

УДК 517.95:419.86:539.3

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/2.11>

Володимир СТОЯН, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ORCID ID: 0009-0008-0746-5050

e-mail: volodymyr.stoyan@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Дмитро ЧЕРНИЙ, д-р техн. наук, доц.

ORCID ID: 0000-0002-6378-8048

e-mail: dmytro.cherniy@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Сергій ВОЛОЩУК, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ORCID ID: 0009-0000-6416-5566

e-mail: sr.voloshchuk@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ТРИВИМІРНІ ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ДИНАМІКОЮ НЕПОВНО СПОСТЕРЕЖУВАНИХ ТОВСТИХ ПРУЖНИХ ПЛИТ. ЧАСТИНА I. ВИПАДОК НЕПЕРЕРВНО ЗАДАНОГО БАЖАНОГО СТАНУ

У тривимірній постановці вперше розв'язано складні задачі керування динамікою товстої пружної плити, суть яких полягає в тому, що поле пружнодинамічних зміщень плити має набути бажаного стану, заданого функціями, неперервними за просторово-часовими координатами. Вихідними для розв'язання розглянутих задач обрано класичні рівняння тривимірної теорії пружності та керування згідно із середньоквадратичним критерієм. Як керуючі функції можуть бути обрані об'ємні, початкові, поверхневі та торцеві функції зовнішньо-динамічних збурень, розглядувані як окремо, так і в практично виправданій комбінації. Задачі поставлені та розв'язані за наявності неперервно визначених початково-крайових спостережень за станом плити, які без обмеження на їхню кількість і якість визначаємо функціонально через лінійні диференціальні оператори довільного порядку і структури. Спостережувані характеристики системи моделюються дискретно та неперервно визначеними моделювальними функціями, чисельні значення й аналітика яких лежать за межами розглядуваної просторово-часової області функціонування досліджуваного пружного тіла і отримуються внаслідок побудови середньоквадратичних наближень до розв'язків лінійних алгебраїчних, інтегральних і функціональних рівнянь. Розрахункові формули, якими визначено множину допустимих розв'язків розглядуваних задач, досить прості і доступні для комп'ютерної реалізації. Визначено особливості керування динамікою розглядуваного пружного об'єкта для випадків, коли початковими та крайовими зовнішньо-динамічними збуреннями можна знехтувати, а динаміку плити вивчати в необмежених просторових і часових областях. Зроблено оцінку точності розв'язання задач керування, сформульовано умови однозначності множини побудованих розв'язків або псевдорозв'язків.

Ключові слова: просторово розподілені динамічні системи, просторові задачі теорії пружності, товсті пружні плити, задачі керування.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 74-10.

Вступ

Бурхливий розвиток машино-, корабле-, й особливо ракетобудування, що розпочався у другій половині минулого століття, загострив увагу науковців і підвищив актуальність класичних питань побудови вискоєфективних методів дослідження пружнодинамічних полів складних механічних конструкцій та їхніх елементів, якими є плоскі плити та пружні оболонки різного профілю. Складності геометрії таких механічних об'єктів, а також математичних моделей (Timoshenko, & Woinowsky-Krieger, 1987), якими визначається залежність пружно-динамічних характеристик їхніх внутрішніх точок від зовнішньосилових впливів, що містяться на поверхні, змусили відмовитися від дослідження цих моделей у тривимірній постановці – задачі ставили та розв'язували (Nemys, & Khoma, 1993) у серединній поверхні плити (оболонки) з подальшим поширенням отриманих розв'язків на всю товщину плити. Відомі математичні моделі та методики їхнього дослідження ґрунтувалися на різних геометричних і математичних рівняннях (Selezov, 2018) та гіпотезах (Селезов, 1961), що за значної залежності від останніх мало ефект тільки в разі відносно невеликих товщин розглядуваних об'єктів, хоча і складної геометричної форми (Khoma, & Dashko, 2015). Більшість цікавих прикладних задач при цьому розв'язували чисельно (Grigorenko, Savula, & Mukha, 2000; Grigorenko, & Grigorenko, 2013) або з використанням складного математичного апарату (Bardzokas, Kushnir, & Filstinskii, 2009; Filstinskii, Kovalev, & Vensel, 2002).

Компромісне розв'язання проблеми було запропоноване в роботі (Lur'e, 1964), а розвинене та доведене до логічно строгого завершення нами (Стоян, 2016). Тут тривимірні класично відомі диференціальні рівняння математичної теорії пружності інтегрували за поперечною координатою плити з урахуванням пружно-динамічних особливостей завантаження її граничних поверхонь і приводили до двовимірних диференціальних рівнянь, що параметрично залежать від виродженої просторової координати. З огляду на це тривимірне поле пружних динамічних зміщень плити описані диференціальними рівняннями із двома змінними. Останні, однак, виявилися нескінченно високого порядку, і для свого розв'язання вимагали відповідних формулювань крайових умов. Це виявилось справою непростою, проте дало змогу розв'язати низку конкретних задач прогнозування динаміки пружних плит у тривимірній постановці (Стоян, 2016). Далі успішно були розв'язані і задачі керування такою динамікою у разі дискретно, а потім і неперервно визначеного бажаного стану плити.

Однак зручнішою для практики стала тривимірна математична модель пружнодинамічного стану пружної плити, розглядуваної як тривимірний просторовий пружний об'єкт, запропонована нами (Stoyan, 2018). Остання дала змогу успішно розв'язати низку досить узагальнено сформульованих початково-крайових задач динаміки плоских пружних плит довільного граничного обрису. У поєднанні з підходом до математичного моделювання початково-крайових

зовнішньодинамічних збурень, викладеним у (Стоян, 2016), розглянуті задачі були розв'язані нами для будь-якої кількості та якості початково-крайової інформації про стан плити, що особливо важливо для практичного застосування.

Складнішими та більш практично спрямованими, однак, є обернені задачі тривимірної динаміки пружних плит, особливо тих, що перебувають в умовах невизначеності початково-крайових спостережень за ними. Останні і стануть предметом наших найближчих досліджень.

Об'єктом дослідження, проведеного у пропонованій роботі, є поле пружних динамічних зміщень точок плити, розглядуване згідно з математичною моделлю її динаміки, що подано в (Stoyan, 2018). У цій публікації будуть сформульовані й успішно розв'язані задачі керування полем пружних динамічних зміщень точок плити за допомогою одного, двох і трьох (у довільній комбінації) зовнішньодинамічних збурювальних факторів, якими можуть бути початкові, поверхневі та граничні зовнішньодинамічні навантаження. Мета та завдання дослідження – наблизити поле поверхнево-об'ємних пружнодинамічних зміщень точок плити за середньоквадратичним критерієм до бажаного, що задається неперервно визначеними функціями. Як продовження поданої статті запропонована в ній методика буде поширеною і на випадок, коли бажаний стан плити буде задаватися дискретно в певні моменти часу. Запропонована нами методика розв'язання розглядуваних задач дасть змогу в обох випадках успішно оцінити точність керування досліджуваним об'єктом, а також сформулювати умови його однозначності.

1. Основні результати

1.1. Тривимірна математична модель динаміки товстої пружної плити

У декартовій системі координат $(0, x, y, z)$ розглянемо динаміку $(t - \text{час})$ тривимірного об'єкта, циліндричною поверхнею $\gamma(x, y, z)$ вирізаного із пружного шару $(x, y, z): -\infty < (x, y) < +\infty; -h \leq z \leq h$, питомо щільність і пружні характеристики Ляме (Timoshenko, & Woinowsky-Krieger, 1987) якого позначимо через ρ та λ, μ відповідно.

Вважатимемо, що залежність вектор-функції $u(s) = \text{col}(u_x(s), u_y(s), u_z(s))$ (тут і далі $s = (\xi, t) = (x, y, z, t)$) пружнодинамічних зміщень точок, виділеної таким чином пружної плити від об'ємно розподілених силових характеристик $(f_1(s), f_2(s), f_3(s)) = f^T(s)$ за умови, що $(u_i(s), f_i(s))$ мають напрям координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно, визначається класично відомим рівнянням Ляме (Lur'e, 1964).

$$L(\partial_s)u(s) = f(s), \quad (1)$$

$$\text{у якому } \partial_s = (\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t), \quad aL(\partial_s) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_x^2 + \mu(\partial_y^2 + \partial_z^2) - \rho\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_x\partial_y & (\lambda + \mu)\partial_x\partial_z \\ (\lambda + \mu)\partial_y\partial_x & (\lambda + 2\mu)\partial_y^2 + \mu(\partial_x^2 + \partial_z^2) - \rho\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_y\partial_z \\ (\lambda + \mu)\partial_z\partial_x & (\lambda + \mu)\partial_z\partial_y & (\lambda + 2\mu)\partial_z^2 + \mu(\partial_x^2 + \partial_y^2) - \rho\partial_t^2 \end{pmatrix}.$$

Позначивши через $\delta(s - s') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')\delta(t - t')$ δ -функцію Дірака як таку, що

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-t')} d\lambda,$$

(і-уявна одиниця) та вводячи до розгляду матричну функцію

$$G(s - s') = \frac{1}{16\pi^4} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{E(p, q, s - s')}{L(p, q)} dp dq, \quad (2)$$

яка за $p = (p_1, p_2, p_3)$, $dp = (dp_1, dp_2, dp_3)$,

$$E(p, q, s - s') = \text{diag}(e^{p_1(x-x') + p_2(y-y') + p_3(z-z') + q(t-t')})$$

є розв'язком рівняння

$$L(\partial_s)G(s - s') = \text{diag}(\delta(s - s'), i = \overline{1, 3}), \quad (3)$$

диференціальну математичну модель динаміки пружного середовища запишемо у вигляді (Stoyan, 2018)

$$u_\infty(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s - s') f(s') ds'. \quad (4)$$

Позначаючи через S_0 просторову область плити, а через γ її торцеву поверхню, з урахуванням співвідношення (2), яке можна побудувати виходячи з (Timoshenko, & Woinowsky-Krieger, 1987), уведемо до розгляду вектор-функції

$$u^\pm(s) = \text{col}(u_i^\pm(s), i = \overline{1, 3}) = \int_{S^\pm} G(s - s') f^\pm(s') ds',$$

$$u^\Gamma(s) = \text{col}(u_i^\Gamma(s), i = \overline{1, 3}) = \int_{S^\Gamma} G(s - s') f^\Gamma(s') ds'$$

наслідків дії поверхнево визначених зовнішньодинамічних збурювальних факторів

$$f^\pm(s) = \text{col}(f_i^\pm(s), i = \overline{1, 3}) (s \in S^\pm = S_0 \times (z = \pm h) \times [0, T]),$$

$$f^\Gamma(s) = \text{col}(f_i^\Gamma(s), i = \overline{1, 3}) (s \in S^\Gamma = \gamma \times [0, T])$$

на динаміку точки $s \in S_0^T = S_0 \times [0, T]$. Останнє дуже важливе, оскільки з'являється можливість успішно розв'язувати крайові задачі динаміки просторово обмежених пружних плит.

Аналогічно функцію

$$u^0(s) = \text{col}(u_i^0(s), i = \overline{1, 3}) = \int_{S_0} G(s - \xi) |_{t=0} f^0(\xi) d\xi, \quad (5)$$

у якій $f^0(\xi) = \text{col}(f_i^0(\xi), i = \overline{1, 3})$ – визначене за $t = 0$ силове зовнішньодинамічне збурення, що спостерігаємо за $s \in S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$, можна врахувати і початковий пружно-динамічний стан плити.

Зазначене дає змогу зробити висновок, що за відомої об'ємної і гранично-поверхневої зовнішньосилової картини динаміки пружної плити вектор-функцію зміщень її точок можна подати сумою

$$u(s) = u_{\infty}(s) + u^0(s) + u^{\Gamma}(s) + u^{+}(s) + u^{-}(s), \quad (6)$$

що нами і зроблено.

Для врахування впливу силових зовнішньодинамічних збурювальних факторів $f(s)$, $f^0(\xi)$, $f^{\Gamma}(\xi)$, $f^{\pm}(\xi)$ на стан плити у разі відсутності інформації про їхній об'ємно-поверхнево-торцевий розподіл, останнє можна виконати (Стоян, 2016) шляхом математичного моделювання цієї інформації векторами

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \text{col}(f_m, m = \overline{1, M}), \quad \bar{f}^0 = \text{col}(f_m^0, m = \overline{1, M_0}), \\ \bar{f}^{\Gamma} &= \text{col}(f_m^{\Gamma}, m = \overline{1, M_{\Gamma}}), \quad \bar{f}^{\pm} = \text{col}(f_m^{\pm}, m = \overline{1, M^{\pm}}) \end{aligned} \quad (7)$$

значень $f_m(m = \overline{1, M})$, $f_m^0(m = \overline{1, M_0})$, $f_m^{\Gamma}(m = \overline{1, M_{\Gamma}})$, $f_m^{\pm}(m = \overline{1, M^{\pm}})$ функцій $f(s)$, $f^0(\xi)$, $f^{\Gamma}(\xi)$, $f^{\pm}(\xi)$, визначених в точках

$$\begin{aligned} s_m &\in \bar{S} = (R^3 \setminus S_0) \times [0, T], \quad s_m^0 \in \bar{S}^0 = S_0 \times (-\infty, 0], \\ s_m^{\Gamma} &\in \bar{S}^{\Gamma} = (R^3 \setminus S_0) \times (-h < z < h) \times [0, T], \\ s_m^{+} &\in \bar{S}^{+} = (R^3 \setminus S_0) \times (z > h) \times [0, T], \\ s_m^{-} &\in \bar{S}^{-} = (R^3 \setminus S_0) \times (z < -h) \times [0, T] \end{aligned}$$

відповідно.

Вважаючи, що ці функції мають силовий характер, поставимо їм у відповідність динамічні зміщення

$$\begin{aligned} \bar{u}(s) &= \sum_{m=1}^M G(s - s_m) f_m, \quad \bar{u}^0(s) = \sum_{m=1}^{M_0} G(s - s_m^0) f_m^0, \\ \bar{u}^{\Gamma}(s) &= \sum_{m=1}^{M_{\Gamma}} G(s - s_m^{\Gamma}) f_m^{\Gamma}, \quad \bar{u}^{\pm}(s) = \sum_{m=1}^{M^{\pm}} G(s - s_m^{\pm}) f_m^{\pm}, \end{aligned} \quad (8)$$

так, щоб

$$\bar{u}(s) + \bar{u}^0(s) + \bar{u}^{\Gamma}(s) + \bar{u}^{+}(s) + \bar{u}^{-}(s) = \bar{u}(s) \quad (9)$$

описувало динаміку точок $s \in S_0^T$ розглядуваної плити.

Оскільки співвідношення (9) в силу (3) рівняння (1) задовольняє (Стоян, 2016) точно за будь-яких $\bar{f}$, $\bar{f}^0$, $\bar{f}^{\Gamma}$, $\bar{f}^{\pm}$, то для визначення останніх використаємо початково-гранично-поверхневі спостереження за плитою, які запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} L_r^0(\partial_t)u(s)|_{t=0} &= U_r^0(\xi), r = \overline{1, R_0}, \\ L_r^{\pm}(\partial_{\xi})u(s)|_{s \in S^{\pm}} &= U_r^{\pm}(s), r = \overline{1, R_{\pm}}, \\ L_r^{\Gamma}(\partial_{\xi})u(s)|_{s \in S^{\Gamma}} &= U_r^{\Gamma}(s), r = \overline{1, R_{\Gamma}}, \end{aligned} \quad (10)$$

де $\xi = (x, y, z)$, $\partial_{\xi} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$; $L_r^0(\partial_t)(r = \overline{1, R_0})$, $L_r^{\pm}(\partial_{\xi})(r = \overline{1, R_{\pm}})$, $L_r^{\Gamma}(\partial_{\xi})(r = \overline{1, R_{\Gamma}})$ – довільні, але задані диференціальні оператори, а $U_r^0(\xi)(r = \overline{1, R_0})$, $U_r^{\pm}(s)(r = \overline{1, R_{\pm}})$, $U_r^{\Gamma}(s)(r = \overline{1, R_{\Gamma}})$ – відомі вектор-функції.

А це означає, що визначення моделювального згідно з (8), (9) вектора $\bar{f} = \text{col}(\bar{f}^0, \bar{f}^+, \bar{f}^-, \bar{f}^{\Gamma}, \bar{f})$ зведеться до розв'язання задачі

$$\bar{\Phi} = \Phi^0 + \Phi^{\Gamma} + \Phi^{+} + \Phi^{-} \rightarrow \min_{\bar{f}}, \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi^0 &= \int_{S_0} \sum_{r=1}^{R_0} \|L_r^0(\partial_t)\bar{u}(s)|_{t=0} - U_r^0(\xi)\|^2 d\xi, \\ \Phi^{\Gamma} &= \int_{S^{\Gamma}} \sum_{r=1}^{R_{\Gamma}} \|L_r^{\Gamma}(\partial_{\xi})\bar{u}(s) - U_r^{\Gamma}(s)\|^2 ds, \\ \Phi^{\pm} &= \int_{S^{\pm}} \sum_{r=1}^{R_{\pm}} \|L_r^{\pm}(\partial_{\xi})\bar{u}(s) - U_r^{\pm}(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Запропонована нами в (Стоян, 2016) і використана під час дослідження динаміки товстих пружних плит у (Stoyan, 2018), методика розв'язання математичних задач (1), (2), (10) за неповно спостережуваними за просторово-поверхневими зовнішньодинамічними збурювальними факторами може бути успішно використана і в розв'язанні задач керування динамікою пружних плит. У цьому випадку один, два або всі одночасно можливі зовнішньодинамічні збурювальні фактори $f(s)$, $f^0(s)$, $f^{\Gamma}(s)$, $f^{\pm}(s)$ невідомі, і як керуючі підлягають визначенню з наявних співвідношень вигляду (10), які обов'язково доповнюються співвідношенням, що визначає бажаний пружно-динамічний стан досліджуваної плити. У загальному випадку це співвідношення може бути таким:

$$L_i(\partial_s)u(s)|_{s_i \in S_0^T} = U_i^*(s), i = \overline{1, I}. \quad (13)$$

1.2. Задачі керування товстою пружною плитою одним із можливих зовнішньодинамічних впливів

Розглянемо динаміку визначеної вище пружної плити, що перебуває під діями об'ємних $f(s)$, початкових $f^0(s)$, граничних $f^{\Gamma}(s)$ та поверхневих $f^{\pm}(s)$ зовнішньодинамічних збурювальних факторів, один з яких невизначений. Знаходимо його з умови

$$\Phi = \bar{\Phi} + \sum_{i=1}^I \int_{S_0^T} \|L_i(\partial_s)u(s) - U_i^*(s)\|^2 ds \rightarrow \min_{\bar{u}(s)}. \quad (14)$$

Згідно з викладеною у (Стоян, 2016) методикою дослідження неповно спостережуваних просторово розподілених систем, шукані відповідно до (14) керуючі та супроводжуючі динаміку плити зовнішньодинамічні збурення моделюватимемо ("імітуватимемо") дискретно визначеними моделювальними факторами (7), що перебувають поза областю дії цього збурення.

Знайдений згідно із (14) керуючо-моделювальний вектор $\bar{f}$, що дає змогу співвідношенням (8), (9) визначити вектор-функцію $\bar{u}(s)$, а від неї через співвідношення (10) за відповідним чином підібраними $L_r^0(\partial_t)(r = \overline{1, R_0})$, $L_p^\Gamma(\partial_s)(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$, $L_p^\pm(\partial_s)(\rho = \overline{1, R_\pm})$ перейти до шуканого силового керуючого фактору.

Керування об'ємно розподіленими зовнішньодинамічними збуреннями. Розглянемо детальніше задачу керування спостережуваною згідно із (10) пружною плитою щодо побудови об'ємно розподіленого керуючого збурення $f(s)$, яке зміщення точок $s \in S_0^T$ за середньоквадратичним критерієм (14) буде узгоджувати з наявними спостереженнями (10) за гранично-поверхневим станом плити та заданим згідно (13) її бажаним станом.

Визначаючи керуюче збурення вектором $\bar{f}$, а моделювальне – векторами $\bar{f}^0, \bar{f}^\Gamma, \bar{f}^\pm$, вираз (9), у якому вони фігурують згідно із (8), підставимо в (10), припускаючи, що $u(s) \equiv \bar{u}(s)$. Унаслідок цього приходимо до системи функціональних рівнянь вигляду

$$B(s)\bar{f} = U(s), \quad (15)$$

у яких вектор $\bar{f}$ означений вище,

$$U(s) = \text{col} \left((U_r^0(\xi), r = \overline{1, R_0}), (U_p^+(s), \rho = \overline{1, R_+}), (U_p^-(s), \rho = \overline{1, R_-}), (U_p^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}), (U_i(s), i = \overline{1, I}) \right),$$

а $B(s) = [B_{ij}(s)]_{i,j=1}^{l,j=5}$ – блочна матрична функція, така, що

$$B_{ij}(\bar{s}(i)) = \text{col} \left(\text{str} \left(L(i)G(s(i) - S(j)), m = \overline{1, M(j)} \right), r(i) = \overline{1, R(i)} \right),$$

де $s(i), L(i), r(i), R(i) - i$ -ті, а $S(j), M(j) - j$ -ті компоненти векторів

$$\bar{s} = (s = ((\xi, 0), \xi \in S_0), s \in S^+, s \in S^-, s \in S^\Gamma, s \in S_0^T),$$

$$\bar{L} = (L_r^0(\partial_t), L_p^+(\partial_s), L_p^-(\partial_s), L_p^\Gamma(\partial_s), L_i(\partial_s)),$$

$$\bar{r} = (r, \rho, \rho, \rho, i), \quad \bar{R} = (R_0, R^+, R^-, R^\Gamma, I),$$

$$\bar{S} = (s_m^0, s_m^+, s_m^-, s_m^\Gamma, s_m), \quad \bar{M} = (M_0, M^+, M^-, M_\Gamma, M).$$

Розв'язком (15) таким, що

$$\int_{(\cdot)} \|B(s)\bar{f} - U(s)\|^2 ds \rightarrow \min_{\bar{f}}, \quad (16)$$

буде (Стоян, 2016)

$$\bar{f} = P^*B_U + \bar{v} - P^*P\bar{v} \quad (17)$$

за довільного (відповідної розмірності) вектора

$$\bar{v} = \text{col}(v_0, v^+, v^-, v_\Gamma, v),$$

тотожно рівного нулю, якщо $\det P > 0$, та

$$P = \int_{(\cdot)} B^T(s)B(s)ds, \quad B_U = \int_{(\cdot)} B^T(s)U(s)ds$$

(тут символами "*" та "(·)" позначені операції псевдообернення матриці та інтегрування по області зміни підінтегральної функції).

Припускаючи, що

$$P^* = \text{col}(Q_i, i = \overline{1, 5})$$

з (17) знаходимо вектор

$$\bar{f} = Q_5B_U + v - Q_5P\bar{v} \quad (18)$$

керуючого об'ємно розподіленого зовнішньодинамічного збурення і стовпчик

$$\begin{aligned} \text{col}(\bar{f}^0, \bar{f}^+, \bar{f}^-, \bar{f}^\Gamma) &= \\ &= \text{col} \left((Q_iB_U - P\bar{v}), i = \overline{1, 4} \right) + \text{col}(v_0, v^+, v^-, v_\Gamma) \end{aligned} \quad (19)$$

векторів, які згідно із (14) моделюють спостереження (10) за станом плити. Співвідношення (18), (19) з урахуванням (8), (9) дають змогу отримати вектор-функцію $\bar{u}(s)$ та функціональну залежність

$$f(s) = L(\partial_s)\bar{u}(s) \quad (20)$$

об'ємно розподілених керувань. Результат керування (функція $\bar{u}(s)$) у цьому випадку, будучи розв'язком рівняння (1), із зовнішньодинамічними спостереженнями (10) та визначеним у (13) бажаним станом плити буде узгоджуватись з точністю (Стоян, 2016)

$$\varepsilon^2 = \min_{\bar{u}(s)} \Phi = \int_{(\cdot)} U^T(s)U(s)ds - B_U^T P^* B_U.$$

1.3. Задачі комбінованого керування динамікою товстої пружної плити за участі об'ємно розподілених зовнішньодинамічних збурень

Розглянемо задачу керування динамікою товстої пружної плити за умови, що, як і вище, бажаний стан визначаємо критерієм (14), а у процесі керування, окрім об'ємно розподілених керуючих факторів $\bar{f}$, участь беруть і гранично-поверхневі керуючі збурення

$$\begin{aligned} f_r^0(\xi), \xi \in S_0, r = \overline{1, R_0}, \quad f_p^+(s), s \in S^+, \rho = \overline{1, R_+}, \\ f_p^-(s), s \in S^-, \rho = \overline{1, R_-}, \quad f_p^\Gamma(s), s \in S^\Gamma, \rho = \overline{1, R_\Gamma}. \end{aligned}$$

Останні, аналогічно (20), визначимо співвідношеннями

$$\begin{aligned} f_r^0(\xi) &= L_r^0(\partial_\xi)\bar{u}(s)|_{t=0}, \\ f_\rho^\pm(s) &= L_\rho^\pm(\partial_s)\bar{u}(s), \\ f_\rho^\Gamma(s) &= L_\rho^\Gamma(\partial_s)\bar{u}(s), \end{aligned} \quad (21)$$

через вектор-функцію $\bar{u}(s)$, побудовану згідно із (8), (9) з урахуванням знайдених у (18), (19) моделювальних векторів $\bar{f}^0, \bar{f}^+, \bar{f}^-, \bar{f}^\Gamma$. Нижче проаналізуємо структуру розв'язувальних рівнянь (15) та їхнє середньоквадратичне обернення для кожного конкретного випадку.

Керування початковими та об'ємно розподіленими динамічними збуреннями. Розглянемо задачу керування динамікою пружної плити спільною дією об'ємно розподілених та початково визначених зовнішньодинамічних збурень $f(s)$ і $f^0(\xi)$ за наявності поверхнево-граничних спостережень $U_\rho^\pm(s) (\rho = \overline{1, R_\pm}, s \in S^\pm)$, $U_\rho^\Gamma(s) (\rho = \overline{1, R_\Gamma}, s \in S^\Gamma)$ в (10).

Керуюча вектор-функція $f(s)$ співвідношенням (20) спільно з (18), (19), (8), (9) буде визначатися через моделювальні вектори $\bar{f}^0, \bar{f}^+, \bar{f}^-, \bar{f}^\Gamma, \bar{f}$, що є розв'язками (18), (19) рівняння (15), записаного без групи рівнянь з неспостережуваними $U_r^0(\xi)$ справа. Керуючу вектор-функцію

$$f^0(\xi) = \text{col}(f_r^0(\xi), r = \overline{1, R_0})$$

визначимо співвідношенням

$$f_r^0(\xi) = L_r^0(\partial_t)\bar{u}(s)|_{t=0}$$

з урахуванням $\bar{u}(s)$, знайденого згідно із (8), (9).

Керування спільною дією об'ємно розподілених та одного з гранично-поверхневих зовнішньодинамічних збурень. Розглянемо випадок керування динамікою пружної плити за допомогою об'ємно розподіленого зовнішньодинамічного збурення $f(s)$ (або $\bar{f}$) й одного із гранично-поверхневих впливів $\bar{f}^\pm, \bar{f}^\Gamma$ за наявності початкових і гранично-поверхневих спостережень (10) за рештою зовнішньодинамічних збурювальних факторів.

Не важко помітити, що розв'язок цих задач також зводиться до середньоквадратичного обернення рівняння (15), у якому відсутніми будуть рівняння зі спостережуваними $U_\rho^\pm(s) (\rho = \overline{1, R_\pm})$ та $U_\rho^\Gamma(s) (\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ у правій частині. Розв'язок цього рівняння співвідношеннями (18), (19) визначить вектори, якими згідно із (8), (9) знаходимо вектор-функцію $\bar{u}(s)$, а відповідно і гранично-поверхневі керування

$$\begin{aligned} f_\rho^\pm(s) &= L_\rho^\pm(\partial_s)\bar{u}(s), \rho = \overline{1, R_\pm}, \\ f_\rho^\Gamma(s) &= L_\rho^\Gamma(\partial_s)\bar{u}(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}. \end{aligned}$$

Аналогічно, можна розв'язати і задачі керування динамікою плити для випадків, коли воно здійснюється об'ємно розподіленим впливом $f(s)$ спільно з двома або навіть трьома поверхнево-граничними зовнішньодинамічними збуреннями. Особливістю розв'язку таких задач буде те, що в розв'язувальній системі (15) будуть відсутніми два, або три рівняння, що відповідають неспостережуваним згідно із (10) зовнішньодинамічним факторам.

1.4. Задачі керування динамікою товстої пружної плити за відомих об'ємно розподілених зовнішньодинамічних збурень

Розглянемо особливості керування динамікою товстої пружної плити для випадку, коли об'ємно розподілені зовнішньодинамічні збурення $f(s)$ відомі, зовнішньодинамічний просторово-часовий стан визначаємо співвідношеннями (10), а бажаний стан (13) досягається дією одного, двох або більше доступних для цього початкових і поверхнево-крайових керуючих факторів $f^0(\xi)$, $f^\pm(s)$, $f^\Gamma(s)$.

Вибрані для реалізації керуючі фактори (один або декілька) визначимо співвідношеннями (21) за відомої вектор-функції $\bar{u}(s)$, яку побудуємо згідно з (8), (9) за наявності векторів $\bar{f}, \bar{f}^0, \bar{f}^\pm, \bar{f}^\Gamma$; якими моделюємо доступну для спостережень зовнішньодинамічну картину (10) стану розглядуваної плити.

Визначення названих моделювальних факторів зведеться до розв'язання (середньоквадратичного обернення) системи (15), побудованої з урахуванням особливостей постановки задачі керування (що відомо, чим керується динаміка плити). Зокрема, у згаданій системі розв'язувальних функціональних рівнянь будуть відсутні рівняння з $U_r^0(\xi) (r = \overline{1, R_0})$, $U_\rho^\pm(s) (\rho = \overline{1, R_\pm})$, $U_\rho^\Gamma(s) (\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ у правій частині, якщо в списку керуючих зовнішньодинамічних факторів є збурення $f^0(\xi)$, $f^\pm(s)$, $f^\Gamma(s)$ відповідно.

Спільним для всіх випадків керування буде те, що в рівняннях (15) вектор-функції $U(s)$ матимуть вигляд

$$\begin{aligned} U(s) = \text{col} \left(\left(\left(U_r^0(\xi) - L_r^0(\partial_t)u_\infty(s) \right) \Big|_{\substack{t=0 \\ \xi \in S_0}}, r = \overline{1, R_0} \right), \left((U_\rho^+(s) - L_\rho^+(\partial_s)u_\infty(s)) \Big|_{s \in S^+}, \rho = \overline{1, R^+} \right), \right. \\ \left. \left((U_\rho^-(s) - L_\rho^-(\partial_s)u_\infty(s)) \Big|_{s \in S^-}, \rho = \overline{1, R^-} \right), \left((U_\rho^\Gamma(s) - L_\rho^\Gamma(\partial_s)u_\infty(s)) \Big|_{s \in S^\Gamma}, \rho = \overline{1, R^\Gamma} \right) \right), \end{aligned}$$

де вектор-функція $u_\infty(s)$ визначається співвідношенням (4) через об'ємно розподілені збурення $f(s)$.

Розв'язок модифікованого в такий спосіб рівняння (15) дасть змогу згідно з (8), (9) визначити функцію $u(s)$, відповідну наявним зовнішньодинамічним умовам (10) функціонування плити, а співвідношеннями (21) – і керуючий фактор, який потрібно визначити.

Точність розв'язку відповідної задачі та її однозначність, як і вище, визначатимемо умовами точності й однозначності розв'язку рівняння (15).

1.5. Пружний шар, усталена динаміка плити і задачі керування плитою за наявності додаткових спостережень

Частинними випадками розглянутих розв'язків задач керування динамікою товстої пружної плити є задачі керування пружним шаром (нескінченною пружною плитою) та плитою, яку досліджуємо за встановленою динамікою

(початкові зовнішньодинамічні впливи на плиту відсутні, їх не враховуємо під час розв'язання задачі). З позиції фізики це означає, що крайові та початкові зовнішньодинамічні збурення присутні, але їхній вплив на динаміку розглядуваної області плити на обраному для дослідження часовому інтервалі незначний та ним можна знехтувати.

У задачах керування пружною плитою, яку розглядаємо як пружний шар, у визначенні (6) вектор-функції $u(s)$ буде відсутня складова $u^r(s)$, а в моделювальному векторі $\bar{f}$, який потрібно визначити, – підвектор $\bar{f}^r$. Останнє спростить векторну та матричну функції $U(s)$ і $B(s)$ в розв'язувальній системі рівнянь (16). У ній будуть відсутні рівняння з $U_\rho^r(s)$ ($\rho = \overline{1, R_T}$) праворуч. Методика та результати розв'язання задач, які розглядаємо, залишаться без змін.

Аналогічні зміни будуть і в задачах керування усталеною динамікою пружної плити. У представленні (6) вектор-функції $u(s)$ буде відсутня складова $u^0(s)$, а у векторі $\bar{f}$ – компонента $\bar{f}^0$. Розрахункові формули для визначення керуючого зовнішньодинамічного збурення і в цьому випадку залишаться без змін.

Заслужовують на увагу і постановки задач керування пружною плитою (шаром) за наявності додаткової інформації про її поточний стан. Виходимо з того, що ця інформація може бути визначена співвідношенням

$$L_i^c(\partial_s)u(s)|_{s \in S_0^T} = U_i^c(s), i = \overline{1, I_c}.$$

У зазначеному випадку в системі розв'язувальних функціональних рівнянь (15) праву частину – вектор-функцію $U(s)$ – розширимо підвектором $U^c(s) = \text{col}(U_i(s), i = \overline{1, I_c})$, а у визначенні матричної функції $\bar{B}(s)$ буде додано блочний рядок $B^c(s) = \text{col}(\text{str}(L_i^c(\partial_s)G(s - \bar{S}(j))), j = \overline{1, M(j)}), i = \overline{1, I_c}$. Решта співвідношень, які бачимо під час розв'язання поставлених задач, не зміниться.

Важливим для практики може бути випадок, коли одне (або декілька) з п'яти розглянутих вище зовнішньодинамічних збурень, а це об'ємні, початкові, поверхневі і торцеві збурення, фізично наявні та впливають на динаміку плити (шару), але інформація про ці збурення відсутня. Проте відповідний доданок $(\bar{u}^0(s), \bar{u}^r(s), \bar{u}^+(s), \bar{u}^-(s))$ у визначенні (9) вектор-функції $\bar{u}(s)$ може бути представленим через зв'язаний з ним вектор $(\bar{f}^0, \bar{f}^r, \bar{f}^+, \bar{f}^-)$ співвідношеннями вигляду (8), який буде внесений до списку невідомих і за середньоквадратичним критерієм визначений із системи функціональних рівнянь (15), записаних з урахуванням наявних спостережень. Далі застосовуємо описаний вище алгоритм визначення керуючого зовнішньодинамічного впливу і розв'язання задачі керування.

Дискусія та висновки

Розглянуто складний тривимірний пружно-динамічний об'єкт – товсту плиту та її окремий випадок – пружний шар. Припускаємо, що динаміка плити визначається сукупністю об'ємних, початкових, граничних і торцевих зовнішньодинамічних збурень, кожне з яких може бути відомим, а може розглядатись як керуюче, і підлягає визначенню з умов середньоквадратичного наближення вектор-функції пружно-динамічних зміщень точок плити до наперед заданих. Вважаємо, що керуючі зовнішньодинамічні фактори мають силовий характер, або є лінійним диференціальним перетворенням функції динамічних зміщень. Вихідними для розв'язання поставлених задач є класично відомі рівняння тривимірної теорії пружності, доповнені інформацією про поверхневий і початково-крайовий стан плити без обмежень щодо кількості і якості такої інформації. Це робить постановки розглянутих задач математично некоректними і неоднозначно розв'язуваними. У роботі побудовано множину середньоквадратичних наближень для розв'язку поставлених задач, кожне з яких оцінено на точність і досліджено на однозначність. Спектр розглянутих задач дає змогу отримати тривимірний розв'язок будь-якої проблеми керування пружною плитою в постановці, що має практичний зміст. Незважаючи на уявну механічну та математичну складність у формулюванні розглядуваних задач, кінцеві розв'язки їхні прості та доступні для практичної реалізації – для цього достатньо класичних алгоритмів методів лінійної алгебри та чисельного інтегрування.

Внесок авторів: Володимир Стоян – концептуалізація, методика, теоретичні основи дослідження; Дмитро Черній – методика, збір і перевірка даних; Сергій Волощук – методика, емпіричне дослідження, підготовка огляду літератури.

Список використаних джерел

- Селезов, І. Т. (1961). Про гіпотези, які лежать в основі уточнених рівнянь поперечних коливань пластин і деякі особливості цих рівнянь. *Прикладна механіка*, 7, 538–546.
- Стоян, В. А. (2016). *Методи математичного моделювання в задачах динаміки товстих пружних плит*. ВПЦ "Київський університет".
- Bardzokas, D. I., Kushnir, D. V., & Filstinskii, L. A. (2009). Dynamic problems of the theory of elasticity for layers and semilayers with cavities. *Acta Mechanica*, 208, 81–95.
- Filstinskii, L. A., Kovalev, U. D., & Vensel, E. S. (2002). Solution of the elastic boundary value problem for a layer with tunnel stress raisers. *International Journal of Solids and Structures*, 39, 6385–6402.
- Grigorenko, Ya. M., & Grigorenko, A. Ya. (2013). Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (review). *International applied mechanics*, 49(2), 123–193.
- Grigorenko, Ya. M., Savula, Ya. G., & Mukha, I. S. (2000). Linear and nonlinear problems of the elastic deformation of complex shells and methods of their numerical solution. *International applied mechanics*, 36(8), 979–1000.
- Khoma, I. Y., & Dashko, O. G. (2015). Stress state of a nonthin transversely isotropic plate with a curved hole. *International Applied Mechanics*, 51(4) 461–474. <https://link.gale.com/apps/doc/A452494590/AONE?u=anon~f689a68d&sid=googleScholar&id=2a3614fc>
- Lur'e, A. I. (1964). *Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity*. Interscience Publishers.
- Nemysh, Y. N., & Khoma, I. Y. (1993). Stress-strain state of non-thin plates and shells. Generalized theory (survey). *International applied mechanics*, 29(11), 873–902.
- Seleзов, І. Т. (2018). Development and application of the Cauchy–Poisson method to layer elastodynamics and the Timoshenko equation. *Cybernetics and Systems Analysis*, 54, 434–442. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0044-x>
- Stoyan, V. A. (2018). Three-dimensional integral mathematical models of the dynamics of thick elastic plates. *Cybernetics and Systems Analysis*, 54(2), 232–241. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0024-1>
- Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1987). *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill.

References

- Bardzokas, D. I., Kushnir, D. V., & Filshtinskii, L. A. (2009). Dynamic problems of the theory of elasticity for layers and semilayers with cavities. *Acta Mechanica*, 208, 81–95.
- Fil'shtinskii, L. A., Kovalev, U. D., & Vensel, E. S. (2002). Solution of the elastic boundary value problem for a layer with tunnel stress raisers. *International Journal of Solids and Structures*, 39, 6385–6402.
- Grigorenko, Ya. M., & Grigorenko, A. Ya. (2013). Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (review). *International applied mechanics*, 49(2), 123–193.
- Grigorenko, Ya. M., Savula, Ya. G., & Mukha, I. S. (2000). Linear and nonlinear problems of the elastic deformation of complex shells and methods of their numerical solution. *International applied mechanics*, 36(8), 979–1000.
- Khoma, I. Y., & Dashko, O. G. (2015). Stress state of a nonthin transversely isotropic plate with a curved hole. *International Applied Mechanics*, 51(4), 461–474. <https://link.gale.com/apps/doc/A452494590/AONE?u=anon~f689a68d&sid=googleScholar&id=2a3614fc>
- Lur'e, A. I. (1964). *Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity*. Interscience Publishers.
- Nemysh, Y. N., & Khoma, I. Y. (1993). Stress-strain state of non-thin plates and shells. Generalized theory (survey). *International applied mechanics*, 29(11), 873–902.
- Selezov, I. T. (2018). Development and application of the Cauchy–Poisson method to layer elastodynamics and the Timoshenko equation. *Cybernetics and Systems Analysis*, 54, 434–442. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0044-x>
- Selezov, I. T. (1961). On the hypotheses underlying the refined equations of transverse plate vibrations and some features of these equations. *Applied mechanics*, 7, 538–546 [in Ukrainian].
- Stoyan, V. A. (2016). *Methods of mathematical modeling in problems of dynamics of thick elastic plates*. VOC "Kyiv University" [in Ukrainian].
- Stoyan, V. A. (2018). Three-dimensional integral mathematical models of the dynamics of thick elastic plates. *Cybernetics and Systems Analysis*, 54(2), 232–241. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0024-1>
- Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1987). *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill.

Отримано редакцією журналу / Received: 29.03.24

Прорецензовано / Revised: 23.11.24

Схвалено до друку / Accepted: 26.11.24

Volodymyr STOYAN, DSc (Phys. & Math.), Prof.

ORCID ID: 0009-0008-0746-5050

e-mail: volodymyr.stoyan@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Dmytro CHERNIY, DSc (Engin.), Assoc. Prof.

ORCID ID: 0000-0002-6378-8048

e-mail: dmytro.cherniy@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Serhii VOLOSHCHUK, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.

ORCID ID: 0009-0000-6416-5566

e-mail: sr.voloshchuk@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF CONTROLLING THE DYNAMICS OF INCOMPLETELY OBSERVED THICK ELASTIC PLATES. PART I. THE CASE OF CONTINUOUSLY SPECIFIED DESIRED CONDITION

In the three-dimensional formulation for the first time complex problems of controlling the elastic plate's dynamics on reaching by the field its elastic-dynamic displacements continuously for the spatially-temporal coordinates of a given desired state are solved. The classical equations of the three-dimensional theory of elasticity and the root mean-square control criterion were chosen as output data for solving the considered problems. Controlling can be volumetric, initial, surface and end external- dynamic disturbances, considered separately and in practical justified combination. The problems are formulated and solved on the condition of continuously defined initial-boundary observations for the plate's state, which without restriction on their quantity and quality are defined functionally through linear differential operators of arbitrary order and structure. Observed system's characteristics are modelled discretely and continuously defined by the simulation functions, numerical values and analytics of which are outside the considered spatial-temporal domain of functioning of the studied elastic body in the result of the construction of root mean-square approximations to linear algebraic, integral and functional equations' solutions. Calculation formulas, which determine the set of admissible solutions of the considered problems, are quite simple and accessible for computer implementation. The defined peculiarities of controlling the considered elastic object's dynamics are determined for cases when the initial and boundary external-dynamic disturbances can be neglected, and the plate's dynamics can be considered in unrestricted spatial and temporal domains. Assessment of the accuracy of control problems' solving has been made, conditions for unambiguity of the constructed solutions have been formulated.

Keywords: spatially distributed dynamical systems, spatial problems of elasticity theory, thick elastic plates, control problems.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.