноїдів присвячено монографію [43]. Слід відзначити, що якщо операції діалгебри (дімоноїда) збігаються, то вона (він) перетворюється в асоціативну алгебру (напівгрупу). Таким чином, діалгебри (дімоноїди) узагальнюють асоціативні алгебри (напівгрупи).

О. П. Пожидаєв [44] і П. С. Колесников [26] розглянули поняття 0-діалгебри, тобто векторного простору над полем, наділеного двома бінарними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють аксіоми: $(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z,\ x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z)$. Це поняття пов'язано з асоціативними діалгебрами [24] та з алгебрами Рота–Бакстера [44]. Поняття асоціативної 0-діалгебри [44], тобто 0-діалгебри з двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ і $\vdash$, є лінійним аналогом поняття узагальненого дімоноїда (або просто g-дімоноїда для стислості), розглянутого в [45]. Для того, щоб отримати g-дімоноїд, необхідно опустити аксіому $(T2)$ внутрішньої асоціативності у визначенні дімоноїда. Клас усіх g-дімоноїдів утворює многовид. Вільний g-дімоноїд нещодавно був побудований в [45].

Зрозуміло, що всі результати, отримані для g-дімоноїдів, можуть бути застосовані до асоціативних 0-діалгебр.

Теорія многовидів тріоїдів, дімоноїдів та g-дімоноїдів, з одного боку, може бути розглянута як одна з природних та важливих частин загальної теорії многовидів алгебраїчних систем та, з іншого боку, мова многовидів є потужним засобом вивчення й класифікації тріоїдів, дімоноїдів та g-дімоноїдів. Додатковий інтерес викликає зіставлення окремих питань про тріоїдні, дімоноїдні (g-дімоноїдні) многовиди з відповідними фактами для таких алгебраїчних систем як напівгрупи.

Актуальність теми дисертаційної роботи обумовлена проблемами теорії многовидів тріоїдів, дімоноїдів та g-дімоноїдів, до яких відносяться проблеми класифікації підмноговидів в многовидах тріоїдів, дімоноїдів і g-дімоноїдів та опису вільних об’єктів у заданих многовидах. Разом з тим принциповий інтерес представляють питання дослідження структурних та факторизаційних властивостей побудованих відносно вільних алгебр.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційні дослідження проводилися на кафедрі геометрії, топології і динамічних систем механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка як частина науково-дослідної теми „Застосування алгебро-геометричних методів у теоріях груп, напівгруп, кілець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту інформації” (номер державної реєстрації 0111U005264) та на кафедрі алгебри та системного аналізу Навчально-наукового інституту фізики, математики та інформаційних технологій Державного закладу «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка» в рамках науково-дослідної теми „Напівгрупи та структурні властивості дімоноїдів” (номер державної реєстрації 0115U000199).

Мета і задачі дослідження.Метою дослідження є побудова вільних об'єктів в деяких многовидах тріоїдів, дімоноїдів і g-дімоноїдів та вивчення їх структурних і факторизаційних властивостей. **Основнимизадачами** при цьому є:

- класифікація декомпозицій вільних тріоїдів у трисполуки підтріоїдів та характеризація деяких найменших конгруенцій на вільному тріоїді;
- побудова вільного n-нільпотентного тріоїда, вільної прямокутної трисполуки та дослідження їх структурних і факторизаційних властивостей;
- характеризація найменшої лівої (правої) n-дінільпотентної конгруенції на вільному дімоноїді;
- побудова g-дімоноїда, ізоморфного вільному g-дімоноїду, вільного n-нільпотентного g-дімоноїда, вільного комутативного g-дімоноїда, а також характеризація найменшої n-нільпотентної конгруенції на вільному g-дімоноїді;
- побудова нових класів тріоїдів, дімоноїдів та g-дімоноїдів.

Об'єктом дослідження є тріоїди, дімоноїди та g-дімоноїди.

Предметом дослідження є структура та властивості тріоїдів, дімоноїдів і g-дімоноїдів.

Методи дослідження – загальноалгебраїчні з використанням основних методів теорії напівгруп, теорії дімоноїдів, метод декомпозиції.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано такі нові теоретичні результати:

1. Наведено декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки і сполуки підтріоїдів, охарактеризовано найменшу ліву ідемпотентну, найменшу праву ідемпотентну, найменшу прямокутну, найменшу n-

нільпотентну та найменшу трипрямокутну конгруенції на вільному тріоїді.

2. Побудовано вільний n-нільпотентний тріоїд та в термінах введеного поняття 0-трисполуки підтріоїдів описано його структуру.
3. Побудовано вільну прямокутну трисполуку, описано її структурні властивості та охарактеризовано деякі найменші конгруенції на ній.
4. Представлено найменшу ліву (праву) n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді.
5. Побудовано g-дімоноїд, який є ізоморфним вільному g-дімоноїду, вільний n-нільпотентний g-дімоноїд та охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.
6. Побудовано вільний комутативний g-дімоноїд та наведено численні приклади g-дімоноїдів.
7. Наведено нові приклади нільпотентних тріоїдів, прямокутних трисполук та дімоноїдів.

Отримані результати доповнюють результат Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко про вільні тріоїди рангу 1, розвивають добре відомі результати теорії напівгруп про будову вільної n-нільпотентної напівгрупи, вільної прямокутної сполуки, вільної комутативної напівгрупи, а також роблять значний внесок у теорію многовидів алгебраїчних систем.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Усі результати дисертації є новими. Результати роботи мають теоретичне значення як такі, що є внеском у подальший розвиток теорії многовидів триалгебр та тріоїдів, теорії многовидів дімоноїдів та g-дімоноїдів. Вони можуть бути застосовані до вивчення будови різних класів триалгебр, тріоїдів, діалгебр, дімоноїдів, g-дімоноїдів і напівгруп.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації, які виносяться на захист, отримані автором особисто. У роботах, опублікованих у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає в наступному: у роботі [46] – характеризація найменшої лівої (правої) n-дінільпотентної конгруенції на вільному дімоноїді; у роботі [47] – побудова вільного комутативного g-дімоноїда та отримання нового прикладу g-дімоноїда.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації оприлюднено на:

- Науково-практичній конференції викладачів і студентів кафедри загальної математики Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Луганськ, квітень, 2014);
- Міжнародній конференції «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (м. Казань, Росія, червень, 2014);
- Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю Л. А. Калужніна (м. Київ, липень, 2014);
- Міжнародній конференції «Мальцевские чтения», присвяченій 75-річчю Ю. Л. Єршова (м. Новосибірськ, Росія, травень, 2015);
- XIIIМіжнародній конференції «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», присвяченій 85-річчю з дня народження професора С. С. Ришкова (м. Тула, Росія, травень, 2015);
- X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, серпень, 2015);
- Міжнародній науковій конференції «Дискретная математика, алгебра и их приложения», присвяченій сторіччю з дня народження академіка Д. А. Супруненка (м. Мінськ, Республіка Білорусь, вересень, 2015);
- Алгебраїчному семінарі Інституту математики факультету природничих наук Університету Павла Йозефа Шафарика (м. Кошице, Словацька Республіка, березень, 2016);

- Алгебраїчному семінарі факультету гуманітарних та природничих наук Пряшівського університету в Пряшові (м. Пряшів, Словацька Республіка, березень, 2016);
- Алгебраїчному семінарі Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, вересень, 2016);
- Алгебраїчному семінарі Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Старобільськ, 2014 – 2016 рр.).

Публікації. Публікацію основних результатів дисертації здійснено у 6 статтях у фахових наукових виданнях [46 – 51] (3 статті в наукових виданнях України, з яких 2 входять до міжнародних наукометричних баз даних; 3 статті в іноземних наукових виданнях, з яких 2 входять до міжнародних наукометричних баз даних) та 7 тезах наукових конференцій [52 – 58].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 151 сторінку, з яких основний зміст дисертації викладено на 142 сторінках, список використаних джерел містить 100 найменувань та займає 9 сторінок.

Упершому розділі „Множини з бінарними асоціативними операціями” подається огляд результатів за темою дисертації.

Упідрозділі 1.1. „Дуплекси та n-кратні напівгрупи” містяться визначення дуплексу, n-кратної напівгрупи та n-кратної алгебри асоціативного типу. Побудовано вільний дуплекс за допомогою планарних дерев. Розглянуто кілька дуплексів з додатковими умовами, а також наведено приклад n-кратної алгебри асоціативного типу. Матеріал цього підрозділу базується на результатах Т. Пірашвілі [59] та М. Корешкова [60].

У підрозділі 1.2. „Інтерасоціативність напівгруп” визначено поняття інтерасоціативності, сильної інтерасоціативності, p-зв’язаних напівгруп. Охарактеризовано всі інтерасоціативності моногенної напівгрупи та вільної комутативної напівгрупи, вказано необхідні та достатні умови, за якими дві інтерасоціативності моногенної напівгрупи (вільної комутативної напівгрупи) є ізоморфними. Результати цього підрозділу базуються на результатах Б. Гівенса, К. Лінтона, А. Росіна, Л. Дішмана [61], М. Гоулда, К. Лінтона, А. Нельсона [62], О. Б. Горбаткова [63], Є. Хьюіта і Х. Цукермана [64].

Упідрозділі 1.3. „Відносно вільні дімоноїди” введено поняття дімоноїду, розглянуто вільний дімоноїд, введений Ж.-Л. Лоде та побудовано дімоноїд, ізоморфний вільному дімоноїді. Крім того, побудовано вільний комутативний дімоноїд, вільний прямокутний дімоноїд та наведено декілька відносно вільних дімоноїдів з ідемпотентними операціями. Матеріал цього підрозділу базується на результатах, отриманих у роботах Ж.-Л. Лоде [24] та А. В. Жучка [29, 30, 35].

Упідрозділі 1.4. „Триалгебри”, який базується на результатах, отриманих у роботі Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [9], наведено поняття асоціативної діалгебри, асоціативної триалгебри, асоціативного тріоїду. Побудовано конструкції вільної асоціативної триалгебри та вільного тріоїду ранга 1 і розглянуто приклади асоціативних триалгебр.

Другий розділ „Тріоїди” присвячено вивченню структурних та факторизаційних властивостей відносно вільних тріоїдів.

Упідрозділі 2.1. „Декомпозиції вільних тріоїдів” розглянутоконструкцію вільного тріоїду та наведено декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки і сполуки підтріоїдів. Введено поняття прямокутної трисполуки та наведено приклади прямокутних трисполук. Охарактеризовано найменшу прямокутну конгруенцію, найменшу ліву ідемпотентну конгруенцію і найменшу праву ідемпотентну конгруенцію на вільному тріоїді.

Нагадаємо, що непорожня множина T, наділена трьома бінарними асоціативними операціями ”, ђ і $\perp$, які задовольняють аксіоми $(T1)-(T8)$, називається тріоїдом. Тріоїд $(T, ”, ђ, \perp)$ називається ідемпотентним тріоїдом або трисполукою [23], якщо напівгрупи $(T, ”)$, $(T, ђ)$ і $(T, \perp)$ є ідемпотентними. Тріоїд $(T, ”, ђ, \perp)$ називається прямокутною трисполукою, якщо напівгрупи $(T, ”)$, $(T, ђ)$ і $(T, \perp)$ є прямокутними сполуками.

Побудуємо вільний тріоїд.

Нехай X – довільна непорожня множина, $\overline{X} = \{\overline{x} \mid x \in X\}$, $Y = X \cup \overline{X}$ і $F[Y]$ – вільна напівгрупа на Y. Нехай далі $P \subset F[Y]$ – піднапівгрупа, яка містить слова w з елементами $\overline{x}\,(x \in X)$, які з’являються в w принаймні один раз. Для кожного $w \in P$ через $\mathring{w}$ позначимо слово, отримане з w шляхом заміни всіх літер $\overline{x}\,(x \in X)$ на x. Визначимо операції $”$, $ђ$ і $\perp$ на множині P за правилами:

$$w ” u = w\mathring{u}, \quad w ђ u = \mathring{w}u, \quad w \perp u = wu$$

для всіх $w, u \in P$. Алгебру $(P, ”, ђ, \perp)$ позначимо через $Frt(X)$. Згідно з твердженнямп. 2.1.1 $Frt(X)$ – вільний тріоїд.

Якщо $f : T_1 \to T_2$ – гомоморфізм тріоїдів, то відповідну конгруенцію на T_1 будемо позначати через Δ_f.

Розглянемо поняття трисполуки підтріоїдів [23].

Нехай S – довільний тріоїд, J – деяка трисполука і нехай $\alpha : S \to J : x \mapsto x\alpha$ – гомоморфізм. Тоді кожен клас конгруенції Δ_α є підтріоїдом тріоїда S, а сам тріоїд S є об’єднанням таких тріоїдів $S_\xi, \xi \in J$, що

$$x\alpha = \xi \Leftrightarrow x \in S_\xi = \Delta_\alpha^x = \{t \in S \mid (x,t) \in \Delta_\alpha\},$$

$$S_\xi ” S_\varepsilon \subseteq S_{\xi ” \varepsilon}, \quad S_\xi ђ S_\varepsilon \subseteq S_{\xi ђ \varepsilon},$$

$$S_\xi \perp S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \perp \varepsilon}, \quad \xi \neq \varepsilon \Rightarrow S_\xi \cap S_\varepsilon = \varnothing.$$

У цьому випадку говорять, що S розкладається в трисполуку підтріоїдів (або S є трисполукою J підтріоїдів $S_\xi\ (\xi \in J)$). Якщо J – напівгрупа ідемпотентів (сполука), то кажуть, що S є сполукою J підтріоїдів $S_\xi\ (\xi \in J)$. Якщо J є комутативною сполукою, то говорять, що S – напіврешітка J підтріоїдів S_ξ $(\xi \in J)$.

Через N позначатимемо множину всіх натуральних чисел.

Нехай $I_n = \{1, 2, ..., n\}$, $n > 1$, і нехай $\{X_i\}_{i \in I_n}$ – сім’я довільних непорожніх множин $X_i, i \in I_n$. Визначимо операції ”, ђ і $\perp$ на $\prod_{i \in I_{2k}} X_i$, де $k \in \mathrm{N}$, поклавши

$$(x_1, x_2, ..., x_{2k}) \text{”} (y_1, y_2, ..., y_{2k}) = (x_1, x_2, ..., x_{2k-1}, y_{2k}),$$

$$(x_1, x_2, ..., x_{2k}) \text{ђ} (y_1, y_2, ..., y_{2k}) = (x_1, y_2, ..., y_{2k}),$$

$$(x_1, x_2, ..., x_{2k}) \perp (y_1, y_2, ..., y_{2k}) = (x_1, x_2, ..., x_k, y_{k+1}, ..., y_{2k})$$

для всіх $(x_1, x_2, ..., x_{2k}), (y_1, y_2, ..., y_{2k}) \in \prod_{i \in I_{2k}} X_i$. Згідно з лемою п. 2.1.5 алгебра $(\prod_{i \in I_{2k}} X_i, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ є прямокутною трисполукою. Тріоїд $(X^4, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ позначимо через $FRT(X)$.

Визначимо операції ”, ђ і $\perp$ на X^3 за правилами:

$$(a_1, b_1, c_1) \text{”} (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_1),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \text{ђ} (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_2, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1,) \perp (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_2)$$

для всіх $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in X^3$. Згідно з лемою п. 2.1.2 алгебра $(X^3, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ є прямокутною трисполукою. Позначатимемо її через $X_{lz,rd}$.

Визначимо операції ”, ђ і $\perp$ на X^3, поклавши

$$(a_1, b_1, c_1) \text{”} (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \text{ђ} (a_2, b_2, c_2) = (a_2, b_2, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1,) \perp (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_2, c_2)$$

для всіх $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in X^3$. Згідно з лемою п. 2.1.3 алгебра $(X^3, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ є прямокутною трисполукою. Позначимо її через $X_{rd,rz}$.

Визначимо операції ”, ђ і $\perp$ на X^2 за правилами:

$$(a_1,b_1) \dashv (a_2,b_2) = (a_1,b_1), \quad (a_1,b_1) \vdash (a_2,b_2) = (a_2,b_2),$$

$$(a_1,b_1) \perp (a_2,b_2) = (a_1,b_2)$$

для всіх $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in X^2$. Згідно з лемою п. 2.1.4 алгебра $(X^2, \dashv, \vdash, \perp)$ є прямокутною трисполукою. Позначатимемо її через $X^{rb}_{lz,rz}$.

Нехай $\omega \in F[Y]$ і $w \in Frt(X)$. Позначимо першу (відповідно, останню) літеру слова ω через $\omega^{(0)}$ (відповідно, $\omega^{(1)}$). Припустимо, що u – початкове (відповідно, кінцеве) підслово слова w мінімальної довжини таке, що $u^{(1)} \in \overline{X}$ (відповідно, $u^{(0)} \in \overline{X}$). У цьому випадку $\overline{u}^{(1)}$ (відповідно, $\overline{u}^{(0)}$) будемо позначати через $w^{[0]}$ (відповідно, $w^{[1]}$). Для кожного $\omega \in F[Y]$ множину всіх літер, що входять в ω, будемо позначати через $c(\omega)$ і для кожного $w \in Frt(X)$ покладемо $\tilde{c}(w) = c(\mathring{w})$.

Візьмемо довільну непорожню скінченну підмножину C з X. Нехай $B^C(X)$ – множина всіх скінченних підмножин A з X таких, що $C \subseteq A$, а $B_C(X)$ – напіврешітка, визначена на $B^C(X)$ за допомогою операції теоретико-множинного об'єднання. Нехай далі $i, j, k, s \in X$,

$$M = \{(i,j,k,s), (i,j,k), [i,j,k], [i,j]\}$$

і

$$U_{(i,j,k,s)} = \{w \in Frt(X) \mid (\mathring{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \mathring{w}^{(1)}) = (i,j,k,s)\},$$

$$U_{(i,j,k)} = \{w \in Frt(X) \mid (\mathring{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}) = (i,j,k)\},$$

$$U_{[i,j,k]} = \{w \in Frt(X) \mid (w^{[0]}, w^{[1]}, \mathring{w}^{(1)}) = (i,j,k)\},$$

$$U_{[i,j]} = \{w \in Frt(X) \mid (w^{[0]}, w^{[1]}) = (i,j)\}.$$

Для будь-якого $l \in M$ покладемо l^* – множина, що містить всі компоненти l. Розглянемо множину $U_l^A = \{w \in U_l \mid \tilde{c}(w) = A\}$, де $A \in B_{l^*}(X)$ і $l \in M$.

Наступна структурна теорема дає декомпозиції вільного тріоїда $Frt(X)$ у трисполуки підтріоїдів.

Теорема (п. 2.1.6). Нехай $Frt(X)$ – вільний тріоїд. Мають місце такі твердження:

(i) $Frt(X)$ є трисполукою $FRT(X)$ підтріоїдів $U_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s)\in FRT(X)$. Кожен тріоїд $U_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s)\in FRT(X)$, є напіврешіткою $B_{{(i,j,k,s)}^*}(X)$ підтріоїдів $U^A_{(i,j,k,s)}$, $A\in B_{{(i,j,k,s)}^*}(X)$;

(ii) $Frt(X)$ є трисполукою $X_{lz,rd}$ підтріоїдів $U_{(i,j,k)}$, $(i,j,k)\in X_{lz,rd}$. Кожен тріоїд $U_{(i,j,k)}$, $(i,j,k)\in X_{lz,rd}$, є напіврешіткою $B_{{(i,j,k)}^*}(X)$ підтріоїдів $U^A_{(i,j,k)}$, $A\in B_{{(i,j,k)}^*}(X)$;

(iii) $Frt(X)$ є трисполукою $X_{rd,rz}$ підтріоїдів $U_{[i,j,k]}$, $(i,j,k)\in X_{rd,rz}$. Кожен тріоїд $U_{[i,j,k]}$, $(i,j,k)\in X_{rd,rz}$, є напіврешіткою $B_{{[i,j,k]}^*}(X)$ підтріоїдів $U^A_{[i,j,k]}$, $A\in B_{{[i,j,k]}^*}(X)$;

(iv) $Frt(X)$ є трисполукою $X^{rb}_{lz,rz}$ підтріоїдів $U_{[i,j]}$, $(i,j)\in X^{rb}_{lz,rz}$. Кожен тріоїд $U_{[i,j]}$, $(i,j)\in X^{rb}_{lz,rz}$, є напіврешіткою $B_{{[i,j]}^*}(X)$ підтріоїдів $U^A_{[i,j]}$, $A\in B_{{[i,j]}^*}(X)$.

У пунктах 2.1.7 та 2.1.8 описано інші декомпозиції вільного тріоїда у трисполуки підтріоїдів. Теорема п. 2.1.9 описує декомпозиції вільного тріоїда у сполуки підтріоїдів.

Результати підрозділу 2.2. „Вільні n-нільпотентні тріоїди” розвивають теорію многовидів тріоїдів. У цьому підрозділі введено поняття n-нільпотентного тріоїда, побудовано вільний n-нільпотентний тріоїд і описано його структуру. Також охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді і наведено приклади нільпотентних тріоїдів індексу нільпотентності 2.

Елемент o тріоїда $(T, ”, ђ, \perp)$ називається нулем, якщо $x \, e \, 0 = 0 = 0 \, e \, x$ для всіх $x \in T$ і $e \in \{”, ђ, \perp\}$. Тріоїд $(T, ”, ђ, \perp)$ з нулем називатимемо нільпотентним, якщо для деякого $n \in \mathrm{N}$ і будь-яких $x_i \in T$, $1 \le i \le n+1$, і $*_j \in \{”, ђ, \perp\}$, $1 \le j \le n$, будь-яка розстановка дужок у $x_1 *_1 x_2 *_2 \ldots *_n x_{n+1}$ дає $0 \in T$. Найменше серед таких n будемо називати індексом нільпотентності тріоїда $(T, ”, ђ, \perp)$. Для $k \in \mathrm{N}$ нільпотентний тріоїд індексу нільпотентності $\le k$ будемо називати k-нільпотентним.

Клас усіх n-нільпотентних тріоїдів є підмноговидом многовиду тріоїдів. Тріоїд, який є вільним у многовиді n-нільпотентних тріоїдів, називатимемо вільним n-нільпотентним тріоїдом.

Нехай A – довільна непорожня множина і нехай ω – довільне слово в алфавіті A. Довжину слова ω позначимо через l_ω.

Нехай $n \in \mathrm{N}$ і $P_n \subset P$ – множина, яка містить слова w з довжиною не більше, ніж n (див. п. 2.1.1). Визначимо операції p, f і $\uparrow$ на множині $P_n \cup \{0\}$ за правилами:

$$w \,\mathrm{p}\, u = \begin{cases} wu\%o, & l_{wu} \le n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases} \qquad w \,\mathrm{f}\, u = \begin{cases} \overset{\circ}{w}u, & l_{wu} \le n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases}$$

$$w \uparrow u = \begin{cases} wu, & l_{wu} \le n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases} \qquad w * 0 = 0 * w = 0 * 0 = 0$$

для всіх $w, u \in P_n$ і $* \in \{\mathrm{p}, \mathrm{f}, \uparrow\}$. Алгебру $(P_n \cup \{0\}, \mathrm{p}, \mathrm{f}, \uparrow)$ позначимо через $P_n^0(X)$.

Основним результатом підрозділу 2.2 є наступна теорема.

Теорема (п. 2.2.3). $P_n^0(X)$ – вільний n-нільпотентний тріоїд.

У п. 2.2.4 введено поняття o-трисполуки підтріоїдів, яке узагальнює поняття o-дісполуки піддімоноїдів і поняття o-сполуки напівгруп. Теореми п. 2.2.4 та пп. 2.2.5, 2.2.6 описують декомпозиції вільного n-нільпотентного тріоїда в o-сполуки підтріоїдів та, відповідно, в o-трисполуки підтріоїдів.

Упідрозділі 2.3. „Вільні прямокутні трисполуки” побудовано вільну прямокутну трисполуку, описано її структуру і групу автоморфізмів, а також охарактеризовано найменшу ліву ідемпотентну конгруенцію, найменшу праву ідемпотентну конгруенцію, найменшу прямокутну конгруенцію і найменшу напівструктурну конгруенцію на вільній прямокутній трисполуці. Крім цього, представлено найменшу трипрямокутну конгруенцію на вільному тріоїді.

Клас усіх прямокутних трисполук є підмноговидом многовиду тріоїдів. Тріоїд, який є вільним у многовиді прямокутних трисполук, називатимемо вільною прямокутною трисполукою.

Основним результатом підрозділу 2.3 є наступна теорема.

Теорема (п. 2.3.1). $FRT(X)$ – вільна прямокутна трисполука.

Теореми пп. 2.3.4, 2.3.6, 2.3.7 дають декомпозиції тріоїда $FRT(X)$ в сполуки підтріоїдів, відповідно, в трисполуки піднапівгруп та в трисполуки підтріоїдів.

Утретьомурозділі „Вільні ліві n-дінільпотентні дімоноїди” введено до розгляду ліві (праві) n-дінільпотентні дімоноїди, які є аналогами нільпотентних зліва (справа) напівгруп рангу n, розглянутих Б. М. Шайном [65]. Розв’язано проблему побудови вільного лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда та охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді. Крім того, охарактеризовано групу автоморфізмів вільного лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда.

У підрозділі 3.1. „Зв’язки дімоноїдів з іншими алгебраїчними структурами” розглянуто зв’язки між дімоноїдами і рестриктивними бінапівгрупами, між комутативними дімоноїдами і інтерасоціативністю та сильною інтерасоціативністю напівгрупи. Введено поняття лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда.

Нагадаємо, що дімоноїдом називається непорожня множина з двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють аксіоми $(T1)$ – $(T3)$.

Через Ω позначимо сигнатуру дімоноїда, тобто $\Omega = \{\dashv, \vdash\}$. Нехай $x_1, \ldots, x_n$ – індивідуальні змінні. Через $T(x_1, \ldots, x_n)$ будемо позначати множину термів алгебр сигнатури Ω, які мають вигляд $x_1 \circ_1 \ldots \circ_{n-1} x_n$ з розстановкою дужок, де $\circ_1, \ldots, \circ_{n-1} \in \Omega$. Дімоноїд $(D, \dashv, \vdash)$ будемо називати лівим дінільпотентним, якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$, будь-якого $x \in D$ та будь-якого $t(x_1, \ldots, x_n) \in T(x_1, \ldots, x_n)$ мають місце наступні тотожності:

$$t(x_1, \ldots, x_n) \dashv x = t(x_1, \ldots, x_n),$$

$$t(x_1, \ldots, x_n) \vdash x = x_1 \vdash \ldots \vdash x_n.$$

Найменше серед таких n будемо називати індексом лівої дінільпотентності дімоноїда $(D, \dashv, \vdash)$. Для $k \in \mathbb{N}$ лівий дінільпотентний дімоноїд з індексом лівої дінільпотентності $\leq k$ будемо називати лівим k-дінільпотентним.

Двоїстим чином визначається правий k-дінільпотентний дімоноїд.

У підрозділі3.2. „Будова вільних об’єктів” побудовано вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд довільного рангу та окремо розглянуто вільні ліві n-дінільпотентні дімоноїди рангу 1. Крім того, встановлено, що група автоморфізмів вільного лівого n-дінільпотентного дімоноїда ізоморфна симетричній групі.

Клас усіх лівих (правих) n-дінільпотентних дімоноїдів є підмноговидом многовиду дімоноїдів. Дімоноїд, який є вільним у многовиді лівих (правих) n-дінільпотентних дімоноїдів, будемо називати вільним лівим (правим) n-дінільпотентним дімоноїдом.

Нехай X – довільна непорожня множина, $F[X]$ – вільна напівгрупа в алфавіті X та $w \in F[X]$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Якщо $l_w \geq n$, то через $\overrightarrow{w}$ ($\overleftarrow{w}$)

позначатимемо початкове (кінцеве) підслово довжини n слова w. Визначимо операції $\dashv$ та $\vdash$ на $F_n = \{(w,m) \in F[X] \times \mathrm{N} \mid m \le l_w \le n\}$ за правилами:

$$(w_1,m_1) \dashv (w_2,m_2) = \begin{cases} (w_1w_2, m_1), & l_{w_1} + l_{w_2} \le n, \\ (\overrightarrow{w_1w_2}, m_1), & l_{w_1} + l_{w_2} > n, \end{cases}$$

$$(w_1,m_1) \vdash (w_2,m_2) = \begin{cases} (\overrightarrow{w_1w_2}, n), & n < l_{w_1} + m_2, \\ (\overrightarrow{w_1w_2}, l_{w_1} + m_2), & l_{w_1} + m_2 \le n < l_{w_1} + l_{w_2}, \\ (w_1w_2, l_{w_1} + m_2), & l_{w_1} + l_{w_2} \le n \end{cases}$$

для всіх $(w_1,m_1),(w_2,m_2) \in F_n$. Алгебру $(F_n, \dashv, \vdash)$ позначимо через $FD_n^l(X)$. Згідно з теоремою п. 3.2.4 $FD_n^l(X)$ – вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд. Його група автоморфізмів ізоморфна симетричній групі на множині X (див. лему п. 3.2.6).

У підрозділі 3.3. „Найменша ліва n-дінільпотентна конгруенція на вільному дімоноїді” представлено найменшу ліву n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді.

Ж.-Л. Лоде описано вільний дімоноїд [24]. В [30] (див. також [43]) побудовано дімоноїд, ізоморфний вільному дімоноїду. Нагадаємо цю конструкцію.

Встановимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на $F = \{(w,m) \in F[X] \times \mathrm{N} \mid l_w \le m\}$ за правилами:

$$(w_1,m_1) \dashv (w_2,m_2) = (w_1w_2, m_1), \ (w_1,m_1) \vdash (w_2,m_2) = (w_1w_2, l_{w_1} + m_2)$$

для всіх $(w_1,m_1),(w_2,m_2) \in F$. Алгебра $(F, \dashv, \vdash)$ позначається через $\tilde{F}[X]$. Згідно з лемою 2 [30] $\tilde{F}[X]$ – вільний дімоноїд на множині X.

Якщо ρ – конгруенція на дімоноїді $(D, \dashv, \vdash)$ така, що $(D, \dashv, \vdash)/\rho$ – лівий (правий) n-дінільпотентний дімоноїд, то будемо говорити, що ρ – ліва (права) n-дінільпотентна конгруенція.

Опис найменшої лівої n-дінільпотентної конгруенції на вільному дімоноїді дає така теорема.

Теорема (п. 3.3.1). Нехай $\widetilde{F}[X]$ – вільний дімоноїд, $(w,m)\in\widetilde{F}[X]$ та $FD_n^l(X)$ – вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд. Тоді відображення $\delta:\widetilde{F}[X]\to FD_n^l(X)$, визначене за правилом:

$$(w,m)\mapsto\quad(w,m)\delta=\begin{cases}(w,m), & l_w\le n,\\ (\overrightarrow{w},n), & n\le m,\\ (\overrightarrow{w},m), & m<n<l_w,\end{cases}$$

є епіморфізмом, який індукує найменшу ліву n-дінільпотентну конгруенцію на $\widetilde{F}[X]$.

Відзначимо, що для того, щоб побудувати вільний правий n-дінільпотентний дімоноїд, охарактеризувати найменшу праву n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді та групу автоморфізмів вільного правого n-дінільпотентного дімоноїда, необхідно скористатися принципом двоїстості.

Четвертийрозділ „g-Дімоноїди” присвячено вивченню g-дімоноїдів.

Нагадаємо, що g-дімоноїдом називається непорожня множина з двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють аксіоми $(T1)$ і $(T3)$.

Упідрозділі 4.1. „Приклади g-дімоноїдів” наведено нові приклади g-дімоноїдів.

Упідрозділі 4.2. „Вільні g-дімоноїди” побудовано g-дімоноїд, який є ізоморфним вільному g-дімоноїду довільного рангу, і зокрема, розглянуто вільні g-дімоноїди рангу 1.

Нехай A – довільна непорожня множина, $S=S_A$ – деякий моноїд, визначений на множині скінченних слів в алфавіті A, і $\theta\in S$ – порожнє слово, яке є одиницею в S. Позначимо операцію на S через $*$. За визначенням $l_\theta=0$

та $u^0 = \theta$ для всіх $u \in S$. Зафіксуємо елементи $a, b \in A$, $k \in \mathrm{N} \cup 0$ і визначимо операції ” і ђ на S, поклавши

$$u_1 \text{”}\, u_2 = u_1 * a^{l_{u_2}+k}, \quad u_1 \text{ђ}\, u_2 = u_2 * b^{l_{u_1}+k}$$

для всіх $u_1, u_2 \in S$. Отриману алгебру будемо позначати через $S_a^b(k)$.

Нехай далі T – вільний моноїд в алфавіті A. Для будь-яких $a, b \in A$, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ згідно з лемою п. 4.1.6 алгебра $T_a^b(k)$ є g-дімоноїдом, який при $a \neq b$ не є дімоноїдом. Введемо до розгляду множину

$$XT_a^b(k) = \{(w,u) \in F[X] \times T_a^b(k) \mid l_w - l_u = 1\}.$$

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема (п. 4.2.1). g-Дімоноїд $XT_a^b(1)$ є вільним, якщо $|A| = 2$ і $a \neq b$.

Упідрозділі 4.3. „Вільні n-нільпотентні g-дімоноїди” введено поняття n-нільпотентного g-дімоноїду, побудовано вільний n-нільпотентний g-дімоноїд довільного рангу та окремо розглянуто вільні n-нільпотентні g-дімоноїди рангу 1. Також охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

Елемент 0 g-дімоноїда $(D, \text{”}, \text{ђ})$ будемо називати нулем, якщо $x \,\text{e}\, 0 = 0 = 0 \,\text{e}\, x$ для всіх $x \in D$ і $\text{e} \in \{\text{”}, \text{ђ}\}$. g-Дімоноїд $(D, \text{”}, \text{ђ})$ з нулем називатимемо нільпотентним, якщо для деякого $n \in \mathrm{N}$ і будь-яких $x_i \in D$, $1 \leq i \leq n+1$, і $*_j \in \{\text{”}, \text{ђ}\}$, $1 \leq j \leq n$, будь-яка розстановка дужок у

$$x_1 *_1 x_2 *_2 \mathrm{K} *_n x_{n+1}$$

дає $0 \in D$. Найменше серед таких n будемо називати індексом нільпотентності $(D, \text{”}, \text{ђ})$. Для $k \in \mathrm{N}$ нільпотентний g-дімоноїд індексу нільпотентності $\leq k$ називатимемо k-нільпотентним.

Клас усіх n-нільпотентних g-дімоноїдів є підмноговидом многовиду g-дімоноїдів. g-Дімоноїд, який є вільним у многовиді n-нільпотентних g-дімоноїдів, будемо називати вільним n-нільпотентним g-дімоноїдом.

Зафіксуємо $n \in \mathrm{N}$ і покладемо

$$G_n = \{(w,u) \in XT_a^b(1) \mid l_w \le n\} \cup \{0\} \quad (|A| = 2,\ a \ne b).$$

Визначимо операції p і f на G_n за правилами:

$$(w_1,u_1)\ \mathrm{p}\ (w_2,u_2) = \begin{cases} (w_1w_2,\ u_1 * a^{l_{u_2}+1}), & l_{w_1w_2} \le n, \\ 0, & l_{w_1w_2} > n, \end{cases}$$

$$(w_1,u_1)\ \mathrm{f}\ (w_2,u_2) = \begin{cases} (w_1w_2,\ u_2 * b^{l_{u_1}+1}), & l_{w_1w_2} \le n, \\ 0, & l_{w_1w_2} > n, \end{cases}$$

$$(w_1,u_1)\ \mathrm{e}\ 0 = 0\ \mathrm{e}\ (w_1,u_1) = 0\ \mathrm{e}\ 0 = 0$$

для всіх $(w_1,u_1),(w_2,u_2) \in G_n \setminus \{0\}$ і $\mathrm{e} \in \{\mathrm{p},\mathrm{f}\}$. Алгебру $(G_n,\mathrm{p},\mathrm{f})$ будемо позначати через $G_n(X)$.

Основним результатом підрозділу 4.3 є така теорема.

Теорема (п. 4.3.1). $G_n(X)$– вільний n-нільпотентний g-дімоноїд.

Якщо ρ – конгруенція на g-дімоноїді $(D,”,ђ)$ така, що $(D,”,ђ)/\rho$ є n-нільпотентним g-дімоноїдом, то будемо говорити, що ρ – n-нільпотентна конгруенція.

Нехай $XT_a^b(1)$ – вільний g-дімоноїд ($|A| = 2,\ a \ne b$). Зафіксуємо $n \in \mathrm{N}$ і визначимо відношення $\kappa(n)$ на $XT_a^b(1)$, поклавши

$(w_1,u_1)\kappa(n)(w_2,u_2)$ тоді і тільки тоді, коли

$(w_1,u_1) = (w_2,u_2)$ або $l_{w_1} > n$, $l_{w_2} > n$.

Найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному g-дімоноїді описує наступна теорема.

Теорема (п. 4.3.3).Відношення $\kappa(n)$ на вільному g-дімоноїді $XT_a^b(1)$ є найменшою n-нільпотентною конгруенцією.

Упідрозділі 4.4. „Вільні комутативні$_g$-дімоноїди” введено поняття комутативного g-дімоноїду, побудовано вільний комутативний g-дімоноїд, а також представлено найменшу комутативну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

g-Дімоноїд $(D,\dashv,\vdash)$ будемо називати комутативним, якщо обидві напівгрупи $(D,\dashv)$ і $(D,\vdash)$ є комутативними. Клас усіх комутативних g-дімоноїдів є підмноговидом многовиду g-дімоноїдів. g-Дімоноїд, який є вільним у многовиді комутативних g-дімоноїдів, називатимемо вільним комутативним g-дімоноїдом.

Нехай A – довільна непорожня множина і $\overline{A} = \{\overline{x} \mid x \in A\}$. Для кожного $x \in A$ покладемо $\tilde{\overline{x}} = x$ і визначимо відображення $\alpha = \alpha_A : A \cup \overline{A} \to A$ за правилом:

$$y\alpha = \begin{cases} y, & y \in A, \\ \tilde{y}, & y \in \overline{A}. \end{cases}$$

Нехай далі S – довільна напівгрупа. Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на $S \cup \overline{S}$, поклавши

$$a \dashv b = (a\alpha_S)(b\alpha_S), \quad a \vdash b = \overline{(a\alpha_S)(b\alpha_S)}$$

для всіх $a,b \in S \cup \overline{S}$. Алгебру $(S \cup \overline{S},\dashv,\vdash)$ позначимо через $S^{(\alpha)}$. Згідно з лемою п. 4.4.1 $S^{(\alpha)}$ є g-дімоноїдом, який не є дімоноїдом.

Якщо X – породжуюча множина напівгрупи S, то $S^{(\alpha)} \setminus \overline{X}$ є g-піддімоноїдом $S^{(\alpha)}$, породженим X. Через $FCgD(X)$ позначимо g-дімоноїд $S^{(\alpha)} \setminus \overline{X}$, в якому S є вільною комутативною напівгрупою на X.

Основним результатом підрозділу 4.4 є наступна теорема.

Теорема (п. 4.4.2). $FCgD(X)$ – вільний комутативний g-дімоноїд.

Якщо ρ – конгруенція на g-дімоноїді $(D,\dashv,\vdash)$ така, що $(D,\dashv,\vdash)/\rho$ є комутативним g-дімоноїдом, то говоритимемо, що ρ – комутативна конгруенція.

Теорема п. 4.4.4 характеризує найменшу комутативну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

РОЗДІЛ 1
МНОЖИНИ З БІНАРНИМИ АСОЦІАТИВНИМИ ОПЕРАЦІЯМИ

У цьому розділі подається огляд результатів про множини з бінарними асоціативними операціями. Тут розглянуто такі поняття як дуплекс, n-кратна напівгрупа, інтерасоціативність, дімоноїд, асоціативна триалгебра, асоціативний тріоїд та охарактеризовано деякі їх властивості.

Результати цього розділу базуються на результатах, отриманих у роботах Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [9], Т. Пірашвілі [59], М. Корешкова [60], Б. Гівенса, К. Лінтона, А. Росіна, Л. Дішмана [61], М. Гоулда, К. Лінтона, А. Нельсона [62], А. В. Жучка [29, 30, 35] та О. Б. Горбаткова [63], Є. Хьюіта і Х. Цукермана [64].

1.1. Дуплекси та n-кратні напівгрупи

У цьому підрозділі містяться визначення дуплексу, n-кратної напівгрупи та n-кратної алгебри асоціативного типу. Побудовано вільний дуплекс за допомогою планарних дерев. Розглянуто кілька дуплексів з додатковими умовами, а також наведено приклад n-кратної алгебри асоціативного типу. Матеріал цього підрозділу базується на результатах Т. Пірашвілі [59] та М. Корешкова [60].

1.1.1. Дуплексом [59] називається непорожня множина D з двома асоціативними операціями $\cdot\colon D\times D\to D$ та $*\colon D\times D\to D$. Відображення $f:D\to D'$ дуплекса D у дуплекс D' називається гомоморфізмом, якщо $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$, $f(x*y)=f(x)*f(y)$ для всіх $x,y\in D$. Позначимо через Duplexes категорію дуплексів та введемо поняття вільного дуплекса.

Дуплекс K називається вільним, якщо існує підмножина $X \subset K$ така, що для будь-якого дуплекса D і будь-якого відображення $f : X \to D$ існує єдиний гомоморфізм дуплексів $g : K \to D$ такий, що $g(x) = f(x)$ для всіх $x \in X$. Якщо це виконується, то говорять, що K – вільний дуплекс на X.

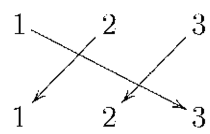
Таким чином, дуплекси узагальнюють поняття дімоноїда, введеного Ж.-Л. Лоде у [24] (див. п. 2.1.2).

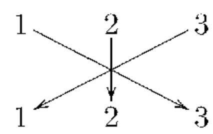
Нехай $\underline{n} = 1, 2, ..., n$, де $n \in \mathbb{N}$. Через σ_n позначимо симетричну групу на множині $\underline{n}$ та покладемо $\sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$. Для бієкції $f : \underline{n} \to \underline{n}$ введемо позначення: $O(f) = n$. На множині σ встановимо дві бінарні асоціативні операції $\#$ та $\#^*$. Перша операція $\# : \sigma_n \times \sigma_m \to \sigma_{n+m}$ визначається за правилом:

$$(f \# g)(i) = f(i), \text{ якщо } 1 \le i \le n,$$

$$(f \# g)(i) = n + g(i - n), \text{ якщо } n + 1 \le i \le n + m.$$

Тут $O(f) = n$, а $O(\mathrm{g}) = m$. Наприклад, нехай $f \in \sigma_3$ та $g \in \sigma_3$ є такими перестановками:





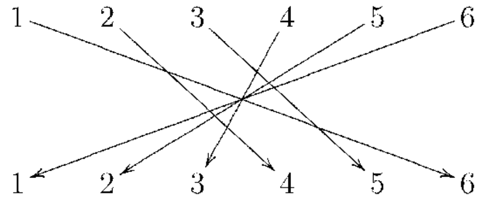
Тоді $f \# g \in \sigma_6$ задається таким чином:

Друга операція $\#^* : \sigma_n \times \sigma_m \to \sigma_{n+m}$ має вигляд:

$$(f \#^* g)(i) = m + f(i), \text{ якщо } 1 \le i \le n,$$

$$(f \#^* g)(i) = g(i - n), \text{ якщо } n + 1 \le i \le n + m.$$

Наприклад, якщо $f \in \sigma_3$ і $g \in \sigma_3$ є такими, як зазначено вище, то $f \#^* g \in \sigma_6$ визначається таким чином:



Легко перевірити, що обидві операції $\#$, $\#^*$, визначені на σ, є асоціативними [66].

Елемент $f \in \sigma_n$ називається $\#$-розкладним, якщо $f = g\#h$ для деяких $g \in \sigma_k, h \in \sigma_m$. Якщо такий розклад неможливий, то f називається $\#$-нерозкладним. Через $\Re^{\#}$ позначимо множину $\#$-нерозкладних елементів множини σ. Розглянемо перестановку $\omega_n \in \sigma_n$, що визначається умовою

$$\omega_n(i) = n + 1 - i,\ i \in \underline{n}.$$

Перестановка f називається $\#^*$-нерозкладною, якщо $\omega_n \circ f$ є $\#$-нерозкладною. Покладемо $\Re^{\sigma_2} = \Re^{\#} \cap \Re^{\#^*}$.

Теорема([59], теорема 3.3). Множина σ, наділена операціями $\#$ і $\#^*$, є вільним дуплексом на множині $\Re^{\sigma_2}$.

1.1.2. У цьому пункті розглянуто деякі типи дуплексів.

Категорію дуплексів, що задовольняють тотожність:

$$(a \cdot b) * c = a \cdot (b * c),$$

позначатимемо через $\mathrm{Duplexes}_1$. Відзначимо, що у [59] побудовано вільний об’єкт у категорії $\mathrm{Duplexes}_1$.

Через Dimonoids позначимо повну підкатегорію категорії $\mathrm{Duplexes}_1$, яка задовольняє наступні тотожності:

$$(a * b) \cdot c = (a \cdot b) \cdot c,$$

$$a * (b * c) = a * (b \cdot c).$$

Дімоноїди та діалгебри, які є лінійними аналогами дімоноїдів, детально вивчалися в [43] та [24] (див. також розд. 3, підрозд. 1.3 та п. 1.4.1).

Через Duplexes_2 позначимо повну підкатегорію категорії Duplexes_1, що задовольняє тотожність:

$$(a * b)\cdot c = a * (b \cdot c).$$

Алгебри категорії Duplexes_2 вперше були розглянуті в [67] під назвою „доппельалгебри” (doppelalgebren). Задачу побудови вільних об’єктів в Duplexes_2 розв’язано в [59].

1.1.3. У роботі [68] вивчалися деякі властивості алгебр асоціативного типу. Ці алгебри є окремим випадком алгебр лієвського типу, які були введені в роботах [69, 70]. Виділення підкласу алгебр асоціативного типу пов’язано зі спробою отримати аналог конструкції Шевалле для модулярних алгебр Лі картанівського типу. Зокрема, в [68] показано, що загальна алгебра картанівського типу W_n виходить редукцією в характеристику $p>0$ комутаторної алгебри B_L деякої алгебри асоціативного типу $B\otimes_{\text{ÿ}}\text{¤}$. Щоб отримати аналогічну конструкцію для інших модулярних алгебр Лі картанівського типу, в [60] вводяться поняття n-кратної алгебри асоціативного типу та n-кратної напівгрупи.

Перейдемо до відповідних визначень.

Непорожня множина D називається n-кратною напівгрупою, якщо на D визначено n бінарних операцій, позначених $*^1, *^2, \ldots, *^n$, які задовольняють умови

$$(x *^r y) *^s z = x *^r (y *^s z)$$

для всіх $x, y, z \in D$ і $r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Використовуючи поняття n-кратної напівгрупи, нагадаємо визначення n-кратної алгебри асоціативного типу.

Векторний простір A над полем P, який є прямою сумою своїх підпросторів A_α, $\alpha \in T$, де T – скінченна підмножина деякої n-кратної напівгрупи D, називається n-кратною алгеброю асоціативного типу, якщо на

A задано n бінарних операцій, що позначаються $*^1, *^2, \ldots, *^n$, для яких виконуються наступні умови:

1) $A_\alpha *^r A_\beta \subseteq A_{\alpha *^r \beta}$, якщо $\alpha *^r \beta \in T$, $A_\alpha *^r A_\beta = 0$, якщо $\alpha *^r \beta \notin T$;

2) для будь-яких $a_\alpha \in A_\alpha,\ a_\beta \in A_\beta,\ a_\gamma \in A_\gamma$ має місце рівність $(a_\alpha *^r a_\beta) *^s a_\gamma = \lambda a_\alpha *^r (a_\beta *^s a_\gamma)$, де $\alpha, \beta, \gamma \in T$, а $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma, *^r, *^s) \in P,\ \lambda \neq 0$.

Розглянемо приклад n-кратної алгебри асоціативного типу. Нехай $D = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n}),\ \alpha_i \in F_p\}$, де F_p – просте поле. Перетворимо D в n-кратну напівгрупу, задав n бінарних операцій $*^1, *^2, \ldots, *^n$ за правилом: $\alpha *^r \beta = \gamma,\ \alpha, \beta, \gamma \in D$, де $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$, $i \neq r, n+r$, $\gamma_r = \alpha_r + \beta_r - 1$, $\gamma_{n+r} = \alpha_{n+r} + \beta_{n+r} - 1$.

Позначимо через B вільний $\mathbb{Z}$-модуль з базисом $e_\alpha, \alpha \in D$. Перетворимо його на n-кратну алгебру асоціативного типу, визначивши n бінарних операцій $*^1, *^2, \ldots, *^n$ наступним чином: $e_\alpha *^r e_\beta = \overline{d}_r(\alpha, \beta) e_{\alpha *^r \beta}$, де $d_r(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \alpha_r & \alpha_{n+r} \\ \beta_r & \beta_{n+r} \end{vmatrix}$, а $\overline{d}_r \in \mathbb{Z}$, $1 \leq \overline{d}_r(\alpha, \beta) \leq p$, $\overline{d}_r(\alpha, \beta) \cdot 1_{F_p} = d_r(\alpha, \beta)$. Тоді $B_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B$ – D-градуйована n-кратна алгебра асоціативного типу над полем $\mathbb{Q}$, оскільки $B_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{\alpha \in D} B_\alpha^{\mathbb{Q}}$, $B_\alpha^{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} e_\alpha$, $B_\alpha^{\mathbb{Q}} *^r B_\beta^{\mathbb{Q}} \subseteq B_{\alpha *^r \beta}^{\mathbb{Q}}$ і $(e_\alpha *^r e_\beta) *^s e_\gamma = \lambda e_\alpha *^r (e_\beta *^s e_\gamma)$, де $\lambda = \dfrac{\overline{d}_r(\alpha, \beta) \overline{d}_s(\alpha *^r \beta, \gamma)}{\overline{d}_s(\beta, \gamma) \overline{d}_r(\alpha, \beta *^s \gamma)}$.

1.2. Інтерасоціативність напівгруп

У цьому підрозділі визначено поняття інтерасоціативності, сильної інтерасоціативності та P-зв'язаних напівгруп. Охарактеризовано всі інтерасоціативності моногенної напівгрупи та вільної комутативної напівгрупи, вказано необхідні та достатні умови, за якими дві інтерасоціативності вільної комутативної напівгрупи є ізоморфними. Результати цього підрозділу базуються на результатах Б. Гівенса, К. Лінтона, А. Росіна, Л. Дішмана [61], М. Гоулда, К. Лінтона, А. Нельсона [62], О. Б. Горбаткова [63], Є. Хьюіта і Х. Цукермана [64].

1.2.1. Дві бінарні операції $\cdot$ і $\circ$ на непорожній множині S називаються інтерасоціативними, якщо $x\cdot(y\circ z)=(x\cdot y)\circ z$ для всіх $x,y,z\in S$.

Це поняття було введено Д. Зупником [71].

Якщо пишемо $F(x,y)$ для $x\cdot y$ і $G(y,z)$ для $y\circ z$, то маємо

$$F(x,G(y,z))=G(F(x,y),z).$$

Два групоїда F і G є GF-асоціативними, якщо $GFxyz=FxGyz$ для всіх $x,y,z\in S$. Говорять, що G – ліва асоціативність групоїда F, а F – права асоціативність групоїда G.

У роботі Д. Зупника [71] знайдено необхідні та достатні умови, за якими два групоїда F і G є GF-асоціативними.

Нехай D – довільна непорожня множина, $(D,\prec)$ – довільна напівгрупа. Напівгрупа $(D,\succ)$ називається інтерасоціативністю напівгрупи $(D,\prec)$, якщо

$$a\prec(b\succ c)=(a\prec b)\succ c,$$

$$a\succ(b\prec c)=(a\succ b)\prec c$$

для всіх $a,b,c\in D$.

Термін „інтерасоціативність” для напівгруп вперше був введений М. Дроузи [72]. Методи побудови інтерасоціативностей було розвинуто в роботі С. Бойда, М. Гоулда, А. Нельсона [73]. М. Гоулд, К. Лінтон та А. Нельсон [62] охарактеризували всі інтерасоціативності моногенної напівгрупи та знайшли необхідні та достатні умови, за якими дві інтерасоціативності моногенної напівгрупи ізоморфні. Опису інтерасоціативностей вільної комутативної напівгрупи присвячено роботи Б. Гівенса, К. Лінтона, А. Росіна, Л. Дішмана [61] та О. Б. Горбаткова [63].

Очевидно, що якщо $(D,\mathrm{f}\,)$ – інтерасоціативність напівгрупи (D,p), то $(D,\mathrm{p},\mathrm{f}\,)$ – дуплекс з категорії $\mathrm{Duplexes}_2$ (див. п. 1.1.2). Зауважимо також (див. [46]), що будь-який комутативний дімоноїд $(D,\mathrm{p},\mathrm{f}\,)$ має напівгрупи (D,p) та $(D,\mathrm{f}\,)$ такі, що $(D,\mathrm{f}\,)$ є інтерасоціативністю напівгрупи (D,p).

Одним із типів інтерасоціативності є сильна інтерасоціативність. Це поняття було введено М. Гоулдом та Р. Річардсоном [74]. Нагадаємо його визначення та покажемо, що воно має зв'язок з комутативними дімоноїдами.

Нехай D – довільна непорожня множина. Напівгрупи (D,p) та $(D,\mathrm{f}\,)$ називаються P-зв'язаними [64], якщо

$$a\,\mathrm{p}\,b\,\mathrm{p}\,c = a\,\mathrm{f}\,\,b\,\mathrm{f}\,\,c$$

для всіх $a,b,c \in D$. Є. Хьюітт і Х. Цукерман [64] вивчали оболонки зсувів P-зв'язаних напівгруп.

Напівгрупи (D,p) та $(D,\mathrm{f}\,)$ називаються сильно інтерасоціативними, якщо

$$a\,\mathrm{p}\,(b\,\mathrm{f}\,\,c) = a\,\mathrm{f}\,\,(b\,\mathrm{p}\,c) = (a\,\mathrm{p}\,b)\,\mathrm{f}\,\,c = (a\,\mathrm{f}\,\,b)\,\mathrm{p}\,c$$

для всіх $a,b,c \in D$.

Сильно інтерасоціативні напівгрупи з'явилися в [74] при вивченні P-зв'язаних напівгруп. Очевидно, що дві сильно інтерасоціативні напівгрупи є інтерасоціативними напівгрупами. Крім цього, згідно з лемою 2 роботи [75], якщо $(D,\mathrm{p},\mathrm{f}\,)$ – комутативний дімоноїд, то напівгрупи (D,p) та $(D,\mathrm{f}\,)$ є сильно інтерасоціативними та P-зв'язаними.

1.2.2. Для будь-якої напівгрупи S позначимо множину всіх інтерасоціативностей через $Int(S)$. Нехай k – будь-яке ціле додатне число і $S = \langle a \rangle$ – моногенна напівгрупа. Визначимо операцію $*_k$ на S таким чином: $a^x *_k a^y = a^{x+k+y-2}$ для всіх $a^x, a^y \in S$.

Наступна теорема характеризує усі інтерасоціативності моногенної напівгрупи S.

Теорема ([62], М. Гоулд, К. Лінтон і А. Нельсон). Для моногенної напівгрупи $S=<a>$ виконуються наступні умови:

1. $Int(S)=\{(S,*_k)\mid k\geq 1\}$. Крім того, якщо S є скінченною, то $Int(S)=\{(S,*_k)\mid 1\leq k\leq |S|\}$.

2. Усі члени $Int(S)$ інтерасоціативні один до одного.

3. $|Int(S)|=|S|$.

4. Якщо напівгрупа S є скінченною, тоді не існує двох різних членів $Int(S)$, які є ізоморфними.

1.2.3. У попередньому пункті наведено повний опис інтерасоціативностей для моногенної напівгрупи. Б. Гівенс, К. Лінтон, А. Росін, Л. Дішман [61] дали відповіді на такі ж питання для вільної комутативної напівгрупи на n породжуючих елементах ($n>1$). Випадок, при якому $n=1$, розв’язаний у [73].

Нехай $(S,\cdot)$ – вільна комутативна напівгрупа з n породжуючими елементами. Для будь-якої n-послідовності $\bar{k}=(k_1,\ldots,k_n)$ довільних цілих додатних чисел k_i, $1\leq i\leq n$, визначимо операцію $*_{\bar{k}}$ на множині S, поклавши

$$(x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n})*_{\bar{k}}(x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n})=x_1^{\alpha_1+\beta_1+k_1-1}\ldots x_n^{\alpha_n+\beta_n+k_n-1}$$

для всіх $x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}, x_1^{\beta_1}\ldots x_n^{\beta_n}\in S$.

З єдності представлення слова в напівгрупі S випливає, що операція $*_{\bar{k}}$ є коректно визначеною.

Наступні три теореми характеризують усі інтерасоціативності напівгрупи $(S,\cdot)$.

Теорема ([61], Б. Гівенс, К. Лінтон, А. Росін і Л. Дішман). Для напівгрупи $(S,*)\in Int((S,\cdot))$ існує n-послідовність $\bar{k}$ цілих додатних чисел така, що $(S,*)=(S,*_{\bar{k}})$.

1.2.4. Має місце теорема.

Теорема ([61], Б. Гівенс, К. Лінтон, А. Росін і Л. Дішман). Нехай S – вільна комутативна напівгрупа на n породжуючих елементах $x_1,\ldots,x_n$, де $n>1$. Дві інтерасоціативності $(S,*_{\bar{k}})$ і $(S,*_{\bar{l}})$ напівгрупи S ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $\{k_i\}_{i=1}^{n}$ є перестановкою $\{l_i\}_{i=1}^{n}$.

1.2.5. Справедлива наступна теорема.

Теорема ([61], Б. Гівенс, К. Лінтон, А. Росін і Л. Дішман). Нехай S – вільна комутативна напівгрупа на n породжуючих елементах $x_1,\ldots,x_n$, де $n>1$. Якщо $(S,*_{\bar{k}})$ і $(S,*_{\bar{l}})$ – інтерасоціативності напівгрупи S, то $(S,*_{\bar{k}})$ і $(S,*_{\bar{l}})$ інтерасоціативні.

1.2.6. У пп. 1.2.3 – 1.2.5 описано інтерасоціативності вільної комутативної напівгрупи з $n>1$ породжуючими елементами і знайдено критерії ізоморфізму для них. Така сама проблема розв'язується в [63] для нескінченно породженної вільної комутативної напівгрупи. Сформулюємо цей результат.

Для заданої напівгрупи S і фіксованого елементу $x\in S$ визначимо бінарну операцію $*_x$ за правилом: $a*_x b=axb$ для всіх $a,b\in S$. Напівгрупа $(S,*_x)$ називається варіантом S і позначається через S_x.

Нехай X – непорожня множина і нехай $FC(X)$ – вільна комутативна напівгрупа на X. Як і раніше, позначатимемо множину всіх інтерасоціативностей напівгрупи $FC(X)$ через $Int(FC(X))$. Множину всіх сильних інтерасоціативностей напівгрупи $FC(X)$ будемо позначати через $SInt(FC(X))$.

Наступні дві теореми характеризують усі інтерасоціативності напівгрупи $FC(X)$ і показують їх зв'язок з варіантами $FC(X)$.

Теорема ([63], О. Б. Горбатков). Для вільної комутативної напівгрупи $FC(X)$ виконуються рівності:

$$Int(FC(X))=SInt(FC(X))=\{FC_x(X): x\in FC(X)\}\cup\{FC(X)\}.$$

1.2.7. Має місце теорема.

Теорема ([63], О. Б. Горбатков). Для будь-яких $x = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $y = y_1^{\beta_1} \ldots y_m^{\alpha_m} \in FC(X)$ напівгрупи $FC_x(X)$ і $FC_y(X)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $n = m$ і $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ отримують з $\{\beta_j\}_{j=1}^m$ перестановкою елементів.

1.3. Відносно вільні дімоноїди

У цьому підрозділі розглянуто вільний дімоноїд, введений Ж.-Л. Лоде. Наведено дімоноїд, який є ізоморфним вільному дімоноїду. Також побудовано вільний комутативний дімоноїд, вільний прямокутний дімоноїд та розглянуто декілька відносно вільних дімоноїдів з ідемпотентними операціями. Матеріал цього підрозділу базується на результатах, отриманих у роботах Ж.-Л. Лоде [24] та А. В. Жучка [29, 30, 35].

1.3.1. Непорожня множина D з двома бінарними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють наступні аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \qquad (D1)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \qquad (D2)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \qquad (D3)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \qquad (D4)$$

$$(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \qquad (D5)$$

для всіх $x, y, z \in D$, називається дімоноїдом. Легко побачити, що аксіоми $(D2)$, $(D3)$ та $(D4)$ дімоноїда збігаються з аксіомами $(T1)$, $(T2)$ та $(T3)$ тріоїда відповідно.

Ж.-Л. Лоде побудував вільний дімоноїд [24]. За допомогою властивостей вільних дімоноїдів були описані вільні діалгебри і досліджені гомології діалгебр [24].

Розглянемо вільний дімоноїд. Для цього будемо використовувати деякі позначення з [30].

Як і раніше, $\mathbb{N}$ позначає множину всіх натуральних чисел. Нехай X – довільна непорожня множина, $n \in \mathbb{N}$. Позначимо об'єднання n різних копій X^n через Y_n і покладемо $D(X) = \bigcup_{n\geq 1} Y_n$. Позначаючи через $x_1 \ldots \check{x}_i \ldots x_n$ елемент в i-ій компоненті Y_n, визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на $D(X)$, поклавши

$$(x_1 \ldots \check{x}_i \ldots x_k) \dashv (x_{k+1} \ldots \check{x}_j \ldots x_l) = x_1 \ldots \check{x}_i \ldots x_l,$$

$$(x_1 \ldots \check{x}_i \ldots x_k) \vdash (x_{k+1} \ldots \check{x}_j \ldots x_l) = x_1 \ldots \check{x}_j \ldots x_l$$

для всіх $x_1 \ldots \check{x}_i \ldots x_k,\ x_{k+1} \ldots \check{x}_j \ldots x_l \in D(X)$.

Теорема ([24], наслідок 1.8). $(D(X), \dashv, \vdash)$ – вільний дімоноїд на X.

1.3.2. Побудуємо дімоноїд [30], ізоморфний вільному дімоноїду.

Нехай $F[X]$ – вільна напівгрупа в алфавіті X. Позначимо довжину слова $w \in F[X]$ через l_w. Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на

$$F = \{(w, m) \in F[X] \times \mathbb{N} \mid l_w \geq m\}$$

за правилами:

$$(w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2) = (w_1 w_2, m_1),$$

$$(w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2) = (w_1 w_2, l_{w_1} + m_2)$$

для всіх $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in F$.

Лема ([30], лема 2). F з операціями $\dashv$ і $\vdash$ є дімоноїдом.

Дімоноїд $(F, \dashv, \vdash)$ позначають через $\check{F}[X]$.

1.3.3.Має місце лема.

Лема([30], лема 3). $(D(X), \dashv, \vdash)$ і $\check{F}[X]$ є ізоморфними.

Відомо, що напівгрупи вільного дімоноїда антиізоморфні, а його група автоморфізмів ізоморфна симетричній групі [76]. Найменші конгруенції на вільному дімоноїді і його декомпозиції в дісполуки піддімоноїдів були охарактеризовані в [35, 38]. Вільний дімоноїд з точністю до ізоморфізму визначається напівгрупою ендоморфізмів [36].

1.3.4. Вільний комутативний дімоноїд побудовано в [29]. Нагадаємо цю конструкцію.

Дімоноїд $(D,\dashv,\vdash)$ називається комутативним, якщо обидві його напівгрупи $(D,\dashv)$ і $(D,\vdash)$ комутативні.

Нехай X – довільна непорожня множина, $F^*[X]$ – вільна комутативна напівгрупа на X і G – множина всіх невпорядкованих пар (p,q), $p,q\in X$. Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на $F^*[X]\cup G$, поклавши

$$a_1\ldots a_m \dashv b_1\ldots b_n = a_1\ldots a_m b_1\ldots b_n,$$

$$a_1\ldots a_m \vdash b_1\ldots b_n = \begin{cases} a_1\ldots a_m b_1\ldots b_n, & mn>1, \\ (a_1,b_1), & m=n=1, \end{cases}$$

$$a_1\ldots a_m \dashv (p,q) = a_1\ldots a_m \vdash (p,q) = a_1\ldots a_m pq,$$

$$(p,q)\dashv a_1\ldots a_m = (p,q)\vdash a_1\ldots a_m = pqa_1\ldots a_m,$$

$$(p,q)\dashv (r,s) = (p,q)\vdash (r,s) = pqrs$$

для всіх $a_1\ldots a_m,\ b_1\ldots b_n\in F^*[X]$, $(p,q),(r,s)\in G$.

Теорема ([29], теорема 3). $(F^*[X]\cup G,\dashv,\vdash)$ – вільний комутативний дімоноїд.

Відомо, що напівгрупи вільного комутативного дімоноїда ізоморфні, а його група автоморфізмів ізоморфна симетричній групі [76]. Найменші конгруенції на вільному комутативному дімоноїді та його декомпозиції в дісполуки піддімоноїдів були описані в [29, 39].

1.3.5. Структура відносно вільних сполук була описана в [77]. У пп. 1.3.5 – 1.3.8 наведено відносно вільні дімоноїди з ідемпотентними операціями (див. [35]). Розглянемо вільний прямокутний дімоноїд, побудований в [35].

Нагадаємо, що напівгрупа S називається напівгрупою лівих (правих) нулів, якщо $xy=x$ $(xy=y)$ для всіх $x,y\in S$. Напівгрупа S є прямокутною сполукою, якщо $xyx=x$ для всіх $x,y\in S$. Еквівалентно, напівгрупа S є прямокутною сполукою, якщо $x^2 = x$, $xyz = xz$ для всіх $x, y, z \in S$. Добре відомо, що кожна прямокутна сполука ізоморфна декартовому добутку $L \times R$ напівгрупи лівих нулів і напівгрупи правих нулів. Дімоноїд $(D, \dashv, \vdash)$ називається прямокутним дімоноїдом або прямокутною дісполукою, якщо обидві його напівгрупи $(D, \dashv)$ і $(D, \vdash)$ є прямокутними сполуками.

Нехай X – довільна непорожня множина і $X^3 = X \times X \times X$. Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на X^3 за правилами:

$$(x_1, x_2, x_3) \dashv (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, y_3),$$

$$(x_1, x_2, x_3) \vdash (y_1, y_2, y_3) = (x_1, y_2, y_3)$$

для всіх $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in X^3$. Алгебра $(X^3, \dashv, \vdash)$ позначається через $FRct(X)$.

Теорема([35], теорема 1). $FRct(X)$ – вільний прямокутний дімоноїд.

Прямокутні дімоноїди використовувалися при розв’язанні задачі декомпозиції дімоноїдів у дісполуки піддімоноїдів[34, 35]. Відомо, що напівгрупи вільного прямокутного дімоноїда антиізоморфні, а його група автоморфізмів ізоморфна симетричній групі [76]. Найменші конгруенції на вільному прямокутному дімоноїді і його декомпозиції в дісполуки піддімоноїдів були описані в [35].

1.3.6. Дімоноїд $(D, \dashv, \vdash)$ називається дімоноїдом лівих і правих нулів, якщо $(D, \dashv)$ – напівгрупа лівих нулів і $(D, \vdash)$ – напівгрупа правих нулів (див. п. 1.3.5). Такі дімоноїди вперше побудовані в [24]. Термін ,,дімоноїд лівих і правих нулів” був запропонований в [35]. Дімоноїд лівих і правих нулів $(D, \dashv, \vdash)$ позначається через $D_{lz,rz}$.

Лема ([35], лема 5). Кожен дімоноїд лівих і правих нулів є вільним дімоноїдом лівих і правих нулів.

Відомо, що напівгрупи дімоноїда лівих і правих нулів антиізоморфні та напівгрупа ендоморфізмів (група автоморфізмів) дімоноїда лівих і правих нулів $D_{lz,rz}$ ізоморфна симетричній напівгрупі (симетричній групі) на D

(див.[76]). Дімоноїди лівих і правих нулів були використані при розв’язанні задачі декомпозиції дімоноїдів у дісполуки піддімоноїдів [31, 34, 35, 38].

1.3.7. Вільний (rb, rz)-дімоноїд побудовано в [35].

Нехай $(D, \dashv)$ – прямокутна сполука і $(D, \vdash)$ – напівгрупа правих нулів. Тоді $(D, \dashv, \vdash)$ – прямокутний дімоноїд (див. п. 1.3.5). Цей прямокутний дімоноїд називається (rb, rz)-дімоноїдом.

Нехай X – довільна непорожня множина. Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на X^2, поклавши

$$(x, y) \dashv (a, b) = (x, b), \quad (x, y) \vdash (a, b) = (a, b)$$

для всіх $(x, y), (a, b) \in X^2$. Зрозуміло, що $(X^2, \dashv)$ – прямокутна сполука, $(X^2, \vdash)$ – напівгрупа правих нулів і $(X^2, \dashv, \vdash)$ – (rb, rz)-дімоноїд. Отриманий дімоноїд позначається через $X_{rb,rz}$.

Лема([35], лема 6). $X_{rb,rz}$ – вільний (rb, rz)-дімоноїд.

Відомо, що напівгрупа ендоморфізмів (група автоморфізмів) будь-якого (rb, rz)-дімоноїда $(D, \dashv, \vdash)$ ізоморфна напівгрупі ендоморфізмів (групі автоморфізмів) напівгрупи $(D, \dashv)$ (див. [35]). Вільні (rb, rz)-дімоноїди використовувалися при розв’язанні задачі декомпозиції дімоноїдів у дісполуки піддімоноїдів [34, 35]. Відомо, що група автоморфізмів вільного (rb, rz)-дімоноїда $X_{rb,rz}$ ізоморфна симетричній групі на X [35].

1.3.8. Вільний (lz, rb)-дімоноїд побудовано в [35].

Нехай $(D, \dashv)$ – напівгрупа лівих нулів і $(D, \vdash)$ – прямокутна сполука. Тоді $(D, \dashv, \vdash)$ – прямокутний дімоноїд. Цей прямокутний дімоноїд називається (lz, rb)-дімоноїдом.

Нехай X – довільна непорожня множина. Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на X^2 за правилами:

$$(x, y) \dashv (a, b) = (x, y), \quad (x, y) \vdash (a, b) = (x, b)$$

для всіх $(x,y),(a,b)\in X^2$. Зрозуміло, що $(X^2,”)$ – напівгрупа лівих нулів, $(X^2,ђ)$ – прямокутна сполука і $(X^2,”,ђ)$ – (lz,rb)-дімоноїд. Цей дімоноїд позначається через $X_{lz,rb}$.

Лема([35], лема 7). $X_{lz,rb}$ – вільний (lz,rb)-дімоноїд.

Відомо, що напівгрупа ендоморфізмів (група автоморфізмів) будь-якого (lz,rb)-дімоноїда $(D,”,ђ)$ ізоморфна напівгрупі ендоморфізмів (групі автоморфізмів) напівгрупи $(D,ђ)$ (див. [35]). Вільні (lz,rb)-дімоноїди використовувалися при розв’язанні задачі декомпозиції дімоноїдів у дісполуки піддімоноїдів [34, 35]. Група автоморфізмів вільного (lz,rb)-дімоноїда $X_{lz,rb}$ ізоморфна симетричній групі на X [35].

1.4. Триалгебри

У цьому підрозділі, який базується на результатах, отриманих у роботі Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [9], наведено поняття асоціативної діалгебри, асоціативної триалгебри, асоціативного тріоїду. Побудовано конструкції вільної асоціативної триалгебри та вільного тріоїду ранга 1 і розглянуто приклади асоціативних триалгебр.

1.4.1. У роботі [9] показано, що сім'я стандартних симплексів і сім'я політопів Сташеффа дуальні одне до одного в наступному сенсі. Ланцюгові модулі стандартних симплексів, відповідно, політопів Сташеффа, дають операду. Ці операди дуальні одне до одного в операдному сенсі. Основний результат цієї статті показує, що вони обидві є операдами Кошуля. Як наслідок, показано, що породжуючі серії стандартних симплексів і породжуючі серії політопів Сташеффа є зворотними одне до одного. Дві операди породжують новий тип алгебр з 3 породжуючими операціями, 11 аксіомами, відповідно 7 аксіомами, які називають асоціативними триалгебрами і дендриформними триалгебрами, відповідно. У цій статті введено поняття асоціативної триалгебри і побудовано вільну триалгебру. Цей результат дає зв'язок із сім'ями стандартних симплексів.

Розглянемо деякі з щойно вказаних результатів більш детально.

В [78, 24] Ж.-Л. Лоде було введенопоняття асоціативної діалгебри наступним чином.

Асоціативною діалгеброю називається векторний простір A, наділений двома бінарними білінійними операціями: $\dashv$ (ліва) і $\vdash$ (права)

$$\dashv : A \otimes A \to A, \qquad \vdash : A \otimes A \to A,$$

які задовольняють аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z),$$

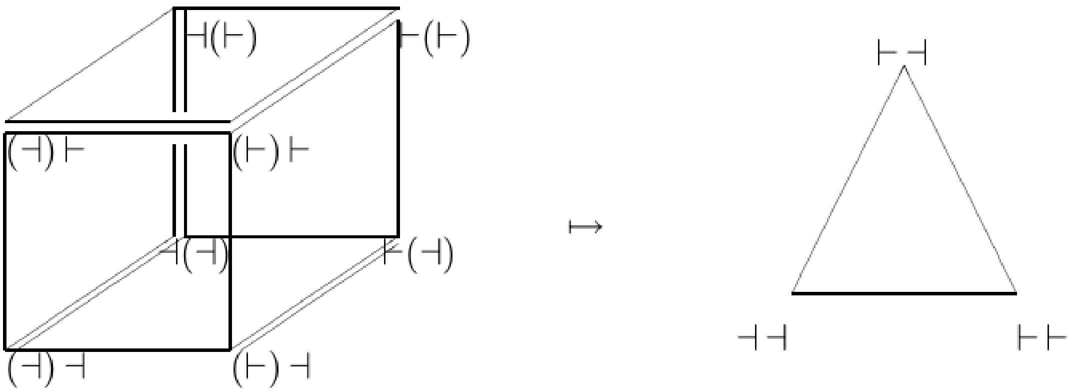
$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z),$$

$$(x \text{ђ } y)\text{” } z = x \text{ђ } (y\text{” } z),$$

$$(x\text{” } y) \text{ђ } z = x \text{ђ } (y \text{ђ } z),$$

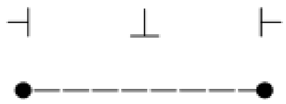
$$(x \text{ђ } y) \text{ђ } z = x \text{ђ } (y \text{ђ } z).$$

Зауважимо, що 8 можливих добутків з трьома змінними x, y, z (які з'являються в такому порядку) зустрічаються в аксіомах. Ідентифікація кожного добутку з вершиною куба і розпад куба відносно аксіом перетворює куб на трикутник Δ^2:

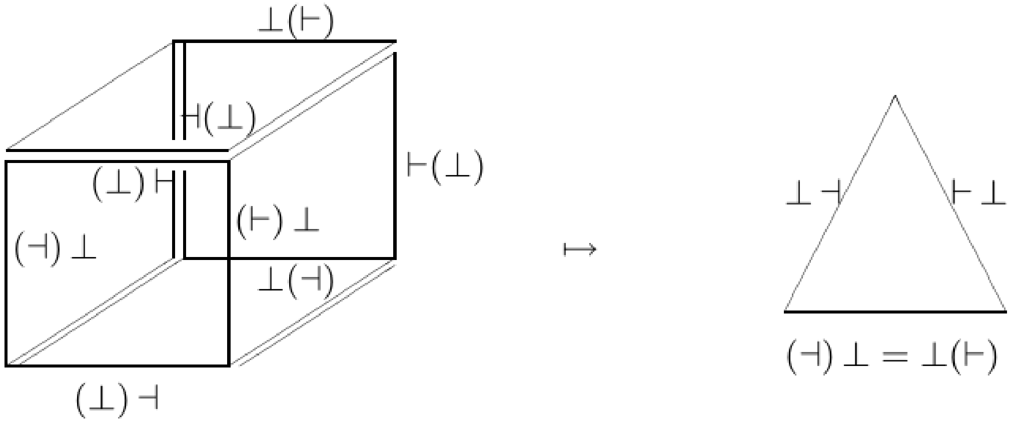


Подвійні лінії вказують вершини, які визначені відповідно до аксіом.

Введемо третю операцію $\perp\colon A \otimes A \to A$ (середня). Ліва і права операції пов'язані з 0-клітинами інтервалу, а середня – з 1-клітиною:



Пов'яжемо будь-яку вершину з трьома змінними з клітиною куба за допомогою трьох операцій ”, ђ, $\perp$. Відношення еквівалентності, яке перетворює куб на трикутник, визначає нові аксіоми (вказуємо тільки 1-клітини):



З цього аналізу випливає наступне.

1.4.2. Асоціативна триалгебра (відповідно, асоціативний тріоїд) – це векторний простір A (відповідно, множина X), наділений (відповідно, наділена) трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$, які задовольняють 11 аксіом:

$$\begin{cases}(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z),\\ (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z),\\ (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z),\\ (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),\\ (x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z),\\ (x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z),\\ (x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z),\\ (x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z),\\ (x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),\end{cases}$$

$$(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z).$$

По-перше, зазначимо, що кожна операція асоціативна. По-друге, зауважимо, що має місце наступне правило: «не має значення, який добуток знаходиться на стороні бар’єра». По-третє, кожна аксіома має симетричну копію, яка складається в зворотному порядку дужок, змінюючи $\dashv$, $\vdash$ та залишаючи $\perp$ незмінною.

Морфізм між двома асоціативними триалгебрами є лінійним відображенням, яке сумісне з трьома операціями. Категорія асоціативних триалгебр позначається через Trias. Множина планарних дерев з $(n+1)$ листками позначається через T_n. Пов'яжемо дерева в T_2 з трьома бінарними операціями наступним чином:

$$(\;;x,y)\mapsto(\;;x\dashv y)$$
$$(\;;x,y)\mapsto(\;;x\vdash y)$$
$$(\;;x,y)\mapsto(\;;x\perp y).$$

Зауважимо, що це напрям середнього листка, який визначає операцію. Будь-яке з 11 дерев в T_3 дає два різні способи обчислень образу $(t;x,y,z)$. Прирівнюючи два результати, маємо співвідношення. Наприклад, нехай $t=$. У результаті першого обчислення отримуємо:

$$(\;;x,y,z)\mapsto(\;;x\perp y,z)\mapsto(\;;(x\perp y)\vdash z\ ).$$

Друге обчислення дає:

$$(\;;x,y,z)\mapsto(\;;x,y\vdash z)\mapsto(\;;x\vdash(y\vdash z)).$$

Таким чином, це дерево породжує 10 аксіом зі списку аксіом триалгебри. Неважко перевірити, що 11 дерев T_3 дають 11 аксіом триалгебри. Цей взаємозв'язок використовується при побудові ланцюгового комплексу асоціативної триалгебри.

Наведемо приклади асоціативних триалгебр.

а) Якщо A – асоціативна триалгебра, то $n\times n$ матриці над A утворюють асоціативну триалгебру, використовуючи операції коефіцієнтного множення.

б) Якщо $\dashv=\perp=\vdash$, то отримуємо просту асоціативну алгебру (неунітарну). Таким чином, отримуємо функтор між категоріями алгебр:

As $\to$Trias.

Не звертаючи уваги на операцію $\perp$, отримаємо асоціативну діалгебру. Отже, існує (забуваючий) функтор

Trias$\to$Dias

з категорії триалгебр до категорії діалгебр.

в) Векторний простір над асоціативним тріоїдом, очевидно, є асоціативною триалгеброю.

г) Алгебра Соломона. Нехай $V = \oplus_{n\geq 0} K\cdot\omega_n$ – градуйований K-векторний простір такий, що підпростір однорідних елементів ступеня n є векторним простором розмірності один, породженим ω_n для всіх $n \geq 0$.

Розглянемо тензорну алгебру $T(V)$ з операціями $\perp$, $\dashv$ і $\vdash$, заданими за правилами:

$$(\omega_{n_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{n_r})\perp(\omega_{m_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{m_k}) := \omega_{n_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{n_r}\otimes\omega_{m_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{m_k},$$

$$(\omega_{n_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{n_r})\dashv(\omega_{m_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{m_k}) := \omega_{n_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{n_r}\otimes\omega_{m_1+\ldots+m_k},$$

$$(\omega_{n_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{n_r})\vdash(\omega_{m_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{m_k}) := \omega_{n_1+\ldots+n_r}\otimes\omega_{m_1}\otimes\ldots\otimes\omega_{m_k}$$

для всіх $n_1,\ldots,n_r,m_1,\ldots,m_k \geq 0$. Неважко перевірити, що $(T(V),\perp,\dashv,\vdash)$ – асоціативна триалгебра. Асоціативна алгебра $(T(V),\perp)$ ізоморфна алгебрі Соломона Sol_∞ (див., наприклад, [79]).

Нехай $[n-1] := \{0,\ldots,n-1\}$ – множина з n елементами. Множина непорожніх підмножин $[n-1]$ позначається через P_n. Зауважимо, що P_n можна градуювати за потужністю своїх членів. Позначимо через $P_{n,k}$ підмножину з P_n, члени якої мають потужність k. Отже, $P_n = P_{n,1}\cup\ldots\cup P_{n,n}$.

За визначенням вільна асоціативна триалгебра над векторним простором V є асоціативною триалгеброю $Trias(V)$, наділеною відобаженням $V \to Trias(V)$, яке задовольняє наступним універсальним властивостям.Для будь-якого відображення $V \to A$, де A – асоціативна триалгебра, існує єдине продовження $Trias(V) \to A$, яке є морфізмом асоціативних триалгебр.

Оскільки операції не симетричні і оскільки змінні в аксіомах в однаковому порядку, то $Trias(V)$ повністю визначається вільною асоціативною триалгеброю на одному генераторі, тобто $V=K$. Останнє представляє собою градуйований векторний простір вигляду $Trias(K)=\oplus_{n\geq 1}Trias(n)$.

З мотивації визначення типу асоціативних триалгебр зрозуміло, що для $n=1,2,3$ базиси $Trias(n)$ дають елементи P_1, P_2 і P_3 відповідно (тобто елементи $\Delta^0, \Delta^1, \Delta^2$ відповідно).

Позначимо через

$$\mathrm{bij} : [i_1-1]\mathrm{U}\mathrm{L}\ \ \mathrm{U}[i_n-1]\to[i_1+\mathrm{L}\ \ +i_n-1]$$

бієкцію, яка елементу $k\in[i_j-1]$ ставить у відповідність елемент $i_1+\mathrm{L}\ \ +i_j-1+k\in[i_1+\mathrm{L}\ \ +i_n-1]$.

Теорема. Вільна асоціативна триалгебра $Trias(K)$ з одним породжуючим елементом – це $\oplus_{n\geq 1}K[P_n]$ як векторний простір. Бінарні операції ”,$\perp$ і ђ з $K[P_p]\otimes K[P_q]$ у $K[P_{p+q}]$ задаються за правилами:

$$X \text{ ” } Y=\mathrm{bij}(X),\quad X\perp Y=\mathrm{bij}(X\,\mathrm{U}Y),\quad X \text{ ђ } Y=\mathrm{bij}(Y),$$

де $X\in P_p$ і $Y\in P_q$ і $\mathrm{bij} : [p-1]\times[q-1]\to[p+q-1]$.

1.4.3. З останньої теореми випливає наслідок.

Наслідок. Вільною асоціативною триалгеброю $Trias(V)$ на векторному просторі V є

$$Trias(V)=\oplus_{n\geq 1}K[P_n]\otimes V^{\otimes n},$$

і операції індукуються операціями на $Trias(K)$ і конкатенацією.

1.4.4. Має місце твердження.

Твердження. Вільний тріоїд T, породжений одним елементом x, ізоморфний тріоїду $P=\mathrm{U}_{n\geq 1}P_n$, який наділений операціями, описаними в теоремі п. 1.4.2.

1.4.5. Справедлива наступна лема.

Лема. Будь-яка повна розстановка дужок у

$$(\underbrace{x\vdash\cdots\vdash x}_{a_0})\vdash(\underbrace{x\dashv\cdots\dashv x}_{a_1})\perp(\underbrace{x\dashv\cdots\dashv x}_{a_2})\perp\cdots\perp(\underbrace{x\dashv\cdots\dashv x}_{a_k}),$$

де $a_0\geq 0, a_i\geq 1$ для $i=1,\ldots,k$, дає однаковий елемент з T, позначений ω. Його називають нормальною формою ω. Її образом при ϕ в P є

$$\underbrace{x\cdots x}_{a_0}\check{x}\underbrace{x\cdots x}_{a_1}\check{x}\underbrace{x\cdots x}_{a_2}\cdots\check{x}\underbrace{x\cdots x}_{a_k}.$$

Множину P_n можна відфільтрувати таким чином: $F_kP_n:=\bigcup_{i\leq k}P_{n,i}$. Оскільки в будь-якому добутку двох елементів кількість помічених змінних дорівнює або менше суми чисел компонентів, то образ $F_kP_n\times F_lP_m$ є в $F_{k+l}P_{n+m}$.

1.4.6. Поняття асоціативної діалгебри було вперше введено як аналог асоціативної алгебри для алгебр Лейбніца. Нагадаємо, що алгебра Лейбніца визначається бінарною операцією $[-,-]$, яка не є обов’язково косо-симетричною і задовольняє праву тотожність Лейбніца:

$$[[x,y],z]=[[x,z],y]+[x,[y,z]].$$

Якщо дужки становляться косо-симетричними, то це є дужки Лі. Будь-яка асоціативна діалгебра дає дужки Лейбніца, якщо покласти

$$[x,y]:=x\dashv y-y\vdash x.$$

Припустимо тепер, що ми хотіли б побудувати некомутативну версію алгебри Пуасона. Введемо асоціативну операцію xy (не обов’язково комутативну) і природно вимагатимемо, щоб її зв’язок з дужками Лейбніца задавався за правилами:

$$[xy,z]=x[y,z]+[x,z]y, \qquad [x,yz-zy]=[x,[y,z]].$$

Твердження. Нехай $(A,\dashv,\vdash,\perp)$ – асоціативна триалгебра. Поклавши

$$[x,y]:=x\dashv y-y\vdash x \quad \text{і} \quad xy:=x\perp y,$$

отримуємо некомутативну структуру алгебри Пуасона на A.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі зроблено огляд результатів про множини з бінарними асоціативними операціями. Тут розглянуто такі поняття як дуплекс, вільний дуплекс, n-кратна напівгрупа, інтерасоціативність, сильна інтерасоціативність, p-зв'язані напівгрупи, дімоноїд, асоціативна діалгебра, асоціативна триалгебра та асоціативний тріоїд. Наведено визначення та приклад n-кратної алгебри асоціативного типу. Охарактеризовано всі інтерасоціативності моногенної напівгрупи та вільної комутативної напівгрупи, вказано необхідні та достатні умови, за якими дві інтерасоціативності вільної комутативної напівгрупи є ізоморфними. Побудовано вільний дімоноїд, вільний комутативний дімоноїд, вільний прямокутний дімоноїд, наведено декілька відносно вільних дімоноїдів з ідемпотентними операціями. Побудовано конструкції вільної асоціативної триалгебри, вільного тріоїду ранга 1, а також розглянуто приклади асоціативних триалгебр.

РОЗДІЛ 2
ТРІОЇДИ

Під час дослідження планарних дерев Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко [9] ввели новий тип алгебр, так звані триалгебри, які є векторними просторами, наділеними трьома бінарними асоціативними операціями, що задовольняють вісім аксіом. Триалгебра – це лінійний аналог тріоїду [9] і, отже, всі результати, отримані для тріоїдів, можуть бути застосовані до триалгебр. Такий зв'язок між тріоїдами і триалгебрами дає мотивацію для вивчення тріоїдів. Ще однією причиною інтересу до тріоїдів є їх зв'язок з дімоноїдами [24]. Вивченню тріоїдів присвячено роботи [9, 15 – 23, 80]. Так, вільний тріоїд рангу 1 наведено в [9]. Тріоїд, ізоморфний вільному тріоїду ранга 1, побудовано в [19]. Проблема побудови вільних тріоїдів довільного рангу розв'язана в [18, 49]. Вільні тріоїди відіграють важливу роль у побудові вільних триалгебр. Деякі найменші конгруенції на тріоїдах вивчалися в [16]. Комбінаторні властивості операцій тріоїдів охарактеризовано в [20]. В оглядовій статті [18] було представлено багаточисельні приклади тріоїдів. Моноїд ендоморфізмів вільного тріоїда рангу 1 досліджено в [17]. Добре відомо, що діалгебри (дімоноїди) [24] можна отримати з триалгебр (тріоїдів).

У цьому розділі наведено декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки і сполуки підтріоїдів, введено поняття n-нільпотентного тріоїда, побудовано вільний n-нільпотентний тріоїд і описано його структуру. Також охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді і наведено приклади нільпотентних тріоїдів індексу нільпотентності 2. Крім того, введено поняття прямокутної трисполуки і наведено приклади прямокутних трисполук, побудовано вільну прямокутну трисполуку та описано її структуру і групу автоморфізмів, представлено деякі найменші конгруенції на вільній прямокутній трисполуці.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [49 – 51, 56 – 58].

2.1. Декомпозиції вільних тріоїдів

Одним із кращих методів, який використовується при вивченні структури різних алгебр, є метод декомпозиції. Основна ідея цього методу полягає в розкладі алгебри на компоненти, можливо, більш простішої структури, детальному вивченні компонент і встановленні взаємозв'язків між компонентами в межах всієї алгебри. Вищевказаний метод має застосування в теорії групоїдів, теорії напівгруп, теорії дімоноїдів (див., наприклад, [81], відповідно, [82, 83]).

У підрозділі 2.1 наша увага буде спрямована на декомпозиції тріоїдів. У ньому наведено декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки і сполуки підтріоїдів. Введено поняття прямокутної трисполуки і наведено приклади прямокутних трисполук. Охарактеризовано найменшу прямокутну конгруенцію, найменшу ліву ідемпотентну конгруенцію і найменшу праву ідемпотентну конгруенцію на вільному тріоїді. Результати цього підрозділу опубліковано в [49].

2.1.1. Нагадаємо, що непорожня множина T, наділена трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$, які задовольняють вісім аксіом:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), (T1)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), (T2)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), (T3)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), (T4)$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), (T5)$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), (T6)$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \quad (T7)$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \quad (T8)$$

для всіх $x, y, z \in T$, називається тріоїдом.

Побудуємо вільний тріоїд.

Нехай X – довільна непорожня множина, $\overline{X} = \{\overline{x} \mid x \in X\}$, $Y = X \cup \overline{X}$ і $F[Y]$ – вільна напівгрупа на Y. Нехай далі $P \subset F[Y]$ – піднапівгрупа, яка містить слова w з елементами $\overline{x}\ (x \in X)$, які з'являються в w принаймні один раз. Неважко побачити, що $F[Y]$ – сполука напівгруп P і $F[Y] \setminus P$ [82]. Для кожного $w \in P$ через $\mathring{w}$ позначимо слово, отримане з w шляхом заміни всіх літер $\overline{x}\ (x \in X)$ на x. Наприклад, якщо $w = x\overline{x}\,\overline{y}x\overline{z}$, то $\mathring{w} = xxyxz$. Очевидно, $\mathring{w} \in F[Y] \setminus P$.

Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$ на множині P за правилами:

$$w \dashv u = w\mathring{u}, \quad w \vdash u = \mathring{w}u, \quad w \perp u = wu$$

для всіх $w, u \in P$. Позначимо алгебру $(P, \dashv, \vdash, \perp)$ через $Frt(X)$.

Твердження. $Frt(X)$ – вільний тріоїд.

Доведення цього твердження є таким як доведення твердження 1.9 з [9], отриманого для вільного тріоїда рангу 1.

Відзначимо, що в [18] побудовано конструкцію тріоїда, ізоморфного вільному тріоїду довільного ранга.

Якщо $X = \{x\}$, то $Frt(X)$ – вільний тріоїд рангу 1, представлений Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко в [9]. В останній роботі показано, що вільна асоціативна триалгебра над векторним простором повністю визначається вільною асоціативною триалгеброю на одному породжуючому елементі і опис останньої триалгебри зводиться до опису вільного тріоїда рангу 1. Тріоїди, які є ізоморфними вільному тріоїду ранга 1, можна знайти в [18] та [19].

Детально розглянемо поняття нормальної форми для елементів вільного тріоїда. Це поняття для елементів вільного тріоїда $Frt(X)$ рангу 1 (див. [9], лема 1.10) можна природно продовжити на випадок довільної множини X. А саме, нехай X – довільна непорожня множина і $w \in Frt(X)$. Тоді отримуємо нормальну форму для w (див. [80]):

$$w = u_1^{(0)} u_2^{(0)} \dots u_{k_0}^{(0)} \overline{u_1^{(1)}} u_2^{(1)} \dots u_{k_1}^{(1)} \overline{u_1^{(2)}} u_2^{(2)} \dots u_{k_2}^{(2)} \dots u_{k_{j-1}}^{(j-1)} \overline{u_1^{(j)}} u_2^{(j)} \dots u_{k_j}^{(j)} =$$

$$= (\overline{u_1^{(0)}} \text{ ђ } \dots \text{ ђ } \overline{u_{k_0}^{(0)}}) \text{ ђ } (\overline{u_1^{(1)}} \text{ ” } \dots \text{ ” } \overline{u_{k_1}^{(1)}}) \perp \dots \perp (\overline{u_1^{(j)}} \text{ ” } \dots \text{ ” } \overline{u_{k_j}^{(j)}}),$$

де $u_l^{(i)} \in X$, $1 \le l \le k_i$ для всіх $i \in \{0, 1, \dots, j\}$, або

$$w = \overline{u_1^{(1)}} u_2^{(1)} \dots u_{k_1}^{(1)} \overline{u_1^{(2)}} u_2^{(2)} \dots u_{k_2}^{(2)} \dots u_{k_{j-1}}^{(j-1)} \overline{u_1^{(j)}} u_2^{(j)} \dots u_{k_j}^{(j)} =$$

$$= (\overline{u_1^{(1)}} \text{ ” } \dots \text{ ” } \overline{u_{k_1}^{(1)}}) \perp (\overline{u_1^{(2)}} \text{ ” } \dots \text{ ” } \overline{u_{k_2}^{(2)}}) \perp \dots \perp (\overline{u_1^{(j)}} \text{ ” } \dots \text{ ” } \overline{u_{k_j}^{(j)}}),$$

де $u_l^{(i)} \in X$, $1 \le l \le k_i$ для всіх $i \in \{1, 2, \dots, j\}$. Нехай далі $(T, \text{”}', \text{ђ}', \perp')$ – довільний тріоїд і $\varphi : \overline{X} \to T$ – довільне відображення. Оскільки $Frt(X)$ – вільний тріоїд, то існує гомоморфізм $\Phi : Frt(X) \to (T, \text{”}', \text{ђ}', \perp')$. Він визначається за наступним правилом (див. [80]):

$$w\Phi = (\overline{u_1^{(0)}}\varphi \text{ ђ}' \; \overline{u_2^{(0)}}\varphi \text{ ђ}' \dots \text{ ђ}' \; \overline{u_{k_0}^{(0)}}\varphi) \text{ ђ}' \; (\overline{u_1^{(1)}}\varphi \text{ ”}' \; \overline{u_2^{(1)}}\varphi \text{ ”}' \dots \text{ ”}' \; \overline{u_{k_1}^{(1)}}\varphi) \perp'$$

$$\perp' \dots \perp' (\overline{u_1^{(j)}}\varphi \text{ ”}' \; \overline{u_2^{(j)}}\varphi \text{ ”}' \dots \text{ ”}' \; \overline{u_{k_j}^{(j)}}\varphi)$$

або

$$w\Phi = (\overline{u_1^{(1)}}\varphi \text{ ”}' \; \overline{u_2^{(1)}}\varphi \text{ ”}' \dots \text{ ”}' \; \overline{u_{k_1}^{(1)}}\varphi) \perp' (\overline{u_1^{(2)}}\varphi \text{ ”}' \; \overline{u_2^{(2)}}\varphi \text{ ”}' \dots \text{ ”}' \; \overline{u_{k_2}^{(2)}}\varphi) \perp'$$

$$\perp' \dots \perp' (\overline{u_1^{(j)}}\varphi \text{ ”}' \; \overline{u_2^{(j)}}\varphi \text{ ”}' \dots \text{ ”}' \; \overline{u_{k_j}^{(j)}}\varphi).$$

Φ називається канонічним гомоморфізмом.

2.1.2. Нагадаємо визначення дімоноїда [24, 84] (див. також п. 1.3.1).

Непорожня множина D з двома бінарними асоціативними операціями ” і ђ, які задовольняють аксіоми $(D2)-(D4)$, називається дімоноїдом. Якщо $D = (D, \text{”}, \text{ђ})$ – дімоноїд, то тріоїд $(D, \text{”}, \text{ђ}, \text{”})$ (відповідно, $(D, \text{”}, \text{ђ}, \text{ђ})$) будемо позначати через $(D)^{”}$ (відповідно, $(D)^{ђ}$). Очевидно, що $(D)^{”}$ і $(D)^{ђ}$ є різними як тріоїди, але збігаються як дімоноїди.

Тріоїд $(T,”,ђ,\perp)$ називається ідемпотентним тріоїдом або трисполукою [23], якщо напівгрупи $(T,”)$, $(T,ђ)$ і $(T,\perp)$ є ідемпотентними напівгрупами. Тріоїд $(T,”,ђ,\perp)$ називатимемо прямокутним тріоїдом або прямокутною трисполукою, якщо напівгрупи $(T,”)$, $(T,ђ)$ і $(T,\perp)$ є прямокутними сполуками (див. п. 1.3.5).

Нехай $I_n=\{1,2,...,n\}$, $n>1$, і нехай $\{X_i\}_{i\in I_n}$ – сім'я довільних непорожніх множин X_i, $i\in I_n$. Визначимо операції $”$, $ђ$ і $\perp$ на $\prod_{i\in I_3}X_i$ за правилами:

$$(a_1,b_1,c_1)\,”\,(a_2,b_2,c_2)=(a_1,b_1,c_1),$$

$$(a_1,b_1,c_1)\,ђ\,(a_2,b_2,c_2)=(a_1,b_2,c_2),$$

$$(a_1,b_1,c_1,)\perp(a_2,b_2,c_2)=(a_1,b_1,c_2)$$

для всіх $(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)\in\prod_{i\in I_3}X_i$. Очевидно, що $(\prod_{i\in I_3}X_i,\perp,ђ)$ – прямокутна дісполука (див. п. 1.3.5) і $(\prod_{i\in I_3}X_i,”)$ – напівгрупа лівих нулів.

Безпосередньо доводяться наступні три леми.

Лема. $(\prod_{i\in I_3}X_i,”,ђ,\perp)$ – прямокутна трисполука.

Якщо $X_i=X$ для всіх $i\in I_3$, то алгебру $(\prod_{i\in I_3}X_i,”,ђ,\perp)$ позначимо через $X_{lz,rd}$.

2.1.3. Визначимо операції $”$, $ђ$ і $\perp$ на $\prod_{i\in I_3}X_i$, поклавши

$$(a_1,b_1,c_1)\,”\,(a_2,b_2,c_2)=(a_1,b_1,c_2),$$

$$(a_1,b_1,c_1)\,ђ\,(a_2,b_2,c_2)=(a_2,b_2,c_2),$$

$$(a_1,b_1,c_1,)\perp(a_2,b_2,c_2)=(a_1,b_2,c_2)$$

для всіх $(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)\in\prod_{i\in I_3}X_i$. Очевидно, що $(\prod_{i\in I_3}X_i,”,\perp)$ – прямокутна дісполука (див. п. 1.3.5) і $(\prod_{i\in I_3}X_i,ђ)$ – напівгрупа правих нулів.

Лема. $(\prod_{i\in I_3} X_i, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ – прямокутна трисполука.

Якщо $X_i = X$ для всіх $i \in I_3$, то алгебру $(\prod_{i\in I_3} X_i, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ позначатимемо через $X_{rd,rz}$.

2.1.4. Визначимо операції ”, ђ і $\perp$ на $\prod_{i\in I_2} X_i$ за правилами:

$$(a_1, b_1)\text{”}(a_2, b_2) = (a_1, b_1), \quad (a_1, b_1)\,\text{ђ}\,(a_2, b_2) = (a_2, b_2),$$
$$(a_1, b_1) \perp (a_2, b_2) = (a_1, b_2)$$

для всіх $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \prod_{i\in I_2} X_i$. Очевидно, що $(\prod_{i\in I_2} X_i, \text{”}, \text{ђ})$ – дімоноїд лівих і правих нулів (див. п. 1.3.6) і $(\prod_{i\in I_2} X_i, \perp)$ – прямокутна сполука.

Лема. $(\prod_{i\in I_2} X_i, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ – прямокутна трисполука.

Якщо $X_i = X$ для всіх $i \in I_2$, то алгебру $(\prod_{i\in I_2} X_i, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ позначатимемо через $X_{lz,rz}^{rb}$. Відзначимо, що тріоїд $X_{lz,rz}^{rb}$ вперше був побудований в [23].

2.1.5. Визначимо операції ”, ђ і $\perp$ на $\prod_{i\in I_{2k}} X_i$, де $k \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ – множина натуральних чисел), поклавши

$$(x_1, x_2, ..., x_{2k})\text{”}(y_1, y_2, ..., y_{2k}) = (x_1, x_2, ..., x_{2k-1}, y_{2k}),$$
$$(x_1, x_2, ..., x_{2k})\,\text{ђ}\,(y_1, y_2, ..., y_{2k}) = (x_1, y_2, ..., y_{2k}),$$
$$(x_1, x_2, ..., x_{2k}) \perp (y_1, y_2, ..., y_{2k}) = (x_1, x_2, ..., x_k, y_{k+1}, ..., y_{2k})$$

для всіх $(x_1, x_2, ..., x_{2k}), (y_1, y_2, ..., y_{2k}) \in \prod_{i\in I_{2k}} X_i$.

Лема. Для будь-якого $k > 1$ алгебра $(\prod_{i\in I_{2k}} X_i, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ є прямокутною трисполукою.

Доведення. Згідно з лемою 4 з [35] $(\prod_{i\in I_{2k}} X_i, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ задовольняє аксіоми $(T1)-(T3)$ тріоїда і операції $\text{”}, \text{ђ}$ є асоціативними. Для всіх $(x_1, x_2, ..., x_{2k})$, $(y_1, y_2, ..., y_{2k}), (z_1, z_2, ..., z_{2k}) \in \prod_{i\in I_{2k}} X_i$ отримуємо

$$((x_1, x_2, ..., x_{2k}) \perp (y_1, y_2, ..., y_{2k})) \perp (z_1, z_2, ..., z_{2k}) =$$

$$=(x_1,x_2,...,x_k,y_{k+1},...,y_{2k})\perp(z_1,z_2,...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_k,z_{k+1},...,z_{2k})=(x_1,x_2,...,x_{2k})\perp(y_1,y_2,...,y_k,z_{k+1},...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_{2k})\perp((y_1,y_2,...,y_{2k})\perp(z_1,z_2,...,z_{2k})),$$

$$((x_1,x_2,...,x_{2k})\text{”}(y_1,y_2,...,y_{2k}))\text{”}(z_1,z_2,...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_{2k-1},y_{2k})\text{”}(z_1,z_2,...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_{2k-1},z_{2k})=(x_1,x_2,...,x_{2k})\text{”}(y_1,y_2,...,y_k,z_{k+1},...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_{2k})\text{”}((y_1,y_2,...,y_{2k})\perp(z_1,z_2,...,z_{2k})),$$

$$((x_1,x_2,...,x_{2k})\perp(y_1,y_2,...,y_{2k}))\text{”}(z_1,z_2,...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_k,y_{k+1},...,y_{2k})\text{”}(z_1,z_2,...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_k,y_{k+1},...,y_{2k-1},z_{2k})=(x_1,x_2,...,x_{2k})\perp(y_1,y_2,...,y_{2k-1},z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_{2k})\perp((y_1,y_2,...,y_{2k})\text{”}(z_1,z_2,...,z_{2k})),$$

$$((x_1,x_2,...,x_{2k})\text{”}(y_1,y_2,...,y_{2k}))\perp(z_1,z_2,...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_{2k-1},y_{2k})\perp(z_1,z_2,...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_k,z_{k+1},...,z_{2k})=(x_1,x_2,...,x_{2k})\perp(y_1,z_2,...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_{2k})\perp((y_1,y_2,...,y_{2k})\text{ђ}(z_1,z_2,...,z_{2k})),$$

$$((x_1,x_2,...,x_{2k})\text{ђ}(y_1,y_2,...,y_{2k}))\perp(z_1,z_2,...,z_{2k})=(x_1,y_2,...,y_{2k})\perp(z_1,z_2,...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,y_2,...,y_k,z_{k+1},...,z_{2k})=(x_1,x_2,...,x_{2k})\text{ђ}(y_1,y_2,...,y_k,z_{k+1},...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_{2k})\text{ђ}((y_1,y_2,...,y_{2k})\perp(z_1,z_2,...,z_{2k})),$$

$$((x_1,x_2,...,x_{2k})\perp(y_1,y_2,...,y_{2k}))\text{ђ}(z_1,z_2,...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_k,y_{k+1},...,y_{2k})\text{ђ}(z_1,z_2,...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,z_2,...,z_{2k})=(x_1,x_2,...,x_{2k})\text{ђ}(y_1,z_2,...,z_{2k})=$$

$$=(x_1,x_2,...,x_{2k})\text{ђ}((y_1,y_2,...,y_{2k})\text{ђ}(z_1,z_2,...,z_{2k})).$$

Отже, $(\prod_{i\in I_{2k}}X_i,\text{”},\text{ђ},\perp)$ задовольняє аксіоми $(T4)-(T8)$ тріоїда та операція $\perp$ є асоціативною і, таким чином, це тріоїд. Очевидно, $(\prod_{i\in I_{2k}}X_i,\text{”},\text{ђ},\perp)$ є ідемпотентним тріоїдом. Доведемо, що це прямокутна триsполука. Маємо

$$(x_1,x_2,...,x_{2k})\text{”}(y_1,y_2,...,y_{2k})\text{”}(x_1,x_2,...,x_{2k})=$$

$$= (x_1, x_2, ..., x_{2k-1}, y_{2k}) \text{”} (x_1, x_2, ..., x_{2k}) = (x_1, x_2, ..., x_{2k}),$$

$$(x_1, x_2, ..., x_{2k}) \text{ђ} (y_1, y_2, ..., y_{2k}) \text{ђ} (x_1, x_2, ..., x_{2k}) =$$

$$= (x_1, y_2, ..., y_{2k}) \text{ђ} (x_1, x_2, ..., x_{2k}) = (x_1, x_2, ..., x_{2k}),$$

$$(x_1, x_2, ..., x_{2k}) \perp (y_1, y_2, ..., y_{2k}) \perp (x_1, x_2, ..., x_{2k}) =$$

$$= (x_1, x_2, ..., x_k, y_{k+1}, ..., y_{2k}) \perp (x_1, x_2, ..., x_{2k}) = (x_1, x_2, ..., x_{2k}).$$

Таким чином, $(\prod_{i \in I_{2k}} X_i, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ – прямокутна трисполука.

Лему доведено.

Очевидно, що операції тріоїда $(\prod_{i \in I_2} X_i, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ збігаються і він є прямокутною сполукою.

Нехай, як і раніше, X – довільна непорожня множина. Позначимо тріоїд $(X^4, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ через $FRT(X)$.

2.1.6. Непорожня підмножина A тріоїда $(T, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ називається підтріоїдом, якщо для будь-яких $a, b \in T$ з того, що $a, b \in A$ випливає, що $a \text{”}\, b, a \,\text{ђ}\, b, a \perp b \in A$.

Якщо $f : T_1 \to T_2$ – гомоморфізм тріоїдів, то відповідну конгруенцію на T_1 будемо позначати через Δ_f.

Введемо поняття трисполуки підтріоїдів [23].

Нехай S – довільний тріоїд, J – деяка трисполука (див. п. 2.1.2) і нехай $\alpha : S \to J : x \text{ a } x\alpha$ – гомоморфізм. Тоді кожен клас конгруенції Δ_α є підтріоїдом тріоїда S, а сам тріоїд S є об'єднанням таких тріоїдів $S_\xi, \xi \in J$, що

$$x\alpha = \xi \Leftrightarrow x \in S_\xi = \Delta_\alpha^x = \{t \in S \mid (x, t) \in \Delta_\alpha\},$$

$$S_\xi \text{”} S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \text{”} \varepsilon}, \quad S_\xi \text{ђ} S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \text{ђ} \varepsilon},$$

$$S_\xi \perp S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \perp \varepsilon}, \quad \xi \neq \varepsilon \Rightarrow S_\xi \cap S_\varepsilon = \varnothing.$$

У цьому випадку говорять, що S розкладається в трисполуку підтріоїдів (або S є трисполукою J підтріоїдів S_ξ $(\xi \in J)$). Якщо J – напівгрупа ідемпотентів (сполука), то говорять, що S є сполукою J підтріоїдів S_ξ $(\xi \in J)$. Якщо J є комутативною сполукою, то говорять, що S – напіврешітка J підтріоїдів S_ξ $(\xi \in J)$. Якщо J – напівгрупа лівих (правих) нулів, то будемо говорити, що S є лівою (правою) сполукою J підтріоїдів S_ξ $(\xi \in J)$.

Нехай $\omega \in F[Y]$ і $w \in Frt(X)$ (див. п. 2.1.1). Позначимо першу (відповідно, останню) літеру слова ω через $\omega^{(0)}$ (відповідно, $\omega^{(1)}$). Припустимо, що u – початкове (відповідно, кінцеве) підслово слова w мінімальної довжини таке, що $u^{(1)} \in \overline{X}$ (відповідно, $u^{(0)} \in \overline{X}$). У цьому випадку $\overline{u}^{(1)}$ (відповідно, $\overline{u}^{(0)}$) будемо позначати через $w^{[0]}$ (відповідно, $w^{[1]}$). Для кожного $\omega \in F[Y]$ множину всіх літер, що входять в ω, будемо позначати через $c(\omega)$ і для кожного $w \in Frt(X)$ покладемо $\tilde{c}(w) = c(\overset{\circ}{w})$.

Візьмемо довільну непорожню скінченну підмножину C з X. Нехай $B^C(X)$ – множина всіх скінченних підмножин A з X таких, що $C \subseteq A$, а $B_C(X)$ – напіврешітка, визначена на $B^C(X)$ за допомогою операції теоретико-множинного об'єднання.

Нехай далі $i, j, k, s \in X$,

$$L = \{(i,j,k,s), (i,j,k), [i,j,k], [i,j], (i,j), (i,j], [i,j), (i), [i]\}$$

і

$$U_{(i,j,k,s)} = \{w \in Frt(X) \mid (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}) = (i,j,k,s)\},$$

$$U_{(i,j,k)} = \{w \in Frt(X) \mid (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}) = (i,j,k)\},$$

$$U_{[i,j,k]} = \{w \in Frt(X) \mid (w^{[0]}, w^{[1]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}) = (i,j,k)\},$$

$$U_{[i,j]} = \{w \in Frt(X) \mid (w^{[0]}, w^{[1]}) = (i,j)\},$$

$$U_{(i,j)} = \{w \in Frt(X) \mid (\overset{\circ}{w}^{(0)}, \overset{\circ}{w}^{(1)}) = (i,j)\},$$

$$U_{(i)} = \{w \in Frt(X) \mid \overset{\circ}{w}^{(0)} = i\},$$

$$U_{[i]} = \{w \in Frt(X) \mid \overset{\circ}{w}^{(1)} = i\}.$$

Для будь-якого $l \in L$ покладемо l^* – множина, що містить всі компоненти l. Розглянемо множину

$$U_l^A = \{w \in U_l \mid \tilde{c}(w) = A\},$$

де $A \in B_{l^*}(X)$ і $l \in L \setminus \{(i,j],[i,j)\}$.

Використовуючи позначення пп. 1.3.5 – 1.3.8, пп. 2.1.2 – 2.1.5, у наступних трьох структурних теоремах дамо декомпозиції $Frt(X)$ у трисполуки підтріоїдів.

Теорема. Нехай $Frt(X)$ – вільний тріоїд. Мають місце такі твердження:

(i) $Frt(X)$ є трисполукою $FRT(X)$ підтріоїдів $U_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s) \in FRT(X)$. Кожен тріоїд $U_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s) \in FRT(X)$, є напіврешіткою $B_{(i,j,k,s)^*}(X)$ підтріоїдів $U_{(i,j,k,s)}^A$, $A \in B_{(i,j,k,s)^*}(X)$;

(ii) $Frt(X)$ є трисполукою $X_{lz,rd}$ підтріоїдів $U_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in X_{lz,rd}$. Кожен тріоїд $U_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in X_{lz,rd}$, є напіврешіткою $B_{(i,j,k)^*}(X)$ підтріоїдів $U_{(i,j,k)}^A$, $A \in B_{(i,j,k)^*}(X)$;

(iii) $Frt(X)$ є трисполукою $X_{rd,rz}$ підтріоїдів $U_{[i,j,k]}$, $(i,j,k) \in X_{rd,rz}$. Кожен тріоїд $U_{[i,j,k]}$, $(i,j,k) \in X_{rd,rz}$, є напіврешіткою $B_{[i,j,k]^*}(X)$ підтріоїдів $U_{[i,j,k]}^A$, $A \in B_{[i,j,k]^*}(X)$;

(iv) $Frt(X)$ є трисполукою $X_{lz,rz}^{rb}$ підтріоїдів $U_{[i,j]}$, $(i,j) \in X_{lz,rz}^{rb}$. Кожен тріоїд $U_{[i,j]}$, $(i,j) \in X_{lz,rz}^{rb}$, є напіврешіткою $B_{[i,j]^*}(X)$ підтріоїдів $U_{[i,j]}^A$, $A \in B_{[i,j]^*}(X)$.

Доведення. (i) Визначимо відображення

$$\varphi_{FRT} : Frt(X) \to FRT(X),$$

поклавши

$$w \mapsto (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}), \quad w \in Frt(X).$$

Для довільних елементів $w, u \in Frt(X)$ отримаємо

$$(w \vee u)\varphi_{FRT} = (w\tilde{u})\varphi_{FRT} = (\overline{w\tilde{u}}^{(0)}, (w\tilde{u})^{[0]}, (w\tilde{u})^{[1]}, \overline{w\tilde{u}}^{(1)}) =$$

$$= ((\mathring{w}\tilde{u})^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, (\mathring{w}\tilde{u})^{(1)}) = (\mathring{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \tilde{u}^{(1)}) =$$

$$= (\mathring{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \mathring{w}^{(1)}) \vee (\tilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \tilde{u}^{(1)}) = w\varphi_{FRT} \vee u\varphi_{FRT},$$

$$(w \wedge u)\varphi_{FRT} = (\mathring{w}u)\varphi_{FRT} = (\overline{\mathring{w}u}^{(0)}, (\mathring{w}u)^{[0]}, (\mathring{w}u)^{[1]}, \overline{\mathring{w}u}^{(1)}) =$$

$$= ((\mathring{w}\tilde{u})^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, (\mathring{w}\tilde{u})^{(1)}) = (\mathring{w}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \tilde{u}^{(1)}) =$$

$$= (\mathring{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \mathring{w}^{(1)}) \wedge (\tilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \tilde{u}^{(1)}) = w\varphi_{FRT} \wedge u\varphi_{FRT},$$

$$(w \perp u)\varphi_{FRT} = (wu)\varphi_{FRT} = (\overline{wu}^{(0)}, (wu)^{[0]}, (wu)^{[1]}, \overline{wu}^{(1)}) =$$

$$= ((\mathring{w}\tilde{u})^{(0)}, w^{[0]}, u^{[1]}, (\mathring{w}\tilde{u})^{(1)}) = (\mathring{w}^{(0)}, w^{[0]}, u^{[1]}, \tilde{u}^{(1)}) =$$

$$= (\mathring{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \mathring{w}^{(1)}) \perp (\tilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \tilde{u}^{(1)}) = w\varphi_{FRT} \perp u\varphi_{FRT}.$$

Таким чином, φ_{FRT} – сюр'єктивний гомоморфізм. Очевидно, що $U_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s) \in FRT(X)$, – це клас конгруенції $\Delta_{\varphi_{FRT}}$, який є підтріоїдом тріоїда $Frt(X)$. Крім того, для кожного $(i,j,k,s) \in FRT(X)$ відображення

$$\zeta : U_{(i,j,k,s)} \to B_{(i,j,k,s)^*}(X) : w \mapsto \tilde{c}(w)$$

є гомоморфізмом. Дійсно,

$$(w \vee u)\zeta = (w\tilde{u})\zeta = \tilde{c}(w\tilde{u}) = c(\overline{w\tilde{u}}) =$$

$$= c(\mathring{w}\tilde{u}) = c(\mathring{w}) \cup c(\tilde{u}) = \tilde{c}(w) \cup \tilde{c}(u) = w\zeta \cup u\zeta,$$

$$(w \wedge u)\zeta = (\mathring{w}u)\zeta = \tilde{c}(\mathring{w}u) = c(\overline{\mathring{w}u}) =$$

$$= c(\mathring{w}\tilde{u}) = c(\mathring{w}) \cup c(\tilde{u}) = \tilde{c}(w) \cup \tilde{c}(u) = w\zeta \cup u\zeta,$$

$$(w \perp u)\zeta = (wu)\zeta = \tilde{c}(wu) = c(\overline{wu}) =$$

$$= c(\mathring{w}\tilde{u}) = c(\mathring{w}) \cup c(\tilde{u}) = \tilde{c}(w) \cup \tilde{c}(u) = w\zeta \cup u\zeta$$

для всіх $w, u \in U_{(i,j,k,s)}$. Отже, $U_{(i,j,k,s)}$ є напіврешіткою $B_{(i,j,k,s)^*}(X)$ підтріоїдів $U^A_{(i,j,k,s)}$, $A \in B_{(i,j,k,s)^*}(X)$.

(ii) Визначимо відображення

$$\varphi_{lz,rd} : Frt(X) \to X_{lz,rd},$$

поклавши

$$w \mapsto (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}), \quad w \in Frt(X).$$

Можна перевірити, що $\varphi_{lz,rd}$ – сюр'єктивний гомоморфізм і $U_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in X_{lz,rd}$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi_{lz,rd}}$, який є підтріоїдом тріоїда $Frt(X)$. Аналогічно (i) доводиться друге твердження (ii).

(iii) Визначимо відображення

$$\varphi_{rd,rz} : Frt(X) \to X_{rd,rz}$$

за правилом:

$$w \mapsto (w^{[0]}, w^{[1]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}), \quad w \in Frt(X).$$

Можна показати, що $\varphi_{rd,rz}$ – сюр'єктивний гомоморфізм і $U_{[i,j,k]}$, $(i,j,k) \in X_{rd,rz}$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi_{rd,rz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $Frt(X)$. Аналогічно попереднім випадкам доводиться останнє твердження (iii).

(iv) Визначимо відображення

$$\varphi_{lz,rz}^{rb} : Frt(X) \to X_{lz,rz}^{rb},$$

поклавши

$$w \mapsto (w^{[0]}, w^{[1]}), \quad w \in Frt(X).$$

Безпосередньою перевіркою можна довести, що $\varphi_{lz,rz}^{rb}$ – сюр'єктивний гомоморфізм і $U_{[i,j]}$, $(i,j) \in X_{lz,rz}^{rb}$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi_{lz,rz}^{rb}}$, який є підтріоїдом тріоїда $Frt(X)$. Аналогічно випадку (i) можна довести друге твердження (iv).

Теорему доведено.

2.1.7. Нехай для всіх $i,j,k \in X$

$$R_{(i,j,k)} = \{w \in Frt(X) \mid (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[0]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}) = (i,j,k)\},$$

$$R_{[i,j,k]} = \{w \in Frt(X) \mid (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[1]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}) = (i,j,k)\},$$

$$R_{(i)} = \{w \in Frt(X) \mid w^{[0]} = i\},$$

$$R_{[i]} = \{w \in Frt(X) \mid w^{[1]} = i\},$$

$$R_{(i,j)} = \{w \in Frt(X) \mid (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[0]}) = (i,j)\},$$

$$R_{[i,j]} = \{w \in Frt(X) \mid (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[1]}) = (i,j)\},$$

$$R_{(i,j]} = \{w \in Frt(X) \mid (w^{[0]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}) = (i,j)\},$$

$$R_{[i,j)} = \{w \in Frt(X) \mid (w^{[1]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}) = (i,j)\}.$$

Розглянемо множину

$$R_l^A = \{w \in R_l \mid \tilde{c}(w) = A\},$$

де $A \in B_{l^*}(X)$ і $l \in L \setminus \{(i,j,k,s)\}$.

Теорема. Нехай $Frt(X)$ – вільний тріоїд. Справедливі наступні твердження:

(i) $Frt(X)$ є трисполукою $(FRct(X))^{''}$ підтріоїдів $R_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in (FRct(X))^{''}$. Кожен тріоїд $R_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in (FRct(X))^{''}$, є напіврешіткою $B_{(i,j,k)^*}(X)$ підтріоїдів $R^A_{(i,j,k)}$, $A \in B_{(i,j,k)^*}(X)$;

(ii) $Frt(X)$ є трисполукою $(FRct(X))^{\text{ђ}}$ підтріоїдів $R_{[i,j,k]}$, $(i,j,k) \in (FRct(X))^{\text{ђ}}$. Кожен тріоїд $R_{[i,j,k]}$, $(i,j,k) \in (FRct(X))^{\text{ђ}}$, є напіврешіткою $B_{[i,j,k]^*}(X)$ підтріоїдів $R^A_{[i,j,k]}$, $A \in B_{[i,j,k]^*}(X)$;

(iii) $Frt(X)$ є трисполукою $(X_{lz,rz})^{''}$ підтріоїдів $R_{(i)}$, $i \in (X_{lz,rz})^{''}$. Кожен тріоїд $R_{(i)}$, $i \in (X_{lz,rz})^{''}$, є напіврешіткою $B_{\{i\}}(X)$ підтріоїдів $R^A_{(i)}$, $A \in B_{\{i\}}(X)$;

(iv) $Frt(X)$ є трисполукою $(X_{lz,rz})^{\text{ђ}}$ підтріоїдів $R_{[i]}$, $i \in (X_{lz,rz})^{\text{ђ}}$. Кожен тріоїд $R_{[i]}$, $i \in (X_{lz,rz})^{\text{ђ}}$, є напіврешіткою $B_{\{i\}}(X)$ підтріоїдів $R^A_{[i]}$, $A \in B_{\{i\}}(X)$.

Доведення. (i) Визначимо відображення

$$\varphi^{''}_{FRct} : Frt(X) \to (FRct(X))^{''},$$

поклавши

$$w \mapsto (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[0]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}), \quad w \in Frt(X).$$

Для будь-яких $w, u \in Frt(X)$ отримуємо

$$(w '' u)\varphi''_{FRct} = (\widetilde{wu})\varphi''_{FRct} = (\overline{\widetilde{wu}}^{(0)}, (\widetilde{wu})^{[0]}, \overline{\widetilde{wu}}^{(1)}) =$$

$$= ((\overset{\circ}{\widetilde{wu}})^{(0)}, w^{[0]}, (\overset{\circ}{\widetilde{wu}})^{(1)}) = (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[0]}, \widetilde{u}^{(1)}) =$$

$$= (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[0]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}) '' (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, \widetilde{u}^{(1)}) = w\varphi''_{FRct} '' u\varphi''_{FRct},$$

$$(w \perp u)\varphi''_{FRct} = (wu)\varphi''_{FRct} = (\overline{wu}^{(0)}, (wu)^{[0]}, \overline{wu}^{(1)}) =$$

$$= ((\overset{\circ}{\widetilde{wu}})^{(0)}, w^{[0]}, (\overset{\circ}{\widetilde{wu}})^{(1)}) = (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[0]}, \widetilde{u}^{(1)}) =$$

$$= (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[0]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}) '' (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, \widetilde{u}^{(1)}) = (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[0]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}) \perp (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, \widetilde{u}^{(1)}) =$$

$$= w\varphi''_{FRct} \perp u\varphi''_{FRct}.$$

Аналогічно доводимо, що φ''_{FRct} є гомоморфізмом стосовно операції ђ. Отже, φ''_{FRct} – сюр'єктивний гомоморфізм. Очевидно, що $R_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in (FRct(X))''$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi''_{FRct}}$, який є підтріоїдом тріоїда $Frt(X)$. Крім того, неважко довести, що для кожного $(i,j,k) \in (FRct(X))''$ відображення

$$R_{(i,j,k)} \to B_{(i,j,k)^*}(X) : w \mapsto \tilde{c}(w)$$

є гомоморфізмом. Звідси $R_{(i,j,k)}$ – напіврешітка $B_{(i,j,k)^*}(X)$ підтріоїдів $R^{A}_{(i,j,k)}$, $A \in B_{(i,j,k)^*}(X)$.

(ii) Визначимо відображення

$$\varphi^{\text{ђ}}_{FRct} : Frt(X) \to (FRct(X))^{\text{ђ}},$$

поклавши

$$w \mapsto (\overset{\circ}{w}^{(0)}, w^{[1]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}), \quad w \in Frt(X).$$

Неважко показати, що $\varphi^{\text{ђ}}_{FRct}$ – сюр'єктивний гомоморфізм і $R_{[i,j,k]}$, $(i,j,k) \in (FRct(X))^{\text{ђ}}$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi^{\text{ђ}}_{FRct}}$, який є підтріоїдом тріоїда $Frt(X)$. Як і у випадку (i), доводиться друге твердження в (ii).

(iii) Визначимо відображення

$$\varphi^{''}_{lz,rz} : Frt(X) \to (X_{lz,rz})^{''}$$

за правилом: $w \text{ a } \; w^{[0]}, \quad w \in Frt(X)$.

Можна показати, що $\varphi^{''}_{lz,rz}$ – сюр'єктивний гомоморфізм і $R_{(i)}$, $i \in (X_{lz,rz})^{''}$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi^{''}_{lz,rz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $Frt(X)$. Аналогічно (i) можна довести останнє твердження в (iii).

(iv) Визначимо відображення

$$\varphi^{\text{ђ}}_{lz,rz} : Frt(X) \to (X_{lz,rz})^{\text{ђ}},$$

поклавши

$$w \text{ a } \; w^{[1]}, \quad w \in Frt(X).$$

Безпосередньо перевіряється, що $\varphi^{\text{ђ}}_{lz,rz}$ – сюр'єктивний гомоморфізм і $R_{[i]}$, $i \in (X_{lz,rz})^{\text{ђ}}$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi^{\text{ђ}}_{lz,rz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $Frt(X)$. Доведення другого твердження (iv) є аналогічним доведенню твердження (i).

Теорему доведено.

2.1.8. **Теорема.** Нехай $Frt(X)$ – вільний тріоїд. Мають місце наступні твердження:

(i) $Frt(X)$ є трисполукою $(X_{lz,rb})^{''}$ підтріоїдів $R_{(i,j)}$, $(i,j) \in (X_{lz,rb})^{''}$. Кожен тріоїд $R_{(i,j)}$, $(i,j) \in (X_{lz,rb})^{''}$, є напіврешіткою $B_{(i,j)^*}(X)$ підтріоїдів $R^{A}_{(i,j)}$, $A \in B_{(i,j)^*}(X)$;

(ii) $Frt(X)$ є трисполукою $(X_{lz,rb})^{\text{ђ}}$ підтріоїдів $R_{[i,j]}$, $(i,j)\in(X_{lz,rb})^{\text{ђ}}$. Кожен тріоїд $R_{[i,j]}$, $(i,j)\in(X_{lz,rb})^{\text{ђ}}$, є напіврешіткою $B_{[i,j]^*}(X)$ підтріоїдів $R^{A}_{[i,j]}$, $A\in B_{[i,j]^*}(X)$;

(iii) $Frt(X)$ є трисполукою $(X_{rb,rz})^{''}$ підтріоїдів $R_{(i,j]}$, $(i,j)\in(X_{rb,rz})^{''}$. Кожен тріоїд $R_{(i,j]}$, $(i,j)\in(X_{rb,rz})^{''}$, є напіврешіткою $B_{(i,j]^*}(X)$ підтріоїдів $R^{A}_{(i,j]}$, $A\in B_{(i,j]^*}(X)$;

(iv) $Frt(X)$ є трисполукою $(X_{rb,rz})^{\text{ђ}}$ підтріоїдів $R_{[i,j)}$, $(i,j)\in(X_{rb,rz})^{\text{ђ}}$. Кожен тріоїд $R_{[i,j)}$, $(i,j)\in(X_{rb,rz})^{\text{ђ}}$, є напіврешіткою $B_{[i,j)^*}(X)$ підтріоїдів $R^{A}_{[i,j)}$, $A\in B_{[i,j)^*}(X)$.

Доведення. (i) Визначимо відображення

$$\varphi^{''}_{lz,rb}: Frt(X)\to(X_{lz,rb})^{''},$$

поклавши

$$w\mapsto(\overset{\circ}{w}^{(0)},w^{[0]}),\quad w\in Frt(X).$$

Безпосередньо перевіряється, що $\varphi^{''}_{lz,rb}$ – сюр’єктивний гомоморфізм і $R_{(i,j)}$, $(i,j)\in(X_{lz,rb})^{''}$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi^{''}_{lz,rb}}$, який є підтріоїдом тріоїда $Frt(X)$. Аналогічно (i) з теореми п. 2.1.6 можна довести друге твердження (i).

(ii) Визначимо відображення

$$\varphi^{\text{ђ}}_{lz,rb}: Frt(X)\to(X_{lz,rb})^{\text{ђ}}$$

за правилом:

$$w\mapsto(\overset{\circ}{w}^{(0)},w^{[1]}),\quad w\in Frt(X).$$

Неважко перевірити, що $\varphi^{\text{ђ}}_{lz,rb}$ – сюр’єктивний гомоморфізм і $R_{[i,j]}$, $(i,j)\in(X_{lz,rb})^{\text{ђ}}$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi^{\text{ђ}}_{lz,rb}}$, який є підтріоїдом тріоїда $Frt(X)$. Таким чином, як описано вище, можна довести друге твердження (ii).

(iii) Визначимо відображення

$$\varphi^{”}_{rb,rz} : Frt(X) \to (X_{rb,rz})^{”},$$

поклавши

$$w \mapsto (w^{[0]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}), \quad w \in Frt(X).$$

Безпосередньою перевіркою можна показати, що $\varphi^{”}_{rb,rz}$ – сюр’єктивний гомоморфізм і $R_{(i,j]}$, $(i,j) \in (X_{rb,rz})^{”}$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi^{”}_{rb,rz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $Frt(X)$. Аналогічно попереднім викладкам можна довести останнє твердження (iii).

(iv) Визначимо відображення

$$\varphi^{ђ}_{rb,rz} : Frt(X) \to (X_{rb,rz})^{ђ}$$

за правилом:

$$w \mapsto (w^{[1]}, \overset{\circ}{w}^{(1)}), \quad w \in Frt(X).$$

Можна довести, що $\varphi^{ђ}_{rb,rz}$ – сюр’єктивний гомоморфізм і $R_{[i,j)}$, $(i,j) \in (X_{rb,rz})^{ђ}$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi^{ђ}_{rb,rz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $Frt(X)$. Аналогічно (i) з теореми п. 2.1.6 можна довести друге твердження (iv).

Теорему доведено.

2.1.9. У цьому пункті будемо використовувати позначення п. 2.1.6. Для довільної непорожньої множини X нехай $X_{lz} = (X, ”)$, $X_{rz} = (X, ђ)$, $X_{rb} = X_{lz} \times X_{rz}$ – напівгрупа лівих нулів, напівгрупа правих нулів і прямокутна сполука відповідно.

Наступна структурна теорема дає декомпозиції $Frt(X)$ у сполуки підтріоїдів.

Теорема. Нехай $Frt(X)$ – вільний тріоїд. Справедливі наступні твердження:

(i) $Frt(X)$ є прямокутною сполукою X_{rb} підтріоїдів $U_{(i,j)}$, $(i,j)\in X_{rb}$. Кожен тріоїд $U_{(i,j)}$, $(i,j)\in X_{rb}$, є напіврешіткою $B_{(i,j)^*}(X)$ підтріоїдів $U^A_{(i,j)}$, $A\in B_{(i,j)^*}(X)$;

(ii) $Frt(X)$ є лівою сполукою X_{lz} підтріоїдів $U_{(i)}$, $i\in X_{lz}$. Кожен тріоїд $U_{(i)}$, $i\in X_{lz}$, є напіврешіткою $B_{\{i\}}(X)$ підтріоїдів $U^A_{(i)}$, $A\in B_{\{i\}}(X)$;

(iii) $Frt(X)$ є правою сполукою X_{rz} підтріоїдів $U_{[i]}$, $i\in X_{rz}$. Кожен тріоїд $U_{[i]}$, $i\in X_{rz}$, є напіврешіткою $B_{\{i\}}(X)$ підтріоїдів $U^A_{[i]}$, $A\in B_{\{i\}}(X)$.

Доведення. (i) Визначимо відображення

$$\varphi_{rb}: Frt(X)\to X_{rb}, \text{ поклавши}$$

$$w \mapsto (\overset{\circ}{w}^{(0)}, \overset{\circ}{w}^{(1)}), \quad w\in Frt(X).$$

Можна перевірити, що φ_{rb} – сюр'єктивний гомоморфізм і $U_{(i,j)}$, $(i,j)\in X_{rb}$, – клас конгруенціїі $\Delta_{\varphi_{rb}}$, який є підтріоїдом $Frt(X)$. Аналогічно (i) з теореми п. 2.1.6 можна довести останнє твердження в (i).

(ii) Визначимо відображення

$$\varphi_{lz}: Frt(X)\to X_{lz}$$

за правилом:

$$w \mapsto \overset{\circ}{w}^{(0)}, \quad w\in Frt(X).$$

Неважко перевірити, що φ_{lz} – сюр'єктивний гомоморфізм і $U_{(i)}$, $i\in X_{lz}$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi_{lz}}$, який є підтріоїдом $Frt(X)$. Так само, як доведено (i) з теореми п. 2.1.6, можна довести і друге твердження в (ii).

(iii) Визначимо відображення

$$\varphi_{rz}: Frt(X)\to X_{rz},$$

поклавши

$$w \mapsto \overset{\circ}{w}^{(1)}, \quad w\in Frt(X).$$

Можна перевірити, що φ_{rz} – сюр'єктивний гомоморфізм і $U_{[i]}$, $i \in X_{rz}$, – клас конгруенції $\Delta_{\varphi_{rz}}$, який є підтріоїдом $Frt(X)$. Як і раніше, можна довести останнє твердження (iii).

Теорему доведено.

2.1.10. Якщо ρ – конгруенція на тріоїді $(T,",ђ,\perp)$ така, що операції $(T,",ђ,\perp)/\rho$ збігаються і він є прямокутною сполукою (відповідно, напівгрупою лівих нулів, напівгрупою правих нулів), то будемо говорити, що ρ – прямокутна конгруенція (відповідно, ліва ідемпотентна конгруенція, права ідемпотентна конгруенція).

З теореми п. 2.1.9 отримуємо такий наслідок.

Наслідок.Нехай $Frt(X)$ – вільний тріоїд. Маємо наступні твердження:

(i) $\Delta_{\varphi_{rb}}$ – найменша прямокутна конгруенція на $Frt(X)$;

(ii) $\Delta_{\varphi_{lz}}$ – найменша ліва ідемпотентна конгруенція на $Frt(X)$;

(iii) $\Delta_{\varphi_{rz}}$ – найменша права ідемпотентна конгруенція на $Frt(X)$.

Доведення. (i) Добре відомо, що X_{rb} – вільна прямокутна сполука. За теоремою п. 2.1.9 (i) отримуємо (i).

Доведення тверджень (ii) і (iii) аналогічні.

Наслідок доведено.

2.2. Вільні n-нільпотентні тріоїди

Нільпотентність в різних алгебрах інтенсивно вивчалася багатьма авторами. Поняття нільпотентної напівгрупи було введено А. І. Мальцевим [85] і незалежно Б. Нейманом і Т. Тейлором [86]. Зв’язки між нільпотентними напівгрупами і напівгруповими алгебрами вивчалися Е. Джесперсом і Я. Окнінським [87]. Нільпотентність в кільцях була розглянута в [88]. Роботи [32, 33] присвячені вивченню (ді)нільпотентних дімоноїдів.

Цей підрозділ розвиває теорію многовидів тріоїдів. У ньому введено поняття n-нільпотентного тріоїда, наведено приклади нільпотентних тріоїдів індексу нільпотентності 2, побудовано вільний n-нільпотентний тріоїд і описано його структуру. Введено поняття 0-триcполуки підтріоїдів і в термінах 0-трисполук підтріоїдів описано структуру вільних n-нільпотентних тріоїдів. Також охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді. Результати цього підрозділу опубліковано в [50, 56].

2.2.1. У пунктах 2.2.1 – 2.2.3 введено поняття нільпотентного тріоїда, наведено приклади нільпотентних тріоїдів індексу нільпотентності 2 і побудовано вільний n-нільпотентний тріоїд.

Як зазвичай, $\mathbb{N}$ позначає множину натуральних чисел.

Елемент 0 тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ називається нулем [20], якщо

$$x \ast 0 = 0 = 0 \ast x$$

для всіх $x \in T$ і $\ast \in \{\dashv,\vdash,\perp\}$. Тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ з нулем назвемо нільпотентним, якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$ і будь-яких $x_i \in T$, $1 \le i \le n+1$, і $*_j \in \{\dashv,\vdash,\perp\}$, $1 \le j \le n$, будь-яка розстановка дужок у

$$x_1 *_1 x_2 *_2 \ldots *_n x_{n+1}$$

дає $0 \in T$. Найменше серед таких n будемо називати індексом нільпотентності тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$. Для $k \in \mathbb{N}$ нільпотентний тріоїд індексу нільпотентності $\le k$ будемо називати k-нільпотентним.

Зрозуміло, що операції будь-якого 1-нільпотентного тріоїда збігаються і він є напівгрупою з нульовим множенням.

Наведемо приклади нільпотентних тріоїдів індексу нільпотентності 2.

Нехай X_1 і X_2 – довільні множини, які не перетинаються, $0 \in X_1$, і нехай

$$\varphi_1 : X_2 \times X_2 \to X_1, \quad \varphi_2 : X_2 \times X_2 \to X_1, \quad \varphi_3 : X_2 \times X_2 \to X_1 \; -$$

довільні різні відображення. Визначимо оперції $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$ на $X_1 \cup X_2$, поклавши

$$x \dashv y = \begin{cases} (x, y)\varphi_1, \; x, y \in X_2, \\ 0 \quad \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$x \vdash y = \begin{cases} (x, y)\varphi_2, \; x, y \in X_2, \\ 0 \quad \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$x \perp y = \begin{cases} (x, y)\varphi_3, \; x, y \in X_2, \\ 0 \quad \text{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $x, y \in X_1 \cup X_2$.

Доведення наступного твердження аналогічне доведенню твердження 2 з [33].

Твердження. $(X_1 \cup X_2, \dashv, \vdash, \perp)$ – нільпотентний тріоїд індексу нільпотентності 2.

2.2.2. Нагадаємо, що тріоїд називається комутативним [23], якщо три його операції комутативні.

Нехай Y – довільна множина така, що $0, a, b, c, d, e, f \in Y$ і $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq d$, $d \neq a$, $b \neq e$, $d \neq e$, $f \neq e$, $a \neq f$, $c \neq f$. Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$ на Y, поклавши

$$x \dashv y = \begin{cases} b, \; x = y = a, \\ 0 \quad \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$x \vdash y = \begin{cases} d, \; x = y = c, \\ 0 \quad \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$x \perp y = \begin{cases} f, \; x = y = e, \\ 0 \quad \text{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $x, y \in Y$.

Доведення наступного твердження аналогічно доведенню твердження 3 з [33].

Твердження. Якщо $b \neq 0$ або $d \neq 0$, або $f \neq 0$, то $(Y, \dashv, \vdash, \perp)$ – нільпотентний комутативний тріоїд індексу нільпотентності 2.

Відзначимо, що тріоїд $(Y, \dashv, \vdash, \perp)$ вперше був побудований в [23].

2.2.3. Неважко помітити, що клас усіх n-нільпотентних тріоїдів є підмноговидом многовиду тріоїдів. Тріоїд, який є вільним у многовиді n-нільпотентних тріоїдів, називатимемо вільним n-нільпотентним тріоїдом.

Для кожного $w \in F[Y]$ (див. п. 2.1.1) довжину слова w позначимо через l_w. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $P_n \subset P$ – множина, яка містить слова w з довжиною не більше, ніж n (див. п. 2.1.1). Визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ і $\uparrow$ на множині $P_n \cup \{0\}$ за правилами:

$$w \dashv u = \begin{cases} w\overset{\circ}{u}, & l_{wu} \leq n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases} \qquad w \vdash u = \begin{cases} \overset{\circ}{w}u, & l_{wu} \leq n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases}$$

$$w \uparrow u = \begin{cases} wu, & l_{wu} \leq n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases} \qquad w * 0 = 0 * w = 0 * 0 = 0$$

для всіх $w, u \in P_n$ і $* \in \{\dashv, \vdash, \uparrow\}$. Алгебру $(P_n \cup \{0\}, \dashv, \vdash, \uparrow)$ позначимо через $P_n^0(X)$.

Теорема. $P_n^0(X)$ – вільний n-нільпотентний тріоїд.

Доведення. Згідно з твердженням 1 з [20] $P_n^0(X)$ – тріоїд з нулем. Для будь-яких $w_i \in P_n^0(X) \setminus \{0\}$, $1 \leq i \leq n+1$, і $*_j \in \{\dashv, \vdash, \uparrow\}$, $1 \leq j \leq n$, будь-яка розстановка дужок у

$$w_1 *_1 w_2 *_2 \ldots *_n w_{n+1}$$

дає 0. Таким чином, $P_n^0(X)$ – нільпотентний тріоїд. У той же час, для $\bar{x} \in \overline{X}$ маємо

$$\underbrace{\bar{x} \dashv \bar{x} \dashv \ldots \dashv \bar{x}}_{n} = \underbrace{\bar{x}\bar{x}\ldots\bar{x}}_{n} \neq 0 \cdot$$

Це означає, що індекс нільпотентності тріоїда $P_n^0(X)$ дорівнює n.

Покажемо, що $P_n^0(X)$ – вільний тріоїд в многовиді n-нільпотентних тріоїдів.

Нехай $(T, \dashv', \vdash', \perp')$ – довільний n-нільпотентний тріоїд, $\rho : \overline{X} \to T$ – довільне відображення і $\mu : Frt(X) \to (T, \dashv', \vdash', \perp')$ – канонічний гомоморфізм, який визначається ρ (див. п. 2.1.1). Визначимо відображення

$$\delta : P_n^0(X) \to (T, \dashv', \vdash', \perp') : w \mapsto w\delta$$

за формулою:

$$w\delta = \begin{cases} w\mu, \ w \in P_n^0(X) \setminus \{0\}, \\ 0, \quad w = 0. \end{cases}$$

Покажемо, що δ – гомоморфізм.

Нехай $w_1, w_2 \in P_n^0(X) \setminus \{0\}$ і $l_{w_1} + l_{w_2} \leq n$. Оскільки $w_1 \dashv w_2 \in P_n^0(X) \setminus \{0\}$, то

$$(w_1 \dashv w_2)\delta = (w_1 \dashv w_2)\mu = (w_1 \dashv w_2)\mu = w_1\mu \dashv' w_2\mu = w_1\delta \dashv' w_2\delta .$$

Аналогічно,

$$(w_1 \vdash w_2)\delta = w_1\delta \vdash' w_2\delta, \ (w_1 \perp w_2)\delta = w_1\delta \perp' w_2\delta .$$

Відображення μ ставить у відповідність довільному елементу w добуток деяких l_w елементів з T. Отже, в інших випадках рівності

$$(w_1 \dashv w_2)\delta = (w_1 \vdash w_2)\delta = (w_1 \perp w_2)\delta =$$
$$= 0 = w_1\delta \dashv' w_2\delta = w_1\delta \vdash' w_2\delta = w_1\delta \perp' w_2\delta$$

виконуються. Таким чином, δ – гомоморфізм.

Теорему доведено.

2.2.4. У пунктах 2.2.4 – 2.2.6 введено поняття 0-трисполуки підтріоїдів і в термінах 0-трисполук підтріоїдів описано структуру вільних n-

нільпотентних тріоїдів. У щойно вказаних пунктах будемо використовувати позначення пп. 1.3.5 – 1.3.8 та пп. 2.1.2 – 2.1.5.

Для тріоїдів з нулем існує природний аналог поняття трисполуки підтріоїдів (див. [23] або п. 2.1.6).

Тріоїд S з нулем 0 (див. п. 2.2.1) називатимемо 0-трисполукою підтріоїдів S_β, $\beta \in B$, де B – ідемпотентний тріоїд (п. 2.1.2), якщо $S = \bigcup_{\beta \in B} S_\beta$, $S_\beta \cap S_\gamma = \{0\}$ для $\beta \neq \gamma$ і $S_\beta \dashv S_\gamma \subseteq S_{\beta \dashv \gamma}$, $S_\beta \vdash S_\gamma \subseteq S_{\beta \vdash \gamma}$, $S_\beta \perp S_\gamma \subseteq S_{\beta \perp \gamma}$ для будь-яких $\beta, \gamma \in B$. Якщо B – напівгрупа ідемпотентів (сполука), то говоритимемо, що S – 0-сполука підтріоїдів $S_\beta, \beta \in B$.

Зауважимо, що поняття 0-трисполуки підтріоїдів узагальнює поняття 0-дісполуки піддімоноїдів [83] і поняття 0-сполуки напівгруп [89].

Нехай $\omega \in F[Y]$ і $w \in P_n^0(X) \setminus \{0\}$ (див. п. 2.2.3). Як і в п. 2.1.6, позначатимемо першу (відповідно, останню) літеру слова ω через $\omega^{(0)}$ (відповідно, $\omega^{(1)}$). Припустимо, що u – початкове (відповідно, кінцеве) підслово слова w мінімальної довжини таке, що $u^{(1)} \in \overline{X}$ (відповідно, $u^{(0)} \in \overline{X}$). У цьому випадку $\overline{u}^{(1)}$ (відповідно, $\overline{u}^{(0)}$) позначатимемо через $w^{[0]}$ (відповідно, $w^{[1]}$).

Нехай

$$Q_{(i,j)} = \{w \in P_n^0(X) \setminus \{0\} \mid (\overset{\circ}{w}^{(0)}, \overset{\circ}{w}^{(1)}) = (i, j)\} \cup \{0\},$$

$$Q_{(i)} = \{w \in P_n^0(X) \setminus \{0\} \mid \overset{\circ}{w}^{(0)} = i\} \cup \{0\},$$

$$Q_{[i]} = \{w \in P_n^0(X) \setminus \{0\} \mid \overset{\circ}{w}^{(1)} = i\} \cup \{0\}$$

для $i, j \in X$, $n > 1$ і $|X| > 1$.

Наступна структурна теорема дає декомпозиції $P_n^0(X)$ в 0-сполуки підтріоїдів.

Теорема. Вільний n-нільпотентний тріоїд $P_n^0(X)$ є 0-сполукою підтріоїдів

(i) $Q_{(i,j)}$, $(i,j)\in X_{rb}$, якщо $n>1$ і $|X|>1$;

(ii) $Q_{(i)}$, $i\in X_{lz}$, якщо $n>1$ і $|X|>1$;

(iii) $Q_{[i]}$, $i\in X_{rz}$, якщо $n>1$ і $|X|>1$.

Доведення. Доведемо (i). Очевидно, що у випадку $n>1$ і $|X|>1$, $Q_{(i,j)}\setminus\{0\}\neq\varnothing$ для всіх $(i,j)\in X_{rb}$. Крім того, $Q_{(i,j)}$, $(i,j)\in X_{rb}$, – підтріоїд тріоїда $P_n^0(X)$. Очевидно,

$$P_n^0(X)=\bigcup\nolimits_{(i,j)\in X_{rb}}Q_{(i,j)} \text{ і } Q_{(i,j)}\cap Q_{(i',j')}=\{0\}$$

для $(i,j)\neq(i',j')$. Безпосередньо перевіряється, що

$$Q_{(i,j)} \text{”}\, Q_{(i',j')}\subseteq Q_{(i,j')},\ \ Q_{(i,j)}\text{ђ}\, Q_{(i',j')}\subseteq Q_{(i,j')},\ \ Q_{(i,j)}\perp Q_{(i',j')}\subseteq Q_{(i,j')}$$

для будь-яких $(i,j),(i',j')\in X_{rb}$. Отже, $P_n^0(X)$ є о-сполукою підтріоїдів $Q_{(i,j)}$, $(i,j)\in X_{rb}$.

Доведення інших випадків аналогічні.

Теорему доведено.

2.2.5. Покладемо

$$Q_{(i,j,k,s)}=\{w\in P_n^0(X)\setminus\{0\}\,|\,(\overset{\circ}{w}^{(0)},w^{[0]},w^{[1]},\overset{\circ}{w}^{(1)})=(i,j,k,s)\}\cup\{0\}$$

для $i,j,k,s\in X$, $n>3$ і $|X|>1$;

$$Q_{(i,j,k)}=\{w\in P_n^0(X)\setminus\{0\}\,|\,(\overset{\circ}{w}^{(0)},w^{[0]},w^{[1]})=(i,j,k)\}\cup\{0\},$$

$$Q_{[i,j,k]}=\{w\in P_n^0(X)\setminus\{0\}\,|\,(w^{[0]},w^{[1]},\overset{\circ}{w}^{(1)})=(i,j,k)\}\cup\{0\}$$

для $i,j,k\in X$, $n>2$ і $|X|>1$;

$$Q_{[i,j]}=\{w\in P_n^0(X)\setminus\{0\}\,|\,(w^{[0]},w^{[1]})=(i,j)\}\cup\{0\}$$

для $i,j\in X$, $n>1$ і $|X|>1$.

Наступні дві структурні теореми дають декомпозиції тріоїда $P_n^0(X)$ в о-трисполуки підтріоїдів.

Теорема. Вільний n-нільпотентний тріоїд $P_n^0(X)$ є о-трисполукою підтріоїдів

(i) $Q_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s)\in FRT(X)$, якщо $n>3$ і $|X|>1$;

(ii) $Q_{(i,j,k)}$, $(i,j,k)\in X_{lz,rd}$, якщо $n>2$ і $|X|>1$;

(iii) $Q_{[i,j,k]}$, $(i,j,k)\in X_{rd,rz}$, якщо $n>2$ і $|X|>1$;

(iv) $Q_{[i,j]}$, $(i,j)\in X_{lz,rz}^{rb}$, якщо $n>1$ і $|X|>1$.

Доведення. Доведемо (i). Легко побачити, що у випадку $n>3$ і $|X|>1$, $Q_{(i,j,k,s)}\setminus\{0\}\neq\varnothing$ для всіх $(i,j,k,s)\in FRT(X)$. Крім того, $Q_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s)\in FRT(X)$, є підтріоїдом тріоїда $P_n^0(X)$. Очевидно,

$$P_n^0(X)=\bigcup_{(i,j,k,s)\in FRT(X)}Q_{(i,j,k,s)} \text{ і } Q_{(i,j,k,s)}\cap Q_{(i',j',k',s')}=\{0\}$$

для $(i,j,k,s)\neq(i',j',k',s')$. Можна показати, що

$$Q_{(i,j,k,s)} \text{”}\, Q_{(i',j',k',s')}\subseteq Q_{(i,j,k,s')},\quad Q_{(i,j,k,s)} \text{ђ}\, Q_{(i',j',k',s')}\subseteq Q_{(i,j',k',s')},$$

$$Q_{(i,j,k,s)}\perp Q_{(i',j',k',s')}\subseteq Q_{(i,j,k',s')}$$

для будь-яких $(i,j,k,s),(i',j',k',s')\in FRT(X)$. Таким чином, $P_n^0(X)$ є 0-трисполукою підтріоїдів $Q_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s)\in FRT(X)$.

Доведення інших випадків аналогічні.

Теорему доведено.

2.2.6. Нехай

$$W_{(i,j,k)}=\{w\in P_n^0(X)\setminus\{0\}\mid(\overset{\circ}{w}^{(0)},w^{[0]},\overset{\circ}{w}^{(1)})=(i,j,k)\}\cup\{0\},$$

$$W_{[i,j,k]}=\{w\in P_n^0(X)\setminus\{0\}\mid(\overset{\circ}{w}^{(0)},w^{[1]},\overset{\circ}{w}^{(1)})=(i,j,k)\}\cup\{0\}$$

для $i,j,k\in X$, $n>2$ і $|X|>1$;

$$W_{(i,j)}=\{w\in P_n^0(X)\setminus\{0\}\mid(\overset{\circ}{w}^{(0)},w^{[0]})=(i,j)\}\cup\{0\},$$

$$W_{[i,j]}=\{w\in P_n^0(X)\setminus\{0\}\mid(\overset{\circ}{w}^{(0)},w^{[1]})=(i,j)\}\cup\{0\},$$

$$W_{(i,j]}=\{w\in P_n^0(X)\setminus\{0\}\mid(w^{[0]},\overset{\circ}{w}^{(1)})=(i,j)\}\cup\{0\},$$

$$W_{[i,j)}=\{w\in P_n^0(X)\setminus\{0\}\mid(w^{[1]},\overset{\circ}{w}^{(1)})=(i,j)\}\cup\{0\},$$

$$W_{(i)}=\{w\in P_n^0(X)\setminus\{0\}\mid w^{[0]}=i\}\cup\{0\},$$

$$W_{[i]} = \{w \in P_n^0(X) \setminus \{0\} \mid w^{[1]} = i\} \cup \{0\}$$

для $i, j \in X$, $n > 1$ і $|X| > 1$.

Теорема. Вільний n-нільпотентний тріоїд $P_n^0(X)$ є o-трисполукою підтріоїдів

(i) $W_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in (FRct(X))^{\text{”}}$, якщо $n > 2$ і $|X| > 1$;

(ii) $W_{[i,j,k]}$, $(i,j,k) \in (FRct(X))^{\text{ђ}}$, якщо $n > 2$ і $|X| > 1$;

(iii) $W_{(i,j)}$, $(i,j) \in (X_{lz,rb})^{\text{”}}$, якщо $n > 1$ і $|X| > 1$;

(iv) $W_{[i,j]}$, $(i,j) \in (X_{lz,rb})^{\text{ђ}}$, якщо $n > 1$ і $|X| > 1$;

(v) $W_{(i,j]}$, $(i,j) \in (X_{rb,rz})^{\text{”}}$, якщо $n > 1$ і $|X| > 1$;

(vi) $W_{[i,j)}$, $(i,j) \in (X_{rb,rz})^{\text{ђ}}$, якщо $n > 1$ і $|X| > 1$;

(vii) $W_{(i)}$, $i \in (X_{lz,rz})^{\text{”}}$, якщо $n > 1$ і $|X| > 1$;

(viii) $W_{[i]}$, $i \in (X_{lz,rz})^{\text{ђ}}$, якщо $n > 1$ і $|X| > 1$.

Доведення. Доведемо (i). Неважко побачити, що у випадку $n > 2$ і $|X| > 1$, $W_{(i,j,k)} \setminus \{0\} \neq \varnothing$ для всіх $(i,j,k) \in (FRct(X))^{\text{”}}$. Крім цього, $W_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in (FRct(X))^{\text{”}}$, є підтріоїдом тріоїда $P_n^0(X)$. Зрозуміло, що

$$P_n^0(X) = \bigcup_{(i,j,k) \in (FRct(X))^{\text{”}}} W_{(i,j,k)} \text{ і } W_{(i,j,k)} \cap W_{(i',j',k')} = \{0\}$$

для $(i,j,k) \neq (i',j',k')$. Можна перевірити, що

$$W_{(i,j,k)} \text{ ” } W_{(i'j',k')} \subseteq W_{(i,j,k')}, \quad W_{(i,j,k)} \text{ ђ } W_{(i',j',k')} \subseteq W_{(i,j',k')},$$

$$W_{(i,j,k)} \perp W_{(i',j',k')} \subseteq W_{(i,j,k')}$$

для будь-яких $(i,j,k),(i',j',k') \in (FRct(X))^{\text{”}}$. Тому тріоїд $P_n^0(X)$ є o-трисполукою підтріоїдів $W_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in (FRct(X))^{\text{”}}$.

Доведення інших випадків аналогічні.

Теорему доведено.

2.2.7. У цьому пункті представлена найменша n-нільпотентна конгруенція на вільному тріоїді.

Якщо $f : T_1 \to T_2$ – гомоморфізм тріоїдів, то, як і раніше, відповідну конгруенцію на T_1 позначатимемо через Δ_f. Якщо α – конгруенція на тріоїді $(T, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ така, що $(T, \text{”}, \text{ђ}, \perp)/\alpha$ – n-нільпотентний тріоїд (див. п. 2.2.1), то говоритимемо, що α є n-нільпотентною конгруенцією.

Нехай $Frt(X)$ – вільний тріоїд (див. п. 2.1.1). Зафіксуємо $n \in \mathrm{N}$ і визначимо відношення ν_n на $Frt(X)$, поклавши

$w_1 \nu_n w_2$ тоді і тільки тоді, коли $w_1 = w_2$ або $l_{w_1} > n$, $l_{w_2} > n$.

Теорема. Відношення ν_n є найменшою n-нільпотентною конгруенцією на вільному тріоїді $Frt(X)$.

Доведення. Визначимо відображення $\xi : Frt(X) \to P_n^0(X)$ за правилом:

$$w\xi = \begin{cases} w, & l_w \le n, \\ 0, & l_w > n, \end{cases} \quad w \in Frt(X).$$

Візьмемо $w_1, w_2 \in Frt(X)$ і покладемо $l_{w_1 w_2} \le n$. З $l_{w_1 w_2} \le n$ випливає, що l_{w_1}<n і l_{w_2}<n. Тоді

$$(w_1 \text{ ” } w_2)\xi = (w_1 \overline{w_2})\xi = w_1 \overline{w_2} = w_1 \text{ p } w_2 = w_1\xi \text{ p } w_2\xi,$$

$$(w_1 \text{ ђ } w_2)\xi = (\mathring{w_1} w_2)\xi = \mathring{w_1} w_2 = w_1 \text{ f } w_2 = w_1\xi \text{ f } w_2\xi,$$

$$(w_1 \perp w_2)\xi = (w_1 w_2)\xi = w_1 w_2 = w_1 \uparrow w_2 = w_1\xi \uparrow w_2\xi.$$

Якщо $l_{w_1 w_2} > n$, то

$$(w_1 \text{ ” } w_2)\xi = (w_1 \overline{w_2})\xi = 0 = w_1\xi \text{ p } w_2\xi,$$

$$(w_1 \text{ ђ } w_2)\xi = (\mathring{w_1} w_2)\xi = 0 = w_1\xi \text{ f } w_2\xi,$$

$$(w_1 \perp w_2)\xi = (w_1 w_2)\xi = 0 = w_1\xi \uparrow w_2\xi.$$

Отже, ξ – сюр’єктивний гомоморфізм. Згідно з теоремою п. 2.2.3 $P_n^0(X)$ – вільний n-нільпотентний тріоїд. Тоді Δ_ξ – найменша n-нільпотентна конгруенція на $Frt(X)$. З визначення ξ випливає, що $\Delta_\xi = \nu_n$.

Теорему доведено.

2.3. Вільні прямокутні трисполуки

Перший крок у дослідженні ідемпотентних напівгруп був зроблений Девідом Макліном [90], який використовував прямокутні сполуки для опису структури довільної сполуки. Прямокутні дімоноїди (прямокутні дісполуки) вперше з'явилися в дослідженнях будови дісполук піддімоноїдів (див. [83]). У термінах прямокутних дісполук в [91] було наведено структурну теорему про ідемпотентні дімоноїди. Вільну прямокутну дісполуку було побудовано в [35].

У цьому підрозділі побудовано вільну прямокутну трисполуку, описано її структуру і групу автоморфізмів. Також охарактеризовано деякі найменші конгруенції на вільних прямокутних трисполуках та найменшу трипрямокутну конгруенцію на вільному тріоїді. Вказані результати опубліковано в [51, 57, 58].

2.3.1. У цьому пункті побудовано вільну прямокутну трисполуку довільного рангу.

Нагадаємо, що тріоїд $(T, ”, \text{ђ}, \perp)$ називається прямокутним тріоїдом або прямокутною трисполукою (див. п. 2.1.2), якщо напівгрупи $(T, ”)$, $(T, \text{ђ})$ і $(T, \perp)$ є прямокутними сполуками.

В умовах та позначеннях п. 2.1.5 має місце теорема.

Теорема. $FRT(X)$ – вільна прямокутна трисполука.

Доведення. Згідно з лемою п. 2.1.5 $FRT(X)$ – прямокутна трисполука. Нехай $(T, ”', \text{ђ}', \perp')$ – довільний прямокутний тріоїд і $\sigma : X \to T$ – довільне відображення. Визначимо відображення

$$\tau : FRT(X) \to (T, ”', \text{ђ}', \perp') :$$

$$(a,b,c,d) \text{ a } (a,b,c,d)\tau = (a\sigma \,\text{ђ}'\, b\sigma) \perp' (c\sigma \,”'\, d\sigma) .$$

Для того, щоб довести, що τ – гомоморфізм, будемо використовувати аксіоми тріоїда і тотожності, які використовуються у визначеннях прямокутної сполуки (див. п. 1.3.5). Отримуємо

$$((a_1,b_1,c_1,d_1) \dashv (a_2,b_2,c_2,d_2))\tau = (a_1,b_1,c_1,d_2)\tau = (a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_1\sigma \dashv' d_2\sigma) =$$

$$= (a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' ((c_1\sigma \dashv' d_1\sigma) \dashv' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) =$$

$$= ((a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_1\sigma \dashv' d_1\sigma)) \dashv' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma) =$$

$$= ((a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_1\sigma \dashv' d_1\sigma)) \dashv' (a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \dashv' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma) =$$

$$= ((a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_1\sigma \dashv' d_1\sigma)) \dashv'$$

$$\dashv' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) = (a_1,b_1,c_1,d_1)\tau \dashv' (a_2,b_2,c_2,d_2)\tau,$$

$$((a_1,b_1,c_1,d_1) \vdash (a_2,b_2,c_2,d_2))\tau = (a_1,b_2,c_2,d_2)\tau = (a_1\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma) =$$

$$= a_1\sigma \vdash' (b_2\sigma \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) = a_1\sigma \vdash' ((b_2\sigma \vdash' a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) =$$

$$= a_1\sigma \vdash' ((b_2\sigma \vdash' (a_2\sigma \vdash' b_2\sigma)) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) =$$

$$= a_1\sigma \vdash' (b_2\sigma \vdash' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma))) =$$

$$= a_1\sigma \vdash' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) =$$

$$= a_1\sigma \vdash' b_1\sigma \vdash' (c_1\sigma \dashv' d_1\sigma) \vdash' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) =$$

$$= (a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \vdash' ((c_1\sigma \dashv' d_1\sigma) \vdash' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma))) =$$

$$= ((a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_1\sigma \dashv' d_1\sigma)) \vdash' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) =$$

$$= (a_1,b_1,c_1,d_1)\tau \vdash' (a_2,b_2,c_2,d_2)\tau,$$

$$((a_1,b_1,c_1,d_1) \perp (a_2,b_2,c_2,d_2))\tau = (a_1,b_1,c_2,d_2)\tau = (a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma) =$$

$$= ((a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_1\sigma \dashv' d_1\sigma)) \perp' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) =$$

$$= (a_1,b_1,c_1,d_1)\tau \perp' (a_2,b_2,c_2,d_2)\tau.$$

Отже, τ – гомоморфізм і тріоїд $FRT(X)$ є вільним прямокутним.

Теорему доведено.

2.3.2. З останньої теореми отримуємо такий наслідок.

Наслідок. Вільна прямокутна трисполука $FRT(X)$, породжена скінченною множиною X, є скінченною. А саме, якщо $|X|=n$, то $|FRT(X)|=n^4$.

2.3.3. Позначимо симетричну групу на X через $\Im[X]$, а групу автоморфізмів тріоїда M через $AutM$. Неважко помітити, що множина $\{(a,a,a,a)\,|\,a\in X\}$ є породжуючою для $FRT(X)$. Звідси отримуємо наступний опис групи автоморфізмів вільної прямокутної трисполуки.

Лема. $AutFRT(X)\cong\Im[X]$.

2.3.4. У пунктах 2.3.4 – 2.3.7 описано структуру вільних прямокутних трисполук і охарактеризовано деякі найменші конгруенції на вільних прямокутних трисполуках. У цих пунктах ми використовуємо позначення пп. 2.1.2 – 2.1.5 та пп. 1.3.5 – 1.3.8.

Як і раніше, якщо $f:T_1\to T_2$ – гомоморфізм тріоїдів, то Δ_f – відповідна конгруенція на T_1.

Для всіх $i,j\in X$ покладемо

$$\Lambda_{(i)}=\{(a,b,c,d)\in FRT(X)\,|\,a=i\},$$

$$\Lambda_{[i]}=\{(a,b,c,d)\in FRT(X)\,|\,d=i\},$$

$$\Lambda_{(i,j)}=\{(a,b,c,d)\in FRT(X)\,|\,(a,d)=(i,j)\}.$$

Наступна теорема дає декомпозиції тріоїда $FRT(X)$ в сполуки підтріоїдів.

Теорема. Нехай $FRT(X)$ – вільна прямокутна трисполука. Маємо такі твердження:

(i) $FRT(X)$ – ліва сполука X_{lz} підтріоїдів $\Lambda_{(i)}, i\in X_{lz}$, таких, що $\Lambda_{(i)}\cong X_{rd,rz}$ для кожного $i\in X_{lz}$;

(ii) $FRT(X)$ – права сполука X_{rz} підтріоїдів $\Lambda_{[i]}, i \in X_{rz}$, таких, що $\Lambda_{[i]} \cong X_{lz,rd}$ для кожного $i \in X_{rz}$;

(iii) $FRT(X)$ – прямокутна сполука X_{rb} підтріоїдів $\Lambda_{(i,j)}, (i,j) \in X_{rb}$, таких, що $\Lambda_{(i,j)} \cong X_{lz,rz}^{rb}$ для кожного $(i,j) \in X_{rb}$.

Доведення. (i) За теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi_{lz} : FRT(X) \to X_{lz} : (a,b,c,d) \mapsto a$$

є гомоморфізмом. Тоді $\Lambda_{(i)}, i \in X_{lz}$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi_{lz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Безпосередньо перевіряється, що для кожного $i \in X_{lz}$ відображення

$$\Lambda_{(i)} \to X_{rd,rz} : (i,b,c,d) \mapsto (b,c,d)$$

є ізоморфізмом.

(ii) Згідно з теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi_{rz} : FRT(X) \to X_{rz} : (a,b,c,d) \to d$$

є гомоморфізмом. Тоді $\Lambda_{[i]}$, $i \in X_{rz}$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi_{rz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Очевидно, що для кожного $i \in X_{rz}$ відображення

$$\Lambda_{[i]} \to X_{lz,rd} : (a,b,c,i) \mapsto (a,b,c)$$

є ізоморфізмом.

(iii) За теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi_{rb} : FRT(X) \to X_{rb} : (a,b,c,d) \to (a,d)$$

є гомоморфізмом. Тоді $\Lambda_{(i,j)}, (i,j) \in X_{rb}$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi_{rb}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Можна показати, що для кожного $(i,j) \in X_{rb}$ відображення

$$\Lambda_{(i,j)} \to X_{lz,rz}^{rb} : (i,b,c,j) \mapsto (b,c)$$

є ізоморфізмом.

Теорему доведено.

2.3.5. Якщо ρ – конгруенція на тріоїді $(T,”,ђ,\perp)$ така, що операції $(T,”,ђ,\perp)/\rho$ збігаються і він є напівгрупою лівих нулів (відповідно, напівгрупою правих нулів, прямокутною сполукою, напіврешіткою), то говоримо, що ρ – ліва ідемпотентна конгруенція (відповідно, права ідемпотентна конгруенція, прямокутна конгруенція, напівструктурна конгруенція) (див. також п. 2.1.10).

З теореми п. 2.3.4 отримуємо наслідок.

Наслідок. Нехай $FRT(X)$ – вільна прямокутна трисполука. Тоді

(i) $\Delta_{\pi_{lz}}$ – найменша ліва ідемпотентна конгруенція на тріоїді $FRT(X)$;

(ii) $\Delta_{\pi_{rz}}$ – найменша права ідемпотентна конгруенція на тріоїді $FRT(X)$;

(iii) $\Delta_{\pi_{rb}}$ – найменша прямокутна конгруенція на тріоїді $FRT(X)$.

Доведення. (i) Добре відомо, що кожна напівгрупа лівих нулів є вільною напівгрупою лівих нулів. Згідно з теоремою п. 2.3.4 (i) отримуємо (i).

Доведення (ii) і (iii) аналогічні.

Наслідок доведено.

З теореми 5 [16] випливає, що кожна прямокутна трисполука є нерозкладною в напіврешітку, тобто найменша напівструктурна конгруенція на прямокутній трисполуці збігається з універсальним відношенням на цьому тріоїді.

2.3.6. Для всіх $i, j, k \in X$ покладемо

$$\Lambda_{(i,j,k)} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \,|\, (a,b,c) = (i,j,k)\},$$

$$\Lambda_{[i,j,k]} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \,|\, (b,c,d) = (i,j,k)\},$$

$$\Lambda_{[i,j]} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \,|\, (b,c) = (i,j)\}.$$

Наступна теорема дає декомпозиції тріоїда $FRT(X)$ в трисполуки піднапівгруп.

Теорема. Нехай $FRT(X)$ – вільна прямокутна трисполука. Тоді

(i) $FRT(X)$ – трисполука $X_{lz,rd}$ піднапівгруп $\Lambda_{(i,j,k)}, (i,j,k) \in X_{lz,rd}$, таких, що $\Lambda_{(i,j,k)} \cong X_{rz}$ для кожного $(i,j,k) \in X_{lz,rd}$;

(ii) $FRT(X)$ – трисполука $X_{rd,rz}$ піднапівгруп $\Lambda_{[i,j,k]}, (i,j,k) \in X_{rd,rz}$, таких, що $\Lambda_{[i,j,k]} \cong X_{lz}$ для кожного $(i,j,k) \in X_{rd,rz}$;

(iii) $FRT(X)$ – трисполука $X_{lz,rz}^{rb}$ піднапівгруп $\Lambda_{[i,j]}, (i,j) \in X_{lz,rz}^{rb}$, таких, що $\Lambda_{[i,j]} \cong X_{rb}$ для кожного $(i,j) \in X_{lz,rz}^{rb}$.

Доведення. (i) За теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi_{lz,rd} : FRT(X) \to X_{lz,rd} : (a,b,c,d) \text{ a } (a,b,c)$$

є гомоморфізмом. Тоді $\Lambda_{(i,j,k)}, (i,j,k) \in X_{lz,rd}$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi_{lz,rd}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Якщо $(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2) \in \Lambda_{(i,j,k)}$, то $(a_1,b_1,c_1) = (a_2,b_2,c_2) = (i,j,k)$ і

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \text{”} (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_1,d_2) = (i,j,k,d_2),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \text{ђ} (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_2,c_2,d_2) = (i,j,k,d_2),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \perp (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_2,d_2) = (i,j,k,d_2).$$

Отже, операції тріоїда $\Lambda_{(i,j,k)}$ збігаються, і таким чином, він є напівгрупою. Легко перевірити, що для кожного $(i,j,k) \in X_{lz,rd}$ відображення $\Lambda_{(i,j,k)} \to X_{rz} : (i,j,k,d) \text{ a } d$ є ізоморфізмом.

(ii) Згідно з теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi_{rd,rz} : FRT(X) \to X_{rd,rz} : (a,b,c,d) \text{ a } (b,c,d)$$

є гомоморфізмом. Тоді $\Lambda_{[i,j,k]}, (i,j,k) \in X_{rd,rz}$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi_{rd,rz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Якщо $(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2) \in \Lambda_{[i,j,k]}$, то $(b_1,c_1,d_1) = (b_2,c_2,d_2) = (i,j,k)$ і

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \dashv (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_1,d_2) = (a_1,i,j,k),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \vdash (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_2,c_2,d_2) = (a_1,i,j,k),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \perp (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_2,d_2) = (a_1,i,j,k).$$

Отже, операції тріоїда $\Lambda_{[i,j,k]}$ збігаються, і таким чином, він є напівгрупою. Можна перевірити, що для кожного $(i,j,k) \in X_{rd,rz}$ відображення $\Lambda_{[i,j,k]} \to X_{lz} : (a,i,j,k) \mapsto a$ є ізоморфізмом.

(iii) За теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi^{rb}_{lz,rz} : FRT(X) \to X^{rb}_{lz,rz} : (a,b,c,d) \mapsto (b,c)$$

є гомоморфізмом. Тоді $\Lambda_{[i,j]}, (i,j) \in X^{rb}_{lz,rz}$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi^{rb}_{lz,rz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Якщо $(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2) \in \Lambda_{[i,j]}$, то $(b_1,c_1) = (b_2,c_2) = (i,j)$ і

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \dashv (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_1,d_2) = (a_1,i,j,d_2),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \vdash (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_2,c_2,d_2) = (a_1,i,j,d_2),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \perp (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_2,d_2) = (a_1,i,j,d_2).$$

Отже, операції тріоїда $\Lambda_{[i,j]}$ збігаються, і таким чином, він є напівгрупою. Безпосередня перевірка показує, що для кожного $(i,j) \in X^{rb}_{lz,rz}$ відображення $\Lambda_{[i,j]} \to X_{rb} : (a,i,j,d) \mapsto (a,d)$ є ізоморфізмом.

Теорему доведено.

2.3.7. Для всіх $i,j,k \in X$ покладемо

$$V_{(i)} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid b = i\},$$

$$V_{[i]} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid c = i\},$$

$$V_{(i,j,k)} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid (a,b,d) = (i,j,k)\},$$

$$V_{[i,j,k]} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid (a,c,d) = (i,j,k)\},$$

$$V_{(i,j)} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid (a,b) = (i,j)\},$$

$$V_{[i,j]} = \{(a,b,c,d) \in FRT(X) \mid (a,c) = (i,j)\},$$

$$V_{(i,j]}=\{(a,b,c,d)\in FRT(X)\,|\,(b,d)=(i,j)\},$$

$$V_{[i,j)}=\{(a,b,c,d)\in FRT(X)\,|\,(c,d)=(i,j)\}.$$

Наступна теорема дає декомпозиції тріоїда $FRT(X)$ в трисполуки підтріоїдів.

Теорема. Нехай $FRT(X)$ – вільна прямокутна трисполука. Справедливі наступні твердження:

(i) $FRT(X)$ є трисполукою $(X_{lz,rz})^{\text{”}}$ підтріоїдів $V_{(i)}, i\in(X_{lz,rz})^{\text{”}}$, таких, що $V_{(i)}\cong(FRct(X))^{\text{ђ}}$ для кожного $i\in X_{lz,rz}$;

(ii) $FRT(X)$ є трисполукою $(X_{lz,rz})^{\text{ђ}}$ підтріоїдів $V_{[i]}, i\in(X_{lz,rz})^{\text{ђ}}$, таких, що $V_{[i]}\cong(FRct(X))^{\text{”}}$ для кожного $i\in X_{lz,rz}$;

(iii) $FRT(X)$ є трисполукою $(FRct(X))^{\text{”}}$ підтріоїдів $V_{(i,j,k)},(i,j,k)\in(FRct(X))^{\text{”}}$, таких, що $V_{(i,j,k)}\cong(X_{lz,rz})^{\text{ђ}}$ для кожного $(i,j,k)\in FRct(X)$;

(iv) $FRT(X)$ є трисполукою $(FRct(X))^{\text{ђ}}$ підтріоїдів $V_{[i,j,k]},(i,j,k)\in(FRct(X))^{\text{ђ}}$, таких, що $V_{[i,j,k]}\cong(X_{lz,rz})^{\text{”}}$ для кожного $(i,j,k)\in FRct(X)$;

(v) $FRT(X)$ є трисполукою $(X_{lz,rb})^{\text{”}}$ підтріоїдів $V_{(i,j)},(i,j)\in(X_{lz,rb})^{\text{”}}$, таких, що $V_{(i,j)}\cong(X_{rb,rz})^{\text{ђ}}$ для кожного $(i,j)\in X_{lz,rb}$;

(vi) $FRT(X)$ є трисполукою $(X_{lz,rb})^{\text{ђ}}$ підтріоїдів $V_{[i,j]},(i,j)\in(X_{lz,rb})^{\text{ђ}}$, таких, що $V_{[i,j]}\cong(X_{rb,rz})^{\text{”}}$ для кожного $(i,j)\in X_{lz,rb}$;

(vii) $FRT(X)$ є трисполукою $(X_{rb,rz})^{\text{”}}$ підтріоїдів $V_{(i,j]},(i,j)\in(X_{rb,rz})^{\text{”}}$, таких, що $V_{(i,j]}\cong(X_{lz,rb})^{\text{ђ}}$ для кожного $(i,j)\in X_{rb,rz}$;

(viii) $FRT(X)$ є трисполукою $(X_{rb,rz})^{\text{ђ}}$ підтріоїдів $V_{[i,j)},(i,j)\in(X_{rb,rz})^{\text{ђ}}$, таких, що $V_{[i,j)}\cong(X_{lz,rb})^{\text{”}}$ для кожного $(i,j)\in X_{rb,rz}$.

Доведення. (i) За теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi^{\text{”}}_{lz,rz} : FRT(X) \to (X_{lz,rz})^{\text{”}} : (a,b,c,d)\ \text{a}\ \ b$$

є гомоморфізмом. Тоді $V_{(i)},\ i \in X_{lz,rz}$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi^{\text{”}}_{lz,rz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Якщо $(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2) \in V_{(i)}$, то $b_1 = b_2 = i$ і

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \text{”} (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_1,d_2) = (a_1,i,c_1,d_2)\,,$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \text{ђ} (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_2,c_2,d_2) = (a_1,i,c_2,d_2)\,,$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \perp (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_2,d_2) = (a_1,i,c_2,d_2)\,.$$

Отже, операції ђ і $\perp$ тріоїда $V_{(i)}$ збігаються. Легко перевірити, що для кожного $i \in X_{lz,rz}$ відображення

$$V_{(i)} \to (FRct(X))^{\text{ђ}} : (a,i,c,d)\ \text{a}\ \ (a,c,d)$$

є ізоморфізмом.

(ii) Згідно з теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi^{\text{ђ}}_{lz,rz} : FRT(X) \to (X_{lz,rz})^{\text{ђ}} : (a,b,c,d)\ \text{a}\ \ c$$

є гомоморфізмом. Тоді $V_{[i]},\ i \in X_{lz,rz}$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi^{\text{ђ}}_{lz,rz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Якщо $(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2) \in V_{[i]}$, то $c_1 = c_2 = i$ і

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \text{”} (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_1,d_2) = (a_1,b_1,i,d_2)\,,$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \text{ђ} (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_2,i,d_2)\,,$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \perp (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_2,d_2) = (a_1,b_1,i,d_2)\,.$$

Отже, операції ” і $\perp$ тріоїда $V_{[i]}$ збігаються. Легко перевірити, що для кожного $i \in X_{lz,rz}$ відображення

$$V_{[i]} \to (FRct(X))^{\text{”}} : (a,b,i,d)\ \text{a}\ \ (a,b,d)$$

є ізоморфізмом.

(iii) За теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi^{\dashv}_{FRct} : FRT(X) \to (FRct(X))^{\dashv} : (a,b,c,d) \mapsto (a,b,d)$$

є гомоморфізмом. Тоді $V_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in FRct(X)$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi^{\dashv}_{FRct}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Якщо $(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2) \in V_{(i,j,k)}$, то $(a_1,b_1,d_1) = (a_2,b_2,d_2) = (i,j,k)$ і

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \dashv (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_1,d_2) = (i,j,c_1,k),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \vdash (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_2,c_2,d_2) = (i,j,c_2,k),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \perp (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_2,d_2) = (i,j,c_2,k).$$

Отже, операції $\vdash$ і $\perp$ тріоїда $V_{(i,j,k)}$ збігаються. Можна перевірити, що для кожного $(i,j,k) \in FRct(X)$ відображення

$$V_{(i,j,k)} \to (X_{lz,rz})^{\vdash} : (i,j,c,k) \mapsto c$$

є ізоморфізмом.

(iv) Згідно з теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi^{\vdash}_{FRct} : FRT(X) \to (FRct(X))^{\vdash} : (a,b,c,d) \mapsto (a,c,d)$$

є гомоморфізмом. Тоді $V_{[i,j,k]}$, $(i,j,k) \in FRct(X)$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi^{\vdash}_{FRct}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Якщо $(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2) \in V_{[i,j,k]}$, то $(a_1,c_1,d_1) = (a_2,c_2,d_2) = (i,j,k)$ і

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \dashv (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_1,d_2) = (i,b_1,j,k),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \vdash (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_2,c_2,d_2) = (i,b_2,j,k),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1) \perp (a_2,b_2,c_2,d_2) = (a_1,b_1,c_2,d_2) = (i,b_1,j,k).$$

Отже, операції $\dashv$ і $\perp$ тріоїда $V_{[i,j,k]}$ збігаються. Можна перевірити, що для кожного $(i,j,k) \in FRct(X)$ відображення

$$V_{[i,j,k]} \to (X_{lz,rz})^{\dashv} : (i,b,j,k) \mapsto b$$

є ізоморфізмом.

(v) За теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi^{\dashv}_{lz,rb} : FRT(X) \to (X_{lz,rb})^{\dashv} : (a,b,c,d) \mapsto (a,b)$$

є гомоморфізмом. Тоді $V_{(i,j)},\ (i,j) \in X_{lz,rb}$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi^{\text{”}}_{lz,rb}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Якщо $(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2) \in V_{(i,j)}$, то $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)=(i,j)$ і

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\text{”}\,(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_1,c_1,d_2)=(i,j,c_1,d_2),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\,\text{ђ}\,(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_2,c_2,d_2)=(i,j,c_2,d_2)\,,$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\perp(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_1,c_2,d_2)=(i,j,c_2,d_2)\,.$$

Отже, операції ђ і $\perp$ тріоїда $V_{(i,j)}$ збігаються. Безпосередньо перевіряється, що для кожного $(i,j)\in X_{lz,rb}$ відображення

$$V_{(i,j)} \to (X_{rb,rz})^{\text{ђ}} : (i,j,c,d) \text{ а } (c,d)$$

є ізоморфізмом.

(vi) Згідно з теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi^{\text{ђ}}_{lz,rb} : FRT\,(X) \to (X_{lz,rb})^{\text{ђ}} : (a,b,c,d) \text{ а } (a,c)$$

є гомоморфізмом. Тоді $V_{[i,j]},\ (i,j) \in X_{lz,rb}$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi^{\text{ђ}}_{lz,rb}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Якщо $(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2) \in V_{[i,j]}$, то $(a_1,c_1)=(a_2,c_2)=(i,j)$ і

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\text{”}\,(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_1,c_1,d_2)=(i,b_1,j,d_2)\,,$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\,\text{ђ}\,(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_2,c_2,d_2)=(i,b_2,j,d_2)\,,$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\perp(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_1,c_2,d_2)=(i,b_1,j,d_2)\,.$$

Отже, операції ” і $\perp$ тріоїда $V_{[i,j]}$ збігаються. Можна показати, що для кожного $(i,j)\in X_{lz,rb}$ відображення

$$V_{[i,j]} \to (X_{rb,rz})^{\text{”}} : (i,b,j,d) \text{ а } (b,d)$$

є ізоморфізмом.

(vii) За теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi^{\text{”}}_{rb,rz} : FRT\,(X) \to (X_{rb,rz})^{\text{”}} : (a,b,c,d) \text{ а } (b,d)$$

є гомоморфізмом. Тоді $V_{(i,j]}$, $(i,j)\in X_{rb,rz}$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi^{\dashv}_{rb,rz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Якщо $(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2)\in V_{(i,j]}$, то $(b_1,d_1)=(b_2,d_2)=(i,j)$ і

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\dashv(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_1,c_1,d_2)=(a_1,i,c_1,j),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\vdash(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_2,c_2,d_2)=(a_1,i,c_2,j),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\perp(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_1,c_2,d_2)=(a_1,i,c_2,j).$$

Отже, операції $\vdash$ і $\perp$ тріоїда $V_{(i,j]}$ збігаються. Очевидно, для кожного $(i,j)\in X_{rb,rz}$ відображення

$$V_{(i,j]}\to(X_{lz,rb})^{\vdash}:(a,i,c,j)\mapsto(a,c)$$

є ізоморфізмом.

(viii) Згідно з теоремою п. 2.3.1 відображення

$$\pi^{\vdash}_{rb,rz}:FRT(X)\to(X_{rb,rz})^{\vdash}:(a,b,c,d)\mapsto(c,d)$$

є гомоморфізмом. Тоді $V_{[i,j)}$, $(i,j)\in X_{rb,rz}$, – клас конгруенції $\Delta_{\pi^{\vdash}_{rb,rz}}$, який є підтріоїдом тріоїда $FRT(X)$. Якщо $(a_1,b_1,c_1,d_1),(a_2,b_2,c_2,d_2)\in V_{[i,j)}$, то $(c_1,d_1)=(c_2,d_2)=(i,j)$ і

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\dashv(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_1,c_1,d_2)=(a_1,b_1,i,j),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\vdash(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_2,i,j),$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)\perp(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1,b_1,c_2,d_2)=(a_1,b_1,i,j).$$

Отже, операції $\dashv$ і $\perp$ тріоїда $V_{[i,j)}$ збігаються. Очевидно, для кожного $(i,j)\in X_{rb,rz}$ відображення

$$V_{[i,j)}\to(X_{lz,rb})^{\dashv}:(a,b,i,j)\mapsto(a,b)$$

є ізоморфізмом.

2.3.8. Закінчимо підрозділ 2.3 описом найменшої трипрямокутної конгруенції на вільному тріоїді $Frt(X)$. Для цього нам знадобиться конструкція вільної прямокутної трисполуки, розглянутої в п. 2.3.1.

Якщо ρ – конгруенція на тріоїді $(T, ”, ђ, \perp)$ така, що тріоїд $(T, ”, ђ, \perp)/\rho$ є прямокутним, то будемо говорити, що ρ – трипрямокутна конгруенція.

З теореми п. 2.1.6 отримуємо такий наслідок.

Наслідок. Відношення $\Delta_{\varphi_{FRT}}$ є найменшою трипрямокутною конгруенцією на вільному тріоїді $Frt(X)$.

Доведення. Відомо, що $FRT(X)$ – вільна прямокутна трисполука (див. п. 2.3.1). За теоремою п. 2.1.6 (і) отримуємо, що $\Delta_{\varphi_{FRT}}$ є найменшою трипрямокутною конгруенцією на $Frt(X)$.

Наслідок доведено.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі наведено декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки і сполуки підтріоїдів. Охарактеризовано найменшу прямокутну конгруенцію, найменшу ліву ідемпотентну конгруенцію, найменшу праву ідемпотентну конгруенцію та найменшу трипрямокутну конгруенцію на вільному тріоїді.

Введено поняття нільпотентного тріоїду, наведено приклади нільпотентних тріоїдів індексу нільпотентності 2 і побудовано вільний n-нільпотентний тріоїд. Також введено поняття 0-трисполуки підтріоїдів і в термінах 0-трисполук підтріоїдів описано структуру вільних n-нільпотентних тріоїдів. Охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді.

Введено поняття прямокутної трисполуки і наведено приклади прямокутних трисполук. Побудовано вільну прямокутну трисполуку, описано її структуру і групу автоморфізмів. Представлено деякі найменші конгруенції на вільних прямокутних трисполуках.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [49 – 51, 56 – 58].

РОЗДІЛ 3
ВІЛЬНІ ЛІВІ n-ДІНІЛЬПОТЕНТНІ ДІМОНОЇДИ

Одним з найважливіших інструментів у теорії алгебр Лейбніца є поняття дімоноїда [24]. Це поняття має застосування в теорії діалгебр та активно вивчається останнім часом. Теорія многовидів дімоноїдів набула розвитку в роботах [24, 29 – 37, 43]. У цих працях було побудовано вільний дімоноїд [24, 30, 37, 43], вільний комутативний дімоноїд [29, 37, 43], вільний прямокутний дімоноїд [35, 37, 43], вільну нормальну дісполуку [34, 37, 43], вільну (lr, rr)-дісполуку [31, 43], вільний n-нільпотентний дімоноїд [33, 37, 43] та вільний n-дінільпотентний дімоноїд [32, 37, 43]. Для вказаних вільних алгебр були охарактеризовані факторизаційні та структурні властивості. Дімоноїди також вивчалися в [38 – 42, 75, 76, 83, 84, 92, 93].

Цей розділ продовжує дослідження, наведені в [32, 33] (див. також [43]). У ньому введено ліві (праві) n-дінільпотентні дімоноїди, тобто дімоноїди, які задовольняють двом додатковим тотожностям. Такі дімоноїди є аналогами нільпотентних зліва (справа) напівгруп рангу n, розглянутих у роботі Б. М. Шайна [65]. Виявляється, що клас лівих (правих) n-дінільпотентних дімоноїдів утворює підмноговид у многовиді всіх дімоноїдів. У цьому розділі для вказаних многовидів побудовано вільні об’єкти, охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді та окремо розглянуто вільні ліві (праві) n-дінільпотентні дімоноїди рангу 1. Крім того, встановлено, що група автоморфізмів вільного лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда ізоморфна симетричній групі.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [46, 55].

3.1. Зв’язки дімоноїдів з іншими алгебраїчними структурами

У цьому підрозділі розглянуто зв’язки між дімоноїдами і рестриктивними бінапівгрупами, розглянутими Б. М. Шайном [35, 43, 94, 95], між комутативними дімоноїдами і доппельалгебрами, розглянутими Б. Ріхтер [67], а також між комутативними дімоноїдами та інтерасоціативністю і сильною інтерасоціативністю напівгрупи. Введено поняття лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда.

3.1.1. Нагадаємо, що непорожня множина D з двома бінарними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють наступні аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \qquad (D1)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \qquad (D2)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \qquad (D3)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \qquad (D4)$$

$$(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \qquad (D5)$$

для всіх $x, y, z \in D$, називається дімоноїдом. Якщо операції дімоноїда збігаються, то він стає напівгрупою. Таким чином, дімоноїди узагальнюють напівгрупи. Дігрупи є прикладами дімоноїдів (див., наприклад, [93, 96, 97]). Інші приклади дімоноїдів можна знайти в [24, 29, 30, 32 – 37, 40, 43, 84]. У роботі [84] було доведено, що система аксіом дімоноїда є незалежною і теорема Келі для напівгруп має аналог в класі дімоноїдів.

Покажемо, що існують зв’язки між дімоноїдами і рестриктивними бінапівгрупами, розглянутими Б. М. Шайном [35, 43, 94, 95].

Нехай B – довільна непорожня множина і $\dashv$, $\vdash$ – бінарні операції на B. Упорядкована трійка $(B, \dashv, \vdash)$ називається рестриктивною бінапівгрупою, якщо виконуються аксіоми $(D1)$, $(D5)$ і

$$x \dashv x = x, \qquad (B1)$$

$$x \vdash x = x, \qquad (B2)$$

$$x \dashv y \dashv z = y \dashv x \dashv z, \qquad (B3)$$

$$x \vdash y \vdash z = x \vdash z \vdash y, \qquad (B4)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \dashv (y \vdash z) \qquad (B5)$$

для всіх $x, y, z \in B$. Рестриктивні бінапівгрупи мають застосування в теорії бінарних відношень.

Нехай $(B, \dashv)$ – напігрупа правих нулів і $(B, \vdash)$ – напівгрупа лівих нулів. Алгебра $(B, \dashv, \vdash)$ є рестриктивною бінапівгрупою, яка називається бінапівгрупою правих і лівих нулів [35].

Нехай $(A, \dashv, \vdash)$ – алгебра з двома бінарними асоціативними операціями. Визначимо нові операції $\dashv'$ і $\vdash'$ на A, поклавши

$$x \dashv' y = y \dashv x, \quad x \vdash' y = y \vdash x$$

для всіх $x, y \in A$. Алгебра $(A, \dashv', \vdash')$ називається дуальною алгеброю алгебри $(A, \dashv, \vdash)$ [35].

Нагадаємо, що дімоноїд $(D, \dashv, \vdash)$ називається дімоноїдом лівих і правих нулів (див. п. 1.3.6), якщо $(D, \dashv)$ – напівгрупа лівих нулів і $(D, \vdash)$ – напівгрупа правих нулів.

Твердження ([43], твердження 3.2.15). Нехай $(B, \dashv, \vdash)$ – бінапівгрупа правих і лівих нулів. Тоді дуальна алгебра алгебри $(B, \dashv, \vdash)$ є дімоноїдом лівих і правих нулів.

3.1.2. Дімоноїди є прикладами дуплексів [59]. Нагадаємо, що дуплекс – це непорожня множина з двома бінарними асоціативними операціями. Вільний дуплекс, породжений заданою множиною, побудовано в [59] за допомогою планарних дерев. Алгебри з бінарними асоціативними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють додаткові аксіоми $(D3)$ і $(B5)$, були розглянуті в [67] (див. також [59]) під назвою «доппельалгебри». Дуплекс, який є вільним у многовиді дуплексів з операціями $\dashv$ і $\vdash$, що задовольняють аксіому $(B5)$, побудовано в [59] за допомогою бінарних дерев.

Нагадаємо, що дімоноїд називається комутативним (див. п. 1.3.4), якщо обидві його операції комутативні.

З леми 2 роботи [75] випливає твердження, яке дає зв'язок між комутативними дімоноїдами і доппельалгебрами.

Твердження [46]. Кожен комутативний дімоноїд задовольняє аксіоми доппельалгебри.

Доведення. Доведення випливає з безпосередньої перевірки.

Твердження доведено.

3.1.3. Встановимо зв'язки між комутативними дімоноїдами і інтерасоціативністю напівгрупи.

У 1971 році Д. Зупнік [71] ввів поняття інтерасоціативності для групоїдів. Поняття інтерасоціативності для напівгруп з'явилося в [72].

Нехай $(D,\dashv)$ – довільна напівгрупа.Розглянемо напівгрупу $(D,\vdash)$, визначену на тій самій множині. $(D,\vdash)$ називається інтерасоціативністю напівгрупи $(D,\dashv)$, якщо виконуються аксіоми (D3) і (B5) (див. п. 3.1.1). Описи всіх інтерасоціативностей моногенної напівгрупи і вільної комутативної напівгрупи представлені в [62] та [61, 63], відповідно.

Наступні два твердження очевидні (див. [46]).

Твердження. Напівгрупа $(D,\vdash)$ є інтерасоціативністю напівгрупи $(D,\dashv)$ тоді і тільки тоді, коли $(D,\dashv,\vdash)$ задовольняє аксіоми (D3) і (B5) доппельалгебри.

3.1.4. Має місце твердження.

Твердження. Нехай $(D,\dashv,\vdash)$ – комутативний дімоноїд. Тоді напівгрупа $(D,\vdash)$ є інтерасоціативністю напівгрупи $(D,\dashv)$.

3.1.5. Напівгрупи $(D,\dashv)$ і $(D,\vdash)$ називаються Р -зв'язаними [64], якщо $x\dashv y\dashv z = x\vdash y\vdash z$ для всіх $x,y,z\in D$. У 1983 році М. Гоулд і Р. Річардсон [74] ввели поняття сильної інтерасоціативності, визначеної вищевказаними аксіомами (D3) і (B5) разом з аксіомою $x\dashv(y\vdash z) = x\vdash(y\dashv z)$. Очевидно, якщо $(D,\vdash)$ є сильною інтерасоціативністю $(D,\dashv)$, то $(D,\vdash)$ є інтерасоціативністю $(D,\dashv)$. Поняття сильної інтерасоціативності з'явилося при вивченні P -зв'язаних напівгруп. Покажемо, що це поняття має зв'язок з комутативними дімоноїдами.

Легко довести наступне твердження [46].

Твердження. Нехай $(D,\dashv,\vdash)$ – комутативний дімоноїд. Тоді

(i) $(D,\vdash)$ є сильною інтерасоціативністю напівгрупи $(D,\dashv)$;

(ii) $(D,\vdash)$ і $(D,\dashv)$ є P -зв'язаними напівгрупами.

3.1.6. Дж. Б. Хікі в [98] розглянув особливий випадок інтерасоціативності, в якому операція $\vdash$ визначається за допомогою $a \in D$ наступним чином: $x \vdash y = x \dashv a \dashv y$ для всіх $x, y \in D$. Такі операції можуть бути використані в нашому випадку.

Нехай $(D,\dashv,\vdash)$ – довільний дімоноїд і $a \in D$. Визначимо операції $\dashv_a$ і $\vdash_a$ на D за правилами:

$$x \dashv_a y = x \dashv a \dashv y, \quad x \vdash_a y = x \vdash a \vdash y$$

для всіх $x, y \in D$. За твердженням 1.5.11 [43] (див. також [92]) $(D,\dashv_a,\vdash_a)$ – дімоноїд.

Методи побудови інтерасоціативностей для напівгруп були розроблені в [73].

Непорожня множина D називається n-кратною напівгрупою [60], якщо на D визначено n бінарних операцій, позначених $*^1, *^2, ..., *^n$, які задовольняють умови

$$(x *^r y) *^s z = x *^r (y *^s z)$$

для всіх $x, y, z \in D$ і $r, s \in \{1, 2, ..., n\}$. Зауважимо, що поняття n-кратної напівгрупи, яке було використано в [60] для вивчення властивостей n-кратних алгебр асоціативного типу, пов'язано з комутативними дімоноїдами у випадку $n = 2$.

А саме, має місце твердження.

Твердження [46]. Кожен комутативний дімоноїд є 2-кратною напівгрупою.

3.1.7. Напівгрупа G називається нільпотентною зліва (справа) напівгрупою рангу n [65], якщо добуток будь-яких n елементів цієї напівгрупи є її лівим (правим) нулем. Клас усіх нільпотентних зліва напівгруп рангу n характеризується тотожністю $g_1g_2...g_ng_{n+1}=g_1g_2...g_n$. Відзначимо, що ця тотожність еквівалентна тотожності $g_1g_2...g_ng_{n+1}...g_{n+m}=g_1g_2...g_n$. Тотожність, яка характеризує нільпотентні справа напівгрупи рангу n, визначається двоїстим чином. Відомо (див. [65], лема 1), що нільпотентна зліва (справа) напівгрупа рангу n буде також нільпотентною зліва (справа) напівгрупою будь-якого рангу m, більшого за n. Нільпотентні справа напівгрупи з'являються в теорії автоматів, а саме: такі напівгрупи є напівгрупами самоналагоджувальних автоматів (див. [99, 100]).

Очевидно, що будь-яка піднапівгрупа нільпотентної зліва (справа) напівгрупи, гомоморфний образ нільпотентної зліва (справа) напівгрупи та прямий добуток скінченного числа нільпотентних зліва (справа) напівгруп буде також нільпотентною зліва (справа) напівгрупою [65].

Природним є питання про введення для дімоноїдів аналогу нільпотентної зліва (справа) напівгрупи.

Як і раніше, через N позначатимемо множину всіх натуральних чисел. Через Ω позначимо сигнатуру дімоноїда, тобто $\Omega=\{\dashv,\vdash\}$. Нехай $x_1,\ldots,x_n$ – індивідуальні змінні. Через $T(x_1,\ldots,x_n)$ будемо позначати множину термів алгебр сигнатури Ω, які мають вигляд $x_1\circ_1\ldots\circ_{n-1}x_n$ з розстановкою дужок, де $\circ_1,\ldots,\circ_{n-1}\in\Omega$. Дімоноїд $(D,\dashv,\vdash)$ будемо називати лівим дінільпотентним, якщо для деякого $n\in\mathrm{N}$, будь-якого $x\in D$ та будь-якого $t(x_1,\ldots,x_n)\in T(x_1,\ldots,x_n)$ мають місце такі тотожності:

$$t(x_1,\ldots,x_n) \dashv x = t(x_1,\ldots,x_n), \qquad (3.1)$$

$$t(x_1,\ldots,x_n) \vdash x = x_1 \vdash \ldots \vdash x_n. \qquad (3.2)$$

Найменше серед таких n будемо називати індексом лівої дінільпотентності дімоноїда $(D,\dashv,\vdash)$. Для $k \in \mathbb{N}$ лівий дінільпотентний дімоноїд з індексом лівої дінільпотентності $\le k$ будемо називати лівим k-дінільпотентним. Очевидно, що в будь-якому дімоноїді $(D,\dashv,\vdash)$ згідно з аксіомами $(D4)$ і $(D5)$ виконується рівність

$$t(x_1,\ldots,x_n) \vdash x = x_1 \vdash \ldots \vdash x_n \vdash x.$$

Якщо $(D,\vdash)$ – ліва нільпотентна напівгрупа рангу n, то з останньої рівності одержуємо (3.2). Це пояснює як ми отримуємо другу тотожність у визначенні лівого дінільпотентного дімоноїда.

Аналогічно, дімоноїд $(D,\dashv,\vdash)$ називатимемо правим дінільпотентним, якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$, будь-якого $x \in D$ та будь-якого $t(x_1,\ldots,x_n) \in T(x_1,\ldots,x_n)$ мають місце тотожності:

$$x \vdash t(x_1,\ldots,x_n) = t(x_1,\ldots,x_n),$$

$$x \dashv t(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \dashv \ldots \dashv x_n.$$

Найменше серед таких n будемо називати індексом правої дінільпотентності дімоноїда $(D,\dashv,\vdash)$. Для $k \in \mathbb{N}$ правий дінільпотентний дімоноїд з індексом правої дінільпотентності $\le k$ називатимемо правим k-дінільпотентним.

Якщо ρ – конгруенція на дімоноїді $(D,\dashv,\vdash)$ така, що $(D,\dashv,\vdash)/\rho$ – лівий (правий) n-дінільпотентний дімоноїд, то будемо говорити, що ρ – ліва (права) n-дінільпотентна конгруенція.

Відзначимо, що операції будь-якого лівого (правого) 1-дінільпотентного дімоноїда збігаються, та він є напівгрупою лівих (правих) нулів.

Лема. Клас усіх лівих (правих) n-дінільпотентних дімоноїдів є підмноговидом многовиду дімоноїдів.

Доведення. Дійсно, клас усіх лівих (правих) n-дінільпотентних дімоноїдів є підкласом многовиду дімоноїдів, який замкнутий відносно взяття гомоморфних образів, піддімоноїдів та декартових добутків. Отже, він є підмноговидом.

Лему доведено.

Дімоноїд, який є вільним у многовиді лівих (правих) n-дінільпотентних дімоноїдів, будемо називати вільним лівим (правим) n-дінільпотентним дімоноїдом.

Необхідну інформацію про многовиди дімоноїдів можна знайти в [43].

3.2. Будова вільних об'єктів

У цьому підрозділі побудовано вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд довільного рангу та окремо розглянуто вільні ліві n-дінільпотентні дімоноїди рангу 1. Крім того, встановлено, що група автоморфізмів вільного лівого n-дінільпотентного дімоноїда ізоморфна симетричній групі.

3.2.1. У цьому пункті будемо використовувати позначення п. 1.3.2. Нехай $w \in F[X]$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Якщо $l_w \geq n$, то через $\overrightarrow{w}$ ($\overleftarrow{w}$) позначатимемо початкове (кінцеве) підслово довжини n слова w. Визначимо операції $\dashv$ та $\vdash$ на $F_n = \{(w,m) \in F[X] \times \mathbb{N} \mid m \leq l_w \leq n\}$ за правилами:

$$(w_1,m_1) \dashv (w_2,m_2) = \begin{cases} (w_1w_2, m_1), & l_{w_1} + l_{w_2} \leq n, \\ (\overrightarrow{w_1w_2}, m_1), & l_{w_1} + l_{w_2} > n, \end{cases}$$

$$(w_1,m_1) \vdash (w_2,m_2) = \begin{cases} (\overrightarrow{w_1w_2}, n), & n < l_{w_1} + m_2, \\ (\overrightarrow{w_1w_2}, l_{w_1} + m_2), & l_{w_1} + m_2 \leq n < l_{w_1} + l_{w_2}, \\ (w_1w_2, l_{w_1} + m_2), & l_{w_1} + l_{w_2} \leq n \end{cases}$$

для всіх $(w_1,m_1),(w_2,m_2)\in F_n$. Алгебру $(F_n, ”, ђ)$ позначимо через $FD_n^l(X)$.

Лема. Алгебра $FD_n^l(X)$ задовольняє аксіоми (D1) та (D2) дімоноїда.

Доведення. Нехай $(w_1,m_1),(w_2,m_2),(w_3,m_3)\in FD_n^l(X)$ та

$$l_{w_1}+l_{w_2}+l_{w_3}\le n \;(3.3).$$

Очевидно, з (3.3) випливають нерівності $l_{w_1}+l_{w_2}<n$ (3.4), $l_{w_2}+l_{w_3}<n$ (3.5).

Використовуючи (3.3) – (3.5), отримуємо

$$((w_1,m_1) ” (w_2,m_2)) ” (w_3,m_3)=(w_1w_2,m_1) ” (w_3,m_3)=$$

$$=(w_1w_2w_3,m_1)=(w_1,m_1) ” (w_2w_3,m_2)=(w_1,m_1) ” ((w_2,m_2) ” (w_3,m_3)),$$

$$(w_1,m_1) ” ((w_2,m_2)\,ђ\,(w_3,m_3))=(w_1,m_1) ” (w_2w_3,l_{w_2}+m_3)=(w_1w_2w_3,m_1).$$

Нехай далі $l_{w_1}+l_{w_2}+l_{w_3}>n$ (3.6). Розіб'ємо цей випадок на підвипадки:

$$l_{w_1}+l_{w_2}\le n,\, l_{w_2}+l_{w_3}\le n \;\;(3.7);\quad l_{w_1}+l_{w_2}\le n,\, l_{w_2}+l_{w_3}>n \;\;(3.8);$$

$$l_{w_1}+l_{w_2}>n,\, l_{w_2}+l_{w_3}\le n \;\;(3.9);\quad l_{w_1}+l_{w_2}>n,\, l_{w_2}+l_{w_3}>n \;\;(3.10).$$

Розглянемо випадок (3.7):

$$((w_1,m_1) ” (w_2,m_2)) ” (w_3,m_3)=(w_1w_2,m_1) ” (w_3,m_3)=$$

$$=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},m_1)=(w_1,m_1) ” (w_2w_3,m_2)=(w_1,m_1) ” ((w_2,m_2) ” (w_3,m_3)),$$

$$(w_1,m_1) ” ((w_2,m_2)\,ђ\,(w_3,m_3))=(w_1,m_1) ” (w_2w_3,l_{w_2}+m_3)=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},m_1).$$

Перейдемо до випадку (3.8). Розіб'ємо його на такі підвипадки:

$$l_{w_2}+m_3\le n \;\;(3.11);\quad l_{w_2}+m_3>n \;\;(3.12).$$

Розглянемо підвипадок (3.11). Маємо

$$((w_1,m_1) ” (w_2,m_2)) ” (w_3,m_3)=(w_1w_2,m_1) ” (w_3,m_3)=$$

$$=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},m_1)=\left(\overrightarrow{w_1\,\overrightarrow{w_2w_3}},m_1\right)=(w_1,m_1) ” (\overrightarrow{w_2w_3},m_2)=$$

$$=(w_1,m_1) ” ((w_2,m_2) ” (w_3,m_3)),$$

$$(w_1,m_1)\circ((w_2,m_2)\ast(w_3,m_3))=(w_1,m_1)\circ(\overrightarrow{w_2w_3},l_{w_2}+m_3)=$$

$$=\left(\overrightarrow{w_1\overrightarrow{w_2w_3}},m_1\right)=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},m_1)\,.$$

Аналогічно можна перевірити підвипадок (3.12).

Далі перейдемо до випадку (3.9):

$$((w_1,m_1)\circ(w_2,m_2))\circ(w_3,m_3)=(\overrightarrow{w_1w_2},m_1)\circ(w_3,m_3)=$$

$$=\left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1w_2}\,w_3},m_1\right)=(\overrightarrow{w_1w_2},m_1)=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},m_1)=$$

$$=(w_1,m_1)\circ(w_2w_3,m_2)=(w_1,m_1)\circ((w_2,m_2)\circ(w_3,m_3)),$$

$$(w_1,m_1)\circ((w_2,m_2)\ast(w_3,m_3))=(w_1,m_1)\circ(w_2w_3,l_{w_2}+m_3)=$$

$$=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},m_1)=(\overrightarrow{w_1w_2},m_1)\,.$$

Нарешті, розглянемо випадок (3.10). Розіб'ємо його на підвипадки (3.11) та (3.12). У підвипадку (3.11) маємо

$$((w_1,m_1)\circ(w_2,m_2))\circ(w_3,m_3)=(\overrightarrow{w_1w_2},m_1)\circ(w_3,m_3)=$$

$$=\left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1w_2}\,w_3},m_1\right)=(\overrightarrow{w_1w_2},m_1)=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},m_1)=\left(\overrightarrow{w_1\,\overrightarrow{w_2w_3}},m_1\right)=$$

$$=(w_1,m_1)\circ(\overrightarrow{w_2w_3},m_2)=(w_1,m_1)\circ((w_2,m_2)\circ(w_3,m_3)),$$

$$(w_1,m_1)\circ((w_2,m_2)\ast(w_3,m_3))=(w_1,m_1)\circ(\overrightarrow{w_2w_3},l_{w_2}+m_3)=$$

$$=\left(\overrightarrow{w_1\,\overrightarrow{w_2w_3}},m_1\right)=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},m_1)=(\overrightarrow{w_1w_2},m_1)\,.$$

Аналогічно перевіряється підвипадок (3.12).

Порівнюючи отримані вирази, дійдемо висновку, що $FD_n^l(X)$ задовольняє аксіоми $(D1)$ та $(D2)$ дімоноїда.

Лему доведено.

3.2.2. Справедлива така лема.

Лема. Алгебра $FD_n^l(X)$ задовольняє аксіому $(D3)$ дімоноїда.

Доведення. Нехай $(w_1,m_1),(w_2,m_2),(w_3,m_3)\in FD_n^l(X)$ та виконується (3.3). Тоді мають місце нерівності (3.4) та (3.5). Використовуючи (3.3) – (3.5), отримуємо

$$((w_1,m_1)\dashv(w_2,m_2))\vdash(w_3,m_3)=(w_1w_2,l_{w_1}+m_2)\vdash(w_3,m_3)=$$

$$=(w_1w_2w_3,l_{w_1}+m_2)=(w_1,m_1)\dashv(w_2w_3,m_2)=(w_1,m_1)\dashv((w_2,m_2)\vdash(w_3,m_3)).$$

Нехай далі має місце (3.6). Як і в доведенні леми п. 3.2.1, розглянемо підвипадки (3.7) – (3.10).

Якщо виконується (3.7), то з $l_{w_1}+l_{w_2}\le n$ випливає $l_{w_1}+m_2\le n$ (3.13). Тоді

$$((w_1,m_1)\dashv(w_2,m_2))\vdash(w_3,m_3)=(w_1w_2,l_{w_1}+m_2)\vdash(w_3,m_3)=$$

$$=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},l_{w_1}+m_2)=(w_1,m_1)\dashv(w_2w_3,m_2)=(w_1,m_1)\dashv((w_2,m_2)\vdash(w_3,m_3)).$$

Розглянемо випадок (3.8). Використовуючи (3.13), маємо

$$((w_1,m_1)\dashv(w_2,m_2))\vdash(w_3,m_3)=(w_1w_2,l_{w_1}+m_2)\vdash(w_3,m_3)=$$

$$=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},l_{w_1}+m_2)=\left(\overrightarrow{w_1\,\overrightarrow{w_2w_3},l_{w_1}+m_2}\right)=(w_1,m_1)\dashv(\overrightarrow{w_2w_3},m_2)=$$

$$=(w_1,m_1)\dashv((w_2,m_2)\vdash(w_3,m_3)).$$

Перейдемо до випадку (3.9). Нехай має місце (3.13). Тоді

$$((w_1,m_1)\dashv(w_2,m_2))\vdash(w_3,m_3)=(\overrightarrow{w_1w_2},l_{w_1}+m_2)\vdash(w_3,m_3)=$$

$$=\left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1w_2}\,w_3},\, l_{w_1}+m_2\right)=(\overrightarrow{w_1w_2},\, l_{w_1}+m_2)=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},\, l_{w_1}+m_2)=$$

$$=(w_1,m_1)\text{ ђ }(w_2w_3,m_2)=(w_1,m_1)\text{ ђ }((w_2,m_2)\text{ ” }(w_3,m_3)).$$

Якщо ж $l_{w_1}+m_2>n$ (3.14), то

$$((w_1,m_1)\text{ ђ }(w_2,m_2))\text{ ” }(w_3,m_3)=(\overrightarrow{w_1w_2},n)\text{ ” }(w_3,m_3)=$$

$$=\left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1w_2}\,w_3},\, n\right)=(\overrightarrow{w_1w_2},n)=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},n)=$$

$$=(w_1,m_1)\text{ ђ }(w_2w_3,m_2)=(w_1,m_1)\text{ ђ }((w_2,m_2)\text{ ” }(w_3,m_3)).$$

Нарешті, нехай виконується умова (3.10). Якщо має місце (3.13), то

$$((w_1,m_1)\text{ ђ }(w_2,m_2))\text{ ” }(w_3,m_3)=(\overrightarrow{w_1w_2},l_{w_1}+m_2)\text{ ” }(w_3,m_3)=$$

$$=\left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1w_2}\,w_3},\, l_{w_1}+m_2\right)=(\overrightarrow{w_1w_2},l_{w_1}+m_2)=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},l_{w_1}+m_2)=$$

$$=\left(\overrightarrow{w_1\,\overrightarrow{w_2w_3}},\, l_{w_1}+m_2\right)=(w_1,m_1)\text{ ђ }(\overrightarrow{w_2w_3},m_2)=$$

$$=(w_1,m_1)\text{ ђ }((w_2,m_2)\text{ ” }(w_3,m_3)).$$

У підвипадку (3.14) отримуємо

$$((w_1,m_1)\text{ ђ }(w_2,m_2))\text{ ” }(w_3,m_3)=(\overrightarrow{w_1w_2},n)\text{ ” }(w_3,m_3)=$$

$$=\left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1w_2}\,w_3},\, n\right)=(\overrightarrow{w_1w_2},n)=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},n)=\left(\overrightarrow{w_1\,\overrightarrow{w_2w_3}},\, n\right)=(w_1,m_1)\text{ ђ }(\overrightarrow{w_2w_3},m_2)=$$

$$=(w_1,m_1)\text{ ђ }((w_2,m_2)\text{ ” }(w_3,m_3)).$$

Порівнюючи отримані вирази, дійдемо висновку, що $FD_n^l(X)$ задовольняє аксіому $(D3)$ дімоноїда.

Лему доведено.

3.2.3. Має місце така лема.

Лема. Алгебра $FD_n^l(X)$ задовольняє аксіоми $(D4)$ та $(D5)$ дімоноїда.

Доведення. Нехай $(w_1,m_1),(w_2,m_2),(w_3,m_3)\in FD_n^l(X)$ та виконується (3.3). З (3.3) випливають (3.4) та (3.5). Використовуючи (3.3) – (3.5), маємо

$$((w_1,m_1)\vdash(w_2,m_2))\vdash(w_3,m_3)=(w_1w_2,l_{w_1}+m_2)\vdash(w_3,m_3)=$$

$$=(w_1w_2w_3,l_{w_1}+l_{w_2}+m_3)=(w_1,m_1)\vdash(w_2w_3,l_{w_2}+m_3)=$$

$$=(w_1,m_1)\vdash((w_2,m_2)\vdash(w_3,m_3)),$$

$$((w_1,m_1)\dashv(w_2,m_2))\vdash(w_3,m_3)=(w_1w_2,m_1)\vdash(w_3,m_3)=(w_1w_2w_3,l_{w_1}+l_{w_2}+m_3).$$

Нехай тепер виконується (3.6). Розіб’ємо цей випадок на підвипадки (3.7) – (3.10) (див. доведення леми п. 3.2.1).

Випадок (3.7) розіб’ємо на підвипадки:

$$l_{w_1}+l_{w_2}+m_3\le n \ \ (3.15); \qquad l_{w_1}+l_{w_2}+m_3>n \ \ (3.16).$$

Розглянемо підвипадок (3.15):

$$((w_1,m_1)\vdash(w_2,m_2))\vdash(w_3,m_3)=(w_1w_2,l_{w_1}+m_2)\vdash(w_3,m_3)=$$

$$=(\overline{w_1w_2w_3},l_{w_1w_2}+m_3)=(w_1,m_1)\vdash(w_2w_3,l_{w_2}+m_3)=$$

$$=(w_1,m_1)\vdash((w_2,m_2)\vdash(w_3,m_3)),$$

$$((w_1,m_1)\dashv(w_2,m_2))\vdash(w_3,m_3)=(w_1w_2,m_1)\vdash(w_3,m_3)=(\overline{w_1w_2w_3},l_{w_1w_2}+m_3).$$

У підвипадку (3.16) маємо

$$((w_1,m_1)\vdash(w_2,m_2))\vdash(w_3,m_3)=(w_1w_2,l_{w_1}+m_2)\vdash(w_3,m_3)=$$

$$=(\overline{w_1w_2w_3},n)=(w_1,m_1)\vdash(w_2w_3,l_{w_2}+m_3)=(w_1,m_1)\vdash((w_2,m_2)\vdash(w_3,m_3)),$$

$$((w_1,m_1)\dashv(w_2,m_2))\vdash(w_3,m_3)=(w_1w_2,m_1)\vdash(w_3,m_3)=(\overline{w_1w_2w_3},n).$$

Перейдемо до випадку (3.8). Розіб’ємо його на підвипадки (3.15) та (3.16). Відмітимо, що з (3.15) випливає $l_{w_2}+m_3<n$ (3.17). Розглянемо підвипадок (3.15). Користуючись (3.17), маємо

$$((w_1,m_1)\hbar(w_2,m_2))\hbar(w_3,m_3)=(w_1w_2,l_{w_1}+m_2)\hbar(w_3,m_3)=$$

$$=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},l_{w_1w_2}+m_3)=\left(\overrightarrow{w_1\,\overrightarrow{w_2w_3},l_{w_1}}+l_{w_2}+m_3\right)=$$

$$=(w_1,m_1)\hbar(\overrightarrow{w_2w_3},l_{w_2}+m_3)=(w_1,m_1)\hbar((w_2,m_2)\hbar(w_3,m_3)),$$

$$((w_1,m_1)”(w_2,m_2))\hbar(w_3,m_3)=(w_1w_2,m_1)\hbar(w_3,m_3)=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},l_{w_1w_2}+m_3).$$

Перейдемо до підвипадку (3.16). Розіб’ємо його в свою чергу на підвипадки (3.11) та (3.12). Розглянемо підвипадок (3.11):

$$((w_1,m_1)\hbar(w_2,m_2))\hbar(w_3,m_3)=(w_1w_2,l_{w_1}+m_2)\hbar(w_3,m_3)=$$

$$=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},n)=\left(\overrightarrow{w_1\,\overrightarrow{w_2w_3},n}\right)=(w_1,m_1)\hbar(\overrightarrow{w_2w_3},l_{w_2}+m_3)=$$

$$=(w_1,m_1)\hbar((w_2,m_2)\hbar(w_3,m_3)),$$

$$((w_1,m_1)”(w_2,m_2))\hbar(w_3,m_3)=(w_1w_2,m_1)\hbar(w_3,m_3)=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},n).$$

Аналогічно попередньому підвипадку перевіряється підвипадок (3.12).

Далі розглянемо випадок (3.9). Розіб’ємо його на підвипадки (3.13) та (3.14). Відмітимо, що з $l_{w_1}+l_{w_2}>n$ випливає (3.16). У підвипадку (3.13), використовуючи (3.16), маємо

$$((w_1,m_1)\hbar(w_2,m_2))\hbar(w_3,m_3)=(\overrightarrow{w_1w_2},l_{w_1}+m_2)\hbar(w_3,m_3)=$$

$$=\left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1w_2}\,w_3,n}\right)=(\overrightarrow{w_1w_2},n)=(\overrightarrow{w_1w_2w_3},n)=$$

$$= (w_1, m_1) \circ (w_2 w_3, l_{w_2} + m_3) = (w_1, m_1) \circ ((w_2, m_2) \circ (w_3, m_3)),$$

$$((w_1, m_1) \ast (w_2, m_2)) \circ (w_3, m_3) = (\overrightarrow{w_1 w_2}, m_1) \circ (w_3, m_3) = \left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1 w_2}\, w_3}, n \right) = (\overrightarrow{w_1 w_2}, n).$$

Підвипадок (3.14) перевіряється аналогічно попередньому підвипадку.

Нарешті, перейдемо до випадку (3.10). Розіб’ємо його на підвипадки (3.13) та (3.14). Підвипадок (3.13) розіб’ємо в свою чергу на підвипадки (3.11) та (3.12).

У підвипадку (3.11), користуючись (3.16), маємо

$$((w_1, m_1) \circ (w_2, m_2)) \circ (w_3, m_3) = (\overrightarrow{w_1 w_2}, l_{w_1} + m_2) \circ (w_3, m_3) =$$

$$= \left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1 w_2}\, w_3}, n \right) = (\overrightarrow{w_1 w_2}, n) = (\overrightarrow{w_1 w_2 w_3}, n) = \left(\overrightarrow{w_1\, \overrightarrow{w_2 w_3}}, n \right) =$$

$$= (w_1, m_1) \circ (\overrightarrow{w_2 w_3}, l_{w_2} + m_3) = (w_1, m_1) \circ ((w_2, m_2) \circ (w_3, m_3)),$$

$$((w_1, m_1) \ast (w_2, m_2)) \circ (w_3, m_3) = (\overrightarrow{w_1 w_2}, m_1) \circ (w_3, m_3) = \left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1 w_2}\, w_3}, n \right) = (\overrightarrow{w_1 w_2}, n).$$

Аналогічно можна перевірити підвипадок (3.12).

Далі, випадок (3.14) розіб’ємо на підвипадки (3.11) та (3.12). Розглянемо підвипадок (3.11). Користуючись (3.16), маємо

$$((w_1, m_1) \circ (w_2, m_2)) \circ (w_3, m_3) = (\overrightarrow{w_1 w_2}, n) \circ (w_3, m_3) =$$

$$= \left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1 w_2}\, w_3}, n \right) = (\overrightarrow{w_1 w_2}, n) = (\overrightarrow{w_1 w_2 w_3}, n) = \left(\overrightarrow{w_1\, \overrightarrow{w_2 w_3}}, n \right) =$$

$$= (w_1, m_1) \circ (\overrightarrow{w_2 w_3}, l_{w_2} + m_3) = (w_1, m_1) \circ ((w_2, m_2) \circ (w_3, m_3)),$$

$$((w_1,m_1)\dashv(w_2,m_2))\vdash(w_3,m_3)=\left(\overrightarrow{w_1w_2},m_1\right)\vdash(w_3,m_3)=\left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1w_2}\,w_3},n\right)=(\overrightarrow{w_1w_2},n)\,.$$

Аналогічно перевіряється підвипадок (3.12).

Аналізуючи результати кожного з розглянутих випадків, дійдемо висновку, що алгебра $FD_n^l(X)$ задовольняє аксіоми $(D4)$ та $(D5)$ дімоноїда.

Лему доведено.

3.2.4. Основним результатом цього підрозділу є така теорема.

Теорема. $FD_n^l(X)$ – вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд.

Доведення. З лем пп. 3.2.1 – 3.2.3 випливає, що $FD_n^l(X)$ – дімоноїд. Покажемо, що він є лівим n-дінільпотентним.

Нехай $(w_1,m_1),...,(w_n,m_n)\in FD_n^l(X)$ та $t((w_1,m_1),...,(w_n,m_n))$ – довільний вираз з $T((w_1,m_1),...,(w_n,m_n))$, який збігається з $(u,f)\in FD_n^l(X)$ (див. п. 3.1.7). Зрозуміло, що $l_u=n$. Тоді $(u,f)\dashv(w,k)=(\overrightarrow{uw},f)=(u,f)$ для будь-якого $(w,k)\in FD_n^l(X)$. Крім цього,

$$t((w_1,m_1),...,(w_n,m_n))\vdash(w,k)=((w_1,m_1)\vdash...\vdash(w_n,m_n))\vdash(w,k)=$$

$$=(\overrightarrow{w_1...w_n},n)\vdash(w,k)=\left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1...w_n}\,w},n\right)=(\overrightarrow{w_1...w_n},n)=(w_1,m_1)\vdash...\vdash(w_n,m_n)$$

для будь-якого $(w,k)\in FD_n^l(X)$ завдяки аксіомам $(D4)$, $(D5)$ дімоноїда та визначенню операції $\vdash$. Згідно з визначенням, $FD_n^l(X)$ – лівий дінільпотентний дімоноїд. У той же час при $n>1$ для будь-яких $(x_i,1)\in FD_n^l(X)$, де $x_i\in X$, $1\le i\le n$, та будь-якого

$$t((x_1,1),...,(x_{n-1},1))\in T((x_1,1),...,(x_{n-1},1)) \quad \text{(див. п. 3.1.7)}$$

отримуємо

$$t((x_1,1),...,(x_{n-1},1))\vdash(x_n,1)=(x_1...x_{n-1},n-1)\vdash(x_n,1)=$$

$$=(x_1...x_n,n)\neq(x_1,1)\vdash...\vdash(x_{n-1},1).$$

Це означає, що $FD_n^l(X)$ має індекс лівої дінільпотентності n.

Нарешті, покажемо, що $FD_n^l(X)$ є вільним у многовиді лівих n-дінільпотентних дімоноїдів. Нехай $(T,\dashv',\vdash')$ – довільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд та $\alpha: X\to T$ – довільне відображення. Визначимо відображення

$$\pi: FD_n^l(X)\to(T,\dashv',\vdash'):(x_1...x_i...x_s,l)\mapsto(x_1...x_i...x_s,l)\pi,$$

поклавши

$$(x_1...x_i...x_s,l)\pi=x_1\alpha\vdash'...\vdash' x_l\alpha\dashv'...\dashv' x_s\alpha,$$

де $x_i\in X, 1\le i\le s$. Покажемо, що π – гомоморфізм. Для цього будемо використовувати аксіоми дімоноїда та тотожності (3.1), (3.2).

Для довільних елементів $(x_1...x_i...x_s,l)$, $(y_1...y_j...y_r,t)\in FD_n^l(X)$, де $x_i,y_j\in X, 1\le i\le s$, $1\le j\le r$, розглянемо два випадки:

$$s+r\le n \ (3.18); \quad s+r>n \ (3.19).$$

У випадку (3.18) маємо

$$((x_1...x_i...x_s,l)\dashv(y_1...y_j...y_r,t))\pi=(x_1...x_sy_1...y_r,l)\pi=$$
$$=x_1\alpha\vdash'...\vdash' x_l\alpha\dashv'...\dashv' x_s\alpha\dashv' y_1\alpha\dashv'...\dashv' y_r\alpha=$$
$$=(x_1\alpha\vdash'...\vdash' x_l\alpha\dashv'...\dashv' x_s\alpha)\dashv'(y_1\alpha\vdash'...\vdash' y_t\alpha\dashv'...\dashv' y_r\alpha)=$$
$$=(x_1...x_i...x_s,l)\pi\dashv'(y_1...y_j...y_r,t)\pi,$$

$$((x_1...x_i...x_s,l)\vdash(y_1...y_j...y_r,t))\pi=(x_1...x_sy_1...y_r,s+t)\pi=$$
$$=x_1\alpha\vdash'...\vdash' x_s\alpha\vdash' y_1\alpha\vdash'...\vdash' y_t\alpha\dashv'...\dashv' y_r\alpha=$$
$$=(x_1\alpha\vdash'...\vdash' x_l\alpha\dashv'...\dashv' x_s\alpha)\vdash'(y_1\alpha\vdash'...\vdash' y_t\alpha\dashv'...\dashv' y_r\alpha)=$$
$$=(x_1...x_i...x_s,l)\pi\vdash'(y_1...y_j...y_r,t)\pi.$$

Розглянемо випадок (3.19). Розіб’ємо його на підвипадки:

$s+t<n$ (3.20); $s+t=n$ (3.21); $s=n$ (3.22); $s+t>n$, $s\neq n$ (3.23).

У підвипадку (3.20), поклавши $s+f=n$ для деякого $f\in\mathbb{N}$, маємо

$$((x_1...x_i...x_s,l)\,\text{”}\,(y_1...y_j...y_r,t))\pi=(x_1...x_s y_1...y_f,l)\pi=$$

$$=x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_l\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,x_s\alpha\,\text{”}'\,y_1\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_t\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_f\alpha=$$

$$=(x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_l\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,x_s\alpha\,\text{”}'\,y_1\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_f\alpha)\,\text{”}'\,y_{f+1}\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_r\alpha=$$

$$=(x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_l\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,x_s\alpha)\,\text{”}'\,(y_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,y_t\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_r\alpha)=$$

$$=(x_1...x_i...x_s,l)\pi\,\text{”}'\,(y_1...y_j...y_r,t)\pi,$$

$$((x_1...x_i...x_s,l)\,\text{ђ}\,(y_1...y_j...y_r,t))\pi=(x_1...x_s y_1...y_f,s+t)\pi=$$

$$=x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_s\alpha\,\text{ђ}'\,y_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,y_t\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_f\alpha=$$

$$=(x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_s\alpha\,\text{ђ}'\,y_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,y_t\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_f\alpha)\,\text{”}'\,y_{f+1}\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_r\alpha=$$

$$=(x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_l\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,x_s\alpha)\,\text{ђ}'\,(y_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,y_t\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_r\alpha)=$$

$$=(x_1...x_i...x_s,l)\pi\,\text{ђ}'\,(y_1...y_j...y_r,t)\pi.$$

Якщо виконується (3.21), то

$$((x_1...x_i...x_s,l)\,\text{”}\,(y_1...y_j...y_r,t))\pi=(x_1...x_s y_1...y_t,l)\pi=$$

$$=x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_l\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,x_s\alpha\,\text{”}'\,y_1\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_t\alpha=$$

$$=(x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_l\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,x_s\alpha\,\text{”}'\,y_1\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_t\alpha)\,\text{”}'\,y_{t+1}\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_r\alpha=$$

$$=(x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_l\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,x_s\alpha)\,\text{”}'\,(y_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,y_t\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_r\alpha)=$$

$$=(x_1...x_i...x_s,l)\pi\,\text{”}'\,(y_1...y_j...y_r,t)\pi,$$

$$((x_1...x_i...x_s,l)\,\text{ђ}\,(y_1...y_j...y_r,t))\pi=(x_1...x_s y_1...y_t,n)\pi=$$

$$=x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_s\alpha\,\text{ђ}'\,y_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,y_t\alpha=$$

$$=(x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_s\alpha\,\text{ђ}'\,y_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,y_t\alpha)\,\text{”}'$$

$$\text{”}'\,y_{t+1}\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_r\alpha=(x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_l\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,x_s\alpha)\,\text{ђ}'$$

$$\text{ђ}'\,(y_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,y_t\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_r\alpha)=(x_1...x_i...x_s,l)\pi\,\text{ђ}'\,(y_1...y_j...y_r,t)\pi.$$

Нехай має місце умова (3.22). Тоді

$$((x_1...x_i...x_s,l)\,\text{”}\,(y_1...y_j...y_r,t))\pi=(x_1...x_i...x_s,l)\pi=$$

$$=x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_l\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,x_s\alpha=$$

$$=(x_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,x_l\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,x_s\alpha)\,\text{”}'\,(y_1\alpha\,\text{ђ}'...\text{ђ}'\,y_t\alpha\,\text{”}'...\text{”}'\,y_r\alpha)=$$

$$= (x_1 ... x_i ... x_s, l)\pi \dashv' (y_1 ... y_j ... y_r, t)\pi ,$$

$$((x_1 ... x_i ... x_s, l) \vdash (y_1 ... y_j ... y_r, t))\pi = (x_1 ... x_i ... x_s, n)\pi =$$

$$= x_1\alpha \vdash' ... \vdash' x_i\alpha \vdash' ... \vdash' x_s\alpha =$$

$$= (x_1\alpha \vdash' ... \vdash' x_i\alpha \vdash' ... \vdash' x_s\alpha) \vdash' (y_1\alpha \vdash' ... \vdash' y_t\alpha \dashv' ... \dashv' y_r\alpha) =$$

$$= (x_1\alpha \vdash' ... \vdash' x_l\alpha \dashv' ... \dashv' x_s\alpha) \vdash' (y_1\alpha \vdash' ... \vdash' y_t\alpha \dashv' ... \dashv' y_r\alpha) =$$

$$= (x_1 ... x_i ... x_s, l)\pi \vdash' (y_1 ... y_j ... y_r, t)\pi .$$

Нарешті, за умови виконання (3.23), поклавши $s + f = n$ для деякого $f \in \mathrm{N}$, отримуємо

$$((x_1 ... x_i ... x_s, l) \dashv (y_1 ... y_j ... y_r, t))\pi = (x_1 ... x_s y_1 ... y_f, l)\pi =$$

$$= x_1\alpha \vdash' ... \vdash' x_l\alpha \dashv' ... \dashv' x_s\alpha \dashv' y_1\alpha \dashv' ... \dashv' y_f\alpha =$$

$$= (x_1\alpha \vdash' ... \vdash' x_l\alpha \dashv' ... \dashv' x_s\alpha \dashv' y_1\alpha \dashv' ... \dashv' y_f\alpha) \dashv' y_{f+1}\alpha \dashv' ... \dashv' y_r\alpha =$$

$$= (x_1\alpha \vdash' ... \vdash' x_l\alpha \dashv' ... \dashv' x_s\alpha) \dashv' (y_1\alpha \vdash' ... \vdash' y_t\alpha \dashv' ... \dashv' y_r\alpha) =$$

$$= (x_1 ... x_i ... x_s, l)\pi \dashv' (y_1 ... y_j ... y_r, t)\pi ,$$

$$((x_1 ... x_i ... x_s, l) \vdash (y_1 ... y_j ... y_r, t))\pi = (x_1 ... x_s y_1 ... y_f, n)\pi =$$

$$= x_1\alpha \vdash' ... \vdash' x_s\alpha \vdash' y_1\alpha \vdash' ... \vdash' y_f\alpha =$$

$$= (x_1\alpha \vdash' ... \vdash' x_s\alpha \vdash' y_1\alpha \vdash' ... \vdash' y_f\alpha) \vdash'$$

$$\vdash' (y_{f+1}\alpha \vdash' ... \vdash' y_t\alpha \dashv' ... \dashv' y_r\alpha) = (x_1\alpha \vdash' ... \vdash' x_l\alpha \dashv' ... \dashv' x_s\alpha) \vdash'$$

$$\vdash' (y_1\alpha \vdash' ... \vdash' y_t\alpha \dashv' ... \dashv' y_r\alpha) = (x_1 ... x_i ... x_s, l)\pi \vdash' (y_1 ... y_j ... y_r, t)\pi .$$

Таким чином, π – гомоморфізм. Отже, $FD_n^l(X)$ – вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд.

Теорему доведено.

3.2.5. Далі побудуємо дімоноїд, ізоморфний вільному лівому n-дінільпотентному дімоноїду рангу 1.

Зафіксуємо $n \in \mathrm{N}$ та визначимо операції $\dashv$ та $\vdash$ на $W_n = \{(k, m) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N} \mid m \le k \le n\}$ за правилами:

$$(k_1,m_1)\text{ ” }(k_2,m_2)=\begin{cases}(k_1+k_2,m_1), & k_1+k_2\le n,\\ (n,m_1), & k_1+k_2>n,\end{cases}$$

$$(k_1,m_1)\text{ ђ }(k_2,m_2)=\begin{cases}(n,n), & n<k_1+m_2,\\ (n,k_1+m_2), & k_1+m_2\le n<k_1+k_2,\\ (k_1+k_2,\ k_1+m_2), & k_1+k_2\le n\end{cases}$$

для всіх $(k_1,m_1),(k_2,m_2)\in W_n$. Довга безпосередня перевірка показує, що аксіоми дімоноїда виконуються відносно операцій ” та ђ. Таким чином, $(W_n,\text{”},\text{ђ})$ є дімоноїдом. Позначимо його через N_n^l.

Лема. Якщо $|X|=1$, то $FD_n^l(X)\cong \mathrm{N}_n^l$.

Доведення. Покладемо $X=\{a\}$ та визначимо відображення

$$\partial : FD_n^l(X)\to \mathrm{N}_n^l,$$

поклавши $u\partial=(k,m)$, якщо $u=(a^k,m)$. Легка перевірка показує, що ∂ є ізоморфізмом.

Лему доведено.

3.2.6. Як і в п. 2.3.3, через $\Im[X]$ позначатимемо симетричну групу на множині X, а через $Aut(D,\text{”},\text{ђ})$ – групу автоморфізмів дімоноїда $(D,\text{”},\text{ђ})$. Неважко побачити, що вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд однозначно з точністю до ізоморфізму визначається потужністю множини X. Звідси отримуємо такий опис групи автоморфізмів вільного лівого n-дінільпотентного дімоноїда.

Лема. $AutFD_n^l(X)\cong\Im[X]$.

3.3. Найменша ліва n-дінільпотентна конгруенція на вільному дімоноїді

У цьому пункті представлено найменшу ліву n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді. Будемо використовувати позначення підрозділів 3.1, 3.2 та визначення п. 3.1.7.

3.3.1. Якщо $f : D_1 \to D_2$ – гомоморфізм дімоноїдів, то відповідну конгруенцію на D_1 будемо позначати через Δ_f.

Теорема. Нехай $\widetilde{F}[X]$ – вільний дімоноїд, $(w,m) \in \widetilde{F}[X]$ та $FD_n^l(X)$ – вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд. Відображення $\delta : \widetilde{F}[X] \to FD_n^l(X)$, визначене за правилом:

$$(w,m) \mapsto (w,m)\delta = \begin{cases} (w,m), & l_w \le n, \\ (\overrightarrow{w},n), & n \le m, \\ (\overrightarrow{w},m), & m < n < l_w, \end{cases}$$

є епіморфізмом, який індукує найменшу ліву n-дінільпотентну конгруенцію на $\widetilde{F}[X]$.

Доведення. Нехай $(w_1,m_1),(w_2,m_2) \in \widetilde{F}[X]$. Тоді

$$((w_1,m_1) \dashv (w_2,m_2))\delta = (w_1w_2,m_1)\delta .$$

Якщо $l_{w_1} + l_{w_2} \le n$, то $l_{w_1} < n$, $l_{w_2} < n$ та

$$(w_1w_2,m_1)\delta = (w_1w_2,m_1) = (w_1,m_1) \dashv (w_2,m_2) = (w_1,m_1)\delta \dashv (w_2,m_2)\delta .$$

Розглянемо випадок $l_{w_1} + l_{w_2} > n$. Розіб'ємо його на підвипадки:

$l_{w_1} \le n,\ l_{w_2} \le n$ (3.24); $\quad l_{w_1} \le n,\ l_{w_2} > n$ (3.25);

$l_{w_1} > n,\ l_{w_2} \le n$ (3.26); $\quad l_{w_1} > n,\ l_{w_2} > n$ (3.27).

Очевидно, що з $l_{w_1} \le n$ випливає, що $m_1 \le n$ (3.28). Користуючись (3.28), розглянемо випадок (3.24):

$$(w_1w_2,m_1)\delta = (\overrightarrow{w_1w_2,m_1}) = (w_1,m_1)\text{”}\ (w_2,m_2) = (w_1,m_1)\delta\text{”}\ (w_2,m_2)\delta .$$

Далі випадок (3.25) розіб’ємо на підвипадки:

$$n \le m_2 \ \ (3.29); \qquad n > m_2 \ \ (3.30).$$

Користуючись (3.28), у підвипадку (3.29) маємо

$$(w_1w_2,m_1)\delta = (\overrightarrow{w_1w_2,m_1}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{w_1\,\overrightarrow{w_2},m_1} \end{pmatrix} =$$

$$= (w_1,m_1)\text{”}\ (\overrightarrow{w_2},n) = (w_1,m_1)\delta\text{”}\ (w_2,m_2)\delta .$$

Аналогічно перевіряється підвипадок (3.30).

Перейдемо до випадку (3.26). Розіб’ємо його на підвипадки:

$$n \le m_1 \ \ (3.31); \qquad n > m_1 \ \ (3.32).$$

Розглянемо підвипадок (3.31):

$$(w_1w_2,m_1)\delta = (\overrightarrow{w_1w_2,n}) = (\overrightarrow{w_1},n) =$$

$$= \begin{pmatrix} \overrightarrow{\overrightarrow{w_1}\,w_2,n} \end{pmatrix} = (\overrightarrow{w_1},n)\text{”}\ (w_2,m_2) = (w_1,m_1)\delta\text{”}\ (w_2,m_2)\delta .$$

Аналогічно перевіряється підвипадок (3.32).

Розіб’ємо випадок (3.27) на підвипадки:

$$m_1 \le n,\ m_2 \le n \ \ (3.33); \qquad m_1 \le n,\ m_2 > n \ \ (3.34);$$

$$m_1 > n,\ m_2 \le n \ \ (3.35); \qquad m_1 > n,\ m_2 > n \ \ (3.36).$$

Якщо має місце (3.33), то

$$(w_1w_2,m_1)\delta = (\overrightarrow{w_1w_2,m_1}) = (\overrightarrow{w_1},m_1) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\overrightarrow{w_1}\,\overrightarrow{w_2},m_1} \end{pmatrix} =$$

$$= (\overrightarrow{w_1},m_1)\text{”}\ (\overrightarrow{w_2},m_2) = (w_1,m_1)\delta\text{”}\ (w_2,m_2)\delta .$$

Аналогічно перевіряється підвипадок (3.34).

У підвипадку (3.35):

$$(w_1w_2, m_1)\delta = (\overrightarrow{w_1w_2}, n) = (\overrightarrow{w_1}, n) = \left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1}\,\overrightarrow{w_2}, n}\right) =$$

$$= (\overrightarrow{w_1}, n) \circ (\overrightarrow{w_2}, m_2) = (w_1, m_1)\delta \circ (w_2, m_2)\delta,$$

та аналогічно у підвипадку (3.36).

Таким чином, $((w_1, m_1) \circ (w_2, m_2))\delta = (w_1, m_1)\delta \circ (w_2, m_2)\delta$ для всіх $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in \grave{F}[X]$.

Далі для всіх $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in \grave{F}[X]$ маємо

$$((w_1, m_1) \ast (w_2, m_2))\delta = (w_1w_2, l_{w_1} + m_2)\delta.$$

Якщо $l_{w_1} + l_{w_2} \le n$, то

$$(w_1w_2, l_{w_1} + m_2)\delta = (w_1w_2, l_{w_1} + m_2) = (w_1, m_1) \ast (w_2, m_2) =$$

$$= (w_1, m_1)\delta \ast (w_2, m_2)\delta.$$

Розглянемо випадок $l_{w_1} + l_{w_2} > n$. Розіб'ємо його на підвипадки (3.24) – (3.27).

Перейдемо до випадку (3.24). Розіб'ємо його в свою чергу на підвипадки:

$$l_{w_1} + m_2 < n \ (3.37); \qquad l_{w_1} + m_2 \ge n \ (3.38).$$

У підвипадку (3.37):

$$(w_1w_2, l_{w_1} + m_2)\delta = (\overrightarrow{w_1w_2}, l_{w_1} + m_2) = (w_1, m_1) \ast (w_2, m_2) = (w_1, m_1)\delta \ast (w_2, m_2)\delta,$$

та аналогічно у підвипадку (3.38).

Випадок (3.25) також розіб'ємо на підвипадки (3.37) та (3.38). Враховуючи, що з (3.37) випливає (3.30), у підвипадку (3.37) отримуємо

$$(w_1w_2, l_{w_1} + m_2)\delta = (\overrightarrow{w_1w_2}, l_{w_1} + m_2) = \left(\overrightarrow{w_1\,\overrightarrow{w_2}, l_{w_1} + m_2}\right) =$$

$$= (w_1, m_1) \text{ ђ } \overrightarrow{(w_2, m_2)} = (w_1, m_1)\delta \text{ ђ } (w_2, m_2)\delta \,.$$

Підвипадок (3.38) розіб’ємо на підвипадки (3.29) та (3.30). У підвипадку (3.29) маємо

$$(w_1 w_2, l_{w_1} + m_2)\delta = \overrightarrow{(w_1 w_2, n)} = \left(\overrightarrow{w_1 \overrightarrow{w_2}, n} \right) =$$

$$= (w_1, m_1) \text{ ђ } \overrightarrow{(w_2, n)} = (w_1, m_1)\delta \text{ ђ } (w_2, m_2)\delta \,.$$

Аналогічно попередньому підвипадку можна перевірити підвипадок (3.30).

Розглянемо випадок (3.26), який розіб’ємо на підвипадки (3.31) та (3.32). Враховуючи, що з $l_{w_1} > n$ випливає $l_{w_1} + m_2 > n$, у підвипадку (3.32) маємо

$$(w_1 w_2, l_{w_1} + m_2)\delta = \overrightarrow{(w_1 w_2, n)} = \left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1} w_2, n} \right) =$$

$$= \overrightarrow{(w_1, m_1)} \text{ ђ } (w_2, m_2) = (w_1, m_1)\delta \text{ ђ } (w_2, m_2)\delta \,.$$

Підвипадок (3.31) перевіряється аналогічно попередньому підвипадку.

Нарешті, випадок (3.27) розіб’ємо на підвипадки (3.33) – (3.36). Якщо виконується (3.33), то

$$(w_1 w_2, l_{w_1} + m_2)\delta = \overrightarrow{(w_1 w_2, n)} = \overrightarrow{(w_1, n)} = \left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1} \overrightarrow{w_2}, n} \right) =$$

$$= \overrightarrow{(w_1, m_1)} \text{ ђ } \overrightarrow{(w_2, m_2)} = (w_1, m_1)\delta \text{ ђ } (w_2, m_2)\delta \,.$$

Аналогічно перевіряються підвипадки (3.34) та (3.35).

У підвипадку (3.36) маємо

$$(w_1w_2, l_{w_1} + m_2)\delta = (\overrightarrow{w_1w_2}, n) = (\overrightarrow{w_1}, n) = \left(\overrightarrow{\overrightarrow{w_1}\,\overrightarrow{w_2}, n}\right) =$$

$$= (\overrightarrow{w_1}, n) \dashv (\overrightarrow{w_2}, n) = (w_1, m_1)\delta \dashv (w_2, m_2)\delta .$$

Отже, $((w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2))\delta = (w_1, m_1)\delta \dashv (w_2, m_2)\delta$ для всіх (w_1, m_1), $(w_2, m_2) \in \hat{F}[X]$. Таким чином, δ – гомоморфізм. Очевидно, що δ – сюр'єкція. Оскільки $FD_n^l(X)$ – вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд (див. теорему п. 3.2.4), то Δ_δ – найменша ліва n-дінільпотентна конгруенція на $\hat{F}[X]$.

Теорему доведено.

Відзначимо, що для того, щоб побудувати вільні праві n-дінільпотентні дімоноїди, а також охарактеризувати найменшу праву n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді та групу автоморфізмів вільного правого n-дінільпотентного дімоноїда, необхідно скористатися принципом двоїстості.

Вивчення найменших напівгрупових конгруенцій на дімоноїдах, тобто найменших конгруенцій, для яких фактор-дімоноїди є напівгрупами, є корисним при побудові вільних добутків дімоноїдів заданого класу (див. [53]).

Висновки до розділу 3

У цьому розділі розглянуто зв'язки між дімоноїдами і рестриктивними бінапівгрупами, розглянутими Б. М. Шайном, між комутативними дімоноїдами і доппельалгебрами, розглянутими Б. Ріхтер, а також між комутативними дімоноїдами та інтерасоціативністю і сильною інтерасоціативністю напівгрупи. Введено ліві (праві) n-дінільпотентні дімоноїди, тобто дімоноїди, які задовольняють двом додатковим тотожностям. Для вказаних многовидів побудовано вільні об'єкти, охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді та окремо розглянуто вільні ліві (праві) n-дінільпотентні дімоноїди рангу 1. Крім того, встановлено, що група автоморфізмів вільного лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда ізоморфна симетричній групі.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [46, 55].

РОЗДІЛ 4

g-ДІМОНОЇДИ

Нагадаємо, що діалгеброю називається векторний простір над полем, наділений двома бінарними білінійними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють наступні аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \ (D1)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \ (D2)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \ (D3)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \ (D4)$$

$$(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z). \ (D5)$$

Це поняття було введено Ж.-Л. Лоде [24] під час вивчення феномену періодичності в алгебраїчній K-теорії. Алгебри Лейбніца є некомутативною версією алгебр Лі, а діалгебри – версією асоціативних алгебр. Нагадаємо, що будь-яка асоціативна алгебра дає алгебру Лі, якщо покласти $[x, y] = xy - yx$. Діалгебри пов'язані з алгебрами Лейбніца аналогічно тому як пов'язані між собою асоціативні алгебри і алгебри Лі. Діалгебра є лінійним аналогом дімоноїда. Якщо операції дімоноїда збігаються, то він перетворюється в напівгрупу. Таким чином, дімоноїди узагальнюють напівгрупи.

О. П. Пожидаєв [44] і П. С. Колесников [26] розглянули поняття 0-діалгебри, тобто векторного простору над полем, наділеного двома бінарними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють аксіоми: $(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z, \ x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z)$. Це поняття пов'язано з алгебрами Рота–Бакстера, а саме відома структура алгебр Рота–Бакстера, які виникають на 0-діалгебрах [44].

Поняття асоціативної 0-діалгебри, тобто 0-діалгебри з двома бінарними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють аксіоми $(D1)$ і $(D5)$, є лінійним аналогом поняття узагальненого дімоноїда (або просто g-дімоноїда для стислості), розглянутого в [45]. Для того, щоб отримати g-дімоноїд, необхідно опустити аксіому ($D3$) внутрішньої асоціативності у визначенні дімоноїда. Аксіоми дімоноїда і g-дімоноїда з’являються в тотожностях триалгебр і тріоїдів, введених Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко [9]. Клас усіх g-дімоноїдів утворює многовид. Вільний об’єкт у многовиді g-дімоноїдів побудовано в [45]. Неважко побачити, що всі результати, отримані для g-дімоноїдів, можуть бути застосовані для асоціативних 0-діалгебр.

У цьому розділі вивчаються g-дімоноїди. Розглянуто g-дімоноїд, який є ізоморфним вільному g-дімоноїду, та побудовано вільний n-нільпотентний g-дімоноїд. Представлено найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному g-дімоноїді та наведено численні приклади g-дімоноїдів. Побудовано вільний комутативний g-дімоноїд, а також описано найменшу комутативну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [47, 48, 52, 54].

4.1. Приклади g-дімоноїдів

У цьому підрозділі наведено приклади g-дімоноїдів.

4.1.1. У наступних пунктах показано, що існують g-дімоноїди, які не задовольняють аксіому ($D3$) [52].

а) Очевидно, що будь-який дімоноїд є g-дімоноїдом.

б) Нехай X – довільна непорожня множина, $|X|>1$ та нехай X^* – множина всіх скінченних непорожніх слів в алфавіті X. Позначаючи першу (відповідно, останню) літеру слова $w \in X^*$ через $w^{(0)}$ (відповідно, через $w^{(1)}$), визначимо операції ” та ђ на X^* за правилами: w ” $u = w^{(0)}$, w ђ $u = u^{(1)}$ для всіх $w,u \in X^*$. З доведення теореми 2 [84] випливає, що $(X^*,\dashv,\vdash)$ є g-дімоноїдом, але не є дімоноїдом.

в) Нехай $\{D_i\}_{i\in I}$ – сім'я довільних g-дімоноїдів $D_i, i \in I$, і нехай $\overline{\prod}_{i\in I} D_i$ – набір усіх функцій $f : I \to \bigcup_{i\in I} D_i$ таких, що $if \in D_i$ для будь-яких $i \in I$.

Легко довести таку лему.

Лема. $\overline{\prod}_{i\in I} D_i$ з операціями, що визначаються за правилами:

$$i(f_1 \dashv f_2) = if_1 \dashv if_2, \quad i(f_1 \vdash f_2) = if_1 \vdash if_2, \tag{4.1}$$

де $i \in I$, $f_1, f_2 \in \overline{\prod}_{i\in I} D_i$, є g-дімоноїдом.

Отримана алгебра називається декартовим добутком g-дімоноїдів $D_i, i \in I$. Декартовий добуток скінченного числа g-дімоноїдів $D_1, D_2, \ldots, D_n$ позначається через $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$. Зокрема, декартова ступінь g-дімоноїда може бути визначена таким чином. Нехай V – довільний g-дімоноїд і X – довільна непорожня множина. Позначимо через $Map(X;V)$ множину всіх відображень $X \to V$. Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на $Map(X;V)$ за правилами (4.1) для всіх $f_1, f_2 \in Map(X;V)$ та $i \in X$. Тоді $(Map(X;V),\dashv,\vdash)$ є g-дімоноїдом, який називається декартовим степенем V.

4.1.2. Як зазвичай, $\mathbb{N}$ позначає множину всіх натуральних чисел.

Нехай $F[X]$ – вільна напівгрупа в алфавіті X. На відміну від попередніх розділів для зручності позначатимемо довжину слова $w \in F[X]$ через $l(w)$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на $F[X] \times \mathbb{N}$ за правилами:

$$(w_1, m_1) \dashv (w_2, m_2) = (w_1 w_2, n),$$

$$(w_1, m_1) \vdash (w_2, m_2) = (w_1 w_2, l(w_1) + m_2)$$

для всіх $(w_1,m_1),(w_2,m_2)\in F[X]\times N$. Позначимо алгебру $(F[X]\times N,\dashv,\vdash)$ через XN_n.

Лема. Алгебра XN_n є g-дімоноїдом, але не є дімоноїдом.

Доведення. Безпосередньо перевіряється, що XN_n є g-дімоноїдом. Покажемо, що це не дімоноїд. Для всіх $(w_1,m_1),(w_2,m_2),(w_3,m_3)\in XN_n$ отримаємо

$$((w_1,m_1)\vdash(w_2,m_2))\dashv(w_3,m_3)=(w_1w_2,l(w_1)+m_2)\dashv(w_3,m_3)=$$
$$=(w_1w_2w_3,n)\neq(w_1w_2w_3,l(w_1)+n)=(w_1,m_1)\vdash(w_2w_3,n)=$$
$$=(w_1,m_1)\vdash((w_2,m_2)\dashv(w_3,m_3)).$$

Лему доведено.

4.1.3. Нехай S – довільна напівгрупа, $a,b\in S$. Через E_S позначимо множину всіх ідемпотентів S. Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на S, поклавши

$$x\dashv y=ax,\quad x\vdash y=by$$

для всіх $x,y\in S$. Позначимо алгебру $(S,\dashv,\vdash)$ через $S(a,b)$.

Лема. Нехай S – довільна напівгрупа з правим скороченням, $a,b\in E_S$.

(i) Якщо a і b не комутують, то $S(a,b)$ є g-дімоноїдом, але не є дімоноїдом.

(ii) Якщо a і b комутують, то $S(a,b)$ є дімоноїдом.

Доведення. (i) Аксіоми $(D1)$, $(D2)$, $(D4)$, $(D5)$ перевіряються безпосередньо. Крім того,

$$(x\vdash y)\dashv z=by\dashv z=aby,\quad x\vdash(y\dashv z)=x\vdash ay=bay$$

для всіх $x,y,z\in S$. Припустимо, що $aby=bay$. Тоді, за допомогою правої скороченості, отримуємо $ab=ba$. Таким чином, ми приходимо до протиріччя, тобто припущення, що $aby=bay$ є невірним. Отже, $S(a,b)$ не є дімоноїдом.

(ii) Якщо a і b комутують, то, очевидно, всі аксіоми дімоноїда виконуються.

Лему доведено.

4.1.4. Нехай S – довільна напівгрупа, $a,b \in S$. Визначимо операції ” і ђ на S, поклавши

$$x \text{”} y = xa, \quad x \text{ђ} y = yb$$

для всіх $x, y \in S$. Позначимо алгебру $(S,\text{”},\text{ђ})$ через $S[a,b]$.

Аналогічно лемі п. 4.1.3 можна довести таку лему.

Лема. Нехай S – довільна напівгрупа з лівим скороченням, $a,b \in E_S$.

(i) Якщо a і b не комутують, то $S[a,b]$ є g-дімоноїдом, але не є дімоноїдом.

(ii) Якщо a і b комутують, то $S[a,b]$ є дімоноїдом.

4.1.5. Нехай S – довільна напівгрупа, $a,b \in S$. Визначимо операції ” і ђ на S, поклавши

$$x \text{”} y = axb, \quad x \text{ђ} y = ayb$$

для всіх $x, y \in S$. Позначимо алгебру $(S,\text{”},\text{ђ})$ через $S(a,b]$.

Наступну лему можна довести аналогічно лемі п. 4.1.3.

Лема. Якщо $a,b \in E_S$, то $S(a,b]$ є дімоноїдом.

4.1.6. Нехай Y – довільна непорожня множина, $S = S_Y$ – деякий моноїд, визначений на множині скінченних слів в алфавіті Y, і $\theta \in S$ – порожнє слово, яке є одиницею в S. Позначимо операцію на S через $*$ і довжину слова $w \in S$ через $l(w)$. За визначенням $l(\theta) = 0$, $u^0 = \theta$ для всіх $u \in S$. Зафіксуємо елементи $a, b \in Y$, $k \in \mathrm{N} \cup 0$ і визначимо операції ” і ђ на S, поклавши

$$u_1 \text{”} u_2 = u_1 * a^{l(u_2)+k}, \quad u_1 \text{ђ} u_2 = u_2 * b^{l(u_1)+k}$$

для всіх $u_1, u_2 \in S$. Отриману алгебру будемо позначати через $S_a^b(k)$.

Лема. Нехай T – вільний моноїд в алфавіті Y. Тоді для будь-яких $a,b \in Y$, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ алгебра $T_a^b(k)$ є g-дімоноїдом. Якщо $a \neq b$, то вона не є дімоноїдом.

Доведення. Нехай $u_1, u_2, u_3 \in T_a^b(k)$. Для того, щоб довести, що $T_a^b(k)$ – g-дімоноїд, розглянемо такі випадки.

Випадок 1. Нехай $u_1 \neq \theta, \quad u_2 \neq \theta, \quad u_3 \neq \theta$. Тоді

$$u_1 \text{”} (u_2 \text{”} u_3) = u_1 \text{”} (u_2 * a^{l(u_3)+k}) =$$

$$= u_1 * a^{l(u_2 a^{l(u_3)+k})+k} = u_1 * a^{l(u_2)+l(u_3)+2k} =$$

$$= u_1 * a^{l(u_2)+k} * a^{l(u_3)+k} = (u_1 * a^{l(u_2)+k}) \text{”} u_3 = (u_1 \text{”} u_2) \text{”} u_3,$$

$$u_1 \text{”} (u_2 \text{ђ} u_3) = u_1 \text{”} (u_3 * b^{l(u_2)+k}) =$$

$$= u_1 * a^{l(u_3 b^{l(u_2)+k})+k} = u_1 * a^{l(u_3)+l(u_2)+2k},$$

$$u_1 \text{ђ} (u_2 \text{ђ} u_3) = u_1 \text{ђ} (u_3 * b^{l(u_2)+k}) =$$

$$= u_3 * b^{l(u_2)+k} * b^{l(u_1)+k} = u_3 * b^{l(u_2)+l(u_1)+2k} =$$

$$= u_3 * b^{l(u_2 b^{l(u_1)+k})+k} = (u_2 * b^{l(u_1)+k}) \text{ђ} u_3 = (u_1 \text{ђ} u_2) \text{ђ} u_3,$$

$$(u_1 \text{”} u_2) \text{ђ} u_3 = (u_1 * a^{l(u_2)+k}) \text{ђ} u_3 =$$

$$= u_3 * b^{l(u_1 a^{l(u_2)+k})+k} = u_3 * b^{l(u_1)+l(u_2)+2k}.$$

Випадок 2. Нехай $u_1 = u_2 = u_3 = \theta$. Тоді

$$\theta \text{”} (\theta \text{”} \theta) = \theta \text{”} (\theta * a^{l(\theta)+k}) = \theta \text{”} a^k = \theta * a^{l(a^k)+k} = a^{2k} =$$

$$= a^k * a^{l(\theta)+k} = a^k \text{”} \theta = (\theta * a^{l(\theta)+k}) \text{”} \theta = (\theta \text{”} \theta) \text{”} \theta,$$

$$\theta \text{”} (\theta \text{ђ} \theta) = \theta \text{”} (\theta * b^{l(\theta)+k}) = \theta \text{”} b^k = \theta * a^{l(b^k)+k} = a^{2k},$$

$$\theta \text{ђ} (\theta \text{ђ} \theta) = \theta \text{ђ} (\theta * b^{l(\theta)+k}) = \theta \text{ђ} b^k = b^k * b^{l(\theta)+k} = b^{2k} =$$

$$= \theta * b^{l(b^k)+k} = b^k \text{ђ} \theta = (\theta * b^{l(\theta)+k}) \text{ђ} \theta = (\theta \text{ђ} \theta) \text{ђ} \theta,$$

$$(\theta \text{”} \theta) \text{ђ} \theta = (\theta * a^{l(\theta)+k}) \text{ђ} \theta = a^k \text{ђ} \theta = \theta * b^{l(a^k)+k} = b^{2k}.$$

Випадок 3. Нехай $u_1 = \theta, \quad u_2 \neq \theta, \quad u_3 \neq \theta$. Тоді

$$\theta \text{”} (u_2 \text{”} u_3) = \theta \text{”} (u_2 * a^{l(u_3)+k}) = \theta * a^{l(u_2 a^{l(u_3)+k})+k} = a^{l(u_2)+l(u_3)+2k} =$$

$$= a^{l(u_2)+k} * a^{l(u_3)+k} = (\theta * a^{l(u_2)+k}) \text{”} u_3 = (\theta \text{”} u_2) \text{”} u_3,$$

$$\theta ” (u_2 ђ\, u_3) = \theta ” (u_3 * b^{l(u_2)+k}) = \theta * a^{l(u_3 b^{l(u_2)+k})+k} = a^{l(u_2)+l(u_3)+2k},$$

$$\theta ђ\, (u_2 ђ\, u_3) = \theta ђ\, (u_3 * b^{l(u_2)+k}) = u_3 * b^{l(u_2)+k} * b^{l(\theta)+k} = u_3 * b^{l(u_2)+2k} =$$

$$= u_3 * b^{l(u_2 * b^{l(\theta)+k})+k} = (u_2 * b^{l(\theta)+k})\, ђ\, u_3 = (\theta ђ\, u_2)\, ђ\, u_3,$$

$$(\theta ” u_2)\, ђ\, u_3 = (\theta * a^{l(u_2)+k})\, ђ\, u_3 = u_3 * b^{l(a^{l(u_2)+k})+k} = u_3 * b^{l(u_2)+2k}.$$

Випадок 4. Нехай $u_1 = \theta, \quad u_2 \neq \theta, \quad u_3 = \theta$. Тоді

$$\theta ” (u_2 ” \theta) = \theta ” (u_2 * a^{l(\theta)+k}) = \theta ” (u_2 * a^k) = \theta * a^{l(u_2 * a^k)+k} = a^{l(u_2)+2k} =$$

$$= a^{l(u_2)+k} * a^{l(\theta)+k} = (\theta * a^{l(u_2)+k}) ” \theta = (\theta ” u_2) ” \theta,$$

$$\theta ” (u_2 ђ\, \theta) = \theta ” (\theta * b^{l(u_2)+k}) = \theta * a^{l(b^{l(u_2)+k})+k} = a^{l(u_2)+2k},$$

$$\theta ђ\, (u_2 ђ\, \theta) = \theta ђ\, (\theta * b^{l(u_2)+k}) = b^{l(u_2)+k} * b^{l(\theta)+k} = b^{l(u_2)+2k} =$$

$$= \theta * b^{l(u_2 * b^k)+k} = (u_2 * b^{l(\theta)+k})\, ђ\, \theta = (\theta ђ\, u_2)\, ђ\, \theta,$$

$$(\theta ” u_2)\, ђ\, \theta = (\theta * a^{l(u_2)+k})\, ђ\, \theta = \theta * b^{l(a^{l(u_2)+k})+k} = b^{l(u_2)+2k}.$$

Аналогічно розглядаються випадки $u_1 \neq \theta, u_2 = \theta, u_3 \neq \theta$; $u_1 \neq \theta, u_2 \neq \theta, u_3 = \theta$; $u_1 = u_2 = \theta, u_3 \neq \theta$; $u_1 \neq \theta, u_2 = u_3 = \theta$.

Таким чином, $T_a^b(k)$ – g-дімоноїд.

Нарешті, покажемо, що $T_a^b(k)$ не є дімоноїдом при $a \neq b$. Для $u_1 \neq \theta$, $u_2 \neq \theta$ і $u_3 \neq \theta$ маємо

$$(u_1 ђ\, u_2) ” u_3 = (u_2 * b^{l(u_1)+k}) ” u_3 = u_2 * b^{l(u_1)+k} * a^{l(u_3)+k} =$$

$$= u_2 b^{l(u_1)+k} a^{l(u_3)+k} \neq u_2 a^{l(u_3)+k} b^{l(u_1)+k} =$$

$$= u_2 * a^{l(u_3)+k} * b^{l(u_1)+k} = u_1\, ђ\, (u_2 * a^{l(u_3)+k}) = u_1\, ђ\, (u_2 ” u_3)$$

і отже, аксіома $(D3)$ дімоноїда не виконується.

Лему доведено.

4.1.7. Наступна лема дає відповідь на питання, коли $S_a^b(k)$ є дімоноїдом.

Лема. Нехай M – вільний комутативний моноїд в алфавіті Y. Для будь-яких $a,b\in Y$, $k\in \mathrm{N}\cup\{0\}$ алгебри $M_a^b(k)$ і $T_a^a(k)$ є дімоноїдами.

Доведення. З леми п. 4.1.6 випливає, що $M_a^b(k)$ задовольняє аксіоми $(D1)$, $(D2)$, $(D4)$, $(D5)$. Покажемо, що аксіома $(D3)$ також виконується.

Нехай $u_1,u_2,u_3\in M_a^b(k)$. Розглянемо наступні вісім випадків.

Випадок 1. Нехай $u_1\neq\theta,\quad u_2\neq\theta,\quad u_3\neq\theta$. Тоді

$$(u_1 \text{ ђ } u_2)\text{”}\, u_3=(u_2*b^{l(u_1)+k})\text{”}\, u_3=u_2*b^{l(u_1)+k}*a^{l(u_3)+k}=$$

$$=u_2*a^{l(u_3)+k}*b^{l(u_1)+k}=u_1 \text{ ђ } (u_2*a^{l(u_3)+k})=u_1 \text{ ђ } (u_2\text{”}\, u_3).$$

Випадок 2. Нехай $u_1=u_2=u_3=\theta$. Тоді

$$(\theta \text{ ђ } \theta)\text{”}\, \theta=(\theta*b^{l(\theta)+k})\text{”}\, \theta=b^k\text{”}\, \theta=b^k*a^{l(\theta)+k}=b^k*a^k=$$

$$=a^k*b^k=a^k*b^{l(\theta)+k}=\theta \text{ ђ } a^k=\theta \text{ ђ } (\theta*a^{l(\theta)+k})=\theta \text{ ђ } (\theta\text{”}\, \theta).$$

Випадок 3. Нехай $u_1=\theta,\quad u_2\neq\theta,\quad u_3\neq\theta$. Тоді

$$(\theta \text{ ђ } u_2)\text{”}\, u_3=(u_2*b^{l(\theta)+k})\text{”}\, u_3=u_2*b^{l(\theta)+k}*a^{l(u_3)+k}=u_2*b^k*a^{l(u_3)+k}=$$

$$=u_2*a^{l(u_3)+k}*b^k=u_2*a^{l(u_3)+k}*b^{l(\theta)+k}=\theta \text{ ђ } (u_2*a^{l(u_3)+k})=\theta \text{ ђ } (u_2\text{”}\, u_3).$$

Випадок 4. Нехай $u_1\neq\theta,\quad u_2=\theta,\quad u_3\neq\theta$. Тоді

$$(u_1 \text{ ђ } \theta)\text{”}\, u_3=(\theta*b^{l(u_1)+k})\text{”}\, u_3=b^{l(u_1)+k}*a^{l(u_3)+k}=$$

$$=a^{l(u_3)+k}*b^{l(u_1)+k}=u_1 \text{ ђ } (\theta*a^{l(u_3)+k})=u_1 \text{ ђ } (\theta\text{”}\, u_3).$$

Випадок 5. Нехай $u_1\neq\theta,\quad u_2\neq\theta,\quad u_3=\theta$. Тоді

$$(u_1 \text{ ђ } u_2)\text{”}\, \theta=(u_2*b^{l(u_1)+k})\text{”}\, \theta=u_2*b^{l(u_1)+k}*a^{l(\theta)+k}=u_2*b^{l(u_1)+k}*a^k=$$

$$=u_2*a^k*b^{l(u_1)+k}=u_1 \text{ ђ } (u_2*a^{l(\theta)+k})=u_1 \text{ ђ } (u_2\text{”}\, \theta).$$

Випадок 6. Нехай $u_1=u_2=\theta,\quad u_3\neq\theta$. Тоді

$$(\theta \text{ ђ } \theta)\text{”}\, u_3=(\theta*b^{l(\theta)+k})\text{”}\, u_3=b^k\text{”}\, u_3=b^k*a^{l(u_3)+k}=$$

$$=a^{l(u_3)+\mathrm{k}}*b^k=a^{l(u_3)+\mathrm{k}}*b^{l(\theta)+k}=\theta \text{ ђ } (\theta*a^{l(u_3)+k})=\theta \text{ ђ } (\theta\text{”}\, u_3).$$

Випадок 7. Нехай $u_1\neq\theta,\quad u_2=u_3=\theta$. Тоді

$$(u_1 \text{ ђ } \theta)\text{”}\, \theta=(\theta*b^{l(u_1)+k})\text{”}\, \theta=b^{l(u_1)+k}*a^{l(\theta)+k}=b^{l(u_1)+k}*a^k=$$

$$= a^k * b^{l(u_1)+k} = u_1 \vdash a^k = u_1 \vdash (\theta * a^{l(\theta)+k}) = u_1 \vdash (\theta \dashv \theta).$$

Випадок 8. Нехай $u_1 = \theta, \quad u_2 \neq \theta, \quad u_3 = \theta$. Тоді

$$(\theta \vdash u_2) \dashv \theta = (u_2 * b^{l(\theta)+k}) \dashv \theta = u_2 * b^k * a^{l(\theta)+k} = u_2 * b^k * a^k =$$

$$= u_2 * a^k * b^k = u_2 * a^k * b^{l(\theta)+k} = \theta \vdash (u_2 * a^{l(\theta)+k}) = \theta \vdash (u_2 \dashv \theta).$$

Таким чином, $M_a^b(k)$ – дімоноїд.

Доведення таке ж саме для $T_a^a(k)$.

Лему доведено.

Відзначимо, що незалежність аксіом g-дімоноїда випливає з незалежності аксіом дімоноїда (див. [84], теорема 2).

4.2. Вільні g-дімоноїди

У цьому підрозділі побудовано g-дімоноїд, ізоморфний вільному g-дімоноїду довільного рангу, і зокрема, розглянуто вільні g-дімоноїди рангу 1.

4.2.1. Непорожня підмножина A g-дімоноїда $(D, \dashv, \vdash)$ називається g-піддімоноїдом, якщо для будь-яких $a, b \in D$ з того, що $a, b \in A$ випливає $a \dashv b, a \vdash b \in A$.

Відзначимо, що клас усіх g-дімоноїдів є многовидом, оскільки він є замкнутим щодо взяття гомоморфних образів, g-піддімоноїдів і декартових добутків. g-Дімоноїд, вільний в многовиді g-дімоноїдів, називатимемо вільним g-дімоноїдом.

Для того, щоб довести основний результат цього підрозділу, необхідно побудувати вільний g-дімоноїд з [45].

Нехай e – довільний символ. Розглянемо наступні множини:

$$I^1 = \{e\}, \; I^n = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \mid \varepsilon_k \in \{0,1\}, 1 \le k \le n-1\}, \; n > 1,$$

$$I = \bigcup_{n \geq 1} I^n .$$

Якщо $l = 0$, то будемо вважати порожньою послідовність $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l$ без дужок, а послідовність $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_l)$ з дужками як e. Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на I, поклавши

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \dashv (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m}),$$

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \vdash (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}) = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}).$$

За лемою 3 з [45] $(I, \dashv, \vdash)$ – g-дімоноїд. Зауважимо, що $e \dashv e = (1), e \vdash e = (0)$ і $(I, \dashv, \vdash)$ не є дімоноїдом.

Нехай X – довільна непорожня множина і, як і раніше, $F[X]$ – вільна напівгрупа в алфавіті X. Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на $FG = \{(w, \varepsilon) \mid w \in F[X], \varepsilon \in I^{l(w)}\}$ за правилами:

$$(w_1, \varepsilon) \dashv (w_2, \xi) = (w_1 w_2, \varepsilon \dashv \xi),$$

$$(w_1, \varepsilon) \vdash (w_2, \xi) = (w_1 w_2, \varepsilon \vdash \xi)$$

для всіх $(w_1, \varepsilon), (w_2, \xi) \in FG.$ Алгебру $(FG, \dashv, \vdash)$ позначимо через $FG[X]$. За теоремою 4 з [45] $FG[X]$ – вільний g-дімоноїд.

Використовуючи позначення пункту 4.1.6, введемо множину

$$XT_a^b(k) = \{(w, u) \in F[X] \times T_a^b(k) \mid l(w) - l(u) = 1\}.$$

Якщо $s = 1$, будемо вважати послідовність $y_1 y_2 \ldots y_{s-1} \in T_a^b(k)$ як θ.

Основним результатом цього підрозділу є така теорема.

Теорема. g-Дімоноїд $XT_a^b(1)$ є вільним, якщо $|Y| = 2$ і $a \neq b$.

Доведення. За лемою п. 4.1.1 $F[X] \times T_a^b(k)$ – g-дімоноїд. Неважко перевірити, що $XT_a^b(1)$ є g-піддімоноїдом з $F[X] \times T_a^b(1)$.

Нехай $|Y| = 2$ і $a \neq b$. Покажемо, що $XT_a^b(1)$ є вільним. Візьмемо $(x_1 x_2 \ldots x_s, y_1 y_2 \ldots y_{s-1}) \in XT_a^b(1)$, де $x_i \in X$, $1 \leq i \leq s$, $y_j \in Y$, $1 \leq j \leq s-1$, і визначимо відображення

$$\pi : XT_a^b(1) \to FG[X]:$$

$$(x_1x_2\ldots x_s, y_1y_2\ldots y_{s-1}) \mapsto (x_1x_2\ldots x_s, y_1y_2\ldots y_{s-1})\pi,$$

поклавши

$$(x_1x_2\ldots x_s, y_1y_2\ldots y_{s-1})\pi = (x_1x_2\ldots x_s, (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_{s-1})),$$

де

$$\tilde{y}_i = \begin{cases} 1, & y_i = a, \\ 0, & y_i = b \end{cases}$$

для всіх $1 \le i \le s-1$, $s \ne 1$, і $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_{s-1})$ дорівнює e при $s = 1$. Покажемо, що $\pi -$ ізоморфізм.

Для всіх

$$(x_1x_2\ldots x_s, y_1y_2\ldots y_{s-1}), (a_1a_2\ldots a_m, b_1b_2\ldots b_{m-1}) \in XT_a^b(1),$$

де $a_i \in X$, $1 \le i \le m$, $b_j \in Y$, $1 \le j \le m-1$, отримуємо

$$((x_1x_2\ldots x_s, y_1y_2\ldots y_{s-1}) \dashv (a_1a_2\ldots a_m, b_1b_2\ldots b_{m-1}))\pi =$$

$$= (x_1x_2\ldots x_s a_1a_2\ldots a_m, y_1y_2\ldots y_{s-1} * a^m)\pi =$$

$$= \left(x_1x_2\ldots x_s a_1a_2\ldots a_m, (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_{s-1}, \underbrace{\tilde{a}, \tilde{a}, \ldots, \tilde{a}}_{m}) \right) =$$

$$= \left(x_1x_2\ldots x_s a_1a_2\ldots a_m, (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_{s-1}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m}) \right) =$$

$$= (x_1x_2\ldots x_s, (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_{s-1})) \dashv (a_1a_2\ldots a_m, (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_{m-1})) =$$

$$= (x_1x_2\ldots x_s, y_1y_2\ldots y_{s-1})\pi \dashv (a_1a_2\ldots a_m, b_1b_2\ldots b_{m-1})\pi,$$

$$((x_1x_2\ldots x_s, y_1y_2\ldots y_{s-1}) \vdash (a_1a_2\ldots a_m, b_1b_2\ldots b_{m-1}))\pi =$$

$$= (x_1x_2\ldots x_s a_1a_2\ldots a_m, b_1b_2\ldots b_{m-1} * b^s)\pi =$$

$$= \left(x_1x_2\ldots x_s a_1a_2\ldots a_m, (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_{m-1}, \underbrace{\tilde{b}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{b}}_{s}) \right) =$$

$$= \left(x_1x_2\ldots x_s a_1a_2\ldots a_m, (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_{m-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{s}) \right) =$$

$$= (x_1x_2\ldots x_s, (\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\ldots,\tilde{y}_{s-1})) \vdash (a_1a_2\ldots a_m, (\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\ldots,\tilde{b}_{m-1})) =$$

$$= (x_1x_2\ldots x_s, y_1y_2\ldots y_{s-1})\pi \vdash (a_1a_2\ldots a_m, b_1b_2\ldots b_{m-1})\pi .$$

Отже, π– гомоморфізм. Очевидно, π – бієкція і, таким чином, π – ізоморфізм. Звідси отримуємо, що $XT_a^b(1)$ є вільним g-дімоноїдом.

Теорему доведено.

4.2.2. Наступна лема встановлює одну властивість алгебри $S_a^b(k)$.

Лема. Якщо $S_a^b(k)$ – дімоноїд, то a^k і b^k комутують в S.

Доведення. Нехай $S_a^b(k)$ – дімоноїд. Тоді

$$(\theta \vdash \theta) \dashv \theta = (\theta * b^{l(\theta)+k}) \dashv \theta = b^k \dashv \theta = b^k * a^{l(\theta)+k} = b^k * a^k ,$$

$$\theta \vdash (\theta \dashv \theta) = \theta \vdash (\theta * a^{l(\theta)+k}) = \theta \vdash a^k = a^k * b^{l(\theta)+k} = a^k * b^k$$

та, використовуючи аксіому $(D3)$, отримуємо $b^k * a^k = a^k * b^k$.

Лему доведено.

4.2.3. Тепер побудуємо g-дімоноїд, який є ізоморфним вільному g-дімоноїду рангу 1. Будемо використовувати позначення п. 4.1.6.

Нехай $|Y| = 2$, $a \neq b$. Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на

$$\widetilde{\mathrm{N}T}{}_a^b(1) = \{(m,u) \in \mathrm{N} \times T_a^b(1) \mid m - l(u) = 1\},$$

поклавши

$$(m_1,u_1) \dashv (m_2,u_2) = (m_1 + m_2, u_1 * a^{l(u_2)+1}),$$

$$(m_1,u_1) \vdash (m_2,u_2) = (m_1 + m_2, u_2 * b^{l(u_1)+1})$$

для всіх $(m_1,u_1), (m_2,u_2) \in \widetilde{\mathrm{N}T}{}_a^b(1)$. За лемою п. 4.1.1 $(\mathrm{N},+) \times T_a^b(1)$ є g-дімоноїдом. Безпосередня перевірка показує, що операції $\dashv$ і $\vdash$ є коректно визначеними. Таким чином, $(\widetilde{\mathrm{N}T}{}_a^b(1), \dashv, \vdash)$– g-піддімоноїд з $(\mathrm{N},+) \times T_a^b(1)$. Позначимо його через $\mathrm{N}T_a^b(1)$.

Лема. Вільний g-дімоноїд рангу 1 є ізоморфним g-дімоноїду $\mathrm{N}T_a^b(1)$.

Доведення. Нехай $X = \{r\}$. Легка перевірка показує, що відображення

$$\xi : XT_a^b(1) \to \mathrm{N}T_a^b(1),$$

визначене за правилом $\omega\xi = (k,u) \Leftrightarrow \omega = (r^k, u)$, є ізоморфізмом.

Лему доведено.

4.3. Вільні n-нільпотентні g-дімоноїди

У цьому підрозділі введено поняття n-нільпотентного g-дімоноїду, побудовано вільний n-нільпотентний g-дімоноїд довільного рангу та окремо розглянуто вільні n-нільпотентні g-дімоноїди рангу 1. Також охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

4.3.1. Елемент 0 g-дімоноїда $(D,\text{”},\text{ђ})$ будемо називати нулем, якщо $x \,\text{е}\, 0 = 0 = 0 \,\text{е}\, x$ для всіх $x \in D$ і $\text{е} \in \{\text{”},\text{ђ}\}$.

g-Дімоноїд $(D,\text{”},\text{ђ})$ з нулем називатимемо нільпотентним, якщо для деякого $n \in \mathrm{N}$ і будь-яких $x_i \in D$, $1 \le i \le n+1$, і $*_j \in \{\text{”},\text{ђ}\}$, $1 \le j \le n$, будь-яка розстановка дужок у

$$x_1 *_1 x_2 *_2 \mathrm{K} *_n x_{n+1} \tag{4.2}$$

дає $0 \in D$. Найменше серед таких n будемо називати індексом нільпотентності $(D,\text{”},\text{ђ})$. Для $k \in \mathrm{N}$ нільпотентний g-дімоноїд індексу нільпотентності $\le k$ називатимемо k-нільпотентним.

Відзначимо, що з (4.2) випливає, що операції будь-якого 1-нільпотентного g-дімоноїда збігаються, та сам він є напівгрупою з нулем.

Неважко побачити, що клас усіх n-нільпотентних g-дімоноїдів є підмноговидом многовиду g-дімоноїдів. g-Дімоноїд, який є вільним у многовиді n-нільпотентних g-дімоноїдів, будемо називати вільним n-нільпотентним g-дімоноїдом.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і, використовуючи позначення підрозділу 4.2, покладемо

$$G_n = \{(w,u) \in XT_a^b(1) \mid l(w) \le n\} \cup \{0\} \quad (|Y| = 2,\ a \ne b).$$

Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на G_n за правилами:

$$(w_1,u_1) \dashv (w_2,u_2) = \begin{cases} (w_1w_2,\ u_1 * a^{l(u_2)+1}), & l(w_1w_2) \le n, \\ 0, & l(w_1w_2) > n, \end{cases}$$

$$(w_1,u_1) \vdash (w_2,u_2) = \begin{cases} (w_1w_2,\ u_2 * b^{l(u_1)+1}), & l(w_1w_2) \le n, \\ 0, & l(w_1w_2) > n, \end{cases}$$

$$(w_1,u_1) \ast 0 = 0 \ast (w_1,u_1) = 0 \ast 0 = 0$$

для всіх $(w_1,u_1),(w_2,u_2) \in G_n \setminus \{0\}$ і $\ast \in \{\dashv, \vdash\}$. Алгебру $(G_n, \dashv, \vdash)$ будемо позначати через $G_n(X)$.

Теорема. $G_n(X)$ – вільний n-нільпотентний g-дімоноїд.

Доведення. Доведемо, що $G_n(X)$ – g-дімоноїд. Нехай (w_1,u_1), $(w_2,u_2),(w_3,u_3) \in G_n \setminus \{0\}$. Якщо $l(w_1w_2) > n$ або $l(w_2w_3) > n$, то доведення є очевидним. Той факт, що аксіоми g-дімоноїда виконуються, якщо $l(w_1w_2w_3) \le n$, випливає з теореми п. 4.2.1. У випадку $l(w_1w_2) \le n$, $l(w_2w_3) \le n$ і $l(w_1w_2w_3) > n$ маємо

$$((w_1,u_1) *_1 (w_2,u_2)) *_2 (w_3,u_3) = 0 = (w_1,u_1) *_1 ((w_2,u_2) *_2 (w_3,u_3))$$

для $*_1, *_2 \in \{\dashv, \vdash\}$. Доведення інших випадків очевидні. Таким чином, $G_n(X)$ – g-дімоноїд.

Для будь-яких $(w_i,u_i) \in G_n \setminus \{0\}$, $1 \le i \le n+1$, і $*_j \in \{\dashv, \vdash\}$, $1 \le j \le n$, будь-яка розстановка дужок у

$$(w_1,u_1) *_1 (w_2,u_2) *_2 \ldots *_n (w_{n+1},u_{n+1})$$

дає 0, отже, $G_n(X)$ є нільпотентним. Крім того, для будь-якого $(x_i,\theta) \in G_n \setminus \{0\}$, де $x_i \in X$, $1 \le i \le n$,

$$(x_1,\theta) \dashv (x_2,\theta) \dashv \ldots \dashv (x_n,\theta) = (x_1x_2 \ldots x_n, a^{n-1}) \ne 0.$$

Це означає, що $G_n(X)$ має індекс нільпотентності n.

Покажемо, що $G_n(X)$ – вільний в многовиді n-нільпотентних g-дімоноїдів.

g-Дімоноїд $(\mathrm{G}(X),\dashv,\vdash)$, ізоморфний $FG[X]$ з п. 4.2.1, був побудований в [45]. Відповідний ізоморфізм $(\mathrm{G}(X),\dashv,\vdash)\to FG[X]$ позначимо через σ (див. [45], теорема 4). У [45] для довільного g-дімоноїда $(\mathrm{D},\dashv,\vdash)$ був побудований гомоморфізм ψ_0 із $(\mathrm{G}(X),\dashv,\vdash)$ в $(\mathrm{D},\dashv,\vdash)$. Будемо називати ψ_0 канонічним гомоморфізмом. Зауважимо, що ψ_0 відображає довільний терм з елементами $x_1,\ldots,x_n$ в добуток деяких n елементів із D.

Нехай $(P,\dashv',\vdash')$ – довільний n-нільпотентний g-дімоноїд, α – канонічний гомоморфізм із $(\mathrm{G}(X),\dashv,\vdash)$ в $(P,\dashv',\vdash')$ і $\mu=\pi\sigma^{-1}\alpha$ (див. п. 4.2.1). Очевидно, μ є гомоморфізмом із $XT_a^b(1)$, де $|Y|=2, a\neq b$, в $(P,\dashv',\vdash')$. Визначимо відображення

$$\delta: G_n(X)\to(P,\dashv',\vdash'):\omega\mapsto\omega\delta,$$

поклавши

$$\omega\delta=\begin{cases}\omega\mu, \omega\in G_n\setminus\{0\},\\ 0, \omega=0.\end{cases}$$

Покажемо, що δ – гомоморфізм.

Нехай $\omega_1=(x_1x_2\ldots x_s, y_1y_2\ldots y_{s-1})$, $\omega_2=(a_1a_2\ldots a_m, b_1b_2\ldots b_{m-1})\in G_n\setminus\{0\}$, де $x_i\in X$, $1\leq i\leq s$, $y_j\in Y$, $1\leq j\leq s-1$, $a_q\in X$, $1\leq q\leq m$, $b_h\in Y$, $1\leq h\leq m-1$. Покладемо $s+m\leq n$. Оскільки $\omega_1\prec\omega_2\in G_n\setminus\{0\}$, то

$$(\omega_1\prec\omega_2)\delta=(\omega_1\prec\omega_2)\mu=(\omega_1\dashv\omega_2)\mu=\omega_1\mu\dashv'\omega_2\mu=\omega_1\delta\dashv'\omega_2\delta.$$

Аналогічно, $(\omega_1\succ\omega_2)\delta=\omega_1\delta\vdash'\omega_2\delta$. Беручи до уваги попередні викладки, в останніх випадках мають місце рівності

$$(\omega_1\prec\omega_2)\delta=(\omega_1\succ\omega_2)\delta=0=\omega_1\delta\vdash'\omega_2\delta=\omega_1\delta\dashv'\omega_2\delta.$$

Таким чином, δ – гомоморфізм.

Теорему доведено.

4.3.2. Тепер побудуємо g-дімоноїд, ізоморфний вільному n-нільпотентному g-дімоноїду рангу 1. Будемо використовувати позначення п. 4.1.6.

Покладемо $|Y|=2$, $a\neq b$. Нехай для будь-якого $n\in \mathrm{N}$

$$\mathring{\mathrm{L}}_n=\{(m,u)\in \mathrm{N}\times T_a^b(1)\mid m-l(u)=1, m\leq n\}\cup\{0\}.$$

Визначимо операції ” і ђ на $\mathring{\mathrm{L}}_n$ за правилами:

$$(m_1,u_1)\text{ ” }(m_2,u_2)=\begin{cases}(m_1+m_2, u_1*a^{l(u_2)+1}), & m_1+m_2\leq n,\\ 0, & m_1+m_2>n,\end{cases}$$

$$(m_1,u_1)\text{ ђ }(m_2,u_2)=\begin{cases}(m_1+m_2, u_2*b^{l(u_1)+1}), & m_1+m_2\leq n,\\ 0, & m_1+m_2>n,\end{cases}$$

$$(m_1,u_1)\text{ е }0=0\text{ е }(m_1,u_1)=0\text{ е }0=0$$

для всіх $(m_1,u_1),(m_2,u_2)\in \mathring{\mathrm{L}}_n\setminus\{0\}$ та $\text{е}\in\{\text{”},\text{ђ}\}$. Безпосередня перевірка показує, що аксіоми g-дімоноїда виконуються відносно операцій ” і ђ. Отже, $(\mathring{\mathrm{L}}_n,\text{”},\text{ђ})$ є g-дімоноїдом. Позначимо його через L_n.

Лема. Якщо $|X|=1$, то $G_n(X)\cong \mathrm{L}_n$.

Доведення. Нехай $X=\{r\}$. Легка перевірка показує, що відображення $\rho: G_n(X)\to \mathrm{L}_n$, визначене за правилом:

$$\omega\rho=\begin{cases}(k,u), \ \omega=(r^k,u),\\ 0, \quad \omega=0,\end{cases}$$

є ізоморфізмом.

Лему доведено.

4.3.3. Закінчимо цей підрозділ описом найменшої n-нільпотентної конгруенції на вільному g-дімоноїді.

Якщо $f: D_1\to D_2$ – гомоморфізм g-дімоноїдів, то відповідну конгруенцію на D_1 будемо позначати через Δ_f. Якщо ρ – конгруенція на g-

дімоноїді $(D,$”$,$ђ$)$ така, що $(D,$”$,$ђ$)/\rho$ є n-нільпотентним g-дімоноїдом (див. п. 4.3.1), то будемо говорити, що ρ – n-нільпотентна конгруенція.

Нехай $XT_a^b(1)$ – вільний g-дімоноїд $(|Y|=2,\ a\neq b)$ (див. п. 4.2.1). Зафіксуємо $n\in \mathrm{N}$ і визначимо відношення $\kappa(n)$ на $XT_a^b(1)$, поклавши

$$(w_1,u_1)\kappa(n)(w_2,u_2) \text{ тоді і тільки тоді, коли}$$

$$(w_1,u_1)=(w_2,u_2) \text{ або } l(w_1)>n,\ l(w_2)>n.$$

Теорема.Відношення $\kappa(n)$ на вільному g-дімоноїді $XT_a^b(1)$ є найменшою n-нільпотентною конгруенцією.

Доведення. Визначимо відображення $\tau: XT_a^b(1)\to G_n(X)$ за правилом:

$$(w,u)\tau=\begin{cases}(w,u), & l(w)\leq n,\\ 0, & l(w)>n,\end{cases} \quad (w,u)\in XT_a^b(1).$$

Аналогічно доведенню теореми 4 з [33] можна довести, що τ – сюр’єктивний гомоморфізм і $\Delta_\tau=\kappa(n)$.

Теорему доведено.

4.4. Вільні комутативні g-дімоноїди

У цьому підрозділі введено поняття комутативного g-дімоноїду, наведено новий приклад g-дімоноїда, побудовано вільний комутативний g-дімоноїд та охарактеризовано найменшу комутативну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

4.4.1. g-Дімоноїд $(D,\dashv,\vdash)$ будемо називати комутативним, якщо обидві напівгрупи $(D,\dashv)$ і $(D,\vdash)$ є комутативними. g-Дімоноїд, який є вільним у многовиді комутативних g-дімоноїдів, називатимемо вільним комутативним g-дімоноїдом.

Наведемо новий приклад g-дімоноїда. Нехай A – довільна непорожня множина і $\overline{A} = \{\overline{x} \mid x \in A\}$. Для кожного $x \in A$ покладемо $\tilde{x} = x$ і визначимо відображення $\alpha = \alpha_A : A \cup \overline{A} \to A$ за правилом:

$$y\alpha = \begin{cases} y, & y \in A, \\ \tilde{y}, & y \in \overline{A}. \end{cases}$$

Нехай далі S – довільна напівгрупа. Визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на $S \cup \overline{S}$, поклавши

$$a \dashv b = (a\alpha_S)(b\alpha_S), \quad a \vdash b = \overline{(a\alpha_S)(b\alpha_S)}$$

для всіх $a,b \in S \cup \overline{S}$. Позначимо $(S \cup \overline{S},\dashv,\vdash)$ через $S^{(\alpha)}$.

Лема. $S^{(\alpha)}$ є g-дімоноїдом, але не є дімоноїдом.

Доведення. Доведення випливає з безпосередньої перевірки.

Лему доведено.

4.4.2. У цьому пункті побудуємо вільний комутативний g-дімоноїд. Будемо використовувати позначення попереднього пункту.

Очевидно, якщо S – комутативна напівгрупа, то $S^{(\alpha)}$ – комутативний g-дімоноїд. Якщо X – породжуюча множина для напівгрупи S, то, очевидно, $S^{(\alpha)} \setminus \overline{X}$ є g-піддімоноїдом $S^{(\alpha)}$, породженим X. Позначимо через $FCgD(X)$ g-дімоноїд $S^{(\alpha)} \setminus \overline{X}$, в якому S є вільною комутативною напівгрупою на X.

Теорема. $FCgD(X)$ – вільний комутативний g-дімоноїд.

Доведення. Покажемо, що $FCgD(X)$ – вільний у многовиді комутативних g-дімоноїдів.

Нехай $(G, \dashv', \vdash')$ – довільний комутативний g-дімоноїд, $\psi : X \to G$ – довільне відображення і $x_i, y_j \in X$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Визначимо відображення

$$\xi : FCgD(X) \to (G, \dashv', \vdash') : w \mapsto w\xi,$$

поклавши

$$w\xi = \begin{cases} x_1\psi \dashv' \ldots \dashv' x_m\psi, w = x_1 \ldots x_m, m \geq 1, \\ x_1\psi \vdash' \ldots \vdash' x_m\psi, w = \overline{x_1 \ldots x_m}, m > 1. \end{cases}$$

Доведемо, що ξ – гомоморфізм.

Нехай $w, u \in FCgD(X)$. У випадку $w = \overline{x_1 \ldots x_m}$, $u = \overline{y_1 \ldots y_n}$ отримуємо

$$(w \dashv u)\xi = x_1\psi \dashv' \ldots \dashv' x_m\psi \dashv' y_1\psi \dashv' \ldots \dashv' y_n\psi =$$

$$= (x_1\psi \dashv' \ldots \dashv' x_m\psi) \dashv' (y_1\psi \vdash' \ldots \vdash' y_n\psi) =$$

$$= (y_1\psi \vdash' \ldots \vdash' y_n\psi) \dashv' (x_1\psi \dashv' \ldots \dashv' x_m\psi) =$$

$$= (y_1\psi \vdash' \ldots \vdash' y_n\psi) \dashv' (x_1\psi \vdash' \ldots \vdash' x_m\psi) =$$

$$= (x_1\psi \vdash' \ldots \vdash' x_m\psi) \dashv' (y_1\psi \vdash' \ldots \vdash' y_n\psi) =$$

$$= \overline{x_1 \ldots x_m}\xi \dashv' \overline{y_1 \ldots y_n}\xi = w\xi \dashv' u\xi.$$

Для $w = \overline{x_1 \ldots x_m}$, $u = y_1 \ldots y_n$ отримуємо

$$(w \dashv u)\xi = x_1\psi \dashv' \ldots \dashv' x_m\psi \dashv' y_1\psi \dashv' \ldots \dashv' y_n\psi =$$

$$= (y_1\psi \dashv' \ldots \dashv' y_n\psi) \dashv' (x_1\psi \dashv' \ldots \dashv' x_m\psi) =$$

$$= (y_1\psi \dashv' \ldots \dashv' y_n\psi) \dashv' (x_1\psi \vdash' \ldots \vdash' x_m\psi) =$$

$$= (x_1\psi \vdash' \ldots \vdash' x_m\psi) \dashv' (y_1\psi \dashv' \ldots \dashv' y_n\psi) =$$

$$= \overline{x_1 \ldots x_m}\xi \dashv' (y_1 \ldots y_n)\xi = w\xi \dashv' u\xi .$$

Останні два випадки розглядаються аналогічно. Таким чином, $(w \dashv u)\xi = w\xi \dashv' u\xi$ для всіх $w, u \in FCgD(X)$.

Аналогічно можна перевірити, що $(w \vdash u)\xi = w\xi \vdash' u\xi$ для всіх $w, u \in FCgD(X)$.

Отже, ξ – гомоморфізм і $FCgD(X)$ – вільний комутативний g-дімоноїд.

Теорему доведено.

Якщо N_+ – адитивна напівгрупа всіх натуральних чисел, то очевидно, що $N_+^{(\alpha)} \setminus \{\bar{1}\}$ – вільний комутативний g-дімоноїд ранга 1.

Неважко побачити, що група автоморфізмів вільного комутативного g-дімоноїда $FCgD(X)$ ізоморфна симетричній групі на X, і дві напівгрупи g-дімоноїда $FCgD(X)$ є ізоморфними.

4.4.3. Опишемо одну додаткову властивість g-дімоноїдів.

Лема. Операції g-дімоноїда $(D, \dashv, \vdash)$ з комутативною ідемпотентною операцією $\dashv$ (відповідно, $\vdash$) збігаються.

Доведення. Для всіх $x, y, z \in D$ маємо

$$x \vdash y = (x \vdash y) \dashv (x \vdash y) = (x \vdash y) \dashv (x \dashv y) =$$
$$= (x \dashv y) \dashv (x \vdash y) = (x \dashv y) \dashv (x \dashv y) = x \dashv y$$

згідно з ідемпотентністю, комутативністю $\dashv$ і аксіомами $(D1)$, $(D2)$ g-дімоноїда. Випадок з операцією $\vdash$ доводиться аналогічно.

Лему доведено.

З останньої леми випливає, що не існує комутативних g-дімоноїдів з різними ідемпотентними операціями.

4.4.4. У цьому пункті представлено найменшу комутативну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

Якщо ρ – конгруенція на g-дімоноїді $(D,\dashv,\vdash)$ така, що $(D,\dashv,\vdash)/\rho$ є комутативним g-дімоноїдом (див. п. 4.4.1), то говоритимемо, що ρ – комутативна конгруенція.

Для наступного результата нам знадобиться конструкція вільного g-дімоноїда $XT_a^b(1)$, введеного в п. 4.2.1.

Нехай, як і раніше, T – вільний моноїд на двохелементній множині $\{a,b\}$. Для кожного $u\in T\setminus\{\theta\}$ позначимо останню літеру слова u через $u^{(1)}$.

Теорема. Нехай $XT_a^b(1)$ – вільний g-дімоноїд і $FCgD(X)$ – вільний комутативний g-дімоноїд. Відображення

$$\beta : XT_a^b(1)\to FCgD(X):$$

$$(w,u)\mapsto (w,u)\beta=\begin{cases}\overline{w}, & u^{(1)}=b,\\ w & \text{в іншому випадку}\end{cases}$$

є епіморфізмом, який індукує найменшу комутативну конгруенцію на $XT_a^b(1)$.

Доведення. Візьмемо довільні елементи (w_1,u_1), $(w_2,u_2)\in XT_a^b(1)$. Маємо

$$((w_1,u_1)\dashv(w_2,u_2))\beta=(w_1w_2,u_1*a^{l(u_2)+1})\beta=$$

$$=w_1w_2=(w_1,u_1)\beta\dashv(w_2,u_2)\beta,$$

$$((w_1,u_1)\vdash(w_2,u_2))\beta=(w_1w_2,u_2*b^{l(u_1)+1})\beta=$$

$$=\overline{w_1w_2}=(w_1,u_1)\beta\vdash(w_2,u_2)\beta.$$

Таким чином, β – гомоморфізм.

Нехай $FC[X]$ – вільна комутативна напівгрупа на X і $x\in X$, $\omega\in FC[X]\setminus X$. Для елементів $\omega,\overline{\omega},x\in FCgD(X)$ існують елементи (ω,ua), (ω,ub), $(x,\theta)\in XT_a^b(1)$, де $u\in T$, такі, що

$$(\omega,ua)\beta=\omega,\ (\omega,ub)\beta=\overline{\omega},\ (x,\theta)\beta=x.$$

Отже, β сюр'єктивне. Згідно з теоремою п. 4.4.2 $FCgD(X)$ – вільний комутативний g-дімоноїд. Тоді Δ_β (див. п. 4.3.3 щодо позначення) – найменша комутативна конгруенція на $XT_a^b(1)$.

Теорему доведено.

4.4.5. Нехай α – довільна фіксована конгруенція на $F[X]$ (див. п. 4.2.1). Визначимо відношення α' на вільному g-дімоноїді $XT_a^b(1)$ за правилом:

$$(w_1,u_1)\alpha'(w_2,u_2) \Leftrightarrow w_1\alpha w_2$$

для всіх $(w_1,u_1),(w_2,u_2) \in XT_a^b(1)$.

Неважко довести наступну лему.

Лема. Відношення α' є конгруенцією на вільному g-дімоноїді $XT_a^b(1)$. Крім того, операції $XT_a^b(1)/\alpha'$ збігаються.

З останньої леми отримуємо таке твердження.

Наслідок. Якщо α – відношення рівності на $F[X]$, то $XT_a^b(1)/\alpha'$ – вільна напівгрупа.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі розглянуто g-дімоноїди, які є множинами з двома бінарними асоціативними операціями, що задовольняють дві додаткові аксіоми. Дімоноїди в сенсі Ж.-Л. Лоде є прикладами g-дімоноїдів. У цьому розділі наведено численні приклади дімоноїдів та g-дімоноїдів, побудовано g-дімоноїд, який є ізоморфним вільному g-дімоноїду довільного рангу і, зокрема, розглянуто вільні g-дімоноїди рангу 1. Введено поняття n-нільпотентного g-дімоноїду, побудовано вільний n-нільпотентний g-дімоноїд довільного рангу та окремо розглянуто вільні n-нільпотентні g-

дімоноїди рангу 1. Охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному g-дімоноїді. Побудовано вільний комутативний g-дімоноїд і представлено найменшу комутативну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

Результати цього розділу опубліковано в роботах [47, 48, 52, 54].

ВИСНОВКИ

У роботі побудовано вільні об’єкти в деяких многовидах тріоїдів, дімоноїдів і g-дімоноїдів та вивчено їх структурні та факторизаційні властивості.

Наведено декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки і сполуки підтріоїдів. Охарактеризовано найменшу прямокутну конгруенцію, найменшу ліву ідемпотентну конгруенцію і найменшу праву ідемпотентну конгруенцію на вільному тріоїді.

Введено поняття нільпотентного тріоїду, наведено приклади нільпотентних тріоїдів індексу нільпотентності 2 і побудовано вільний n-нільпотентний тріоїд. Введено поняття 0-трисполуки підтріоїдів і в термінах 0-трисполук підтріоїдів описано структуру вільних n-нільпотентних тріоїдів. Охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді.

Введено поняття прямокутної трисполуки і наведено приклади прямокутних трисполук. Побудовано вільну прямокутну трисполуку, описано її структуру і групу автоморфізмів. Представлено деякі найменші конгруенції на вільних прямокутних трисполуках, зокрема, найменшу трипрямокутну конгруенцію на вільному тріоїді.

Введено ліві (праві) n-дінільпотентні дімоноїди. Для вказаних многовидів побудовано вільні об’єкти та окремо розглянуто вільні ліві (праві) n-дінільпотентні дімоноїди рангу 1. Встановлено, що група автоморфізмів вільного лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда ізоморфна симетричній групі. Охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді.

Розглянуто g-дімоноїди, які є множинами з двома бінарними асоціативними операціями, що задовольняють дві додаткові аксіоми. Наведено численні приклади g-дімоноїдів, побудовано g-дімоноїд, ізоморфний вільному g-дімоноїду довільного рангу і, зокрема, розглянуто вільні g-дімоноїди рангу 1. Введено поняття n-нільпотентного g-дімоноїду, побудовано вільний n-нільпотентний g-дімоноїд довільного рангу та окремо розглянуто вільні n-нільпотентні g-дімоноїди рангу 1. Охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному g-дімоноїді. Введено поняття комутативного g-дімоноїда, побудовано вільний комутативний g-дімоноїд і представлено найменшу комутативну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Birkhoff G. On the structure of abstract algebras / G. Birkhoff // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1935. – Vol. 31. – P. 433 – 454.

2. Мальцев А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1970. – 392 с.

3. Нейман Х. Многообразия групп / Х. Нейман. – М. : Мир, 1969. – 264 с.

4. Шеврин Л. Н. Тождества полугрупп / Л. Н. Шеврин, М. В. Волков // Изв. вузов. Матем. – 1985. – № 11. – С. 3 – 47.

5. Бахтурин Ю. А. Тождества / Ю. А. Бахтурин, А. Ю. Ольшанский // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. – 1988. – Т. 18. – С. 117 – 240.

6. Плоткин Б. И. Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных / Б. И. Плоткин. – М. : Наука, 1991. – 448 с.

7. Кон П. Универсальная алгебра / П. Кон. – М. : Мир, 1968. – 359 с.

8. Grätzer G. Universal algebra / G. Grätzer. – Springer–Verlag, New York. – 1979. – 583 p. – DOI: 10.1007/978-0-387-77487-9.

9. Loday J.-L. Trialgebras and families of polytopes / J.-L. Loday, M. O. Ronco // Contemp. Math. – 2004. – Vol. 346. – P. 369 – 398.

10. Novelli J.-C. Polynomial realizations of some trialgebras [Електроннийресурс] / J.-C. Novelli, J.-Y. Thibon // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. Series Formelles et Combinatoire Algébrique. – San Diego, California. – 2006. – Режимдоступу до ресурсу: arXiv:math/0605061v1.

11. Loday J.-L. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and(co)homology / J.-L. Loday, T. Pirashvili // Math. Ann. – 1993. – Vol. 296. – P. 139 – 158.

12. Ebrahimi–Fard K. Loday-type algebras and the Rota–Baxter relation / K. Ebrahimi–Fard // Lett. Math. Phys. – 2002. – Vol. 61, no. 2. – P. 139 – 147.

13. Novelli J.-C. Construction of dendriform trialgebras / J.-C. Novelli, J.-Y. Thibon // C. R., Math. Acad. Sci. Paris. – 2006. – Vol. 342, no. 6. – P. 365 – 369.

14. Casas J. M. Trialgebras and Leibniz 3-algebras / J. M. Casas // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. – 2006. – Vol. 12, no. 2. – P. 165 – 178.

15. Жучок А. В. Напівретракції тріоїдів / А. В. Жучок // Український математичний журнал. – 2014. – Т. 66, № 2. – С. 195 – 207.

16. Жучок А. В. Некоторые конгруэнции на триоидах / А. В. Жучок // Фундаментальная и прикладная математика. – 2011/2012. – Т. 17, № 3. – С. 39 – 49.

17. Zhuchok Yu. V. The endomorphism monoid of a freetrioid of rank 1 / Yu. V. Zhuchok // Algebra Universalis. – 2016. – Vol. 76, no. 3. – P. 355 – 366. – DOI: 10.1007/s00012-016-0392-1.

18. Zhuchok A. V.Trioids / A. V. Zhuchok // Asian–European Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 8, no. 4. – 1550089 (23 p.). – DOI: 10.1142/S1793557115500898.

19. Жучок А. В. Вільні тріоїди / А. В. Жучок // Вісник Київського національного ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 23 – 26.

20. Жучок А. В. Про комбінаторні властивості операцій тріоїдів / А. В. Жучок // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 14. – С. 77 – 83.

21. Жучок А. В. Групові конгруенції на тріоїдах / А. В. Жучок // Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2013. – Т. 27. – С. 148 – 158.

22. Zhuchok A. V. Semilattice decompositions of trioids // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. – 2013. – Vol. 71, no. 1. – P. 130 – 134.

23. ZhuchokA. V. Tribandsofsubtrioids / A. V. Zhuchok // Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2010. – Т. 21. – С. 98 – 106.

24. Loday J.-L. Dialgebras / J.-L. Loday // Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. – Springer–Verlag, Berlin. – 2001. – Vol. 1763. – P. 7 – 66.

25. Bokut L. A. Gröbner–Shirshov bases for dialgebras / L. A. Bokut, Y. Chen, C. Liu // Int. J. Algebra Comput.– 2010. – Vol. 20, no. 3. – P. 391 – 415.

26. Колесников П. С. Многообразия диалгебр и конформные алгебры / П. С. Колесников // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 322 – 339.

27. Kolesnikov P. S. On the special identities for dialgebras / P. S. Kolesnikov, V. Yu. Voronin // Linear and Multilinear Algebra. – 2013. – Vol. 61, no. 3. – P. 377 – 391.

28. ПожидаевА. П. Диалгебрыисвязанныеснимитройныесистемы / А. П. Пожидаев // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 870 – 885.

29. Zhuchok A. V. Free commutative dimonoids / A. V. Zhuchok // Algebra and Discrete Mathematics. – 2010. – Vol. 9, no. 1. – P. 109 – 119.

30. Жучок А. В. Вільні дімоноїди / А. В. Жучок // Український математичний журнал. – 2011. – Т. 63, № 2. – С. 165 – 175.

31. Zhuchok A. V. Free (lr, rr)-dibands / A. V. Zhuchok // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 15, no. 2. – P. 295 – 304.

32. Zhuchok A. V. Free n-dinilpotent dimonoids / A. V. Zhuchok // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2013. – Vol. 17, no. 4. – P. 43 – 46.

33. Zhuchok A. V. Free n-nilpotent dimonoids / A. V. Zhuchok // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, no. 2. – P. 299 – 310.

34. Zhuchok A. V. Free normal dibands / A. V. Zhuchok // Algebra and Discrete Mathematics. – 2011. – Vol. 12, no. 2. – P. 112 – 127.

35. Zhuchok A. V. Free rectangular dibands and free dimonoids / A. V. Zhuchok // Algebra and Discrete Mathematics. – 2011. – Vol. 11, no. 2. – P. 92 – 111.

36. Zhuchok Y. V. Free abelian dimonoids / Y. V. Zhuchok // Algebra and Discrete Mathematics. – 2015. – Vol. 20, no. 2. – P. 330 – 342.

37. Zhuchok A. V. Structure of relatively free dimonoids / A. V. Zhuchok // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 45, no. 4, to appear. – DOI: 10.1080/00927872.2016.1222404.

38. Жучок А. В. Декомпозиции свободных димоноидов / А. В. Жучок // Ученые записки Казанского ун-та. – 2012. – Т. 154, кн. 2. – С. 93–100.

39. ZhuchokA. V. Someleastcongruencesondimonoids / A. V. Zhuchok // Bulletin of TarasShevchenkoNationalUniversity of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2011. – № 4. – P. 7 – 10.

40. ZhuchokA. V. Freeproductsofdimonoids / A. V. Zhuchok // QuasigroupsandRelatedSystems. – 2013. – Vol. 21, no. 2. – P. 273–278.

41. ZhuchokA. V. Decompositions of free products of dimonoids / A. V. Zhuchok //Math. Pannon. – 2014/2015. – Vol. 25, no 1. – P. 71 – 91.

42. Zhuchok A. V. On the structure of dimonoids/ A. V. Zhuchok, A. B. Gorbatkov // Semigroup Forum. – 2016. – DOI: 10.1007/s00233-016-9795-8.

43. Жучок А. В. Елементи теорії дімоноїдів / А. В.Жучок – К. : Ін-т математики, 2014. – 304 с. – (Математика та її застосування) (Праці / Ін-т математики НАН України ; т. 98).

44. Пожидаев А. П. 0-диалгебры с бар-единицей и неассоциативные алгебры Рота–Бакстера / А. П. Пожидаев // Сиб. мат. журн. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1356 – 1369.

45. Movsisyan Y. Construction of free g-dimonoids / Y. Movsisyan, Y. S. Davidov, Mh. Safaryan // Algebra and Discrete Mathematics. – 2014. – Vol. 18, no. 1. – P. 138 – 148.

46. Zhuchok A. V. Free left n-dinilpotent dimonoids/ A. V. Zhuchok, Yul. V. Zhuchok // Semigroup Forum. – 2016. – Vol. 93, no. 1. – P. 161 – 179. – DOI: 10.1007/s00233-015-9743-z.

47. Zhuchok A. V. Free commutative g-dimonoids / A. V. Zhuchok, Yul. V. Zhuchok// Chebyshevskii Sbornik. – 2015. – Vol. 16, no. 3. – P. 276 – 284.

48. Zhuchok Yul. V. On one class of algebras / Yul. V. Zhuchok // Algebra and Discrete Mathematics. – 2014. – Vol. 18, no. 2. – P. 306 – 320.

49. Zhuchok Yul. V. Decompositions of free trioids / Yul. V. Zhuchok // Bulletin of TarasShevchenkoNationalUniversity of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2014. – № 4. – P. 28 – 34.

50. Zhuchok Yul. V. Free n-nilpotent trioids / Yul. V. Zhuchok // Matematychni Studii. – 2015. – Vol. 43, no. 1. – P. 3 – 11.

51. ZhuchokYul. V. Freerectangulartribands/ Yul. V. Zhuchok // BuletinulAcademieide ŞtiințeaRepubliciiMoldova. Matematica. – 2015. – Vol. 78, no. 2. – P. 61 – 73.

52. Жучок Юл. В. О непротиворечивости аксиом обобщенного димоноида / Юл. В. Жучок // Материалы научно-практической конференции преподавателей и студентов кафедры общей математики. – Луганск, Украина, 2014. – С. 6 – 7.

53. ZhuchokYul. V. Ontheleastsemigroupcongruencesondimonoids / Yul. V. Zhuchok // Материалы международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». – Казань, Россия, 2014. – С. 175.

54. Zhuchok Yul. V. On one class of algebras / Yul. V. Zhuchok // International Algebraic Conference dedicated to the 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Abstracts. – Kyiv, Ukraine, 2014. – P. 91.

55. Zhuchok A. V. On free left n-dinilpotent dimonoids/ A. V. Zhuchok, Yul. V. Zhuchok // International Conference «Mal'tsev Meeting» dedicated to 75th anniversary of Yu. L. Ershov: Abstracts. – Novosibirsk, Russia, 2015. – P. 210.

56. ZhuchokYul. V. Onfree n-nilpotenttrioids / Yul. V. Zhuchok // XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная

геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная 85-летию со дня рождения профессора С. С. Рышкова: материалы конференции. – Тула, Россия, 2015. – С. 113 – 114.

57. Жучок Юл. В. Наименьшая трипрямоугольная конгруэнция на свободном триоиде / Юл. В. Жучок // Международная научная конференция "Дискретная математика, алгебра и их приложения", посвященная столетию со дня рождения академика Д. А. Супруненко: тезисы докладов. – Минск, Республика Беларусь, 2015. – С. 20 – 21.

58. Zhuchok Yul. V. On free rectangular tribands / Yul. V. Zhuchok // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Abstracts. – Odessa, Ukraine, 2015. – P. 126.

59. Pirashvili T. Sets with two associative operations / T. Pirashvili // Centr. Eur. J. Math. – 2003. – Vol. 2. – P. 169 – 183.

60. Корешков Н. А. n-Кратные алгебры ассоциативного типа / Н. А. Корешков // Изв. вузов. Матем. – 2008. –Т. 12. – С. 34 – 42.

61. Givens B. N. Interassociates of the free commutative semigroup on n generators / B. N. Givens, K. Linton, A. Rosin, L. Dishman // SemigroupForum. – 2007. – Vol. 74. – P. 370 – 378.

62. Gould M. Interassociates of monogenic semigroups / M. Gould,K. A. Linton, A. W. Nelson // Semigroup Forum. – 2004. – Vol. 68. – P. 186 –201.

63. Горбатков А. Б. Интерассоциативность на свободной коммутативной полугруппе / А. Б. Горбатков // Сиб. мат. журн. – 2013. – Т. 54, № 3. – С. 563 – 568.

64. HewittE. Ternaryoperationsandsemigroups / E. Hewitt, H. S. Zuckerman // Semigroups, Proc. Sympos. Detroit, Michigan 1968. – 1969. – P. 55 – 83.

65. Шайн Б. М. Односторонне нильпотентные полугруппы / Б. М. Шайн // Успехи математических наук. – 1964. – Т. 19, № 1 (115). – С. 187 – 189.

66. LodayJ.-L. Orderstructure on the algebra of permutations and of planarbinary trees / J.-L. Loday, M. O. Ronco // J. Algebraic Combin. – 2002. – Vol. 15. – P. 253 – 270.

67. RichterB. Dialgebren, DoppelalgebrenundihreHomologie [Електронний ресурс] / B. Richter // Diplomarbeit, UniversitatBonn. – 1997. – Режим доступу до ресурсу: http://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/publications.html.

68. Корешков Н. А. О нильпотентности и разложении алгебр ассоциативного типа/Н. А. Корешков // Изв. вузов. Матем. – 2006. – № 9. – С. 34 – 42.

69. Bahturin Y. Identities of graded algebras/Y. Bahturin, M. Zaicev// Journal of Algebra. – 1998. – Vol. 205, no. 1. – P. 1 – 12.

70. Бахтурин Ю. А. G-тождества неассоциативных алгебр / Ю. А. Бахтурин, М. В. Зайцев, С. К. Сегал // Матем. сб. – 1999. – Т. 190, № 11. – С. 3 – 14.

71. Zupnik D. On interassociativity and related questions / D. Zupnik //Aequationes Math. – 1971. – Vol. 6. – P. 141 – 148.

72. Drouzy M. La structuration des ensembles de semigroupes d’ordre 2, 3 et 4par la relation d’interassociativite / M. Drouzy. – Manuscript, 1986.

73. Boyd S. J. Interassociativity of semigroups / S. J. Boyd, M. Gould,A. Nelson // Proceedings of the TennesseeTopology Conference, Nashville, TN, USA, 1996. Singapore: World Scientific. – 1997. – P. 33 – 51.

74. Gould M. Translational hulls of polynomially related semigroups /M. Gould, R. E. Richardson // Czechoslovak Math. J. – 1983. – Vol. 33, no. 1. – P. 95 – 100.

75. Zhuchok A. V. Commutative dimonoids / A. V. Zhuchok // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – № 3. – P. 116 – 127.

76. Жучок А. В. Димоноиды и бар-единицы / А. В. Жучок // Сиб. мат. журн. – 2015. – Т. 56, № 5. – С. 1037 – 1053.

77. Petrich M. Structure of relatively free bands / M. Petrich, P. V. Silva // Communications in Algebra. – 2002. – Vol. 30, no. 9. – P. 4165 – 4187.

78. Loday J.-L. Algèbres ayant deux opérations associatives (digèbres) / J.-L. Loday // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1995. – Vol. 321, no. 2. – P. 141 – 146.

79. Loday J.-L. Hopf algebra of the planar binary trees/ J.-L. Loday, M. O. Ronco // Adv. Math. – 1998. – Vol. 139, no. 2. – P. 293 – 309.

80. Жучок Ю. В. Об определимости свободных триоидов полугруппами эндоморфизмов / Ю. В. Жучок // Доповіді НАН України. – 2015. –№ 4. – С. 7 – 11.

81. Novikov B. V. On decomposition of Moufang groupoids / B. V. Novikov // Quasigroups and Related Systems. – 2008. – Vol. 16, no. 1. – P. 97 – 101.

82.Clifford A. H. Bands of semigroups / A. H. Clifford // Proc. Amer. Math. Soc. – 1954. – Vol. 5. – P. 499 – 504.

83.Zhuchok A. V. Dibands of subdimonoids / A. V. Zhuchok // Matematychni Studii. – 2010. – Vol. 33, no. 2. – P. 120 – 124.

84. Жучок А. В. Димоноиды / А. В. Жучок // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50, № 4. – С. 471 – 496.

85. МальцевА. И. Нильпотентные полугруппы / А. И. Мальцев // Уч.зап. Ивановскогогос.пед.ин-та. – 1953. – Т. 4. – С. 107 – 111.

86. Neumann B. H. Subsemigroups of nilpotent groups / B. H. Neumann, T. Taylor // Proc. Royal Soc. London, Ser. A. – 1963. – Vol. 274. – P. 1 – 4.

87. Jespers E. Nilpotent semigroups and semigroup algebras / E. Jespers, J. Okninski // Journal of Algebra – 1994. – Vol. 169. – P. 984 – 1011.

88. Kruse R. S. On the classification of nilpotent rings / R. S. Kruse, D. T. Price // Mathematische Zeitschrift. – 1970. – Vol. 113, no. 3. – P. 215 – 223.

89. Шеврин Л. Н. Полугруппы / В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков и др. // В кн: ,,Общая алгебра”. – М. : Наука, 1991. – Т. 2, гл. 4. – С. 11 – 191.

90. McLean D. Idempotent semigroups / D. McLean // Amer. Math. Monthly. – 1954. – Vol. 61. – P. 110 – 113.

91. Zhuchok A. V. Semilattices of subdimonoids / A. V. Zhuchok // Asian–European Journal of Mathematics. – 2011. – Vol. 4, no. 2. – P. 359 – 371.

92. Жучок А. В. Напівретракції дімоноїдів / А. В. Жучок // Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2008. – Т. 17. – С. 42 – 50.

93. ZhuchokA. V. Ontwoclassesofdigroups / A. V. Zhuchok, Yu. V. Zhuchok // SãoPauloJ. Math. Sci. – 2016. – DOI: 10.1007/s40863-016-0038-4.

94. Шайн Б. М. Рестриктивные биполугруппы / Б. М. Шайн // Изв. вузов. Матем. – 1965. – № 1. – С. 168 – 179.

95. Schein B. M. Restrictive semigroups and bisemigroups / B. M.Schein // Technical Report. – University of Arkansas, Fayetteville, Arkansas, USA. – 1989. – P. 1 – 23.

96. Phillips J. D. A short basis for the variety of digroups / J. D. Phillips // Semigroup Forum. – 2005. – Vol. 70. – P. 466 – 470.

97. Kinyon M. K. Leibniz algebras, Lie racks, and digroups / M. K. Kinyon // Journal of Lie Theory. – 2007. – Vol. 17, no. 4. – P. 99 – 114.

98. Hickey J. B. Semigroups under a sandwich operation / J. B. Hickey // Proc. EdinburghMath. Soc. – 1983. –Vol. 26. –P. 371 – 382.

99. Левенштейн В. И. Самонастраивающиеся автоматы для декодирования сообщений / В. И. Левенштейн // ДАН. – 1961. – Т. 141, № 6. – С. 1320 – 1323.

100. Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов / В. М. Глушков // Успехи математических наук. – 1961. – Т. 16, № 5. – С. 3 – 62.