

Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Міністерство освіти і науки України  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Аветісян Діана Арутюнівна**

УДК 519.21

**ДИСЕРТАЦІЯ**

**Параметричне оцінювання у  
стохастичних диференціальних  
рівняннях з частинними похідними і  
дробовими шумами**

112 — статистика

Подається на здобуття наукового ступеня  
доктора філософії

*Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.*

*Д. А. Аветісян*

Науковий керівник  
**Ральченко Костянтин Володимирович,**  
доктор фізико-математичних наук,  
доцент

Київ — 2023

# Анотація

*Аветісян Д. А.* Параметричне оцінювання у стохастичних диференціальних рівняннях з частинними похідними і дробовими шумами.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю «112 — статистика» — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2023.

Дисертаційне дослідження присвячене стохастичним рівнянням з частинними похідними, керованим вінерівським процесом, дробовим броунівським рухом, або їхньою лінійною комбінацією. Головною метою дослідження є розробка методів одночасного оцінювання невідомих параметрів шуму на основі дискретних спостережень розв'язків таких рівнянь. Також вивчаються асимптотичні властивості побудованих оцінок. Значну увагу приділено вивченню властивостей розв'язків згаданих рівнянь, таких як стаціонарність та ергодичність, оскільки на них базується побудова та подальше дослідження статистичних оцінок.

Стрімкий розвиток теорії стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними триває вже чотири десятиліття. Ця теорія об'єднує елементи теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними та стохастичного аналізу. Вона знаходить застосування у багатьох наукових галузях, таких як фізика, біологія, геофізика та фінанси. Такі рівняння моделюють процеси дифузії, фазові переходи та властивості матеріалів. Вони також застосовуються у фінансах для ціноутворення опціонів, управління ризиками та моделювання стохастичної волатильності. Оскільки стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними відіграють важливу роль у багатьох наукових галузях, то дослідження властивостей та розвиток статистичних методів для них є актуальним завданням сучасних досліджень.

З особливою увагою в дисертаційному дослідженні вивчаються стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними, які містять дробовий броунівський рух. Такі рівняння дозволяють описувати процеси з довгостроковою та короткостроковою залежністю, що має значення для фізичних систем, радіоелектронних приладів, комп'ютерних мереж та фінансових ринків. Додатково, дане дослідження охоплює більш складні моделі з поєднанням білого і дробового

шумів. Це дозволяє, зокрема, точніше моделювати процеси на фінансових ринках, де існують різні джерела випадковості.

У дисертації вивчається стохастичне рівняння теплопровідності, кероване одним із трьох типів випадкового шуму: 1) білим; 2) дробовим броунівським; 3) змішаним дробовим броунівським (тобто, лінійною комбінацією перших двох).

Спочатку для кожного з трьох згаданих стохастичних рівнянь введено поняття м'якого розв'язку та досліджено його аналітичні властивості. Зокрема, виведено формули для обчислення дисперсії та коваріаційної функції, досліджено їхню граничну поведінку, побудовано оцінки зверху. Встановлено стаціонарність та ергодичність розв'язку. Перелічені властивості відіграють ключову роль при побудові статистичних оцінок та дослідженні їхніх асимптотичних властивостей.

Основну частину дослідження присвячено розробці статистичних методів для оцінювання параметрів згаданих стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними. При цьому припускається, що розв'язок відповідного рівняння спостерігається у дискретних точках простору для фіксованих моментів часу.

Для багатовимірного стохастичного рівняння теплопровідності з білим шумом побудовано оцінку параметра дифузії  $\sigma$  на основі ергодичної теореми. Доведено строгу консистентність та асимптотичну нормальність отриманої оцінки, для чого використано теорему Нуаларта – Пеккаті про четвертий момент.

Для стохастичного рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом спочатку побудовано оцінку параметра дифузії  $\sigma$  за припущення, що параметр Хюрста  $H$  є відомим. Доведено строгу консистентність та асимптотичну нормальність одержаної оцінки. Далі досліджено задачу одночасного оцінювання параметра дифузії та параметра Хюрста. Побудовано строгу консистентні оцінки та доведено їхню спільну асимптотичну нормальність для  $H \in (0, \frac{3}{4})$ .

Для стохастичного рівняння теплопровідності зі змішаним дробовим броунівським шумом (який є лінійною комбінацією дробового броунівського руху з індексом Хюрста  $H$  та незалежного від нього вінерівського процесу) побудовано оцінку параметра Хюрста  $H$ , яка не залежить від інших параметрів рівняння.

Доведено її строгу консистентність для  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$  та асимптотичну нормальність для  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ . Після цього одержано оцінки параметрів для коефіцієнтів при дробовому броунівському русі та при вінерівському процесі  $(\sigma, \kappa)$ , за припущення, що параметр Хюрста  $H$  відомий. Доведено строгу консистентність побудованих оцінок для  $H \neq 1/2$  та їхню спільну асимптотичну нормальність для  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ .

Виконано комп'ютерне моделювання запропонованих у роботі оцінок параметрів. Отримані числові результати підтверджують теоретичні висновки щодо їхньої консистентності та асимптотичної нормальності.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теорію та статистику стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Методи, запропоновані в дисертації, можуть бути корисними при дослідженні математичних моделей випадкових явищ зі складною поведінкою, зокрема тих, які характеризуються довгостроковою або короткостроковою залежністю.

*Ключові слова:* Дробовий броунівський рух, стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними, стаціонарні процеси, ергодичні процеси, строга консистентність, асимптотична нормальність, м'який розв'язок.

## Summary

*Avetisian D. A.* Parameter estimation in stochastic partial differential equations with fractional noises. — Manuscript.

Doctor's of Philosophy, specialty "112 — Statistics" — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis is devoted to fractional stochastic partial differential equations driven by Wiener process, fractional Brownian motion or their linear combination. The main goal of the research is the development of statistical methods for simultaneous noise parameters estimation based on discrete observations of the solutions. Also asymptotic properties of estimators have been investigated. Special attention is given to the properties of solutions such as stationarity and ergodicity since they are crucial for the construction and further investigation of statistical estimators.

The rapid development of the theory of partial differential equations is in progress for the last four decades. This theory combines the elements of stochastic partial differential equations theory and stochastic analysis. It can be applied in many scientific areas such as physics, biology, geophysics and finances. Such equations are used to model the diffusion processes, phase transitions and material properties. They also can be applied in finance for option pricing, risk management and stochastic volatility modeling. The investigation of the stochastic partial differential equations properties and development of the statistical methods for them are important problems for modern studies as they are playing a crucial role in many scientific fields.

The special attention in this thesis is devoted to stochastic partial differential equations driven by fractional Brownian noise. Such type of equations can be used to describe the processes with long-term and short-term dependencies which are important for physical systems, radio-electronic devices, computer networks and financial markets. In addition, this research covers more complex models with combination of white and fractional Brownian noises. This allows us, in particular, to model financial market processes more accurately when different sources of randomness exist.

In this thesis stochastic differential heat equation with one of three types of random noise: 1) white; 2) fractional Brownian; 3) mixed fractional Brownian (which is a linear combination of first two types) has been studied.

First, for each type of stochastic equations specified above the definition of mild solution was introduced and its analytic properties were investigated. In particular, the exact formulas for the variance and the covariance functions were derived, its limit behavior was investigated, upper bounds were constructed. The stationarity and ergodicity of the solution were proved for each case. The above mentioned properties play a crucial role for statistical estimators construction and their asymptotic properties investigation.

The main part of this research is devoted to statistical methods development for parameter estimation of stochastic partial differential equations specified above. At the same time the solutions of corresponding equations are observed at discrete spatial points for fixed time moments.

The diffusion parameter  $\sigma$  estimator has been constructed for multidimensional stochastic heat equation with white noise based on the ergodic theorem. Strong consistency and asymptotic normality of this estimator have been proved using the

Nualart–Peccati fourth moment theorem.

For stochastic heat equation with fractional Brownian noise the diffusion parameter  $\sigma$  estimator has been constructed assuming that Hurst index  $H$  is known. Strong consistency and asymptotic normality of created estimator have been proved. Then the problem of joint diffusion parameter and Hurst parameter estimation has been studied. Strongly consistent joint estimator has been constructed and its asymptotic normality has been proved for  $H \in (0, \frac{3}{4})$ .

The Hurst parameter  $H$  estimator which does not depend on other parameters has been constructed for stochastic heat equation with mixed fractional Brownian noise (a linear combination of fractional Brownian noise with Hurst index  $H$  and independent Wiener process). Strong consistency of constructed estimator has been proved for  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$  and its asymptotic normality has been proved for  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ . Then assuming the parameter  $H$  to be known, joint estimator of the coefficients in front of Wiener process and in front of fractional Brownian motion  $(\sigma, \kappa)$  has been constructed. Strong consistency of this estimator has been proved for  $H \neq 1/2$  and its joint asymptotic normality has been proved for  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ .

Computer simulation has been performed for all considered parameter estimators. The numerical results confirm the theoretical conclusions regarding their consistency and asymptotic normality.

The thesis is mostly theoretical. The results obtained contribute to the theory and statistics of stochastic partial differential equations. The methods proposed in the thesis can be useful in research of mathematical models of random phenomena with complex behavior, in particular the one which is characterized by long-term or short-term dependence.

*Keywords:* Fractional Brownian motion, stochastic partial differential equation, stationary process, ergodic process, strong consistency, asymptotic normality, mild solution.

## Список публікацій здобувача за темою дисертації

### Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Avetisian D. A. and Shevchenko G. M. Estimation of diffusion parameter for stochastic heat equation with white noise // [Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics](#). 2018. no. 55, P. 9–16.
2. Avetisian D. A. and Ralchenko K. V. Ergodic properties of the solution to a fractional stochastic heat equation, with an application to diffusion parameter estimation // [Modern Stochastics: Theory and Applications](#). 2020. Vol. 7, no. 3, P. 339–356.
3. Avetisian D. A. and Ralchenko K. V. Estimation of the Hurst and diffusion parameters in fractional stochastic heat equation // [Theory of Probability and Mathematical Statistics](#). 2021. no. 104, P. 61–76.
4. Avetisian D. A. and Ralchenko K. V. Parameter estimation in mixed fractional stochastic heat equation // [Modern Stochastics: Theory and Applications](#). 2023. Vol. 10, no. 2, P. 175–195.

### Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Аветісян Д. А., Шевченко Г. М. Оцінювання параметру дифузії стохастичного рівняння теплопровідності з білим шумом // XVII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2019». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 17-19 квітня 2019. С. 32–33.
2. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Оцінювання параметру дифузії стохастичного рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом // XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 15-16 квітня 2020. С. 3–4.
3. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Оцінювання параметрів Хюрста і дифузії у дробовому стохастичному рівнянні теплопровідності // XIX Міжнародна

науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 15-16 квітня 2021. С. 4.

4. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів у змішаному дробовому стохастичному рівнянні теплопровідності // XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2023. С. 3–4.
5. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Оцінювання параметрів у стохастичному диференціальному рівнянні теплопровідності з дробовим броунівським шумом // XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях». Харків, Україна : Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна. 12-14 травня 2023. С. 22–24.
6. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Оцінювання параметрів у змішаному дробовому стохастичному рівнянні теплопровідності // XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2022. С. 3.
7. Avetisian D., Ralchenko K. Ergodic properties of the solution to a fractional stochastic heat equation, with an application to diffusion parameter estimation // Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”. Tashkent, Uzbekistan. February 20-21, 2021. P. 34–37.
8. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Parameter estimation in stochastic heat equation driven by fractional Brownian motion // International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”. Kyiv, Ukraine. June 1-4, 2021. P. 83–84.
9. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Asymptotic properties of the Hurst and diffusion parameters estimators in fractional stochastic heat equation // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. June 3-5, 2021. P. 83.

10. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Parameter estimation in stochastic heat equation with fractional Brownian motion // 15th Bachelier colloquium. Metabief, France. January 16-21, 2023. P. 4.
11. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Asymptotic properties of parameter estimators in mixed fractional stochastic heat equation // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. June 1-3, 2023. [https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts\\_2023/PS/Avetisian-Ralchenko.pdf](https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Avetisian-Ralchenko.pdf).

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>11</b>
<b>1 Огляд літератури за темою дисертації</b>	<b>24</b>
<b>2 Попередні відомості</b>	<b>30</b>
2.1 Дробовий броунівський рух	30
2.2 Гауссівська міра з незалежними приростами у $\mathbb{R}^d$	32
2.3 Кратні інтеграли	32
2.4 Властивості нормально розподілених величин	35
2.5 Деякі граничні теореми	36
<b>3 Основні властивості розв'язку стохастичного рівняння тепло- провідності</b>	<b>40</b>
3.1 Рівняння теплопровідності з білим шумом	40
3.2 Рівняння теплопровідності з дробовим броунівським рухом	44
3.3 Рівняння теплопровідності зі змішаним дробовим броунівським рухом	59
3.4 Висновки	62
<b>4 Оцінювання параметрів стохастичного рівняння теплопровідності</b>	<b>63</b>
4.1 Оцінювання параметра дифузії у рівнянні теплопровідності з білим шумом	63
4.2 Оцінювання параметрів дифузії та Хюрста у рівнянні теплопро- відності з дробовим броунівським рухом	72
4.2.1 Оцінювання параметра дифузії $\sigma$ при відомому параметрі Хюрста $H$	72

4.2.2	Одночасне оцінювання параметра дифузії $\sigma$ та параметра Хюрста $H$ . . . . .	76
4.2.3	Моделювання . . . . .	82
4.2.3.1	Моделювання оцінки параметра дифузії $\sigma$ для відомого $H$ . . . . .	82
4.2.3.2	Моделювання оцінок параметра дифузії $\sigma$ та параметра Хюрста для невідомого $H$ . . . . .	83
4.3	Оцінювання параметрів у рівнянні теплопровідності зі змішаним дробовим шумом . . . . .	88
4.3.1	Оцінювання параметра Хюрста $H$ . . . . .	91
4.3.2	Оцінювання параметрів $\sigma$ та $k$ . . . . .	97
4.3.3	Оцінка максимальної вірогідності та інформація Фішера . . . . .	99
4.3.4	Моделювання . . . . .	102
4.4	Висновки . . . . .	104
	<b>Висновки</b> . . . . .	<b>106</b>
	<b>Список використаних джерел</b> . . . . .	<b>108</b>

# Вступ

**Актуальність теми.** Дисертаційне дослідження присвячене стохастичним рівнянням теплопровідності, керованим вінерівським процесом, дробовим броунівським рухом, або їхньою лінійною комбінацією. Вивчаються аналітичні властивості м'яких розв'язків таких рівнянь: стаціонарність, ергодичність, коваріаційна структура. Головну увагу приділено розробці методів одночасного оцінювання невідомих параметрів шуму за дискретними спостереженнями розв'язку та дослідженню асимптотичних властивостей побудованих оцінок.

Протягом майже чотирьох десятиліть стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними залишаються темою активних досліджень у галузі чистої та прикладної математики, механіки, геофізики та теоретичної фізики. Теорія стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними стала новою областю математики, що об'єднує елементи теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними та інструментами стохастичного аналізу та теорії ймовірностей. Такі рівняння мають широкий спектр застосувань у різних галузях наукових досліджень. Зокрема, вони широко використовуються для моделювання фізичних систем, які піддаються впливу внутрішнього, зовнішнього або навколишнього шуму. Стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними також виникають при розгляді детермінованих моделей із випадковими початковими умовами або як зручні наближення до складних детермінованих систем. У багатьох випадках, наявність шуму в таких рівняннях приводить до нових явищ, що мають практичне значення у фізичних науках, біології та фінансовому моделюванні, див. [27]. Наприклад, у дослідженні матеріалів ці рівняння допомагають вивчати процеси дифузії, фазові переходи та властивості матеріалів. У фінансах вони застосовуються при ціноутворенні опціонів, управлінні ризиками та моделюванні стохастичної волатильності [16]. Стохастичні диференціальні рівняння з частинними похі-

дними активно використовуються у геофізиці для моделювання сейсмічної активності, потоків ґрунтових вод, океанських течій [74, 77, 86] та у геостатистиці [91]. У кліматології такі рівняння використовуються для моделювання погодних умов, динаміки клімату та екологічних процесів [51]. У біології вони застосовуються для моделювання динаміки популяції та інших біологічних процесів [36].

У дисертаційному дослідженні зосереджено увагу на моделях, які описуються стохастичними диференціальними рівняннями з дробовим броунівським рухом. Ці моделі стають все більш популярними через їх здатність описувати процеси з ненульовими кореляціями випадкового шуму, іншими словами, процеси з довгостроковою та короткостроковою залежністю. Інтенсивний розвиток досліджень у цій тематиці пов'язаний зі спостережуваною довгостроковою залежністю в різних фізичних системах, радіоелектронних приладах, комп'ютерних мережах та на фінансових ринках. Додатково, дисертаційна робота досліджує більш складні рівняння, які комбінують два види шумів – білий і дробовий. Ці моделі застосовуються для більш точного моделювання процесів на фінансових ринках, де на ціни впливають два основних джерела випадковості: фондова біржа (що добре моделюється за допомогою білого шуму) і фінансово-економічний контекст, який моделюється дробовим броунівським рухом.

Як уже згадувалося, стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними є важливими з огляду на широкий спектр застосувань до реальних явищ і реальних ситуацій. Це зумовлює потребу у статистичних методах для калібрування моделей, які описуються згаданими рівняннями. Тому задача статистичного оцінювання параметрів моделі на основі дискретних спостережень розв'язків стохастичного диференціального рівняння з частинними похідними нещодавно привернула значний інтерес. Однак теорія статистичного оцінювання для стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними (навіть зі стандартним броунівським рухом) все ще знаходиться на початковій стадії розробки і чимало важливих питань досі не вирішено в статистичній літературі, подробиці див. в оглядовій статті [25]. Таким чином, тема дисертації знаходиться у руслі новітніх сучасних досліджень з теорії та статистики випадкових процесів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційну роботу виконано в рамках державних бюджетних дослідницьких наукових тем № 19БФ038-01 «Точні формули, оцінки, асимптотичні властивості і статистичний аналіз складних еволюційних систем з багатьма ступенями свободи» (номер державної реєстрації 0119U100317) та № 22БФ038-01 «Стохастичні динамічні системи, неоднорідні у часі або з випадковим часом: асимптотика та статистичний аналіз» (номер державної реєстрації 0122U001843) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що входять до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

**Мета та завдання дослідження.** Метою дисертаційної роботи є оцінювання параметрів у стохастичних диференціальних рівняннях з частинними похідними. Зокрема, було розглянуто стохастичне рівняння теплопровідності з різними видами дробового броунівського шуму та побудовано оцінки параметрів Хюрста та дифузії. Основними завданнями даної роботи є:

- дослідження властивостей розв'язку стохастичного рівняння теплопровідності, а саме доведення стаціонарності та ергодичності даного випадкового процесу;
- побудова оцінок невідомих параметрів у стохастичному диференціальному рівнянні теплопровідності з різними видами дробового шуму;
- доведення їх консистентності;
- знаходження точного або асимптотичного розподілу одержаних оцінок;
- моделювання цих оцінок.

**Об'єктом дослідження** є стохастичне диференціальне рівняння теплопровідності з різними видами шумів, а саме з білим шумом, дробовим броунівським шумом та їхньою комбінацією.

**Предметом дослідження** є оцінки невідомих параметрів стохастичного рівняння теплопровідності з різними видами дробового шуму, їх консистентність та асимптотична нормальність.

**Методи дослідження.** У роботі застосовуються методи теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових процесів. Для чисельного моделювання використовується статистичний пакет R.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Всі результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими та математично обґрунтованими. Вони стосуються статистичного оцінювання параметрів у стохастичному диференціальному рівнянні теплопровідності з дробовими шумами. Основними результатами є:

1. доведено стаціонарність та ергодичність випадкового поля, що є розв'язком стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з білим шумом;
2. побудовано оцінку параметра дифузії  $\sigma$  стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з білим шумом, доведено строго консистентність та асимптотичну нормальність отриманої оцінки;
3. доведено стаціонарність та ергодичність випадкового процесу, що є розв'язком стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом;
4. побудовано оцінку параметра дифузії  $\sigma$  стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом при відомому параметрі Хюрста, доведено строго консистентність та асимптотичну нормальність побудованої оцінки;
5. побудовано спільну оцінку параметрів дифузії ( $\sigma$ ) та Хюрста ( $H$ ) стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом, доведено строго консистентність та асимптотичну нормальність наведеної оцінки;
6. доведено стаціонарність та ергодичність випадкового процесу, що є розв'язком стохастичного диференціального рівняння теплопровідності зі змішаним дробовим броунівським шумом;
7. побудовано оцінку параметра Хюрста  $H$  стохастичного диференціального рівняння теплопровідності зі змішаним дробовим броунівським шумом, доведено строго консистентність та асимптотичну нормальність отриманої оцінки;
8. побудовано спільну оцінку параметрів ( $\sigma, \kappa$ ) стохастичного диференціального рівняння теплопровідності зі змішаним дробовим броунівським

- шумом за припущення, що параметр Хюрста  $H$  є відомим, доведено строгою консистентність та асимптотичну нормальність наведеної оцінки;
9. проведено чисельне моделювання оцінок, які базуються на дискретних спостереженнях.

**Практичне значення одержаних результатів.** Отримані результати даної роботи дозволяють будувати оцінки невідомих параметрів стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з різними видами шуму. Подібні рівняння мають широке застосування для моделювання різних процесів у фінансовій математиці, біології, метеорології та гідродинаміці. Розглянуті рівняння теплопровідності можуть бути застосовані в геофізиці, особливо в фізичній океанографії та геостатистиці.

**Особистий внесок здобувача.** Усі результати дисертаційної роботи одержані здобувачем самостійно. За результатами дисертації здобувач опублікував чотири роботи у фахових виданнях [4,7,8,12]. Три роботи [4,7,8] опубліковані у співавторстві з науковим керівником доцентом Ральченком К. В., у яких Ральченку К. В. належить постановка задачі та загальне керівництво роботою. Одна робота [12] опублікована у співавторстві з професором Шевченком Г.М. у якій Шевченку Г.М. належить постановка задачі, визначення загальної схеми дослідження та ідея доведення основних результатів.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на таких всеукраїнських та міжнародних конференціях:

1. XVII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2019», 17-19 квітня, 2019, Київ, Україна.
2. XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз», 15-16 квітня, 2020, Київ, Україна.
3. Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”, February 20-21, 2021, Tashkent, Uzbekistan.
4. XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика,

- комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз», 15–16 квітня, 2021, Київ, Україна.
5. International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”, June 1-4, 2021, Kyiv, Ukraine.
  6. International Conference of Young Mathematicians, June 3-5, 2021, Kyiv, Ukraine.
  7. XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз», 14 квітня, 2022, Київ, Україна.
  8. 15th Bachelier colloquium, January 16-21, 2023, Metabief, France.
  9. XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз.Методика викладання математики», 14 квітня, 2023, Київ, Україна.
  10. XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», 12-14 травня, 2023, Харків, Україна.
  11. International Conference of Young Mathematicians, June 1-3, 2023, Kyiv, Ukraine.

**Публікації.** За результатами дисертації опубліковано

- 4 статті у періодичних фахових виданнях [4, 7, 8, 12]; три з них [4, 7, 8] – у виданнях, які індексуються в наукометричних базах Scopus та Web of Science і входять до квартиля Q3; одна [12] – у науковому фаховому виданні України;
- 11 тез доповідей на конференціях [5, 6, 9–11, 97–102].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел (102 найменування), додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів та додатку з кодом, який було використано для моделювання отриманих в роботі оцінок. Повний обсяг дисертації становить 127 сторінок, основний текст займає 97 сторінок.

**Зміст роботи.** **Перший розділ** містить огляд літератури та результатів отриманих іншими авторами за тематикою дисертації, висвітлює сучасний стан вивчення задач схожих до тих, що розглядаються в роботі.

У **другому розділі** наведено основні загальні означення та деякі додаткові твердження, які використано в дисертаційній роботі.

У **третьому розділі** розглянуто стохастичні диференціальні рівняння теплопровідності з різними видами дробового броунівського шуму та сформульовано основні властивості розв'язку кожного з цих рівнянь.

У **підрозділі 3.1** розглянуто стохастичне диференціальне рівняння теплопровідності з з білим шумом ( $\dot{W}$ ) вигляду

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta u \right) (t, x) &= \sigma \dot{W}(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Згідно з [92] розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u(t, x) = \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y) W(dy) ds, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad (2)$$

де функція  $G$  – це функція Гріна, визначена наступним чином:

$$G(t, x) = \begin{cases} (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right), & \text{якщо } t > 0, \\ \delta_0(x) & \text{якщо } t = 0. \end{cases}$$

Досліджено властивості випадкового поля  $u$ . Було доведено, що поле  $u$  є стаціонарним та ергодичним. Окрім цього, було доведено, що поле є коректно визначеним і підраховано явний вигляд  $\mathbb{E}[u(t, x)^2]$  та  $\text{Cov}(u(t, 0), u(t, x))$ .

У **підрозділі 3.2** розглянуто стохастичне рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом ( $\dot{B}^H$ ) вигляду

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (t, x) &= \sigma \dot{B}_x^H, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

Згідно з [92] розв'язок стохастичного диференціального рівняння (3.6) має вигляд

$$u(t, x) = \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) dB_y^H ds, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

де  $G$  – функція Гріна рівняння теплопровідності.

Доведено, що процес  $u(t, \cdot)$  є стаціонарним гауссівським процесом. Отримано явний вираз для дисперсії. Більш того, підраховано верхню межу для коваріації процесу. Також отримано вираз для коваріаційної функції  $\text{Cov}(u(t, 0), u(t, x))$ .

Отримані властивості також узагальнено на випадок двовимірного процесу  $\begin{pmatrix} u(t, \cdot) \\ u(s, \cdot) \end{pmatrix}$  для фіксованих точок  $t, s \in [0, T]$ .

У *підрозділі 3.3* досліджено стохастичне диференціальне рівняння теплопровідності:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (t, x) = \sigma \dot{B}_x^H + \kappa \dot{W}_x, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Права частина рівняння цього рівняння є *змішаним дробовим шумом*. Він складається з двох незалежних стохастичних процесів, а саме  $B^H = \{B_x^H, x \in \mathbb{R}\}$  – двосторонній дробовий броунівський рух з індексом Хюрста  $H \in (0, 1)$  і  $W = \{W_x, x \in \mathbb{R}\}$  – вінерівський процес, що не залежить від  $B^H$ ;  $\sigma$  і  $\kappa$  – деякі додатні коефіцієнти. Випадкове поле  $\{u(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$  визначене як

$$u(t, x) = \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) dB_y^H ds + \kappa \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) dW_y ds \quad (7)$$

є розв'язком стохастичного диференціального рівняння (5). Доведено, що для фіксованих різних точок  $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$  випадковий процес  $\begin{pmatrix} u(t_1, x) \\ \vdots \\ u(t_n, x) \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , є багатовимірним стаціонарним гауссовим процесом. Знайдено явний вираз дисперсії та коваріації  $u(t, x)$ . Також доведено, що коваріаційна функція обмежена зверху. Отримано твердження, що для фіксованого  $t > 0$  випадковий процес  $\{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}$  є ергодичним.

**Четвертий розділ** присвячено задачі оцінювання параметрів у стохастичних диференціальних рівняннях з різними видами шуму.

У *підрозділі 4.1* отримано оцінку параметра дифузії  $\sigma$  стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з білим шумом (1) вигляду

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{N^d v^2} \sum_{x_k \in D_N} u(t, x_k)^2,$$

де процес спостерігається на сітці

$$D_N = \{(i_1\delta, \dots, i_d\delta), i_1, \dots, i_d \in \{1, \dots, N\}\}.$$

та

$$v^2 = \int_0^t \int_0^t \frac{1}{(2\pi(s_1 + s_2))^{d/2}} ds_1 ds_2 = \begin{cases} \frac{4(2-\sqrt{2})t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}, & d = 1, \\ \frac{t \log 2}{\pi}, & d = 2, \\ \frac{2(-1+\sqrt{2})\sqrt{t}}{\pi^{3/2}}, & d = 3. \end{cases}$$

Доведено строгу консистентність та асимптотичну нормальність запропонованої оцінки.

У підрозділі 4.2 розглядається задача оцінювання параметрів стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом вигляду (3).

У пункті 4.2.1 припускається, що для фіксованого моменту часу  $t > 0$  і фіксованого кроку  $\delta > 0$  випадкове поле  $u$ , що є розв'язком рівняння (3), спостерігається в точках  $x_k = k\delta$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Досліджено задачу оцінювання параметра  $\sigma$  при відомому параметрі Хюрста  $H$ . Отримано оцінку вигляду

$$\tilde{\sigma}_N^2 = \frac{\widehat{V}_N(t)}{Nv_t(H)}. \quad (8)$$

де

$$\widehat{V}_N(t) = \sum_{k=1}^N u(t, k\delta)^2, \quad v_t(H) = \mathbb{E}u(t, 0)^2.$$

Доведено строгу консистентність та асимптотичну нормальність отриманої оцінки. Асимптотичний розподіл оцінки  $\tilde{\sigma}_N^2$  залежно від значення  $H$  має такий вигляд:

1) для  $H \in (0, \frac{3}{4})$

$$\sqrt{N} (\tilde{\sigma}_N^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)^2}\right), \quad N \rightarrow \infty;$$

2) для  $H = \frac{3}{4}$

$$\sqrt{\frac{N}{\log N}} (\tilde{\sigma}_N^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{9\sigma^4 t^4}{16\delta v_t(\frac{3}{4})^2}\right), \quad N \rightarrow \infty;$$

3) для  $H \in (\frac{3}{4}, 1)$

$$N^{2-2H} (\widehat{\sigma}_N^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} Y, \quad N \rightarrow \infty,$$

де  $Y$  – випадкова величина Розенблатта:

$$Y = \frac{H(2H-1)\sigma^2 t^2}{2\Gamma(2-2H)\cos(\pi(1-H))\delta^{2-2H}v_t(H)} \times \int e^{i(x_1+x_2)} \frac{e^{i(x_1+x_2)} - 1}{i(x_1+x_2)} |x_1|^{\frac{1}{2}-H} |x_2|^{\frac{1}{2}-H} dW(x_1) dW(x_2).$$

У пункті 4.2.2 розглянуто задачу побудови строго консистентної оцінки параметрів  $(H, \sigma^2)$  на основі спостережень

$$\{u(t, k\delta), u(s, k\delta), k = 1, \dots, N\}.$$

Припускається, що є фіксовані  $t > 0$  і  $s > 0$  та фіксований крок  $\delta > 0$ , тобто випадкове поле  $u$ , що є розв'язком рівняння (3), спостерігається в точках  $x_k = k\delta$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Доведено, що для всіх  $H \in (0, 1)$ ,  $(\widehat{H}_N, \widehat{\sigma}_N^2)$  є строго консистентною оцінкою параметрів  $(H, \sigma^2)$  при  $N \rightarrow \infty$ , де

$$\widehat{H}_N = \frac{\log(\widehat{V}_N(t) / \widehat{V}_N(s))}{\log(t/s)} - 1, \quad \widehat{\sigma}_N^2 = \frac{\widehat{V}_N(t)}{Nv_t(\widehat{H}_N)} = \frac{\widehat{V}_N(s)}{Nv_s(\widehat{H}_N)}.$$

Для  $H \in (0, \frac{3}{4})$ , оцінка  $(\widehat{H}_N, \widehat{\sigma}_N^2)$  є асимптотично нормальною:

$$\sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{H}_N - H \\ \widehat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \right) \quad \text{as } N \rightarrow \infty,$$

де

$$c_{11} = \sigma^{-4} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-2} \left( \frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)^2} - \frac{2r_{ts}(H)}{v_t(H)v_s(H)} + \frac{r_{ss}(H)}{v_s(H)^2} \right),$$

$$c_{12} = -\sigma^{-2} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-2} \left( \frac{r_{tt}(H)\tau_s(H)}{v_t(H)^2} - \frac{r_{ts}(H)(\tau_t(H) + \tau_s(H))}{v_t(H)v_s(H)} + \frac{r_{ss}(H)\tau_t(H)}{v_s(H)^2} \right),$$

$$c_{22} = \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-2} \left( \frac{r_{tt}(H)\tau_s(H)^2}{v_t(H)^2} - \frac{2r_{ts}(H)\tau_t(H)\tau_s(H)}{v_t(H)v_s(H)} + \frac{r_{ss}(H)\tau_t(H)^2}{v_s(H)^2} \right).$$

У пункті 4.2.3 якість оцінок отриманих в пунктах 4.2.1 та 4.2.2 відповідно проілюстровано за допомогою комп'ютерного моделювання.

У підрозділі 4.3 розглядається задача оцінювання параметрів стохастичного диференціального рівняння теплопровідності зі змішаним шумом вигляду (5). Для фіксованих точок  $t_1, \dots, t_n$  і фіксованого кроку  $\delta > 0$ , випадкове поле  $u$ , що є розв'язком рівняння (5), спостерігається в точках  $x_k = k\delta$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Таким чином, спостереження мають вигляд:

$$\{u(t_i, k\delta), i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, N\}.$$

У пункті 4.3.1 побудовано строго консистентну оцінку параметра  $H$ , яка не залежить від  $k$  та  $\sigma$ . Для цього достатньо спостерігати процес  $u(t_i, x_k)$  лише в трьох різних точках часу  $t_1 < t_2 < t_3$ .

Оцінка  $H$  визначена, як

$$\widehat{H}_N = f^{(-1)} \left( \frac{t_3^{-3/2} V_N(t_3) - t_2^{-3/2} V_N(t_2)}{t_2^{-3/2} V_N(t_2) - t_1^{-3/2} V_N(t_1)} \right), \quad (9)$$

де  $f^{(-1)}$  позначає обернену функцію  $f$ , що має вигляд

$$f(H) := \begin{cases} \frac{t_3^{H-1/2} - t_2^{H-1/2}}{t_2^{H-1/2} - t_1^{H-1/2}}, & \text{якщо } H \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{\log t_3 - \log t_2}{\log t_2 - \log t_1} & \text{якщо } H = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

Для всіх  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $\widehat{H}_N$  є строго консистентною оцінкою параметра  $H$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Для  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ , оцінка  $\widehat{H}_N$  є асимптотично нормальною:

$$\sqrt{N} (\widehat{H}_N - H) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \zeta^2) \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

де

$$\zeta^2 = \frac{1}{D^2 \sigma^4 c_H^2} \sum_{i,j=1}^3 r_{t_i t_j}(H) L_i L_j,$$

$$L_1 = \frac{t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}}}{t_1^{3/2}}, \quad L_2 = \frac{t_1^{H-\frac{1}{2}} - t_3^{H-\frac{1}{2}}}{t_2^{3/2}}, \quad L_3 = \frac{t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}}{t_3^{3/2}},$$

$$D = \left( t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}} \right) \left( t_3^{H-\frac{1}{2}} \log t_3 - t_2^{H-\frac{1}{2}} \log t_2 \right) - \left( t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right) \left( t_2^{H-\frac{1}{2}} \log t_2 - t_1^{H-\frac{1}{2}} \log t_1 \right).$$

Окремо досліджено випадок  $t_1 = h > 0$ ,  $t_2 = 2h$ ,  $t_3 = 4h$ , коли оцінка параметра  $H$  має явний вигляд

$$\widehat{H}_N = \frac{1}{2} + \log_2^+ \frac{t_3^{-3/2} V_N(t_3) - t_2^{-3/2} V_N(t_2)}{t_2^{-3/2} V_N(t_2) - t_1^{-3/2} V_N(t_1)}. \quad (11)$$

У пункті 4.3.2 побудовано оцінки коефіцієнтів  $\sigma$  і  $\kappa$  припускаючи, що індекс Хюрста  $H$  відомий.

Для будь-якого  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$  побудовано оцінку  $(\widehat{\sigma}_N^2, \widehat{\kappa}_N^2)$ , яка є строго консистентною оцінкою параметра  $(\sigma^2, \kappa^2)$  при  $N \rightarrow \infty$ , де

$$\widehat{\sigma}_N^2 = \frac{t_1^{-3/2} V_N(t_1) - t_2^{-3/2} V_N(t_2)}{c_H \left( t_1^{H-1/2} - t_2^{H-1/2} \right)}, \quad \widehat{\kappa}_N^2 = \frac{t_1^{-1-H} V_N(t_1) - t_2^{-1-H} V_N(t_2)}{c_{\frac{1}{2}} \left( t_1^{1/2-H} - t_2^{1/2-H} \right)}. \quad (12)$$

Для  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ , оцінка  $(\widehat{\sigma}_N^2, \widehat{\kappa}_N^2)$  є асимптотично нормальною:

$$\sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 \\ \widehat{\kappa}_N^2 - \kappa^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (13)$$

де асимптотична коваріаційна матриця  $\Sigma$  складається з наступних елементів:

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= \frac{t_1^{-3} (r_{t_1 t_1}(H) + r_{t_1 t_2}(H)) + t_2^{-3} (r_{t_1 t_2}(H) + r_{t_2 t_2}(H))}{c_H^2 \left( t_1^{2H-1} - 2(t_1 t_2)^{H-\frac{1}{2}} + t_2^{2H-1} \right)}, \\ \Sigma_{12} = \Sigma_{21} &= \frac{t_1^{-\frac{5}{2}-H} (r_{t_1 t_1}(H) + r_{t_1 t_2}(H)) + t_2^{-\frac{5}{2}-H} (r_{t_1 t_2}(H) + r_{t_2 t_2}(H))}{c_H c_{\frac{1}{2}} \left( 2 - t_1^{H-\frac{1}{2}} t_2^{\frac{1}{2}-H} - t_1^{\frac{1}{2}-H} t_2^{H-\frac{1}{2}} \right)}, \\ \Sigma_{22} &= \frac{t_1^{-2-H} (r_{t_1 t_1}(H) + r_{t_1 t_2}(H)) + t_2^{-2-H} (r_{t_1 t_2}(H) + r_{t_2 t_2}(H))}{c_{\frac{1}{2}}^2 \left( t_1^{1-2H} - 2(t_1 t_2)^{\frac{1}{2}-H} + t_2^{1-2H} \right)}. \end{aligned}$$

У пункті 4.3.3 проаналізовано ефективність оцінки  $(\widehat{\sigma}_N^2, \widehat{\kappa}_N^2)$  порівняно з оцінкою максимальної вірогідності (ОМВ).

У пункті 4.3.4 теоретичні властивості оцінок параметрів рівняння (5) підтверджено чисельними результатами.

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

*Автор висловлює безмежну вдячність науковому керівнику — доценту Ральченку Костянтину Володимировичу — за постійну підтримку та допомогу в роботі; завідувачці кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики — професору Мішурі Юлії Степанівні — за мотивацію та натхнення*

*до нових звершень; усьому колективу кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики за всебічну допомогу під час навчання.*

# Розділ 1

## Огляд літератури за темою дисертації

Існує досить багато природних явищ, що можуть бути описані як процеси випадкової еволюції в часі. Доволі часто для математичного представлення та моделювання подібних часових рядів можна використати дробовий броунівський рух (ДБР). Дробовий броунівський рух вперше був введений А. М. Колмогоровим для вивчення спіральних кривих в гільбертовому просторі [54], далі було встановлено стохастичне інтегральне представлення в термінах стандартного броунівського руху в статті Б. Б. Мандельброта та Дж. ван Несса [61].

Загалом ДБР  $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$  з індексом Хюрста  $H \in (0, 1)$  є досить цікавим стохастичним об'єктом, що привернув увагу багатьох науковців в останні десятиліття через своєрідні властивості. З одного боку, це гауссівський випадковий процес з достатньо простою коваріаційною функцією, траєкторії якого є гельдеровими до порядку  $H$ . З іншого боку, ДБР є узагальненням вінерівського процесу і відповідає йому при  $H = 1/2$ . Більш того, цей процес має залежні прирости, не є марковським процесом та не є напівмартингалом (окрім випадку, коли  $H = 1/2$  і це вінерівський процес). Таким чином, даний процес може бути застосовано для моделювання достатньо складних реальних процесів [49, 75, 82, 95], що мають властивості, як довгострокової залежності при  $H > 1/2$ , так і короткострокової залежності при  $H < 1/2$ .

Комбінація таких властивостей дає можливості для моделювання процесів у телекомунікаційних мережах, фізичних та біологічних системах, на фінансових ринках та страхових моделях. Застосування та властивості дробового броунівського руху досліджувалися в багатьох роботах, досить детальну теорію щодо обчислень і властивостей можна побачити в таких монографіях [43, 69, 70].

В останні чотири десятиліття були досягнуті досить великі успіхи у вивченні

випадкового поля, що є розв'язком стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) з частинними похідними керованих різними видами (дробового) броунівського шуму. Відправною точкою цієї теорії була основоположна праця J. V. Walsh [92], яка з'явилася через необхідність моделювання та опису випадкових явищ у природознавстві та математичних фінансах. Основний інтерес до СДР з частинними похідними пов'язаний з розвитком аналізу і теорії випадкових процесів, з одного боку, і різними застосуваннями до деяких реальних явищ і реальних ситуацій, з іншого боку. Наприклад, різні типи стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними є відповідними моделями для вивчення зростання населення [36], деяких кліматичних і океанографічних явищ [51, 86], процесів у фінансовій математиці [16].

Більшість результатів, опублікованих до цього часу, в основному зосереджені на аналізі рівняння теплопровідності та хвильового рівняння з гауссовими білими шумами в часі та досить загальною просторовою кореляцією [13, 35, 78]. Стохастичному хвильовому рівнянню з різними типами білого шуму присвячено багато робіт, особливу увагу приділяють доведенню існування та єдиності розв'язку в роботах [19, 31, 65].

У той же час деякі публікації присвячені стохастичним диференціальним рівнянням, що керовані шумами дробового типу. У статтях [45, 63, 88] розглянуто стохастичне нелінійне диференціальне рівняння еволюції в часі з дробовим броунівським шумом, а саме досліджується існування та єдиність м'якого розв'язку цього рівняння з різними коефіцієнтами та початковими умовами. В роботі [80] розроблено теорію інтегрування, що дозволяє розв'язати нелінійне стохастичне хвильове рівняння з дробовим броунівським шумом.

В даній роботі розглядається стохастичне диференціальне рівняння теплопровідності, що є типовим прикладом СДР з частинними похідними. Це рівняння та його чисельне наближення були детально вивчені в [24, 44, 47, 55, 89]. Існування та єдиність розв'язку рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом було розглянуто в роботах [50, 81]. Крім того, в [14, 59] були побудовані оцінки параметра зсуву на основі степеневих варіацій розв'язку стохастичного рівняння теплопровідності з дробовим шумом. Рівняння з таким типом шуму дозволяють нам моделювати різні явища з довгостроковою залежністю, що виникають у таких сферах, як фінансові ринки та мережевий

трафік. Стохастичне рівняння теплопровідності з білим і дробовим шумами було досліджено в [66]. Детальний виклад сучасної теорії в цій галузі можна знайти в монографіях [24, 33, 83].

Окремий інтерес виникає при розгляді рівнянь зі змішаним типом шуму. Змішаний дробовий броунівський рух був вперше представлений Р. Cheridito [21] для моделювання фінансових ринків, які водночас вільні від арбітражу та мають довгострокові залежності. Властивості цього процесу вивчалися в [96]. Існування та єдиність розв'язку багатовимірною залежного від часу стохастичного диференціального рівняння керованого одночасно багатовимірним стандартним броунівським рухом та багатовимірним дробовим броунівським рухом при  $H > 1/2$  була доведена в статтях [34, 46, 71] при різних початкових умовах. Властивості цього рівняння та його розв'язку було розглянуто в роботах [48, 72]. Більш того, було доведено існування та єдиність розв'язку стохастичного диференціального рівняння зі змішаним шумом та розглянуто деякі властивості у більш загальному випадку, коли шум складається з вінерівського процесу та процесу, що є гельдерово неперервним майже напевно з експонентою Гельдера  $\gamma > 1/2$  у роботі [68]. Результати сучасних теоретичних досліджень в цій області представлено в монографії [69]. Більш складні змішані дробові моделі, описані стохастичними диференціальними рівняннями, є предметом багатьох публікацій [18, 42, 48, 85], які з'явилися протягом останніх десятиліть.

Такі рівняння можна використовувати для моделювання процесів на фінансових ринках, де на ціни впливають два головних випадкових шуми. Першим джерелом випадковості є сама фондова біржа з тисячами агентів. Шум, що надходить від цього джерела, можна вважати білим і найкраще моделювати за допомогою процесу Вінера. Другий має фінансово-економічне підґрунтя і може бути змодельований дробовим броунівським рухом  $B^H$ . Стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними з такими типами шуму можуть бути використані, зокрема, для моделювання миттєвих форвардних курсів, де просторова змінна відповідає часу до погашення [27, 62]. Рівняння такого типу виникають також у геофізиці, особливо у фізичній океанографії [77] і в геостатистиці [91]. Наприклад, у моделях температури поверхні моря випадковий шум може представляти різні теплові потоки та процеси в океані [74].

Варто відмітити, що багато існуючих робіт зі статистичного аналізу для СДР

з частинними похідними мають справу з просторово-часовим шумом. Однак у цій роботі ми зосереджуємося на стохастичному рівнянні теплопровідності з лише просторовим шумом. В статті [58] показано, що такий тип шуму є важливим типом стаціонарних збурень та наведено декілька прикладів. У нещодавніх роботах [28, 29] автори роблять перші кроки у дослідженні статистичних властивостей для такого типу СДР.

Внаслідок розвитку теорії стохастичних диференціальних рівнянь, які описують реальні процеси з'явилася потреба в статистичних методах для калібрування моделей на основі заданих спостережень. Зокрема, проблема оцінювання параметрів на основі дискретних спостережень розв'язку СДР нещодавно повернула значний інтерес. Вперше цю проблему було досліджено в [62], де розглянуто параболічний та гіперболічний тип СДР з частинними похідними. В даній роботі представлено стаціонарні розв'язки рівнянь та досліджено їх властивості. Також було наведено загальний вигляд оцінки максимальної вірогідності (ОМВ) параметрів на основі дискретних спостережень розв'язку, досліджено асимптотичні властивості. Більш того, побудовано оцінку методом моментів в явному вигляді, яку можна використати в якості відправної точки для оптимізації функції вірогідності. Пізніше були вивчені параболічні СДР в частинних похідних, включаючи стохастичне диференціальне рівняння теплопровідності [15, 23, 27]. У цих статтях були побудовані оцінки на основі варіацій часових приростів розв'язку та доведено центральні граничні теореми. У [53] була запропонована адаптована оцінка максимальної вірогідності параметра для параболічного лінійного СДР другого порядку. Проте все ще існують невирішені основні питання щодо СДР, подробиці яких викладено в [25]. Проблема оцінки параметрів для СДР з частинними похідними привертає багато уваги протягом останніх років не лише з теоретичної точки зору, але й в багатьох прикладних випадках: динаміка рідини [77], біологія [36, 37], фінанси [1, 2, 30], метеорологія [20] тощо. Існують досить різні методи оцінки параметрів для дискретних спостережень у просторі та/або часі компонентів розв'язку СДР в частинних похідних, які досліджувалися в статтях [14, 15, 53]. У роботі [23] було побудовано консистентну оцінку стохастичної волатильності для СДР параболічного типу на основі високочастотних спостережень розв'язку в часі, використовуючи граничні теореми. В багатьох роботах розглядається проблема

оцінювання параметрів у стохастичному рівнянні теплопровідності. В [26] досліджено асимптотичні властивості оцінки максимальної вірогідності параметра зсуву дробового стохастичного рівняння теплопровідності на основі дискретних спостережень процесу в часі. В статті [27] побудовано слабо консистентну оцінку параметра зсуву (параметра при лапласіані) та волатильності (параметра при шумі) одновимірного стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з білим шумом, коли розв'язок спострігається дискретно у часі або просторі. У роботі [53] побудовано оцінку параметра зсуву у стохастичному рівнянні теплопровідності з дробовим лапласіаном та білим шумом, доведено консистентність та асимптотичну нормальність отриманої оцінки. Кілька підходів для визначення параметрів у простих лінійних дробових моделях зі змішаним шумом для різних схем спостереження були запропоновані в [38, 57, 67]. У статті [40] було досліджено асимптотичну поведінку варіації лінійної комбінації вінеровського процесу та дробового броунівського руху, що є незалежними між собою. Отримані результати дозволили побудувати строго консистентні оцінки параметрів в змішаній моделі. Змішаний дробовий броунівський рух з трендом було досліджено в роботі [90], було наведено два підходи до оцінки чотирьох невідомих параметрів на основі дискретних спостережень. Перший підхід є більш класичним і викростовує квадратичну варіацію для оцінки трьох параметрів моделі, в той час як останній параметр оцінюється за допомогою дискретизації неперервної в часі оцінки максимальної вірогідності. Другий підхід дозволяє оцінити всі чотири параметри одночасно використовуючи ергодичну теорему. Задачу оцінки параметра зсуву в стохастичному диференціальному рівнянні зі змішаним шумом загального вигляду досліджено в [56]. Статистичні проблеми для змішаної дробової моделі Васічека були досліджені в роботах [64, 79].

В даній роботі припускається, що розв'язок стохастичного диференціального рівняння теплопровідності спостерігається в рівновіддалених просторових точках для фіксованих моментів часу. З одного боку, у багатьох практичних застосуваннях розв'язок справді спостерігається лише в деяких дискретних точках простору, наприклад, при вимірюванні температури нагрітого тіла, швидкості турбулентного потоку, миттєві форвардні курси, де просторова змінна відповідає часу до погашення [27, 62]. В багатьох випадках доступні вимірювання з високою роздільною здатністю в просторі, але кількість моментів часу обмежена.

Наприклад, це стосується супутникових спостережень температури поверхні моря [77]. З іншого боку, виявляється, що для оцінки параметра дифузії достатньо спостерігати розв'язок лише в декількох моментах часу (залежно від типу рівняння можуть бути потрібні один, два або три фіксовані моменти часу). Така ситуація досить поширена в статичному аналізі СДР з частинними похідними, що проілюстровано в [25, Розділ 3]. Однак, додаткову інформацію від спостережень розв'язку в дискретні моменти часу можна узагальнити, взявши (зважене) середнє значення оцінок подібно до [15] або [27].

## Розділ 2

# Попередні відомості

### 2.1 Дробовий броунівський рух

Нехай  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$  – повний ймовірнісний простір з фільтрацією. Тоді дробовий броунівський рух  $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$  на цьому ймовірнісному просторі – це центрований гауссівський процес з коваріаційною функцією

$$\mathbb{E}B_t^H B_s^H = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (2.1)$$

З (2.1) випливає, що  $\mathbb{E}(B_t^H - B_s^H)^2 = |t - s|^{2H}$ .

Відомо, що траєкторії ДБР  $B^H$  м.н. задовольняють умову Гельдера порядку  $\beta < H$  (див. [70]). Нагадаємо деякі базові властивості інтегрування гельдерово неперервних функцій.

Нехай  $a < b$ . Позначимо  $C^\lambda([a, b])$  – простір всіх  $\lambda$ -гельдерових неперервних функцій,  $\lambda \in (0, 1]$ . Якщо  $f \in C^\alpha([a, b])$  і  $g \in C^\beta([a, b])$  з  $\alpha + \beta > 1$ , тоді інтеграл  $\int_a^b f(x) dg(x)$  існує як інтеграл Рімана-Стільтєса

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_i f(x_i^*) (g(x_{i+1}) - g(x_i)),$$

де  $\pi = \{a = x_0 \leq x_0^* \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_{n-1}^* \leq x_n = b\}$ ,  $|\pi| = \max_i |x_{i+1} - x_i|$ , див. [94, Т. 4.2.1] для прикладу. Більше того, інтеграл  $\int_a^b g(x) df(x)$  також існує і має місце наступна формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x) df(x)$$

(дивись [94], Т. 4.2.1 та 3.1)). Також відомо, що у випадку гельдерово неперервних функцій інтеграл Рімана-Стілтєса збігається з інтегралом Юнга [93] і з узагальненим інтегралом Лебега-Стілтєса [94].

Цю теорію можна легко застосувати до потраєкторного стохастичного інтегрування відносно дробового броунівського руху оскільки траєкторії  $B^H$  належать  $C^\beta([a, b])$  м.н. для будь-якого  $\beta \in (0, H)$  (див. [70], Розділ 1.16)). Розглянемо інтеграл відносно дробового броунівського руху

$$\int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) dB_y^H, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

де  $G$  – функція Гріна стохастичного рівняння теплопровідності:

$$G(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}, & \text{якщо } t > 0, \\ \delta_0(x), & \text{якщо } t = 0. \end{cases}$$

Легко побачити, що для будь-яких фіксованих  $t > 0$ ,  $s > 0$  і  $x \in \mathbb{R}$ , функція  $G(t-s, x-\cdot)$  є (глобально) ліпшицевою, тобто належить  $C^\alpha([a, b])$  з  $\alpha = 1$ . Це означає, що для майже всіх  $\omega \in \Omega$  інтеграл  $\int_a^b G(t-s, x-y) dB_y^H$  існує, як інтеграл Рімана-Стілтєса і

$$\begin{aligned} \int_a^b G(t-s, x-y) dB_y^H &= G(t-s, x-b)B_b^H - G(t-s, x-a)B_a^H \\ &\quad + \int_a^b B_y^H G'_2(t-s, x-y) dy, \end{aligned}$$

де  $G'_2$  позначає частинну похідну  $G$  по просторовій змінній:

$$G'_2(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} G(t, x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Також відомо (див. доведення твердження А.1 в [22]), що для всіх  $\gamma > H$ ,  $\frac{B_x^H}{|x|^\gamma} \rightarrow 0$  м.н., при  $|x| \rightarrow \infty$ . Таким чином,  $G(t-s, x-y) B_y^H \rightarrow 0$ , м.н. при  $y \rightarrow \pm\infty$ . Отже,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s, x-y) dB_y^H = \int_{-\infty}^{+\infty} B_y^H G'_2(t-s, x-y) dy, \quad (2.4)$$

## 2.2 Гауссівська міра з незалежними приростами у $\mathbb{R}^d$

В роботі розглядається центрована гауссівська міра на  $\mathbb{R}^d$  з незалежними приростами, яка визначається як сім'я

$$\{W(A), A \in \mathfrak{B}_f(\mathbb{R}^d)\}$$

випадкових величин, індексованих сім'єю  $\mathfrak{B}_f(\mathbb{R}^d)$  борельових підмножин  $\mathbb{R}^d$  скінченної міри Лебега з такими властивостями:

1.  $\forall A \in \mathfrak{B}_f(\mathbb{R}^d) W(A) \simeq \mathcal{N}(0, \lambda_d(A))$ , де  $\lambda_d$  – міра Лебега.

2.  $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{B}_f(\mathbb{R}^d)$  таких, що  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$   $W(A_1), \dots, W(A_n)$  – незалежні.

3.  $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{B}_f(\mathbb{R}^d)$  таких, що  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$  та  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}_f(\mathbb{R}^d)$   $W(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} W(A_n)$  м.н.

Інтеграл від не випадкової функції за  $W$  визначається стандартним чином: для простої функції  $f(x) = \sum_{k=1}^n a_n \mathbb{1}_{A_n}(x)$ , де  $a_n \in \mathbb{R}, A_n \in \mathfrak{B}_f(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) W(dx) = \sum_{i=1}^n a_n W(A_n),$$

та для  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) W(dx)$$

визначається як границя у середньому квадратичному  $\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) W(dx)$  від простих функцій  $f_n$ , таких що  $f_n \rightarrow f, n \rightarrow \infty$  в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .

При цьому

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) W(dx) \simeq \mathcal{N}(0, \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2).$$

## 2.3 Кратні інтеграли

Нехай  $\mathcal{H}$  це дійсний сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  та відповідною нормою  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ .

**Означення 2.1.** Сукупність центрованих гауссівських випадкових величин  $\{W(h), h \in \mathcal{H}\}$  називається ізонормальним гауссівським процесом в  $\mathcal{H}$ , якщо для будь-яких  $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ ,

$$\mathbb{E}W(h_1)W(h_2) = \langle h_1, h_2 \rangle_{\mathcal{H}}.$$

*Приклад 2.1.* Якщо  $W$  – центрована гауссівська міра на  $\mathbb{R}^d$  з незалежними приростами, то  $\{W(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)W(dx), f \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$  – ізонормальний гауссівський процес у  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Позначимо  $\mathcal{L}^2$  – простір квадратично інтегровних випадкових величин, вимірний відносно сигма-алгебри  $\mathcal{F}^W$ , породженої ізонормальним гауссівським процесом  $W$ . Далі ми введемо розклад  $\mathcal{L}^2$  у ортогональну суму спеціальних підпросторів, так званий розклад хаотичності.

Для  $n \geq 1$ , через  $\mathcal{H}_n$  позначимо  $n$ -ий тензорний степінь  $\mathcal{H}$ , тобто  $\mathcal{H}_n$  це множина лінійних комбінацій виразів вигляду

$$h_1 \otimes \cdots \otimes h_n, \quad h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}.$$

Визначимо скалярний добуток

$$\langle h_1 \otimes \cdots \otimes h_n, g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \rangle_{\mathcal{H}_n} = \prod_{k=1}^n \langle h_k, g_k \rangle_{\mathcal{H}}$$

і продовжимо його лінійно для  $\mathcal{H}_n$ . Поповнення  $\mathcal{H}_n$  за нормою будемо позначати  $\mathcal{H}^{\otimes n}$ .

Надалі, визначимо оператор симетризації  $f \in \mathcal{H}^{\otimes n} \mapsto \tilde{f} \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ ,

$$h_1 \otimes \cdots \otimes h_n \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} h_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes h_{\sigma(n)},$$

де сумування ведеться за множиною перестановок множини  $\{1, \dots, n\}$ , за лінійністю та неперервністю  $\mathcal{H}_n$ . Будемо вважати елемент  $f \in \mathcal{H}^{\otimes n}$  симетричним, якщо  $\tilde{f} = f$  і простір таких елементів будемо позначати  $\mathcal{H}^{\odot n}$  (так званий  $n$ -кратний симетричний тензорний степінь  $\mathcal{H}$ ). Це гільбертів простір зі скалярним добутком з  $\mathcal{H}^{\otimes n}$ .

Нехай

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}, \quad n \geq 1, \quad (2.5)$$

$n$ -ий поліном Ерміта. Для  $h \in \mathcal{H}$  з  $\|h\| = 1$  визначимо

$$I_n(h^{\otimes n}) := I_n(h \otimes \cdots \otimes h) = H_n(W(h)).$$

Цей вираз можна продовжити за лінійністю та неперервністю до  $\mathcal{H}^{\otimes n}$ .

Для  $f \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ , відповідне значення  $I_n(f)$  називається кратним інтегралом Вінера–Іто від  $f$ . Проте, ця назва більш доцільна, коли  $\mathcal{H} = L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ , де  $W$  породжує міру на  $X$  від  $W(B) = W(\mathbb{1}_B)$ ,  $B \in \mathcal{B}$ . В цьому випадку  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  може бути визначена на просторі симетричних функцій  $f: X^n \rightarrow \mathbb{R}$ , вимірних відносно  $\mathcal{B}^{\otimes n}$  та квадратично інтегровних відносно міри добутку  $\mu^{\otimes n}$ , тоді

$$I_n(f) = \int_{X^n} f(x_1, \dots, x_n) W(dx_1) \cdots W(dx_n).$$

В загальному випадку, це не вимірна функція, тому це не можна називати «інтегралом» в класичному розумінні, проте ця назва все ж має сенс.

За побудовою, кратний інтеграл Вінера–Іто є лінійним. Також він центрований:

$$\mathbb{E}I_n(f) = 0$$

і має наступні властивості ортогональності та ізоморфізму: для  $f \in \mathcal{H}^{\otimes n}, g \in \mathcal{H}^{\otimes m}$ ,

$$\mathbb{E}I_n(f)I_m(g) = \begin{cases} n! \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_n}, & n = m, \\ 0, & n \neq m; \end{cases}$$

зокрема, властивість ізометрії

$$\mathbb{E}(I_n(f))^2 = n! \|f\|_{\mathcal{H}_n}^2$$

Для несиметричної функції  $f \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ , кратний інтеграл Вінера–Іто може бути визначений як інтеграл симетризації  $I_n(f) = I_n(\tilde{f})$ . При такому означенні, в загальному випадку властивість ізометрії не виконується, але має місце  $(\mathbb{E}I_n(f)^2) \leq n! \|f\|_{\mathcal{H}_n}^2$ .

Нехай  $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{L}^2$  це простір кратних стохастичних інтегралів порядку  $n$ , тобто  $\mathcal{I}_n = I_n(\mathcal{H}^{\otimes n})$ . За означенням, це еквівалентно тому, що  $\mathcal{I}_n$  – це замкнута лінійна оболонка випадкових величин вигляду  $H_n(W(h))$ . Завдяки властивості ортогональності, простори  $\mathcal{I}_n$  ортогональні для різних значень  $n$ . Визначимо також  $\mathcal{I}_0$  – простір сталих випадкових величин. Оскільки кратний інтеграл

Вінера–Іто – центрований, цей підпростір ортогональний до всіх  $\mathcal{I}_n$  з  $n \geq 1$ . Для зручності визначимо  $\mathcal{H}^{\odot 0} = \mathbb{R} i$  і  $I_0(f) = f$  для  $f \in \mathcal{H}^{\odot 0}$ .

**Теорема 2.1.** Простір  $\mathcal{L}^2$  є прямою сумою просторів  $\mathcal{I}_n$ :

$$\mathcal{L}^2 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}_n.$$

Іншими словами, будь-яка квадратично інтегровна випадкова величина  $\xi$ , вимірنا відносно  $\mathcal{F}^W$ , має єдиний ортогональний розклад

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$$

з  $f_n \in \mathcal{H}^{\odot n}$ , де ряд збігається в середньому квадратичному.

*Зауваження 2.1.* Оскільки кратний інтеграл Вінера–Іто має нульове середнє, то розклад матиме вигляд  $I_0(f_0) = f_0 = \mathbb{E}\xi$ .

## 2.4 Властивості нормально розподілених величин

**Теорема 2.2** (теорема Іссерліса, [52]). Якщо  $(X_1, \dots, X_{2n})$ -це випадковий вектор, що має багатовимірний нормальний розподіл з нульовим середнім, тоді має місце наступна рівність:

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 \dots X_{2n}] = \sum \prod \mathbb{E}[X_i X_j],$$

тут  $\sum \prod$  означає сумування по всім різним попарним розбиттям  $X_1, \dots, X_{2n}$ , тобто таких  $X_i X_j$ , що  $i \neq j$  і кожний доданок є добутком  $n$  попарних математичних сподівань  $\mathbb{E}[X_i X_j]$ . Таким чином, кожна сума містить  $\frac{(2n)!}{(2^n n!)} = (2n - 1)!!$  доданків.

**Теорема 2.3** (Наслідок 8.1.4, [76]). Для всіх гауссівських випадкових величин  $(U, V)$  з нульовим середнім та одиничною дисперсією справедливо наступне:

$$\mathbb{E}[H_n(U)H_m(V)] = \begin{cases} n! \mathbb{E}[UV]^n, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

де  $H_n(\cdot)$  –  $n$ -ий многочлен Ерміта визначений формулою (2.5).

*Приклад 2.2.* Розглянемо декілька часткових випадків формули Іссерліса для  $n = 2$  та  $n = 3$  :

$$\mathbb{E}[X_1X_2X_3X_4] = \mathbb{E}[X_1X_2]\mathbb{E}[X_3X_4] + \mathbb{E}[X_1X_3]\mathbb{E}[X_2X_4] + \mathbb{E}[X_1X_4]\mathbb{E}[X_2X_3]; \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1X_2X_3X_4X_5X_6] &= \mathbb{E}[X_1X_2]\mathbb{E}[X_3X_4]\mathbb{E}[X_5X_6] + \mathbb{E}[X_1X_2]\mathbb{E}[X_3X_5]\mathbb{E}[X_4X_6] \\ &+ \mathbb{E}[X_1X_2]\mathbb{E}[X_3X_6]\mathbb{E}[X_4X_5] + \mathbb{E}[X_1X_3]\mathbb{E}[X_2X_4]\mathbb{E}[X_5X_6] + \mathbb{E}[X_1X_3]\mathbb{E}[X_2X_5]\mathbb{E}[X_4X_6] \\ &+ \mathbb{E}[X_1X_3]\mathbb{E}[X_2X_6]\mathbb{E}[X_4X_5] + \mathbb{E}[X_1X_4]\mathbb{E}[X_2X_3]\mathbb{E}[X_5X_6] + \mathbb{E}[X_1X_4]\mathbb{E}[X_2X_5]\mathbb{E}[X_3X_6] \\ &+ \mathbb{E}[X_1X_4]\mathbb{E}[X_2X_6]\mathbb{E}[X_3X_5] + \mathbb{E}[X_1X_5]\mathbb{E}[X_2X_3]\mathbb{E}[X_4X_6] + \mathbb{E}[X_1X_5]\mathbb{E}[X_2X_4]\mathbb{E}[X_3X_6] \\ &+ \mathbb{E}[X_1X_5]\mathbb{E}[X_2X_6]\mathbb{E}[X_3X_4] + \mathbb{E}[X_1X_6]\mathbb{E}[X_2X_3]\mathbb{E}[X_4X_5] + \mathbb{E}[X_1X_6]\mathbb{E}[X_2X_4]\mathbb{E}[X_3X_5] \\ &+ \mathbb{E}[X_1X_6]\mathbb{E}[X_2X_5]\mathbb{E}[X_3X_4]. \end{aligned}$$

*Приклад 2.3.* Нехай  $\xi$  та  $\eta$  – центровані нормальні випадкові величини, тоді застосовуючи формулу Іссерліса для  $n = 2$  (2.6) з попереднього прикладу будуть мати місце наступні рівності:

$$\text{Cov}(\xi^2, \eta^2) = 2(\text{Cov}(\xi, \eta))^2,$$

зокрема,

$$\text{Var}(\xi^2) = 2(\text{Var} \xi)^2.$$

## 2.5 Деякі граничні теореми

**Теорема 2.4** (Нуаларта-Пеккаті про четвертий момент, [73]). Нехай для фіксованих  $p \geq 1$   $\{f_n, n \geq 1\} \in \mathcal{H}^{\odot p}$ ,  $\text{Var}(I_p(f_n)) = \mathbb{E}[I_p(f_n)^2] = p! \|f_n\|_{\mathcal{H}^{\odot p}}^2 \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ . Тоді наступні умови рівносильні:

$$1. I_p(f_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), n \rightarrow \infty.$$

$$2. \mathbb{E}I_p(f_n^4) \rightarrow 3, n \rightarrow \infty.$$

**Означення 2.2.** Нехай  $H(x)$  – функція з дійсними значеннями така, що  $\int H(x) \exp(-x^2/2) dx = 0$ ,  $\int H^2(x) \exp(-x^2/2) dx < \infty$ . Функція  $H(x)$  може бути

представлена у вигляді

$$H(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j H_j(x), \quad (2.7)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 j! < \infty, \quad (2.8)$$

де  $H_j$  позначає  $j$ -ий поліном Ерміта, див. (2.5). Функція  $H(x)$  має ранг Ерміта  $k$ , якщо в розкладі (2.7)  $c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$  і  $c_k \neq 0$ .

**Теорема 2.5** (Теорема 1, [17]). Нехай функція  $H$  має ранг Ерміта  $k$  і кореляційна функція стаціонарного гауссового поля  $X_n$  задовольняє умову  $\sum_{n \in \mathbb{Z}^v} |r(n)|^k < \infty$ . Покладемо  $A_N = N^{v/2}$ . Тоді границя

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_0^N(H_l))^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N^{-2} l! \sum_{i \in B(0,N)} \sum_{j \in B(0,N)} r^l(i-j) = \sigma_l^2 l!$$

існує для всіх  $l \geq k$ ,

$B(n, N) = \{s = (s^{(1)}, \dots, s^{(v)}) \in \mathbb{Z}^v, n^{(t)}N < s^{(t)} \leq (n^{(t)} + 1)N, t = 1, \dots, v\}$  і суми  $\sigma^2 = \sum_{l=k}^{\infty} c_l^2 l! \sigma_l^2 < \infty$ . Скінченновимірний розподіл поля  $Z_n^N(H) = A_N^{-1} \sum_{j \in B(n,N)} H(X_j)$  прямує до скінченновимірного розподілу поля  $\sigma Z_n^*$  при  $N \rightarrow \infty$ , де  $Z_n^*$  – незалежні стандартні нормально розподілені випадкові величини.

**Теорема 2.6** (Теорема 1', [17]). Нехай функція  $H$  задана так само як в Теоремі 2.5. Припускається, що кореляційна функція гауссового поля  $X_n$  задовольняє умови  $\sum_{n \in \bar{B}(0,N)} |r(n)|^k = L(N)$  і  $\lim_{N \rightarrow \infty} (L(N))^{-1} \sum_{j \in \bar{B}(0,N)}$  для всіх  $l \geq k$ , де  $L(N)$  – функція, що повільно змінюється і

$$\bar{B}(0, N) = \{n = (n^{(1)}, \dots, n^{(v)}) \in \mathbb{Z}^v, -N < n^{(j)} \leq N, j = 1, \dots, v\}.$$

Покладемо  $A_N = N^{v/2} L(N)^{1/2}$ . Тоді границя

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_0^N(H_l))^2 = \sigma_l^2 l! = \lim_{N \rightarrow \infty} (N^v L(N))^{-1} l! \sum_{i \in B(0,N)} \sum_{j \in B(0,N)} r^l(i-j)$$

існує для всіх  $l \geq k$  та суми  $\sigma^2 = \sum_{l=k}^{\infty} c_l^2 l! \sigma_l^2 < \infty$ . Скінченний розподіл поля  $Z_n^N(H)$  (з новим нормуючим множником  $A_N$ ) прямує до скінченного розподілу поля  $\sigma Z_n^*$  при  $N \rightarrow \infty$ .

**Означення 2.3.** Нехай  $X$  – гауссів вектор,  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  – вимірна функція. Якщо  $f$  має скінченний другий момент, то ранг Ерміта  $f$  відносно  $X$  визначається як

$$\text{rank}(f) := \inf \left\{ \tau : \exists l_j \sum_{j=1}^d l_j = \tau \quad \text{та} \right. \\ \left. \mathbb{E} \left[ (f(X) - \mathbb{E}(f(X))) \prod_{j=1}^d H_{l_j}(X^{(j)}) \right] \neq 0 \right\} \quad (2.9)$$

**Теорема 2.7** (Теорема 4, [3]). Нехай  $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$  – стаціонарна гауссівська послідовність векторів з  $\mathbb{R}^d$  з нульовим середнім,  $X_j = (X_j^{(1)}, \dots, X_j^{(d)})$ . Нехай  $f$  – функція з  $\mathbb{R}^d$  рангу Ерміта  $\tau$ ,  $1 \leq \tau < \infty$ . Позначимо

$$r^{p,q}(k) = \mathbb{E} [X_m^{(p)} X_{m+k}^{(q)}], k \in \mathbb{Z},$$

де  $m$  достатньо велике число для якого  $m, m+k \geq 1$ . Припускається, що

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |r^{p,q}(k)|^{\tau} < \infty$$

для всіх  $1 \leq p, q \leq d$ . Тоді

$$n^{-1/2} \sum_{j=1}^n (f(X_j) - \mathbb{E}f(X_j)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

де

$$\sigma^2 := \mathbb{E} [(f(X_1) - \mathbb{E}f(X_1))^2] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} [(f(X_1) - \mathbb{E}f(X_1))(f(X_{1+k}) - \mathbb{E}f(X_{1+k}))].$$

Більш того, існує скінченна константа  $c$ , що залежить лише від послідовності коваріацій така, що

$$\mathbb{E} \left( n^{-1/2} \sum_{j=1}^n (f(X_j) - \mathbb{E}f(X_j)) \right)^2 \leq c \mathbb{E} (f(X_1) - \mathbb{E}f(X_1))^2$$

для всіх  $n$  і кожної функції  $f$  зі скінченним другим моментом порядку  $\tau$ .

**Теорема 2.8** (Теорема Слуцького). Нехай  $\{X_n, n \geq 1\}$  та  $\{Y_n, n \geq 1\}$  – послідовності випадкових векторів в  $\mathbb{R}^d$  та  $\mathbb{R}^k$ , відповідно, такі, що  $X_n \xrightarrow{d} X$  і  $Y_n \xrightarrow{P} C$ , де  $C$  – сталий вектор, тоді

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, C), n \rightarrow \infty.$$

Зокрема, для будь-якої неперервної функції  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$f(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} f(X, C), n \rightarrow \infty.$$

**Теорема 2.9** (Дельта–метод). Нехай  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  – неперервно диференційовна функція в околі  $\theta \in \mathbb{R}^d$ , а  $g'$  – її матриця Якобі. Припустимо, що  $\det g'(\theta) \neq 0$ . Якщо  $T_n$  – послідовність випадкових векторів розмірності  $d$  таких, що

$$\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{d} T,$$

тоді

$$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} g'(\theta)T.$$

Зокрема, якщо

$$\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{d} T \sim \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

то

$$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}(0, g'(\theta)\Sigma(g'(\theta))^T),$$

де  $(g'(\theta))^T$  позначає транспоновану матрицю  $g'(\theta)$ .

## Розділ 3

# Основні властивості розв'язку стохастичного рівняння теплопровідності

### 3.1 Рівняння теплопровідності з білим шумом

Нехай  $W = \{W_x, x \in \mathbb{R}\}$  –  $d$ -вимірний вінерівський процес. Розглядається стохастичне диференціальне рівняння теплопровідності з білим шумом  $\dot{W}$  у просторі розмірності  $d = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta u \right) (t, x) &= \sigma \dot{W}(x), t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) &= 0, x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Згідно з [92] розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u(t, x) = \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y) W(dy) ds, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad (3.2)$$

де функція  $G$  – це функція Гріна, визначена наступним чином:

$$G(t, x) = \begin{cases} (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right), & \text{якщо } t > 0, \\ \delta_0(x) & \text{якщо } t = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

тут  $|x|$  – позначає евклідову норму вектора  $x$ , а  $\delta_0$  – це дельта-функція.

**Теорема 3.1.** 1. Поле  $u(t, x)$ , задане формулою (3.2), є коректно визначеним, причому

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(t, x)^2] &= \int_0^t \int_0^t \frac{1}{(2\pi(s_1 + s_2))^{d/2}} ds_1 ds_2 \\ &= \begin{cases} \frac{4(2-\sqrt{2})t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}, & d = 1 \\ \frac{t \log 2}{\pi}, & d = 2 \\ \frac{2(-1+\sqrt{2})\sqrt{t}}{\pi^{3/2}}, & d = 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

2. Для фіксованого  $t \in [0, T]$  випадкове поле  $u(t, \cdot)$  є стаціонарним.

3. Для  $d = 1$  справедливе наступне:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(u(t, 0), u(t, x)) &= \frac{2 \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)}{3\sqrt{2\pi}} t^{3/2} - \frac{2\sqrt{t}x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)}{3\sqrt{2\pi}} + \frac{2|x|^3}{3} \\ &\quad - \frac{4|x|^3}{3} \Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right) + 4tx \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) - 2tx - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \\ &\quad \times \left[ \left(5\sqrt{2} - 8 \exp\left(\frac{x^2}{4t}\right)\right) t + \left(\sqrt{2} - 2 \exp\left(\frac{x^2}{4t}\right)\right) x^2 \right. \\ &\quad \left. + 6 \exp\left(\frac{x^2}{4t}\right) \sqrt{\pi t} x \left(2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1\right) \right] + \frac{2|x|^3}{3} \Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{2t}}\right), \end{aligned}$$

$$\text{де } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp^{-x^2/2} dx.$$

*Доведення.* 1. Інтеграл у (3.2) визначений, якщо підінтегральна функція квадратично інтегровна.

$$v^2 = \mathbb{E}(u(t, x))^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_0^t (G(t-s, x-y)) ds \right)^2 dy$$

Введемо заміну  $t-s \rightarrow s$ , тоді

$$v^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_0^t G(s, x-y) ds \right)^2 dy$$

Далі використовуємо означення та властивості функції  $G$

$$v^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_0^t G(s, x-y) ds \right)^2 dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_0^t s^{-d/2} G\left(1, \frac{x-y}{\sqrt{s}}\right) ds \right)^2 dy \\
&= \int_0^t \int_0^t \frac{1}{(s_1 s_2)^{d/2} (2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2s_1} |x-y|^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2s_2} |x-y|^2\right) dy ds_1 ds_2 \\
&= \int_0^t \int_0^t \frac{1}{(s_1 s_2)^{d/2} (2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{|x-y|^2 (s_1 + s_2)}{2s_1 s_2}\right) dy ds_1 ds_2 \\
&= \int_0^t \int_0^t \frac{1}{(s_1 s_2)^{d/2} (2\pi)^d} \left(\frac{2s_1 s_2 \pi}{s_1 + s_2}\right)^{d/2} ds_1 ds_2 \\
&= \int_0^t \int_0^t \frac{1}{(2\pi (s_1 + s_2))^{d/2}} ds_1 ds_2.
\end{aligned}$$

Інтеграл  $\int_0^t \int_0^t \frac{1}{(2\pi (s_1 + s_2))^{d/2}} ds_1 ds_2$  існує для  $1 \leq d \leq 3$ . Обчислюючи даний інтеграл для кожного випадку, отримуємо (3.4).

Таким чином, поле  $u(t, x)$ , задане формулою (3.2), є коректно визначеним.

2. Перетворимо коваріаційну функцію:

$$\begin{aligned}
&\text{Cov}(u(t, z), u(t, z + x)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t G(t - s_1, z - h) ds_1 \int_0^t G(t - s_2, z + x - h) ds_2 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t G(u_1, -y) du_1 \int_0^t G(u_2, x - y) du_2 dy.
\end{aligned}$$

Оскільки отриманий вираз не залежить від  $z$ , то поле стаціонарне.

3. Обчислимо коваріацію:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(u(t, 0), u(t, x)) &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t G(s_1, x - y) ds_1 \int_0^t G(s_2, -y) ds_2 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_0^t G\left(1, \frac{|x-y|}{\sqrt{s_1}}\right) \frac{ds_1}{\sqrt{s_1}} \int_0^t G\left(1, \frac{|y|}{\sqrt{s_2}}\right) \frac{ds_2}{\sqrt{s_2}} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2s_1} - \frac{|y|^2}{2s_2}\right) \frac{dy ds_1 ds_2}{2\pi\sqrt{s_1 s_2}} \\
&= \int_0^t \int_0^t \exp\left(-\frac{|x|^2}{2(s_1+s_2)}\right) \frac{ds_1 ds_2}{\sqrt{2\pi(s_1+s_2)}} \\
&= \int_0^t \sqrt{\frac{u}{2\pi}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2u}\right) du + \int_t^{2t} \frac{2t-u}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2u}\right) du,
\end{aligned}$$

В останньому перетворенні ми проінтегрували по  $s_1 + s_2 = u$ . Далі, обчислюючи інтеграли з останньої рівності, отримуємо твердження теореми.  $\square$

**Теорема 3.2.** При фіксованих  $t > 0$  випадкове поле  $\{u(t, x), x \in \mathbb{R}^d\}$  є ергодичним.

*Доведення.* Оскільки поле  $\{u(t, x), x \in \mathbb{R}^d\}$  – це центроване гауссівське поле, то достатньо довести, що

$$r(x) = \text{Cov}(u(t, 0), u(t, x)) = \mathbb{E}u(t, 0)u(t, x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty.$$

З означення функції  $G$  випливає наступне:

$$\begin{aligned}
r(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t G(t-s_1, x-y) ds_1 \int_0^t G(t-s_2, -y) ds_2 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t G\left(1, \frac{|x-y|}{\sqrt{s_1}}\right) \frac{ds_1}{(s_1)^{d/2}} \int_0^t G\left(1, \frac{|-y|}{\sqrt{s_2}}\right) \frac{ds_2}{(s_2)^{d/2}} dy \\
&= \int_0^t \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2s_1} - \frac{|y|^2}{2s_2}\right) \frac{dy ds_1 ds_2}{(2\pi)^d (s_1 s_2)^{d/2}} \\
&= \int_0^t \int_0^t \exp\left(-\frac{|x|^2}{s_1+s_2}\right) \frac{ds_1 ds_2}{(2\pi(s_1+s_2))^{d/2}} \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

$\square$

## 3.2 Рівняння теплопровідності з дробовим броунівським рухом

Нехай  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – повний імовірнісний простір. Нехай  $B^H = \{B_x^H, x \in \mathbb{R}\}$  це двосторонній дробовий броунівський рух з індексом Хюрста  $H \in (0, 1)$ , тобто центрований гауссів процес із коваріаційною функцією

$$\mathbb{E} \left[ B_x^H B_y^H \right] = \frac{1}{2} \left( |x|^{2H} + |y|^{2H} - |x - y|^{2H} \right), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

В роботі досліджується наступне стохастичне диференціальне теплопровідності з дробовим броунівським шумом  $B_x^H$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (t, x) &= \sigma \dot{B}_x^H, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Аналогічно до (3.2) розв'язок стохастичного диференціального рівняння (3.6) визначається як

$$u(t, x) = \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t - s, x - y) dB_y^H ds, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

де  $G$  – функція Гріна (3.3) рівняння теплопровідності.

Завдяки гельдеровості дробового броунівського руху та ліпшицевості функції Гріна, інтеграл відносно дробового броунівського руху існує, як потраєкторний інтеграл Рімана–Стілтєса, див. підрозділ 2.1. Згідно з формулою (2.4) розв'язок (3.7) може бути записано наступним чином

$$u(t, x) = \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G'_2(t - s, x - y) B_y^H dy ds, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Ця форма розв'язку не містить інтегралу відносно дробового броунівського руху і є більш зручною для подальших обчислень.

Почнемо з отримання явних виразів для дисперсії та коваріації  $u(t, \cdot)$ .

**Твердження 3.1.** Для фіксованого  $t \in [0, T]$ ,  $u(t, \cdot)$  є стаціонарним гауссівським процесом з коваріаційною функцією вигляду

$$R(t, x) := \text{Cov}(u(t, 0), u(t, x))$$

$$= -\frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G'_2(t-s, -y) G'_2(t-r, x-v) |y-v|^{2H} dy dv ds dr. \quad (3.9)$$

*Доведення.* Застосовуючи формулу (3.8) до розв'язку, можна переписати коваріаційну функцію у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(u(t, z), u(t, z+x)) &= \mathbb{E}[u(t, z)u(t, z+x)] \\ &= \sigma^2 \mathbb{E} \left[ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G'_2(t-s, z-y) B_y^H dy ds \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G'_2(t-r, z+x-v) B_v^H dv dr \right] \\ &= \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G'_2(t-s, z-y) G'_2(t-r, z+x-v) \mathbb{E}[B_y^H B_v^H] dy dv ds dr. \end{aligned}$$

Підставляючи явний вигляд (3.5) коваріаційної функції дробового броунівського руху, отримаємо

$$\begin{aligned} \text{Cov}(u(t, z), u(t, z+x)) &= \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G'_2(t-s, z-y) G'_2(t-r, z+x-v) |y|^{2H} dy dv ds dr \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G'_2(t-s, z-y) G'_2(t-r, z+x-v) |v|^{2H} dy dv ds dr \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G'_2(t-s, z-y) G'_2(t-r, z+x-v) |y-v|^{2H} dy dv ds dr \\ &=: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Доданок  $I_1$  може бути представлено у вигляді добутку двох інтегралів:

$$I_1 = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |y|^{2H} G'_2(t-s, z-y) dy ds \cdot \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G'_2(t-r, z+x-v) dv dr.$$

Легко побачити, що  $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |y|^{2H} G'_2(t-s, z-y) dy ds < \infty$  і

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G'_2(t-r, z+x-v) dv dr = \int_0^t G(t-r, x-v) \Big|_{v=-\infty}^{\infty} dr = 0,$$

тому що  $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(t, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} G(t, x) = 0$ . Отже,  $I_1 = 0$ .

Аналогічно можна показати, що  $I_2 = 0$ . Таким чином маємо

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(u(t, z), u(t, z + x)) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} G'_2(t - s, z - y) G'_2(t - r, z + x - v) |y - v|^{2H} dy dv ds dr. \end{aligned}$$

Врешті решт, заміною змінних  $y' = y - z$ ,  $v' = v - z$ , отримаємо

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(u(t, z), u(t, z + x)) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \int_0^t G'_2(t - s, -y') G'_2(t - r, x - v') |y' - v'|^{2H} ds dr dy' dv'. \end{aligned}$$

Оскільки отриманий вираз не залежить від  $z$ , процес  $u(t, \cdot)$  є стаціонарним. Більш того, отримано формулу (3.9) і твердження доведено.  $\square$

Наступні результати дають простіший вигляд коваріаційної функції розв'язку рівняння. Даний вираз містить один інтеграл відносно  $\mathbb{R}$  замість подвійного інтегралу відносно  $\mathbb{R}^2$ .

**Твердження 3.2.** *Коваріаційну функцію  $R(t, x)$  можна переписати у наступній формі:*

$$\begin{aligned} R(t, x) &= \frac{\sigma^{2H}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} w^{\langle 2H-1 \rangle} (w - x) \exp \left\{ -\frac{(w - x)^2}{2(2t - s - r)} \right\} dw ds dr, \quad (3.10) \end{aligned}$$

де  $w^{\langle \alpha \rangle} := |w|^\alpha \text{sign } w$ .

*Доведення.* Для отримання (3.10) потрібно перетворити внутрішній інтеграл в (3.9), позначимо його

$$I(s, r) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |y - v|^{2H} G'_2(t - s, -y) G'_2(t - r, x - v) dy dv. \quad (3.11)$$

Зробимо заміну  $v - y = w$ , отримаємо

$$I(s, r) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |w|^{2H} G'_2(t-s, w-v) G'_2(t-r, x-v) dw dv.$$

Використовуючи явний вигляд  $G'_2$ , див. (2.3), маємо

$$I(s, r) = \frac{1}{2\pi(t-s)^{3/2}(t-r)^{3/2}} \times \int_{\mathbb{R}} |w|^{2H} \int_{\mathbb{R}} (w-v)(x-v) \exp \left\{ - \left( \frac{(w-v)^2}{2(t-s)} + \frac{(x-v)^2}{2(t-r)} \right) \right\} dv dw. \quad (3.12)$$

Перетворимо суму під експонентою:

$$\begin{aligned} \frac{(w-v)^2}{2(t-s)} + \frac{(x-v)^2}{2(t-r)} &= \frac{(w^2 - 2wv + v^2)(t-r) + (x^2 - 2xv + v^2)(t-s)}{2(t-s)(t-r)} \\ &= \frac{v^2(2t-s-r) - 2v(w(t-r) + x(t-s)) + w^2(t-r) + x^2(t-s)}{2(t-s)(t-r)} = \\ &= \frac{v^2 - 2v \frac{w(t-r) + x(t-s)}{2t-s-r} + \frac{w^2(t-r)}{2t-s-r} + \frac{x^2(t-s)}{2t-s-r}}{2 \frac{(t-s)(t-r)}{2t-s-r}} \\ &= \frac{\left( v - \frac{w(t-r) + x(t-s)}{2t-s-r} \right)^2 - \frac{(w(t-r) + x(t-s))^2}{(2t-s-r)^2} + \frac{w^2(t-r)}{2t-s-r} + \frac{x^2(t-s)}{2t-s-r}}{2 \frac{(t-s)(t-r)}{2t-s-r}} \\ &= \frac{\left( v - \frac{w(t-r) + x(t-s)}{2t-s-r} \right)^2}{2 \frac{(t-s)(t-r)}{2t-s-r}} + \frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}. \end{aligned}$$

Отже, (3.12) переписється у вигляді:

$$I(s, r) = \frac{1}{2\pi(t-s)^{3/2}(t-r)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} |w|^{2H} \exp \left\{ - \frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)} \right\} \times \int_{\mathbb{R}} (v^2 - v(w+x) + wx) \exp \left\{ - \frac{\left( v - \frac{w(t-r) + x(t-s)}{2t-s-r} \right)^2}{2 \frac{(t-s)(t-r)}{2t-s-r}} \right\} dv dw. \quad (3.13)$$

Внутрішній інтеграл можна розписати застосовуючи наступні рівності для моментів нормально розподілених величин: якщо  $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \zeta^2)$ , то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}} \int_{\mathbb{R}} v^2 \exp \left\{ - \frac{(v-\mu)^2}{2\zeta^2} \right\} dv = \mathbb{E}\xi^2 = \zeta^2 + \mu^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}} \int_{\mathbb{R}} v \exp \left\{ -\frac{(v-\mu)^2}{2\zeta^2} \right\} dv = \mathbb{E}\xi = \mu,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ -\frac{(v-\mu)^2}{2\zeta^2} \right\} dv = 1.$$

В нашому випадку  $\mu = \frac{w(t-r)+x(t-s)}{2t-s-r}$ ,  $\zeta = \sqrt{\frac{(t-s)(t-r)}{2t-s-r}}$ . Отже,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (v^2 - v(w+x) + wx) \exp \left\{ -\frac{\left(v - \frac{w(t-r)+x(t-s)}{2t-s-r}\right)^2}{2\frac{(t-s)(t-r)}{2t-s-r}} \right\} dv \\ &= \sqrt{\frac{2\pi(t-s)(t-r)}{2t-s-r}} \left( \frac{(t-s)(t-r)}{2t-s-r} + \left( \frac{w(t-r)+x(t-s)}{2t-s-r} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. - (w+x) \frac{w(t-r)+x(t-s)}{2t-s-r} + wx \right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi(t-s)(t-r)}}{(2t-s-r)^{5/2}} \left( (t-s)(t-r)(2t-s-r) + w^2(t-r)^2 \right. \\ & \quad \left. + 2wx(t-r)(t-s) + x^2(t-s)^2 \right. \\ & \quad \left. - (w-x)(w(t-r)+x(t-s))(2t-s-r) + wx(2t-s-r)^2 \right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}(t-s)^{3/2}(t-r)^{3/2}}{(2t-s-r)^{5/2}} (2t-s-r - (w-x)^2). \end{aligned}$$

Об'єднуючи це з (3.13), отримаємо

$$\begin{aligned} I(s, r) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2t-s-r)^{5/2}} \\ & \quad \times \int_{\mathbb{R}} |w|^{2H} (2t-s-r - (w-x)^2) \exp \left\{ -\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)} \right\} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2t-s-r)^{5/2}} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^0 |w|^{2H} (2t-s-r - (w-x)^2) \exp \left\{ -\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)} \right\} dw \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2t-s-r)^{5/2}} \\ & \quad \times \int_0^{+\infty} |w|^{2H} (2t-s-r - (w-x)^2) \exp \left\{ -\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)} \right\} dw \end{aligned}$$

$$=: I_-(s, r) + I_+(s, r).$$

Перетворимо кожен інтеграл окремо застосовуючи інтегрування частинами.  
Спочатку перепишемо  $I_-(s, r)$  у вигляді:

$$\begin{aligned} I_-(s, r) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2t-s-r)^{3/2}} \\ &\times \int_{-\infty}^0 (-w)^{2H} \left(1 - \frac{(w-x)^2}{2t-s-r}\right) \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right\} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2t-s-r)^{3/2}} \int_{-\infty}^0 (-w)^{2H} d\left((w-x) \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2t-s-r)^{3/2}} \left( (-w)^{2H} (w-x) \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right\} \Big|_{w=-\infty}^0 \right. \\ &\quad \left. + 2H \int_{-\infty}^0 (-w)^{2H-1} (w-x) \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right\} dw \right) \\ &= \frac{2H}{\sqrt{2\pi}(2t-s-r)^{3/2}} \int_{-\infty}^0 (-w)^{2H-1} (w-x) \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right\} dw. \end{aligned}$$

Тепер перетворимо другий інтеграл аналогічним чином:

$$\begin{aligned} I_+(s, r) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2t-s-r)^{\frac{3}{2}}} \\ &\times \int_0^{+\infty} w^{2H} \left(1 - \frac{(w-x)^2}{2t-s-r}\right) \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right\} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2t-s-r)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} w^{2H} d\left((w-x) \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right\}\right) \\ &= -\frac{2H}{\sqrt{2\pi}(2t-s-r)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} w^{2H-1} (w-x) \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right\} dw. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} I(s, r) &= I_-(s, r) + I_+(s, r) \\ &= -\frac{2H}{\sqrt{2\pi}(2t-s-r)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} w^{2H-1} (w-x) \exp\left\{-\frac{(x-w)^2}{2(2t-s-r)}\right\} dw. \end{aligned}$$

Беручи до уваги отриманий вираз, застосовуючи (3.9) і (3.11),

$$R(t, x) = -\frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_0^t I(s, r) ds dr, \text{ твердження доведено.} \quad \square$$

*Зауваження 3.1.* У випадку  $H > \frac{1}{2}$  можливо проінтегрувати частинами ще раз і переписати формулу для  $R(t, x)$  у вигляді:

$$R(t, x) = \frac{\sigma^2 H (2H - 1)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{1}{2}} \times \int_{\mathbb{R}} |w|^{2H-2} \exp \left\{ -\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)} \right\} dw ds dr.$$

**Твердження 3.3.** Дисперсія  $u(t, x)$  дорівнює

$$\mathbb{E} [u(t, x)^2] = \frac{\sigma^2 2^{H+1} (2^H - 1) \Gamma(H + \frac{1}{2}) t^{H+1}}{\sqrt{\pi} (H + 1)}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.14)$$

де  $\Gamma$  позначає гамма-функцію.

*Доведення.* Згідно тверджень 3.1 та 3.2, маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [u(t, x)^2] &= R(t, 0) \\ &= \frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} |w|^{2H} \exp \left\{ -\frac{w^2}{2(2t-s-r)} \right\} dw ds dr. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Розглянемо внутрішній інтеграл. Беручи до уваги, що підінтегральна функція є парною і використовуючи заміну  $\frac{w^2}{2(2t-s-r)} = z$ ,  $w = \sqrt{2(2t-s-r)z}$ ,  $dw = \sqrt{2(2t-s-r)} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |w|^{2H} \exp \left\{ -\frac{w^2}{2(2t-s-r)} \right\} dw &= 2 \int_0^{\infty} w^{2H} \exp \left\{ -\frac{w^2}{2(2t-s-r)} \right\} dw \\ &= 2^{H+\frac{1}{2}} (2t-s-r)^{H+\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} z^{H-\frac{1}{2}} e^{-z} dz \\ &= 2^{H+\frac{1}{2}} (2t-s-r)^{H+\frac{1}{2}} \Gamma(H + \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Підставляючи отриманий вираз в (3.15), маємо

$$\mathbb{E} [u(t, x)^2] = \frac{\sigma^2 H 2^H \Gamma(H + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{H-1} ds dr. \quad (3.16)$$

Залишається обчислити інтеграл

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{H-1} ds dr &= \frac{1}{H} \int_0^t \left( (2t - r)^H - (t - r)^H \right) dr \\ &= \frac{1}{H(H+1)} \left( -(2t - r)^{H+1} + (t - r)^{H+1} \right) \Big|_{r=0}^t \\ &= \frac{(2t)^{H+1} - 2t^{H+1}}{H(H+1)} = \frac{2(2^H - 1)t^{H+1}}{H(H+1)}. \end{aligned}$$

Поєднуючи це з (3.16), отримуємо рівність для  $\mathbb{E}[u(t, x)^2]$ . □

*Зауваження 3.2.* У випадку стандартного броунівського руху ( $H = \frac{1}{2}$ ), (3.14) перетворюється

$$\mathbb{E}[u(t, x)^2] = \frac{\sigma^2 4(2 - \sqrt{2})t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}.$$

Це відповідає результатам Теорема 3.1, (3.4).

Наступною метою є встановлення ергодичності процесу  $u(t, \cdot)$ . Оскільки  $u(t, \cdot)$  – стаціонарний гауссів процес (згідно з твердженням 3.1), достатньо показати, що  $R(t, x) \rightarrow 0$ , при  $x \rightarrow \infty$ . Наступне твердження відіграє ключову роль у доведенні ергодичності.

**Твердження 3.4.** Для  $t > 0$  та  $x > 0$ , коваріаційна функція  $R(t, x)$  обмежена зверху:

$$|R(t, x)| \leq C_H \sigma^2 t^2 x^{2H-2},$$

де  $C_H$  є додатною константою, що залежить лише від  $H$ .

Для доведення Твердження 3.4 почнемо з допоміжної леми.

**Лема 3.1.** Для будь-яких  $\alpha > 0$  та  $\beta > 0$ , існує константа  $C > 0$  така, що для всіх  $t > 0$  та  $x > 0$ ,

$$\int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\alpha} \exp \left\{ -\frac{\beta x^2}{2t - s - r} \right\} ds dr \leq C t^2 x^{-2\alpha}.$$

*Доведення.* Введемо заміну  $\frac{t-s}{x^2} = \eta$ ,  $\frac{t-r}{x^2} = \rho$ , отримаємо

$$\int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\alpha} \exp \left\{ -\frac{\beta x^2}{2t - s - r} \right\} ds dr$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{t/x^2} \int_0^{t/x^2/x^2} (\eta x^2 + \rho x^2)^{-\alpha} \exp \left\{ -\frac{\beta x^2}{\eta x^2 + \rho x^2} \right\} x^4 d\eta d\rho \\
&= x^{4-2\alpha} \int_0^{t/x^2} \int_0^{t/x^2/x^2} (\eta + \rho)^{-\alpha} \exp \left\{ -\frac{\beta}{\eta + \rho} \right\} d\eta d\rho
\end{aligned}$$

Зазначимо, що функція  $f(x) = x^{-\alpha} \exp \left\{ -\frac{\beta}{x} \right\}$  є неперервною на  $(0, +\infty)$ , і  $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Отже,  $f$  обмежена:  $x^{-\alpha} \exp \left\{ -\frac{\beta}{x} \right\} \leq C$  для всіх  $x > 0$  (можна вибрати  $C = \sup_{x>0} f(x) = f(\frac{\alpha}{\beta}) = (\frac{\alpha}{\beta})^{-\alpha} e^{-\alpha}$ ). Таким чином,

$$x^{4-2\alpha} \int_0^{t/x^2} \int_0^{t/x^2/x^2} (\eta + \rho)^{-\alpha} \exp \left\{ -\frac{\beta}{\eta + \rho} \right\} d\eta d\rho \leq C x^{4-2\alpha} \frac{t}{x^2} \cdot \frac{t}{x^2} = C t^2 x^{-2\alpha}. \quad \square$$

*Доведення Твердження 3.4.* В цьому доведенні  $C$  позначає загальну додатню константу, що може залежати від  $H$ ; її значення не є важливим і може змінюватися протягом доведення.

Згідно Твердження 3.2,

$$\begin{aligned}
R(t, x) &= \frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{3}{2}} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} w^{\langle 2H-1 \rangle} (w - x) \exp \left\{ -\frac{(w - x)^2}{2(2t - s - r)} \right\} dw ds dr \\
&= J_1 + J_2 + J_3,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
J_1 &= -\frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{3}{2}} \\
&\quad \times \int_{-\infty}^0 |w|^{2H-1} (w - x) \exp \left\{ -\frac{(w - x)^2}{2(2t - s - r)} \right\} dw ds dr, \quad (3.17)
\end{aligned}$$

$$J_2 = \frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{3}{2}} \times \int_0^{x/2} w^{2H-1} (w - x) \exp \left\{ -\frac{(w - x)^2}{2(2t - s - r)} \right\} dw ds dr \quad (3.18)$$

$$J_3 = \frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{3}{2}} \times \int_{x/2}^{\infty} w^{2H-1} (w - x) \exp \left\{ -\frac{(w - x)^2}{2(2t - s - r)} \right\} dw ds dr. \quad (3.19)$$

Розглянемо кожен вираз окремо. Для того щоб обмежити  $J_1$ , запишемо

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 |w|^{2H-1} |w - x| \exp \left\{ -\frac{(w - x)^2}{2(2t - s - r)} \right\} dw \\ &= \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(2t - s - r)} \right\} \int_{-\infty}^0 |w|^{2H-1} (x - w) \\ & \quad \times \exp \left\{ -\frac{w^2}{2(2t - s - r)} \right\} \exp \left\{ \frac{2wx}{2(2t - s - r)} \right\} dw \\ & \leq \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(2t - s - r)} \right\} \int_{-\infty}^0 |w|^{2H-1} (x - w) \exp \left\{ -\frac{w^2}{2(2t - s - r)} \right\} dw \\ &= \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(2t - s - r)} \right\} \int_0^{+\infty} w^{2H-1} (x + w) \exp \left\{ -\frac{w^2}{2(2t - s - r)} \right\} dw, \quad (3.20) \end{aligned}$$

оскільки  $\exp \left\{ \frac{2wx}{2(2t-s-r)} \right\} \leq 1$  де  $w \leq 0$  та  $x \geq 0$ . Надалі перетворимо інтеграл в правій частині (3.20) використовуючи заміну  $z = \frac{w^2}{2(2t-s-r)}$ ,  $w = \sqrt{2(2t-s-r)z}$ ,  $dw = \sqrt{2(2t-s-r)} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$ . Отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} w^{2H-1} (x + w) \exp \left( -\frac{w^2}{2(2t-s-r)} \right) dw \\ &= 2^{H-1} (2t-s-r)^H \int_0^{+\infty} z^{H-1} \left( x + \sqrt{2(2t-s-r)z} \right) e^{-z} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{H-1}(2t-s-r)^H \left( x\Gamma(H) + \sqrt{2(2t-s-r)}\Gamma(H+\frac{1}{2}) \right) \\
&= 2^{H-1}\Gamma(H)(2t-s-r)^H x + 2^{H-1/2}\Gamma(H+\frac{1}{2})(2t-s-r)^{H+1/2}.
\end{aligned}$$

Отже, згідно (3.20),

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^0 |w|^{2H-1} |w-x| \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right\} dw \leq \exp\left\{-\frac{x^2}{2(2t-s-r)}\right\} \\
&\quad \times \left( 2^{H-1}\Gamma(H)(2t-s-r)^H x + 2^{H-1/2}\Gamma(H+\frac{1}{2})(2t-s-r)^{H+1/2} \right),
\end{aligned}$$

Підставляючи отриману нерівність в (3.17), маємо

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq \frac{\sigma^2 H 2^{H-1} \Gamma(H) x}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t-s-r)^{H-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(2t-s-r)}\right\} ds dr \\
&\quad + \frac{\sigma^2 H 2^{H-1/2} \Gamma(H+\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}} \\
&\quad \times \int_0^t \int_0^t (2t-s-r)^{H-1} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(2t-s-r)}\right\} ds dr.
\end{aligned}$$

Інтеграл в правій частині можуть бути обмежені за допомогою твердження Леми 3.1. Отримаємо

$$|J_1| \leq C \sigma^2 t^2 x^{2H-2}.$$

Тепер розглянемо  $J_2$ . Якщо  $0 \leq w \leq \frac{x}{2}$ , тоді  $|x-w| \leq x$  і  $(x-w)^2 \geq \frac{x^2}{4}$ . Таким чином,

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq \frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t-s-r)^{-\frac{3}{2}} \\
&\quad \times \int_0^{\frac{x}{2}} w^{2H-1} |w-x| \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right\} dw ds dr \\
&\leq \frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t-s-r)^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{x}{2}} w^{2H-1} x \exp\left\{-\frac{x^2}{8(2t-s-r)}\right\} dw ds dr.
\end{aligned}$$

Інтегруючи відносно  $w$ , будемо мати

$$|J_2| \leq \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi} 2^{2H+1}} x^{2H+1} \int_0^t \int_0^t (2t-s-r)^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{8(2t-s-r)}\right\} ds dr.$$

Застосовуючи Лему [3.1](#), отримуємо наступну верхню межу

$$|J_2| \leq C\sigma^2 t^2 x^{2H-2}.$$

Для отримання верхньої межі для  $J_3$ , проінтегруємо внутрішній інтеграл частинами:

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad \times \int_{\frac{x}{2}}^{\infty} w^{2H-1} (w - x) \exp\left\{-\frac{(w - x)^2}{2(2t - s - r)}\right\} dw ds dr \\ &= -\frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} w^{2H-1} d\left(\exp\left\{-\frac{(w - x)^2}{2(2t - s - r)}\right\}\right) ds dr \\ &= -\frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{1}{2}} \left( w^{2H-1} \exp\left\{-\frac{(w - x)^2}{2(2t - s - r)}\right\} \Big|_{w=\frac{x}{2}}^{+\infty} \right. \\ &\quad \left. - (2H - 1) \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} w^{2H-2} \exp\left\{-\frac{(w - x)^2}{2(2t - s - r)}\right\} dw \right) ds dr \\ &= \frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{x^{2H-1}}{2^{2H-1}} \exp\left\{-\frac{x^2}{8(2t - s - r)}\right\} \right. \\ &\quad \left. + (2H - 1) \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} w^{2H-2} \exp\left\{-\frac{(w - x)^2}{2(2t - s - r)}\right\} dw \right) ds dr \\ &= \frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi} 2^{2H-1}} x^{2H-1} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{8(2t - s - r)}\right\} ds dr \\ &\quad + \frac{\sigma^2 H(2H - 1)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^t (2t - s - r)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} w^{2H-2} \exp\left\{-\frac{(w - x)^2}{2(2t - s - r)}\right\} dw ds dr \end{aligned}$$

$$=: J_{3,1} + J_{3,2}.$$

Як зазначено вище, доданок  $J_{3,1}$  може бути обмежено за допомогою Лемми [3.1](#).

Отримаємо наступну верхню границю:  $|J_{3,1}| \leq C\sigma^2 t^2 x^{2H-2}$ .

Залишається оцінити  $J_{3,2}$ . Якщо  $w \geq \frac{x}{2}$ , то  $w^{2H-2} \leq \left(\frac{x}{2}\right)^{2H-2}$ , отже

$$|J_{3,2}| \leq \sigma^2 H |2H - 1| \left(\frac{x}{2}\right)^{2H-2} \times \int_0^t \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi(2t-s-r)}} \int_{x/2}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right) dw ds dr.$$

Оскільки підінтегральна функція є функцією щільності нормального розподілу, легко бачити, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(2t-s-r)}} \int_{x/2}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(w-x)^2}{2(2t-s-r)}\right) dw \leq 1.$$

Тому,

$$|J_{3,2}| \leq \frac{H |2H - 1|}{2^{2H-2}} \sigma^2 t^2 x^{2H-2}.$$

Таким чином,  $|J_3| \leq C\sigma^2 t^2 x^{2H-2}$ . Це завершує доведення.  $\square$

Твердження [3.4](#) означає, що коваріаційна функція  $R(t, x)$  розв'язку  $u(t, x)$  збігається при  $x \rightarrow +\infty$ . Оскільки  $u(t, \cdot)$  є стаціонарним гауссовим процесом, з цього випливає наступний результат.

**Наслідок 3.1.** Для фіксованого  $t > 0$ , випадковий процес  $\{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}$  є ергодичним.

Узагальнимо отримані властивості на випадок двовимірного процесу  $\begin{pmatrix} u(t, \cdot) \\ u(s, \cdot) \end{pmatrix}$  для фіксованих точок  $t, s \in [0, T]$ .

**Твердження 3.5.** Нехай  $u = \{u(t, x), t \in [0, T], x \in \mathbb{R}\}$  – розв'язок рівняння [\(3.6\)](#), визначений за допомогою [\(3.7\)](#). Тоді мають місце наступні властивості

1. Для будь-яких  $t, s \in [0, T]$  та  $x, z \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(u(t, z), u(s, x+z)) &= \text{Cov}(u(t, 0), u(s, x)) \\ &= \frac{\sigma^2 H}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^s (q+r)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} |y|^{2H-1} (\text{sign } y)(y-x) \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2(q+r)}\right\} dy dq dr. \end{aligned}$$

(3.21)

В результаті, для фіксованих  $t, s \in [0, T]$ ,  $t \neq s$ , стохастичний процес

$$U_{ts}(x) = \begin{pmatrix} u(t, x) \\ u(s, x) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

є двовимірним стаціонарним гауссовим процесом.

2. Для всіх  $t, s \in [0, T]$  і  $x > 0$ , коваріаційна функція обмежена зверху:

$$|\text{Cov}(u(t, 0), u(s, x))| \leq C_H \sigma^2 t s x^{2H-2}, \quad (3.22)$$

де  $C_H$  є додатною константою, що залежить лише від  $H$ .

3. Для всіх  $t, s \in [0, T]$  і  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{Cov}(u(t, x), u(s, x)) = \frac{\sigma^2 2^H \Gamma(H + \frac{1}{2}) ((t+s)^{H+1} - t^{H+1} - s^{H+1})}{\sqrt{\pi}(H+1)}. \quad (3.23)$$

Твердження 3.5 доводиться аналогічно до тверджень 3.1, 3.4, де (3.21)–(3.23) доведені для випадку  $t = s$ . Тому доведення твердження опущено.

Більше того, можна отримати наступну асимптотичну еквівалентність додатково до верхньої межі (3.22).

**Твердження 3.6.** Для  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ ,

$$\text{Cov}(u(t, 0), u(s, x)) \sim H(2H - 1)\sigma^2 t s x^{2H-2} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

*Доведення.* Інтегруючи (3.21) частинами, отримуємо:

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(u(t, 0), u(s, x)) x^{2-2H} \\ &= \frac{\sigma^2 H(2H - 1)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^s (q+r)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2-2H}}{|w|^{2-2H}} \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(q+r)}\right\} dw dq dr \quad (3.24) \\ &= I_1(x) + I_2(x) + I_3(x), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{\sigma^2 H(2H - 1)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^s (q+r)^{-\frac{1}{2}} \int_{x/2}^{\infty} \frac{x^{2-2H}}{w^{2-2H}} \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(q+r)}\right\} dw dq dr, \\ I_2(x) &= \frac{\sigma^2 H(2H - 1)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^s (q+r)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{x/2} \frac{x^{2-2H}}{w^{2-2H}} \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(q+r)}\right\} dw dq dr, \end{aligned}$$

$$I_3(x) = \frac{\sigma^2 H(2H-1)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^s (q+r)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^0 \frac{x^{2-2H}}{|w|^{2-2H}} \exp\left\{-\frac{(w-x)^2}{2(q+r)}\right\} dw dq dr.$$

Введемо заміну змінних  $z = w - x$ , маємо

$$I_1(x) = \sigma^2 H(2H-1) \int_0^t \int_{-\frac{x}{2}}^{s+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(q+r)}} \frac{x^{2-2H}}{(z+x)^{2-2H}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(q+r)}\right\} dz dq dr. \quad (3.25)$$

Можемо застосувати теорему Лебега про мажоровану збіжність, оскільки для  $z \geq -\frac{x}{2}$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(q+r)}} \frac{x^{2-2H}}{(z+x)^{2-2H}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(q+r)}\right\} \leq \frac{2^{2-2H}}{\sqrt{2\pi(q+r)}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(q+r)}\right\}$$

і

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{s+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(q+r)}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(q+r)}\right\} dz dq dr = ts \quad (3.26)$$

(тут підінтегральний вираз є гауссовою функцією щільності, отже, внутрішній інтеграл дорівнює одиниці). Спрямовуючи  $x \rightarrow +\infty$  в (3.25) і беручи до уваги (3.26), отримаємо

$$I_1(x) \rightarrow \sigma^2 H(2H-1)ts \quad \text{as } x \rightarrow +\infty. \quad (3.27)$$

Далі для  $0 \leq w \leq \frac{x}{2}$  маємо  $(x-w)^2 \geq \frac{x^2}{4}$ , тому

$$\begin{aligned} I_2(x) &\leq \frac{\sigma^2 H(2H-1)}{\sqrt{2\pi}} x^{2-2H} \int_0^t \int_0^s (q+r)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{8(q+r)}\right\} \int_0^{\frac{x}{2}} w^{2H-2} dw dq dr \\ &= \frac{\sigma^2 H}{2^{2H-1}\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^s \frac{x}{\sqrt{q+r}} \exp\left\{-\frac{x^2}{8(q+r)}\right\} dq dr. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Зауважимо, що підінтегральний вираз в правій частині (3.28) обмежений, оскільки функція  $f(y) = ye^{-y^2/8}$  обмежена на  $[0, +\infty)$ . Далі, застосовуючи теорему про мажоровану збіжність ще раз, з (3.28) випливає, що

$$I_2(x) \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty. \quad (3.29)$$

Врешті решт,

$$I_3(x) \leq \frac{\sigma^2 H(2H-1)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^s (q+r)^{-\frac{1}{2}} x^{2-2H} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(q+r)}\right\} \\ \times \int_{-\infty}^0 |w|^{2H-2} \exp\left\{-\frac{w^2}{2(q+r)}\right\} dw dq dr, \quad (3.30)$$

де використано нерівність  $(w-x)^2 \geq w^2 + x^2$  для  $w \leq 0$ .

Внутрішній інтеграл в (3.30) можна обчислити використовуючи заміну  $w = -\sqrt{2(q+r)z}$  наступним чином:

$$\int_{-\infty}^0 |w|^{2H-2} \exp\left\{-\frac{w^2}{2(q+r)}\right\} dw = \int_0^{+\infty} (2(q+r)z)^{H-1} e^{-z} \frac{\sqrt{q+r}}{\sqrt{2z}} dz \\ = 2^{H-\frac{3}{2}} (q+r)^{H-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} z^{H-\frac{3}{2}} e^{-z} dz = 2^{H-\frac{3}{2}} \Gamma\left(H-\frac{1}{2}\right) (q+r)^{H-\frac{1}{2}}.$$

Тому

$$I_3(x) \leq \frac{\sigma^2 H(2H-1)}{\sqrt{2\pi}} 2^{H-\frac{3}{2}} \Gamma\left(H-\frac{1}{2}\right) \int_0^t \int_0^s \left(\frac{x^2}{q+r}\right)^{1-H} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(q+r)}\right\} dq dr \rightarrow 0 \quad (3.31)$$

при  $x \rightarrow +\infty$ , де перехід до границі виконано аналогічно до (3.28)–(3.29).

Об'єднуючи (3.24), (3.27), (3.29) і (3.31) твердження доведено.  $\square$

### 3.3 Рівняння теплопровідності зі змішаним дробовим броунівським рухом

Досліджується стохастичне диференціальне рівняння теплопровідності:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t, x) = \sigma \dot{B}_x^H + \kappa \dot{W}_x, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.32)$$

$$u(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.33)$$

Права частина рівняння (3.32) є змішаним дробовим шумом. Він складається з двох незалежних стохастичних процесів, а саме  $B^H = \{B_x^H, x \in \mathbb{R}\}$  – двосторонній

броунівський рух з індексом Хюрста  $H \in (0, 1)$  і  $W = \{W_x, x \in \mathbb{R}\}$  – вінерівський процес, що не залежить від  $B^H$ ;  $\sigma$  і  $\kappa$  – деякі додатні коефіцієнти.

Нехай  $G$  – функція Гріна (3.3) рівняння теплопровідності, визначена в підрозділі 3.1.

Аналогічно до підрозділів 3.1, 3.2 (див. також [28] та цитовані там посилання) визначимо м'який розв'язок стохастичного диференціального рівняння (3.32).

**Означення 3.1.** Випадкове поле  $\{u(t, x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$  визначене як

$$u(t, x) = \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) dB_y^H ds + \kappa \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) dW_y ds \quad (3.34)$$

називається розв'язком стохастичного диференціального рівняння (3.32)–(3.33).

**Зауваження 3.3.** Як було показано у підрозділах 3.1, 3.2, обидва стохастичні інтеграли в (3.34) існують як потраєкторні інтеграли Рімана-Стілтєса. Цей факт впливає з гельдерової регулярності підінтегральних функцій. А саме функція Гріна – ліпшицево неперервна, в той час як траєкторії дробового броунівського руху є гельдеровими до порядку  $H$ . Така регулярність гарантує існування першого інтегралу в (3.34). Другий інтеграл також є коректно визначеним як інтеграл Вінера, оскільки підінтегральна функція квадратично інтегровна.

В наступних твердженнях наведено базові властивості розв'язку  $u(t, x)$ . Ці властивості, особливо стаціонарність та ергодичність, є ключовими для побудови оцінок параметрів  $H$ ,  $\kappa$  та  $\sigma$ .

**Твердження 3.7.** Нехай  $u = \{u(t, x), t \in [0, T], x \in \mathbb{R}\}$  – розв'язок рівняння (3.32), визначений за допомогою (3.34). Тоді справедливі наступні властивості.

1. Для всіх  $t, s \in [0, T]$  і  $x, z \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(u(t, z), u(s, x+z)) &= \text{Cov}(u(t, 0), u(s, x)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_0^s (q+r)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left( \sigma^2 H |y|^{2H-1} + \frac{\kappa^2}{2} \right) \\ &\quad \times (\text{sign } y)(y-x) \exp \left\{ -\frac{(y-x)^2}{2(q+r)} \right\} dy dq dr \quad (3.35) \end{aligned}$$

Відповідно для фіксованих різних точок  $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$  стохастичний процес  $\begin{pmatrix} u(t_1, x) \\ \vdots \\ u(t_n, x) \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , є багатовимірним стаціонарним гауссовим процесом.

2. Дисперсію  $u(t, x)$  визначено як

$$\mathbb{E}[u(t, x)^2] = \sigma^2 v_t(H) + \kappa^2 v_t\left(\frac{1}{2}\right), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (3.36)$$

де

$$v_t(H) = c_H t^{H+1}, \quad c_H = \frac{2^{H+1}(2^H - 1)\Gamma(H + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}(H + 1)}, \quad (3.37)$$

$\Gamma$  позначає гамма-функцію.

3. Для всіх  $t, s \in [0, T]$  і  $x > 0$ , коваріаційна функція обмежена зверху:

$$|\text{Cov}(u(t, 0), u(s, x))| \leq C_H t s \left( \sigma^2 x^{2H-2} + \kappa^2 x^{-1} \right), \quad (3.38)$$

де  $C_H$  – деяка додатна константа, що залежить лише від  $H$ .

4. Для всіх  $t, s \in [0, T]$  і  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(u(t, x), u(s, x)) = & \frac{\sigma^2 2^H \Gamma(H + \frac{1}{2}) \left( (t+s)^{H+1} - t^{H+1} - s^{H+1} \right)}{\sqrt{\pi}(H + 1)} \\ & + \frac{\kappa^2 2^{\frac{3}{2}} \left( (t+s)^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{3}{2}} - s^{\frac{3}{2}} \right)}{3\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

5. Для фіксованого  $t > 0$  випадковий процес  $\{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}$  є ергодичним.

*Доведення.* Доведення впливає з відповідних результатів для рівняння з дробовим броунівським шумом, яке було розглянуто в підрозділі [3.2](#). Дійсно всі твердження базуються на властивостях коваріаційної функції розв'язку. Проте, оскільки  $B^H$  та  $W$  є незалежними, коваріаційна функція може бути записана у вигляді

$$\text{Cov}(u(t, x), u(s, z)) = \sigma^2 \text{Cov}(u_b(t, x), u_b(s, z)) + \kappa^2 \text{Cov}(u_w(t, x), u_w(s, z)), \quad (3.40)$$

де

$$\begin{aligned} u_b(t, x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) dB_y^H ds, \\ u_w(t, x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) dW_y ds. \end{aligned}$$

Далі, об'єднуючи рівність (3.40) з твердженням 3.5, одразу отримуємо вирази (3.35), (3.38) та (3.39). Рівність (3.36) випливає з (3.40) та твердження 3.3. Нарешті, останнє твердження має місце, оскільки розв'язок  $\{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}$  є стаціонарним гауссовим процесом, коваріаційна функція якого збігається до нуля при  $x \rightarrow \infty$  згідно з (3.38). Отже, процес  $u(t, \cdot)$  є ергодичним.  $\square$

## 3.4 Висновки

У третьому розділі розглянуто стохастичні диференціальні рівняння теплопровідності з різними видами шуму.

Досліджено властивості випадкового поля  $u$ , що є розв'язком стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з білим шумом. Було доведено, що випадкове поле  $u$  є коректно визначеним, отримано явний вираз  $\mathbb{E}[u(t, x)^2]$  та  $\text{Cov}(u(t, 0), u(t, x))$ . Також доведено, що розв'язок стохастичного рівняння теплопровідності з білим шумом є стаціонарним та ергодичним випадковим полем для будь-якого фіксованого моменту часу.

Розглянуто стохастичне диференціальне рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом та властивості його розв'язку. Доведено, що випадковий процес, що є розв'язком заданого рівняння, є стаціонарним та ергодичним для фіксованого моменту часу  $t > 0$ . Окрім цього, обчислено дисперсію та коваріацію цього випадкового процесу та отримано верхню межу для коваріаційної функції. Отримані результати узагальнено на випадок двовимірного процесу для двох фіксованих моментів часу  $t, s \in [0, T]$ .

Розглянуто стохастичне диференціальне рівняння теплопровідності зі змішаним дробовим броунівським шумом, що складається з двох незалежних стохастичних процесів, а саме дробового броунівського руху та вінерівського процесу. Доведено, що розв'язок даного рівняння є стаціонарним та ергодичним випадковим процесом. Знайдено явний вигляд дисперсії та коваріації. Також наведено верхню межу для коваріаційної функції.

## Розділ 4

# Оцінювання параметрів стохастичного рівняння теплопровідності

### 4.1 Оцінювання параметра дифузії у рівнянні теплопровідності з білим шумом

Розглянемо наступну статистичну задачу: для фіксованого моменту часу  $t > 0$  і для фіксованого кроку  $\delta > 0$  випадкове поле  $u$  визначене у (3.2) спостерігається на сітці

$$D_N = \{(i_1\delta, \dots, i_d\delta), i_1, \dots, i_d \in \{1, \dots, N\}\}.$$

Метою є побудова оцінки параметра  $\sigma$  на основі спостережень і дослідження її асимптотичних властивостей при  $N \rightarrow \infty$ . Наш підхід побудовано на ергодичності, як властивості просторової змінної  $x$  випадкового поля  $u$ .

За результатами попереднього розділу, а саме підрозділу 3.1, при кожному фіксованому  $t$  випадкове поле  $u(t, \cdot)$  є строго стаціонарним та ергодичним. Таким чином, для довільної борельової функції  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  такої що  $\mathbb{E}|g(u(t, 0))| < \infty$  за ергодичною теоремою

$$\frac{1}{N^d} \sum_{x_k \in D_N} g(u(t, x_k)) \rightarrow \mathbb{E}g(u(t, 0)), N \rightarrow \infty \quad \text{м.н.} \quad (4.1)$$

Це дає ідею розглянути наступну оцінку параметра  $\sigma^2$ :

$$\widehat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N^d v^2} \sum_{x_k \in D_N} u(t, x_k)^2,$$

де

$$v^2 = \int_0^t \int_0^t \frac{1}{(2\pi(s_1 + s_2))^{d/2}} ds_1 ds_2 =$$

$$= \begin{cases} \frac{4(2-\sqrt{2})t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}, & d = 1, \\ \frac{t \log 2}{\pi}, & d = 2, \\ \frac{2(-1+\sqrt{2})\sqrt{t}}{\pi^{3/2}}, & d = 3. \end{cases}$$

Беручи до уваги (4.1), маємо наступну теорему.

**Теорема 4.1.**  $\widehat{\sigma}_N^2$  є строго консистентною оцінкою параметра  $\sigma^2$  при  $N \rightarrow \infty$ , тобто

$$\widehat{\sigma}_N^2 \rightarrow \sigma^2, N \rightarrow \infty, \text{ м.н.}$$

Тепер доведемо асимптотичну нормальність оцінки  $\widehat{\sigma}_N^2$ . Розглянемо випадок  $d = 1$ ; для інших випадків доведення є аналогічними.

Позначимо

$$\widetilde{V}_N = \frac{V_N - \mathbb{E}[V_N]}{\text{Var}(V_N)},$$

де

$$V_N = \sum_{k=1}^N u(T, x_k)^2.$$

Оскільки  $\widetilde{V}_N$  належить до  $\mathcal{H}^{\odot 2}$ , то можна скористатися теоремою 2.4 Нуаларта-Пеккати про четвертий момент.

Спочатку розглянемо дисперсію  $V_N$ .

**Лема 4.1.** *Справедлива наступна збіжність:*

$$\frac{\text{Var}(V_N)}{N} \rightarrow 2\sigma^4 + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \rho(i)^2 = 2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho(i)^2, N \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

де

$$\sigma^2 = \text{Var}(u(T, x_1))$$

$$\rho(i) = \text{Cov}(u(T, x_i), u(T, 0)).$$

*Доведення.* Перетворимо  $D(V_N)$

$$\begin{aligned}\text{Var}(V_N) &= \text{Var}\left(\sum_{k=1}^N u(T, x_k)^2\right) = \sum_{k=1}^N \text{Var}(u(T, x_k)^2) + 2 \sum_{k=j} \text{Cov}(u(T, x_k)^2, u(T, x_j)^2) \\ &= N\sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \text{Cov}(u(T, x_i)^2, u(T, 0)^2) \\ &= 2N\sigma^4 + 4 \sum_{i=1}^{N-1} (N-i)\rho(i)^2.\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\frac{\text{Var}(V_N)}{N} = 2\sigma^4 + 4 \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{i}{N}\right) \rho(i)^2 = 2\sigma^4 + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{i}{N}\right)^+ \rho(i)^2.$$

Оскільки  $(1 - \frac{i}{N})^+ \rho(i)^2 \uparrow \rho(i)^2, N \rightarrow \infty$  і  $\sum_{i=1}^{\infty} \rho(i)^2 < \infty$ , то за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\frac{\text{Var}(V_N)}{N} \rightarrow 2\sigma^4 + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \rho(i)^2, N \rightarrow \infty. \square$$

**Лема 4.2.** *Має місце така збіжність:*

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}(V_N - \mathbb{E}V_N)^4}{N^2} &\rightarrow 12\sigma^8 + 48\sigma^4 \sum_{m=1}^{\infty} \rho(m)^2 + 48 \left( \sum_{m=1}^{\infty} \rho(m)^2 \right)^2 \\ &= 12 \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho(m)^2 \right)^2, N \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{4.3}$$

*Доведення.* Запишемо

$$\mathbb{E}(V_N - \mathbb{E}V_N)^4 = \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^N (u(T, x_k)^2 - \sigma^2) \right)^4.$$

Позначимо  $u(T, x_k)^2 - \sigma^2 = Z_k$ . Тут  $u(T, x_k) \sim N_k(0, \sigma^2)$ , тому

$$u(T, x_k) - \rho(0) \sim \sigma^2(N_k(0, 1) - 1) =: \sigma^2(N_k - 1).$$

Тепер розпишемо  $\mathbb{E}(V_N - \mathbb{E}V_N)^4$ :

$$\mathbb{E}(V_N - \mathbb{E}V_N)^4 = \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^N Z_k \right)^4 = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}Z_k^4 + 4 \sum_{i_1 \neq i_2} \mathbb{E}Z_{i_1}^3 Z_{i_2} + 3 \sum_{i_1 \neq i_2} \mathbb{E}Z_{i_1}^2 Z_{i_2}^2$$

$$+ 6 \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} \mathbb{E} Z_{i_1}^2 Z_{i_2} Z_{i_3} + \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4} \mathbb{E} Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4},$$

де  $\sum_{i_1 \neq \dots \neq i_j}$  означає сумування по всіх можливих комбінаціях  $(i_1, \dots, i_j)$  різних точок з індексами  $j \in \{1, \dots, N\}$ .

Тепер розглянемо кожен доданок окремо.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Z_k^4 &= \sigma^8 \mathbb{E} (N_k^2 - 1)^4 = \sigma^8 (\mathbb{E} N_k^8 - 4 \mathbb{E} N_k^6 + 6 \mathbb{E} N_k^4 - 4 \mathbb{E} N_k^2 + 1) \\ &= \sigma^8 (7!! - 4 \cdot 5!! + 6 \cdot 3!! - 4 \cdot 1!! + 1) = 70 \sigma^8. \end{aligned}$$

Далі,

$$\mathbb{E} Z_{i_1}^3 Z_{i_2} = \sigma^8 \mathbb{E} ((N_{i_1}^2 - 1))^3 (N_{i_2}^2 - 1).$$

Позначамо  $H_j$  -  $j$ -ий многочлен Ерміта, маємо

$$(x^2 - 1)^3 = H_6(x) + 12H_4(x) + 30H_2(x) + 8,$$

внаслідок цього, використовуючи теорему [2.3](#),

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Z_{i_1}^3 Z_{i_2} &= \sigma^8 \mathbb{E} ((N_{i_1}^2 - 1))^3 (N_{i_2}^2 - 1) = \sigma^8 \mathbb{E} (H_6(N_{i_1}) + 12H_4(N_{i_1}) + 30H_2(N_{i_1}) + 8) H_2(N_{i_2}) \\ &= 30 \sigma^8 \mathbb{E} (H_2(N_{i_1}) H_2(N_{i_2})) = 60 \sigma^8 [\mathbb{E} (N_{i_1} N_{i_2})]^2 = 60 \sigma^4 \rho(i_1 - i_2)^2. \end{aligned}$$

Потім розглянемо:

$$\mathbb{E} Z_{i_1}^2 Z_{i_2}^2 = \sigma^8 \mathbb{E} ((N_{i_1}^2 - 1))^2 (N_{i_2}^2 - 1)^2$$

Оскільки

$$(x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 = H_4(x) + 4H_2(x) + 2,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Z_{i_1}^2 Z_{i_2}^2 &= \sigma^8 \mathbb{E} ((N_{i_1}^2 - 1))^2 (N_{i_2}^2 - 1)^2 \\ &= \sigma^8 \mathbb{E} (H_4(N_{i_1}) + 4H_2(N_{i_1}) + 2) (H_4(N_{i_2}) + 4H_2(N_{i_2}) + 2) \\ &= \sigma^8 \mathbb{E} (H_4(N_{i_1}) H_4(N_{i_2}) + 16H_2(N_{i_1}) H_2(N_{i_2}) + 4) \\ &= \sigma^8 \mathbb{E} (H_4(N_{i_1}) H_4(N_{i_2})) + 32 \sigma^4 \rho(i_1 - i_2)^2 + 4 \sigma^8 \end{aligned}$$

Згідно з теоремою [2.3](#):

$$\mathbb{E} (H_4(N_{i_1}) H_4(N_{i_2})) = 24 (\mathbb{E} N_{i_1} N_{i_2})^4.$$

Відповідно,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z_{i_1}^2 Z_{i_2}^2 &= \sigma^8 \mathbb{E}(H_4(N_{i_1})H_4(N_{i_2})) + 32\sigma^4 \rho(i_1 - i_2)^2 + 4\sigma^8 \\ &= 24\rho(i_1 - i_2)^4 + 32\sigma^4 \rho(i_1 - i_2)^2 + 4\sigma^8.\end{aligned}$$

Тепер розглянемо  $\mathbb{E}Z_{i_1}^2 Z_{i_2} Z_{i_3}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z_{i_1}^2 Z_{i_2} Z_{i_3} &= \sigma^8 \mathbb{E}(N_{i_1}^2 - 1)^2 (N_{i_2}^2 - 1) (N_{i_3}^2 - 1) \\ &= \sigma^8 \mathbb{E}(N_{i_1}^4 N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 - N_{i_1}^4 N_{i_2}^2 - N_{i_1}^4 N_{i_3}^2 + N_{i_1}^4 - 2N_{i_1}^2 N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 \\ &\quad + 2N_{i_1}^2 N_{i_2}^2 + 2N_{i_1}^2 N_{i_3}^2 - 2N_{i_1}^2 + N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 - N_{i_2}^2 - N_{i_3}^2 + 1).\end{aligned}$$

За формулою Іссерліса

$$\begin{aligned}\mathbb{E}N_{i_1}^2 N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 &= \mathbb{E}N_{i_1}^2 \mathbb{E}N_{i_2}^2 \mathbb{E}N_{i_3}^2 + 2\mathbb{E}N_{i_1}^2 (\mathbb{E}N_{i_2} N_{i_3})^2 + 2\mathbb{E}N_{i_2}^2 (\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_3})^2 \\ &\quad + 2\mathbb{E}N_{i_3}^2 (\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_2})^2 + 8\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_2} \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_3} \mathbb{E}N_{i_2} N_{i_3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}N_{i_1}^4 N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 &= 3(\mathbb{E}N_{i_1}^2)^2 \mathbb{E}N_{i_2}^2 \mathbb{E}N_{i_3}^2 + 12\mathbb{E}N_{i_1}^2 \mathbb{E}N_{i_2}^2 (\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_3})^2 \\ &\quad + 12\mathbb{E}N_{i_1}^2 \mathbb{E}N_{i_3}^2 (\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_2})^2 + 6(\mathbb{E}N_{i_1}^2)^2 (\mathbb{E}N_{i_2} N_{i_3})^2 \\ &\quad + 48\mathbb{E}N_{i_1}^2 \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_2} \mathbb{E}N_{i_2} N_{i_3} \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_3} + 24(\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_2})^2 (\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_3})^2.\end{aligned}$$

Тому,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z_{i_1}^2 Z_{i_2} Z_{i_3} &= \sigma^8 \mathbb{E}(N_{i_1}^4 N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 - N_{i_1}^4 N_{i_2}^2 - N_{i_1}^4 N_{i_3}^2 + N_{i_1}^4 - 2N_{i_1}^2 N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 \\ &\quad + 2N_{i_1}^2 N_{i_2}^2 + 2N_{i_1}^2 N_{i_3}^2 - 2N_{i_1}^2 + N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 - N_{i_2}^2 - N_{i_3}^2 + 1) \\ &= 3\sigma^8 + 12\sigma^4 \rho(i_1 - i_3)^2 + 12\sigma^4 \rho(i_1 - i_2)^2 + 6\sigma^4 \rho(i_2 - i_3)^2 \\ &\quad + 48\sigma^2 \rho(i_1 - i_2) \rho(i_2 - i_3) \rho(i_1 - i_3) + 24\rho(i_1 - i_2)^2 \rho(i_1 - i_3)^2 - 3\sigma^8 \\ &\quad - 12\sigma^4 \rho(i_1 - i_2)^2 - 3\sigma^8 - 12\sigma^4 \rho(i_1 - i_3)^2 + 3\sigma^8 - 2(\sigma^8 + 2\sigma^4 \rho(i_2 - i_3)^2 \\ &\quad + 2\sigma^4 \rho(i_1 - i_3)^2 + 2\sigma^4 \rho(i_1 - i_2)^2 + 8\sigma^2 \rho(i_1 - i_2) \rho(i_1 - i_3) \rho(i_2 - i_3)) \\ &\quad + 2\sigma^8 + 4\sigma^4 \rho(i_1 - i_2)^2 + 2\sigma^8 + 4\sigma^4 \rho(i_1 - i_3)^2 - 2\sigma^8 + 2\sigma^4 \rho(i_2 - i_3)^2 \\ &= 32\sigma^2 \rho(i_1 - i_2) \rho(i_1 - i_3) \rho(i_2 - i_3) + 24\rho(i_1 - i_2)^2 \rho(i_1 - i_3)^2 + 4\sigma^4 \rho(i_2 - i_3)^2.\end{aligned}$$

Нарешті обчислимо  $\mathbb{E}Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4} &= \sigma^8 \mathbb{E}(N_{i_1}^2 - 1) (N_{i_2}^2 - 1) (N_{i_3}^2 - 1) (N_{i_4}^2 - 1) \\ &= \sigma^8 \mathbb{E}(N_{i_1}^2 N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 N_{i_4}^2 - N_{i_1}^2 N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 - N_{i_1}^2 N_{i_2}^2 N_{i_4}^2 + N_{i_1}^2 N_{i_2}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - N_{i_1}^2 N_{i_3}^2 N_{i_4}^2 + N_{i_1}^2 N_{i_3}^2 + N_{i_1}^2 N_{i_4}^2 - N_{i_1}^2 - N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 N_{i_4}^2 \\
& + N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 + N_{i_2}^2 N_{i_4}^2 - N_{i_2}^2 + N_{i_3}^2 N_{i_4}^2 - N_{i_3}^2 - N_{i_4}^2 + 1).
\end{aligned}$$

Використовуючи формулу Іссерліса,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}N_{i_1}^2 N_{i_2}^2 N_{i_3}^2 N_{i_4}^2 &= \mathbb{E}N_{i_1}^2 \mathbb{E}N_{i_2}^2 \mathbb{E}N_{i_3}^2 \mathbb{E}N_{i_4}^2 + 2(\mathbb{E}N_{i_1}^2 \mathbb{E}N_{i_2}^2 (\mathbb{E}N_{i_3} N_{i_4})^2 + \mathbb{E}N_{i_1}^2 \mathbb{E}N_{i_3}^2 (\mathbb{E}N_{i_2} N_{i_4})^2 \\
& + \mathbb{E}N_{i_1}^2 \mathbb{E}N_{i_4}^2 (\mathbb{E}N_{i_2} N_{i_3})^2 + \mathbb{E}N_{i_2}^2 \mathbb{E}N_{i_3}^2 (\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_4})^2 \\
& + \mathbb{E}N_{i_2}^2 \mathbb{E}N_{i_4}^2 (\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_3})^2 + \mathbb{E}N_{i_3}^2 \mathbb{E}N_{i_4}^2 (\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_2})^2) \\
& + 8(\mathbb{E}N_{i_1}^2 \mathbb{E}N_{i_2} N_{i_3} \mathbb{E}N_{i_3} N_{i_4} \mathbb{E}N_{i_2} N_{i_4} + \mathbb{E}N_{i_2}^2 \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_3} \mathbb{E}N_{i_3} N_{i_4} \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_4} \\
& + \mathbb{E}N_{i_3}^2 \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_4} \mathbb{E}N_{i_2} N_{i_4} \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_2} + \mathbb{E}N_{i_4}^2 \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_2} \mathbb{E}N_{i_2} N_{i_3} \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_3}) \\
& + 4((\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_2})^2 (\mathbb{E}N_{i_3} N_{i_4})^2 + (\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_3})^2 (\mathbb{E}N_{i_2} N_{i_4})^2 \\
& + (\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_4})^2 (\mathbb{E}N_{i_2} N_{i_3})^2) \\
& + 16(\mathbb{E}N_{i_1} N_{i_2} \mathbb{E}N_{i_2} N_{i_3} \mathbb{E}N_{i_3} N_{i_4} \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_4} + \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_3} \mathbb{E}N_{i_2} N_{i_3} \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_4} \mathbb{E}N_{i_2} N_{i_4} \\
& + \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_2} \mathbb{E}N_{i_1} N_{i_3} \mathbb{E}N_{i_2} N_{i_4} \mathbb{E}N_{i_3} N_{i_4}).
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Z_{i_1} Z_{i_2} Z_{i_3} Z_{i_4} &= 4(\rho(i_1 - i_2)^2 \rho(i_3 - i_4)^2 + \rho(i_1 - i_3)^2 \rho(i_2 - i_4)^2 \\
& + \rho(i_1 - i_4)^2 \rho(i_2 - i_3)^2) \\
& + 16(\rho(i_1 - i_2) \rho(i_2 - i_3) \rho(i_3 - i_4) \rho(i_1 - i_4) \\
& + \rho(i_1 - i_3) \rho(i_2 - i_3) \rho(i_1 - i_4) \rho(i_2 - i_4) \\
& + \rho(i_1 - i_2) \rho(i_1 - i_3) \rho(i_2 - i_4) \rho(i_3 - i_4)).
\end{aligned}$$

Об'єднуючи всі доданки отримаємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_N - \mathbb{E}V_N)^4 &= 70N\sigma^8 + 240\sigma^4 \sum_{i_1 \neq i_2} \rho(i_1 - i_2)^2 \\
& + 3 \sum_{i_1 \neq i_2} (24\rho(i_1 - i_2)^4 + 32\sigma^4 \rho(i_1 - i_2)^2 + 4\sigma^8) \\
& + 6 \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} (32\sigma^2 \rho(i_1 - i_2) \rho(i_1 - i_3) \rho(i_2 - i_3) \\
& + 24\rho(i_1 - i_2)^2 \rho(i_1 - i_3)^2 + 4\sigma^4 \rho(i_2 - i_3)^2) \\
& + \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4} (4\rho(i_1 - i_2)^2 \rho(i_3 - i_4)^2 \\
& + 4\rho(i_1 - i_3)^2 \rho(i_2 - i_4)^2 + 4\rho(i_1 - i_4)^2 \rho(i_2 - i_3)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 16\rho(i_1 - i_2)\rho(i_2 - i_3)\rho(i_3 - i_4)\rho(i_1 - i_4) \\
& + 16\rho(i_1 - i_3)\rho(i_2 - i_3)\rho(i_1 - i_4)\rho(i_2 - i_4) \\
& + 16\rho(i_1 - i_2)\rho(i_1 - i_3)\rho(i_2 - i_4)\rho(i_3 - i_4)) \\
& = 70N\sigma^8 + \sum_{j=1}^8 A_{j,N},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
A_{1,N} &= 240\sigma^4 \sum_{i_1 \neq i_2} \sigma^4 \rho(i_1 - i_2)^2, \\
A_{2,N} &= 72 \sum_{i_1 \neq i_2} \rho(i_1 - i_2)^4, \\
A_{3,N} &= 3 \sum_{i_1 \neq i_2} (32\sigma^4 \rho(i_1 - i_2)^2 + 4\sigma^8), \\
A_{4,N} &= 144 \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} \rho(i_1 - i_2)^2 \rho(i_1 - i_3)^2, \\
A_{5,N} &= 192\sigma^2 \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} \rho(i_1 - i_2)\rho(i_1 - i_3)\rho(i_2 - i_3), \\
A_{6,N} &= 24\sigma^4 \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} \rho(i_2 - i_3)^2, \\
A_{7,N} &= 4 \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4} (\rho(i_1 - i_2)^2 \rho(i_3 - i_4)^2 \\
& \quad + \rho(i_1 - i_3)^2 \rho(i_2 - i_4)^2 + \rho(i_1 - i_4)^2 \rho(i_2 - i_3)^2), \\
A_{8,N} &= 16 \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4} (\rho(i_1 - i_2)\rho(i_2 - i_3)\rho(i_3 - i_4)\rho(i_1 - i_4) \\
& \quad + \rho(i_1 - i_3)\rho(i_2 - i_3)\rho(i_1 - i_4)\rho(i_2 - i_4) \\
& \quad + \rho(i_1 - i_2)\rho(i_1 - i_3)\rho(i_2 - i_4)\rho(i_3 - i_4)).
\end{aligned}$$

Розглянемо кожну суму окремо:

$$A_{1,N} = 240\sigma^4 \sum_{i_1 \neq i_2} \rho(i_1 - i_2)^2 = |i_1 - i_2 = m| = 480\sigma^4 \sum_{m=1}^{N-1} (N - m)\rho(m)^2.$$

Тому

$$\frac{A_{1,N}}{N^2} \leq \frac{480\sigma^4}{N} \sum_{m=1}^{\infty} \rho(m)^2 \rightarrow 0, N \rightarrow \infty.$$

Далі

$$A_{2,N} = 72 \sum_{i_1 \neq i_2} 24\rho(i_1 - i_2)^4 = |i_1 - i_2 = m| = 144 \sum_{k=1}^{N-1} (N - m)\rho(m)^4.$$

Аналогічно до  $A_{1,N}$ ,  $\frac{A_{2,N}}{N^2} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ . Тепер розглянемо  $A_{3,N}$ :

$$A_{3,N} = 3 \sum_{i_1 \neq i_2} (32\sigma^4\rho(i_1 - i_2)^2 + 4\sigma^8) = 192\sigma^4 \sum_{m=1}^{N-1} (N - m)\rho(m)^2 + 12\sigma^8(N^2 - N).$$

Отже,

$$\frac{A_{3,N}}{N^2} \rightarrow 12\sigma^8, N \rightarrow \infty.$$

Введемо заміну  $i_1 - i_2 = m, i_1 - i_3 = n$  і оцінимо  $A_{4,N}$ :

$$\begin{aligned} A_{4,N} &= 144 \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} \rho(i_1 - i_2)^2 \rho(i_1 - i_3)^2 \leq 144N \sum_{m,n=-N}^N \rho(m)^2 \rho(n)^2 \\ &\leq 144N \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \rho(m)^2 \rho(n)^2. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо

$$\frac{A_{4,N}}{N^2} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty.$$

Зробимо аналогічну заміну індексів

$$\begin{aligned} |A_{5,N}| &\leq 192\sigma^2 N \sum_{m,n=-N}^N |\rho(m)\rho(n)\rho(n-m)| \\ &\leq 192\sigma^2 N \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \rho(m)\rho(n)\rho(n-m); \\ |A_{8,N}| &\leq 48N \sum_{m,n,l=-N}^N \rho(m)\rho(n)\rho(l)\rho(m+n+l) \\ &\leq 48N \sum_{m,n,l=-\infty}^{\infty} \rho(m)\rho(n)\rho(l)\rho(m+n+l), \end{aligned}$$

тому

$$\frac{A_{5,N}}{N^2} \rightarrow 0, \quad \frac{A_{8,N}}{N^2} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Дослідимо  $A_{6,N}$ :

$$\begin{aligned} A_{6,N} &= 24\sigma^4 \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} \rho(i_2 - i_3)^2 = 24\sigma^4(N-2) \sum_{i_2 \neq i_3} \rho(i_2 - i_3)^2 \\ &= 48\sigma^4(N-2) \sum_{m=1}^{N-1} (N-m)\rho(m)^2. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{A_{6,N}}{N^2} = 96\sigma^4 \left(1 - \frac{2}{N}\right) \sum_{m=1}^{N-1} \left(1 - \frac{m}{N}\right) \rho(m)^2 \rightarrow 48\sigma^4 \sum_{m=1}^{\infty} \rho(m)^2, N \rightarrow \infty.$$

Перетворимо  $A_{7,N}$ :

$$\begin{aligned} A_{7,N} &= 12 \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4} \rho(i_1 - i_2)^2 \rho(i_3 - i_4)^2 \\ &= 12 \sum_{i_1 \neq i_2, i_3 \neq i_4, \{i_1, i_2\} \neq \{i_3, i_4\}} \rho(i_1 - i_2)^2 \rho(i_3 - i_4)^2 \\ &\quad - 12 \cdot 4 \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3} \rho(i_1 - i_2)^2 \rho(i_3 - i_4)^2. \end{aligned}$$

Тепер

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i_1 \neq i_2, i_3 \neq i_4 \\ \{i_1, i_2\} \neq \{i_3, i_4\}}} \rho(i_1 - i_2)^2 \rho(i_3 - i_4)^2 &= \left( \sum_{i_1 \neq i_2} \rho(i_1 - i_2)^2 \right)^2 - \sum_{i_1 \neq i_2} \rho(i_1 - i_2)^4 \\ &= \left( 2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m)\rho(m)^2 \right)^2 - \frac{A_{2,N}}{72}. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} A_{7,N} &= 48 \left( \sum_{m=1}^{N-1} (N-m)\rho(m)^2 \right)^2 - \frac{A_{2,N}}{6} - \frac{A_{4,N}}{3}, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_{7,N}}{N^2} &= 48 \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{m=1}^{N-1} \left(1 - \frac{m}{N}\right) \rho(m)^2 \right)^2 = 48 \left( \sum_{m=1}^{\infty} \rho(m)^2 \right)^2. \end{aligned}$$

Об'єднуючи всі результати, маємо

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(V_N - \mathbb{E}V_N)^4}{N^2} &\rightarrow 12\sigma^8 + 48\sigma^4 \sum_{m=1}^{\infty} \rho(m)^2 + 48 \left( \sum_{m=1}^{\infty} \rho(m)^2 \right)^2 \\ &= 12 \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho(m)^2 \right)^2, N \rightarrow \infty. \square \end{aligned}$$

**Теорема 4.2.**  $\widehat{\sigma}_N^2$  є асимптотично нормальною оцінкою параметра  $\sigma^2$  з асимптотичною дисперсією  $2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho(i)^2$ .

Доведення. З Лем [4.1](#), [4.2](#) отримуємо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(V_N - \mathbb{E}V_N)^4}{\text{Var}(V_N)^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{\mathbb{E}(V_N - \mathbb{E}V_N)^4}{N^2}}{\left(\frac{\text{Var}(V_N)}{N}\right)^2} = \frac{12 \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho(i)^2\right)^2}{\left(2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho(i)^2\right)^2} = 3.$$

Отже, згідно з теоремою [2.4](#) Нуаларта-Пеккаті про четвертий момент, маємо твердження теореми. □

## 4.2 Оцінювання параметрів дифузії та Хюрста у рівнянні теплопровідності з дробовим броунівським рухом

### 4.2.1 Оцінювання параметра дифузії $\sigma$ при відомому параметрі Хюрста $H$

Припускаємо, що для фіксованого моменту часу  $t > 0$  і фіксованого кроку  $\delta > 0$  випадкове поле  $u$ , задане як [\(3.7\)](#), спостерігається в точках  $x_k = k\delta$ ,  $k = 1, \dots, N$ . У цьому підрозділі нашою метою є побудова строго консистентної оцінки параметра дифузії  $\sigma$  на основі цих спостережень.

Введемо позначення

$$\widehat{V}_N(t) = \sum_{k=1}^N u(t, k\delta)^2. \quad (4.4)$$

$$\rho_{ts}^H(k) = \text{Cov}(u(t, k\delta), u(s, 0)), \quad r_{ts}(H) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_{ts}^H(k)^2. \quad (4.5)$$

Зазначимо, що  $\rho_{st}^H(k) = \rho_{ts}^H(-k)$  за [\(3.10\)](#).

Розглянемо таку оцінку:

$$\widetilde{\sigma}_N^2 = \frac{\widehat{V}_N(t)}{Nv_t(H)}, \quad (4.6)$$

де

$$v_t(H) = \frac{t^{H+1} 2^{H+1} (2^H - 1) \Gamma(H + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} (H + 1)}. \quad (4.7)$$

**Теорема 4.3.** Статистика  $\tilde{\sigma}_N^2$  є строго консистентною оцінкою параметра  $\sigma^2$  при  $N \rightarrow \infty$ . Асимптотичний розподіл оцінки  $\tilde{\sigma}_N^2$  залежно від значення  $H$  має такий вигляд:

1) для  $H \in (0, \frac{3}{4})$

$$\sqrt{N} (\tilde{\sigma}_N^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( 0, \frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)^2} \right), \quad N \rightarrow \infty; \quad (4.8)$$

2) для  $H = \frac{3}{4}$

$$\sqrt{\frac{N}{\log N}} (\tilde{\sigma}_N^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( 0, \frac{9\sigma^4 t^4}{16\delta v_t(\frac{3}{4})^2} \right), \quad N \rightarrow \infty;$$

3) для  $H \in (\frac{3}{4}, 1)$

$$N^{2-2H} (\tilde{\sigma}_N^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} Y, \quad N \rightarrow \infty, \quad (4.9)$$

де  $Y$  – випадкова величина Розенблатта:

$$Y = \frac{H(2H-1)\sigma^2 t^2}{2\Gamma(2-2H) \cos(\pi(1-H)) \delta^{2-2H} v_t(H)} \times \int e^{i(x_1+x_2)} \frac{e^{i(x_1+x_2)} - 1}{i(x_1+x_2)} |x_1|^{\frac{1}{2}-H} |x_2|^{\frac{1}{2}-H} dW(x_1) dW(x_2). \quad (4.10)$$

Формула (4.10) містить кратний інтеграл Вінера–Іто відносно випадкової спектральної міри  $W$  процесу білого шуму, його означення та властивості наведено у підрозділі 2.3, див. також [39, 87].

*Доведення.* За ергодичною теоремою,

$$\frac{\widehat{V}_N(t)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(t, k\delta)^2 \rightarrow \mathbb{E}u(t, 0)^2 = \sigma^2 v_t(H) \quad \text{м. н. при } N \rightarrow \infty, \quad (4.11)$$

звідки впливає строга консистентність.

1. Нехай  $H \in (0, \frac{3}{4})$ . Для доведення збіжності застосуємо теорему 2.5 до стаціонарної гауссової послідовності  $\{u(t, k\delta), x \in \mathbb{R}\}$  та функції  $f(x) = x^2$ . Оскільки  $f$  має ранг Ерміта 2, необхідно перевірити таку умову:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_{tt}^H(k)^2 < \infty.$$

Проте цей ряд збігається для  $H \in (0, \frac{3}{4})$ , оскільки

$$\rho_{tt}^H(k)^2 \leq C_H^2 \sigma^4 t^4 \delta^{4H-4} k^{4H-4} \quad \text{для } k \neq 0$$

згідно з (3.22). Тому з теореми 2.5 випливає, що

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N (u(t, k\delta)^2 - \mathbb{E}u(t, k\delta)^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \zeta^2) \quad (4.12)$$

з

$$\zeta^2 = \text{Var}(u^2(t, 0)) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}(u^2(t, 0), u^2(t, k\delta)).$$

Застосовуючи формулу Іссерліса до дисперсії та коваріації, див. приклад 2.3, одержимо

$$\zeta^2 = 2\rho_{tt}(0)^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{tt}(k)^2.$$

Враховуючи рівність  $\rho_{tt}(k) = \rho_{tt}(-k)$ , бачимо, що

$$\zeta^2 = 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_{tt}(k)^2 = r_{tt}(H).$$

Отже,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \left( \widehat{V}_N(t) - N\sigma^2 v_t(H) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, r_{tt}(H)), \quad N \rightarrow \infty,$$

звідки

$$\sqrt{N} (\widetilde{\sigma}_N^2 - \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{N} v_t(H)} \left( \widehat{V}_N(t) - N\sigma^2 v_t(H) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)^2}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

2. Нехай  $H = \frac{3}{4}$ . Позначимо

$$L(N) := \sum_{k=-N}^N \rho_{tt}(k)^2.$$

Застосуємо теорему 2.6. Для цього необхідно довести, що  $L(N)$  є повільно змінною функцією, яка задовольняє таку умову:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L(N)} \sum_{k=-N}^N |\rho_{tt}(k)|^l \quad \text{існує для всіх } l > 2. \quad (4.13)$$

Спершу доведемо, що

$$L(N) \sim \frac{9\sigma^4 t^4}{32\delta} \log N, \quad N \rightarrow \infty, \quad (4.14)$$

звідки випливає, що функція  $L$  справді є повільно змінною. За твердженням [3.2](#),

$$\rho_{tt}(k) \sim \frac{3}{8} \sigma^2 t^2 \delta^{-1/2} k^{-1/2}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Тому за теоремою Штольца маємо

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{k=1}^N \rho_{tt}(k)^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho_{tt}(N+1)^2}{\log(N+1) - \log N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{64} \sigma^4 t^4 \delta^{-1}}{(N+1) \log(1 + \frac{1}{N})} = \frac{9}{64} \sigma^4 t^4 \delta^{-1}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Зауваживши, що

$$L(N) = \rho_{tt}(0)^2 + 2 \sum_{k=1}^N \rho_{tt}(k)^2,$$

отримуємо [\(4.14\)](#). Далі, завдяки оцінці [\(3.22\)](#), ряд  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho_{tt}(k)|^l$  збігається для  $l > 2$ , отже, границя в [\(4.13\)](#) існує і дорівнює нулю.

Тоді відповідно до теореми [2.6](#),

$$\frac{1}{\sqrt{NL(N)}} \sum_{k=1}^N \left( \frac{u(t, k\delta)^2}{\sigma^2 v_t(\frac{3}{4})} - 1 \right)$$

збігається до нормального розподілу при  $N \rightarrow \infty$ . Отже, враховуючи [\(4.6\)](#) і [\(4.14\)](#), бачимо, що

$$\sqrt{\frac{N}{\log N}} (\tilde{\sigma}_N^2 - \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{N \log N}} \sum_{k=1}^N \left( \frac{u(t, k\delta)^2}{\sigma^2 v_t(\frac{3}{4})} - 1 \right)$$

також збігається до нормального розподілу. Таким чином, залишається обчислити асимптотичну дисперсію. Аналогічно до попереднього випадку маємо

$$\begin{aligned} \frac{N}{\log N} \text{Var}(\tilde{\sigma}_N^2) &= \frac{1}{N \log N v_t(\frac{3}{4})^2} \text{Var} \left( \sum_{k=1}^N u(t, k\delta)^2 \right) \\ &= \frac{1}{N \log N v_t(\frac{3}{4})^2} \left( \sum_{k=1}^N \text{Var}(u(t, k\delta)^2) + 2 \sum_{1 \leq k < j \leq N} \text{Cov}(u(t, k\delta)^2, u(t, j\delta)^2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N \log N v_t(\frac{3}{4})^2} \left( 2 \sum_{k=1}^N \rho_{tt}^H(0)^2 + 4 \sum_{1 \leq k < j \leq N} \rho_{tt}^H(j-k)^2 \right) \\
&= \frac{2}{N \log N v_t(\frac{3}{4})^2} \left( N \rho_{tt}^H(0)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} (N-i-1) \rho_{tt}^H(i)^2 \right).
\end{aligned}$$

Використовуючи теорему про мажоровану збіжність та (4.15), одержимо

$$\frac{N}{\log N} \text{Var}(\tilde{\sigma}_N^2) \sim \frac{4}{\log N v_t(\frac{3}{4})^2} \sum_{i=1}^{N-1} \rho_{tt}^H(i)^2 \rightarrow \frac{9\sigma^4 t^4}{16\delta v_t(\frac{3}{4})^2} \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

3. Для  $H \in (\frac{3}{4}, 1)$

$$\rho_{tt}^H(n) \sim H(2H-1)\sigma^2 t^2 \delta n^{2-2H}, \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

за твердженням 3.2. Тоді результат випливає з [39, теорема 1] (див. також [87]).  $\square$

## 4.2.2 Одночасне оцінювання параметра дифузії $\sigma$ та параметра Хюрста $H$

Тепер розглянемо задачу побудови строго консистентної оцінки параметрів  $(H, \sigma^2)$  на основі спостережень

$$\{u(t, k\delta), u(s, k\delta), k = 1, \dots, N\}.$$

Тут припускаємо, що маємо фіксовані  $t > 0$  і  $s > 0$  та фіксований крок  $\delta > 0$ , тобто випадкове поле  $u$ , задане (3.7), спостерігається в точках  $x_k = k\delta$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Розглянемо наступні оцінки:

$$\hat{H}_N = \frac{\log(\hat{V}_N(t) / \hat{V}_N(s))}{\log(t/s)} - 1, \quad \hat{\sigma}_N^2 = \frac{\hat{V}_N(t)}{N v_t(\hat{H}_N)} = \frac{\hat{V}_N(s)}{N v_s(\hat{H}_N)}, \quad (4.16)$$

де  $\hat{V}_N(t)$  та  $v_t(H)$  визначено формулами (4.4), (4.7) відповідно.

**Зауваження 4.1.** Рівність  $\frac{\hat{V}_N(t)}{N v_t(\hat{H}_N)} = \frac{\hat{V}_N(s)}{N v_s(\hat{H}_N)}$  випливає з наступних простих обчислень:

$$\frac{\hat{V}_N(s) / v_s(\hat{H}_N)}{\hat{V}_N(t) / v_t(\hat{H}_N)} = \frac{\hat{V}_N(s)}{\hat{V}_N(t)} \left(\frac{t}{s}\right)^{\hat{H}_N+1} = \frac{\hat{V}_N(s)}{\hat{V}_N(t)} \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{\log(\hat{V}_N(t) / \hat{V}_N(s))}{\log(t/s)}} = \frac{\hat{V}_N(s)}{\hat{V}_N(t)} \cdot \frac{\hat{V}_N(t)}{\hat{V}_N(s)} = 1.$$

**Теорема 4.4.** Для всіх  $H \in (0, 1)$ ,  $(\widehat{H}_N, \widehat{\sigma}_N^2)$  є строго консистентною оцінкою параметрів  $(H, \sigma^2)$  при  $N \rightarrow \infty$ .

*Доведення.* Відповідно до ергодичної теореми, для будь-якої борелівської функції  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такої, що  $\mathbb{E}|g(u(t, 0))| < \infty$ , має місце наступна збіжність

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(u(t, k\delta)) \rightarrow \mathbb{E}[g(u(t, 0))] \quad \text{м. н. при } N \rightarrow \infty.$$

Зокрема, для будь-якого  $t > 0$  має місце збіжність (4.11). Тому для двох різних  $t$  та  $s$  маємо

$$\frac{\widehat{V}_N(t)}{\widehat{V}_N(s)} \rightarrow \frac{v_t(H)}{v_s(H)} = \left(\frac{t}{s}\right)^{H+1} \quad \text{м. н. при } N \rightarrow \infty. \quad (4.17)$$

Підставляючи збіжності (4.11) and (4.17) в означення  $\widehat{H}_N$  та  $\widehat{\sigma}_N^2$ , отримуємо твердження теореми.  $\square$

Далі введемо позначення

$$\tau_t(H) = \frac{\partial}{\partial H} \log v_t(H). \quad (4.18)$$

З (4.7) випливає, що

$$\tau_t(H) = \log t + \frac{2^{H+1} - 1}{2^H - 1} \log 2 + \frac{\Gamma'(H + \frac{1}{2})}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} - \frac{1}{H + 1}. \quad (4.19)$$

**Теорема 4.5.** Для  $H \in (0, \frac{3}{4})$ , оцінка  $(\widehat{H}_N, \widehat{\sigma}_N^2)$  є асимптотично нормальною:

$$\sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{H}_N - H \\ \widehat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \right) \quad \text{as } N \rightarrow \infty,$$

де

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sigma^{-4} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-2} \left( \frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)^2} - \frac{2r_{ts}(H)}{v_t(H)v_s(H)} + \frac{r_{ss}(H)}{v_s(H)^2} \right), \\ c_{12} &= -\sigma^{-2} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-2} \left( \frac{r_{tt}(H)\tau_s(H)}{v_t(H)^2} - \frac{r_{ts}(H)(\tau_t(H) + \tau_s(H))}{v_t(H)v_s(H)} + \frac{r_{ss}(H)\tau_t(H)}{v_s(H)^2} \right), \\ c_{22} &= \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-2} \left( \frac{r_{tt}(H)\tau_s(H)^2}{v_t(H)^2} - \frac{2r_{ts}(H)\tau_t(H)\tau_s(H)}{v_t(H)v_s(H)} + \frac{r_{ss}(H)\tau_t(H)^2}{v_s(H)^2} \right). \end{aligned}$$

Доведення буде розбито на декілька лем. Почнемо з обчислення спільного асимптотичного розподілу  $\widehat{V}_N(t)$  та  $\widehat{V}_N(s)$ .

**Лема 4.3.** Для  $H \in (0, \frac{3}{4})$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \widehat{V}_N(t) - N\sigma^2 v_t(H) \\ \widehat{V}_N(s) - N\sigma^2 v_s(H) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{tt}(H) & r_{ts}(H) \\ r_{ts}(H) & r_{ss}(H) \end{pmatrix} \right) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

*Доведення.* Згідно теореми Крамера-Волда потрібно довести, що для всіх  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \left[ \alpha \left( \widehat{V}_N(t) - N\sigma^2 v_t(H) \right) + \beta \left( \widehat{V}_N(s) - N\sigma^2 v_s(H) \right) \right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, s^2), \quad (4.20)$$

де

$$s^2 = \alpha^2 r_{tt}(H) + 2\alpha\beta r_{ts}(H) + \beta^2 r_{ss}(H). \quad (4.21)$$

Враховуючи (4.4) та (3.14), можна побачити, що (4.20) еквівалентно

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \left[ \alpha \left( u(t, k\delta)^2 - \mathbb{E}u(t, k\delta)^2 \right) + \beta \left( u(s, k\delta)^2 - \mathbb{E}u(s, k\delta)^2 \right) \right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, s^2). \quad (4.22)$$

Щоб довести дану збіжність, потрібно застосувати центральну граничну теорему 2.7 для стаціонарної послідовності векторів до двовимірної стаціонарної гауссової послідовності  $\begin{pmatrix} u(t, k\delta) \\ u(s, k\delta) \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  та функції  $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ . Оскільки  $f$  має ранг Ерміта 2, нам потрібно перевірити наступні умови:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_{tt}^H(k)^2 < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_{ts}^H(k)^2 < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_{ss}^H(k)^2 < \infty.$$

Проте, всі ці послідовності збігаються для  $H \in (0, \frac{3}{4})$  тому, що

$$\rho_{ts}^H(k)^2 \leq C_H^2 \sigma^4 t^2 s^2 \delta^{4H-4} k^{4H-4} \quad \text{для } k \neq 0$$

в силу (3.22). Тому за теоремою 2.7 збіжність (4.22) має місце з

$$s^2 = \text{Var} \left( f(u(t, 0), u(s, 0)) \right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov} \left( f(u(t, 0), u(s, 0)), f(u(t, k\delta), u(s, k\delta)) \right).$$

Таким чином залишається довести (4.21). З цією метою запишемо

$$\begin{aligned} s^2 &= \text{Var} \left( \alpha u(t, 0)^2 + \beta u(s, 0)^2 \right) \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov} \left( \alpha u(t, 0)^2 + \beta u(s, 0)^2, \alpha u(t, k\delta)^2 + \beta u(s, k\delta)^2 \right) \\ &= \alpha^2 \text{Var} \left( u(t, 0)^2 \right) + \beta^2 \text{Var} \left( u(s, 0)^2 \right) + 2\alpha\beta \text{Cov} \left( u(t, 0)^2, u(s, 0)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov} (u(t, 0)^2, u(t, k\delta)^2) + 2\beta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov} (u(s, 0)^2, u(s, k\delta)^2) \\
& + 2\alpha\beta \sum_{k=1}^{\infty} \left( \text{Cov} (u(t, 0)^2, u(s, k\delta)^2) + \text{Cov} (u(s, 0)^2, u(t, k\delta)^2) \right).
\end{aligned}$$

Застосовуючи формулу Іссерліса до дисперсії та коваріації, див. приклад [2.3](#), отримаємо

$$\begin{aligned}
s^2 & = 2\alpha^2 \rho_{tt}(0)^2 + 2\beta^2 \rho_{ss}(0)^2 + 4\alpha\beta \rho_{ts}(0)^2 + 4\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{tt}(k)^2 + 4\beta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{ss}(k)^2 \\
& + 4\alpha\beta \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{ts}(k)^2 + 4\alpha\beta \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{st}(k)^2.
\end{aligned}$$

Врешті решт, враховуючи рівність  $\rho_{ts}(k) = \rho_{st}(-k)$ , маємо

$$s^2 = 2\alpha^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_{tt}(k)^2 + 2\beta^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_{ss}(k)^2 + 4\alpha\beta \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_{st}(k)^2.$$

Це еквівалентно [\(4.21\)](#). □

*Зауваження 4.2.* Для  $H > \frac{3}{4}$  спільна асимптотична нормальність в Лемі [4.3](#) не справджується. Більше того, використовуючи нещодавно опубліковані результати Р. Мажор [\[60, Теорема 1.3\]](#), можна встановити збіжність вектора нормованого відповідним чином  $(\widehat{V}_N(t) - N\sigma^2 v_t(H), \widehat{V}_N(s) - N\sigma^2 v_s(H))$  до спеціального не гауссового розподілу.

Наступна лема дає спільний асимптотичний розподіл  $\widehat{H}_N$  та  $\widehat{V}_N(t)$ .

**Лема 4.4.** Для  $H \in (0, \frac{3}{4})$ ,

$$\sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{H}_N - H \\ \frac{\widehat{V}_N(t)}{N} - \sigma^2 v_t(H) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & d \\ d & r_{tt}(H) \end{pmatrix} \right) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

де  $c_{11}$  визначено в Теоремі [4.5](#) і

$$d = \sigma^{-2} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-1} \left( \frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)} - \frac{r_{ts}(H)}{v_s(H)} \right).$$

*Доведення.* Застосуємо дельта-метод [2.9](#). Зауважимо, що

$$\widehat{H}_N = \frac{\log \frac{\widehat{V}_N(t)/N}{\widehat{V}_N(s)/N}}{\log \frac{t}{s}} - 1 \quad \text{та} \quad H = \frac{\log \frac{\sigma^2 v_t(H)}{\sigma^2 v_s(H)}}{\log \frac{t}{s}} - 1,$$

див. (4.47) та (4.17). Тоді

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{H}_N - H \\ \frac{\widehat{V}_N(t)}{N} - \sigma^2 v_t(H) \end{pmatrix} &= \sqrt{N} \begin{pmatrix} \frac{\log \frac{\widehat{V}_N(t)/N}{\widehat{V}_N(s)/N} - \log \frac{\sigma^2 v_t(H)}{\sigma^2 v_s(H)}}{\log \frac{t}{s}} \\ \frac{\widehat{V}_N(t)}{N} - \sigma^2 v_t(H) \end{pmatrix} = \\ &= \sqrt{N} \left( g \left( \frac{\widehat{V}_N(t)}{N}, \frac{\widehat{V}_N(s)}{N} \right) - g(\sigma^2 v_t(H), \sigma^2 v_s(H)) \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

де функція  $g$  та її якобіан дорівнюють

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} \log \frac{x}{y} / \log \frac{t}{s} \\ x \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad g'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x \log \frac{t}{s}} & -\frac{1}{y \log \frac{t}{s}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Застовуючи дельта-метод [2.9], отримуємо з Лема 4.3, що (4.23) збігається за розподілом до двовимірного нормального розподілу з наступною коваріаційною матрицею:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2 v_t(H) \log \frac{t}{s}} & -\frac{1}{\sigma^2 v_s(H) \log \frac{t}{s}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{tt}(H) & r_{ts}(H) \\ r_{ts}(H) & r_{ss}(H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2 v_t(H) \log \frac{t}{s}} & 1 \\ -\frac{1}{\sigma^2 v_s(H) \log \frac{t}{s}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left( \frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)^2} - \frac{2r_{ts}(H)}{v_t(H)v_s(H)} + \frac{r_{ss}(H)}{v_s(H)^2} \right) \sigma^{-4} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-2} & \left( \frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)} - \frac{r_{ts}(H)}{v_s(H)} \right) \sigma^{-2} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-1} \\ \left( \frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)} - \frac{r_{ts}(H)}{v_s(H)} \right) \sigma^{-2} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-1} & r_{tt}(H). \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Це завершує доведення.  $\square$

На наступному кроці замінюємо індекс Хюрста  $H$  на його оцінку  $\widehat{H}_N$  в другій компоненті випадкового вектора, що було розглянуто в попередній лемі. Виходить, що знову отримуємо асимптотично нормальний випадковий вектор. Дані результати відображено в наступній лемі.

**Лема 4.5.** Для  $H \in (0, \frac{3}{4})$ ,

$$\sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{H}_N - H \\ \frac{\widehat{V}_N(t)}{N} - \sigma^2 v_t(\widehat{H}_N) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} \right) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

де

$$\begin{aligned} m_{12} &= \sigma^{-2} \left[ \frac{r_{tt}(H) \tau_s(H)}{v_t(H)} - \frac{v_{ts}(H) (\tau_t(H) + \tau_s(H))}{v_s(H)} + \frac{r_{ss}(H) \tau_t(H) v_t(H)}{v_s(H)^2} \right], \\ m_{22} &= \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-2} \left[ r_{tt}(H) \tau_s(H)^2 - \frac{2r_{ts}(H) \tau_t(H) \tau_s(H) v_t(H)}{v_s(H)} + \frac{r_{ss}(H) \tau_t(H)^2 v_t(H)^2}{v_s(H)^2} \right]. \end{aligned}$$

Доведення. Застосуємо дельта-метод [2.9](#) ще раз. Запишемо

$$\begin{aligned} \sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{H}_N - H \\ \frac{\widehat{v}_N(t)}{N} - \sigma^2 v_t(\widehat{H}_N) \end{pmatrix} &= \sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{H}_N - H \\ \frac{\widehat{v}_N(t)}{N} - \sigma^2 v_t(H) + \sigma^2 v_t(H) - \sigma^2 v_t(\widehat{H}_N) \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{N} \left( g \left( \widehat{H}_N, \frac{v_N(t)}{N} \right) - g \left( H, \sigma^2 v_t(H) \right) \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

де

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y - \sigma^2 v_t(x) \end{pmatrix}, \quad g'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sigma^2 v_t'(x) & 1 \end{pmatrix}$$

(тут  $v_t'(x) = \frac{\partial v_t(x)}{\partial x}$ ). Згідно дельта-методу [2.9](#), з Лема [4.4](#) випливає, що [\(4.24\)](#) збігається за розподілом до двовимірного нормального розподілу з наступною коваріаційною матрицею:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sigma^2 v_t'(H) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & d \\ d & r_{tt}(H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sigma^2 v_t'(H) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{11} \sigma^2 v_t'(H) + d \\ -c_{11} \sigma^2 v_t'(H) + d & c_{11} \sigma^4 (v_t'(H))^2 - 2d \sigma^2 v_t'(H) + r_{tt}(H) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Залишається обчислити елементи цієї матриці. Маємо

$$\begin{aligned} -c_{11} \sigma^2 v_t'(H) + d &= -\sigma^{-2} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-2} v_t'(H) \left( \frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)^2} - \frac{2r_{ts}(H)}{v_t(H)v_s(H)} + \frac{r_{ss}(H)}{v_s(H)^2} \right) \\ &+ \sigma^{-2} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-1} \left( \frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)} - \frac{r_{ts}(H)}{v_s(H)} \right) = \\ &= -\sigma^{-2} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-2} \left[ r_{tt}(H) \left( -\frac{v_t'(H)}{v_t(H)^2} + \frac{\log \frac{t}{s}}{v_t(H)} \right) \right. \\ &\left. + r_{ts}(H) \left( \frac{2v_t'(H)}{v_t(H)v_s(H)} - \frac{\log \frac{t}{s}}{v_s(H)} \right) - r_{ss}(H) \frac{v_t'(H)}{v_s(H)} \right]. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що  $\frac{v_t'(H)}{v_t(H)} = \tau_t(H)$  та  $\tau_t(H) - \tau_s(H) = \log \frac{t}{s}$ , див. [\(4.18\)](#) і [\(4.19\)](#). Тоді

$$\begin{aligned} -c_{11} \sigma^2 v_t'(H) + d &= -\sigma^{-2} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-2} \left[ r_{tt}(H) \frac{-\tau_t(H) + \log \frac{t}{s}}{v_t(H)} + r_{ts}(H) \frac{2\tau_t(H) - \log \frac{t}{s}}{v_s(H)} - \right. \\ &\left. - r_{ss}(H) \frac{\tau_t(H)v_t(H)}{v_s(H)^2} \right] = \\ &= -\sigma^{-2} \left( \log \frac{t}{s} \right)^{-2} \left[ r_{tt}(H) \frac{\tau_s(H)}{v_t(H)} - r_{ts}(H) \frac{\tau_t(H) + \tau_s(H)}{v_s(H)} + r_{ss}(H) \frac{\tau_t(H)v_t(H)}{v_s(H)^2} \right]. \end{aligned}$$

Далі,

$$\begin{aligned}
& c_{11}\sigma^4(v'_t(H))^2 - 2d\sigma^2v'_t(H) + r_{tt}(H) \\
&= \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-2} (v'_t(H))^2 \left(\frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)^2} - \frac{2r_{ts}(H)}{v_t(H)v_s(H)} + \frac{r_{ss}(H)}{v_s(H)^2}\right) \\
&\quad - 2\left(\log \frac{t}{s}\right)^{-1} v'_t(H) \left(\frac{r_{tt}(H)}{v_t(H)} - \frac{r_{ts}(H)}{v_s(H)}\right) + r_{tt}(H) \\
&= \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-2} \left[ r_{tt}(H) \left(\tau_t(H)^2 - 2\left(\log \frac{t}{s}\right) \tau_t(H) + \left(\log \frac{t}{s}\right)^2\right) \right. \\
&\quad \left. + 2r_{ts}(H) \left(-\frac{\tau_t(H)^2 v_t(H)}{v_s(H)} + \frac{\tau_t(H)v_t(H)}{v_s(H)} \log \frac{t}{s}\right) + r_{ss}(H) \frac{\tau_t(H)^2 v_t(H)^2}{v_s(H)^2} \right] \\
&= \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-2} \left[ r_{tt}(H) \left(\tau_t(H) - \log \frac{t}{s}\right)^2 + \frac{2r_{ts}(H)\tau_t(H)v_t(H)}{v_s(H)} \left(-\tau_t(H) + \log \frac{t}{s}\right) \right. \\
&\quad \left. + r_{ss}(H) \frac{\tau_t(H)^2 v_t(H)^2}{v_s(H)^2} \right] \\
&= \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-2} \left[ r_{tt}(H)\tau_s(H)^2 - \frac{2r_{ts}(H)\tau_t(H)\tau_s(H)v_t(H)}{v_s(H)} + \frac{r_{ss}(H)\tau_t(H)^2 v_t(H)^2}{v_s(H)^2} \right].
\end{aligned}$$

Лему доведено.  $\square$

Доведення Теорему 4.5. За теоремою 2.8 Слуцького, з Лемми 4.5 випливає

$$\sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{H}_N - H \\ \widehat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} = \sqrt{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_t(\widehat{H}_N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{H}_N - H \\ \frac{\widehat{V}_N(t)}{N} - \sigma^2 v_t(\widehat{H}_N) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma) \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

де

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_t(H)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_t(H)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \frac{m_{12}}{v_t(H)} \\ \frac{m_{12}}{v_t(H)} & \frac{m_{22}}{v_t(H)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Теорему 4.5 доведено.  $\square$

## 4.2.3 Моделювання

### 4.2.3.1 Моделювання оцінки параметра дифузії $\sigma$ для відомого $H$

У цьому підпункті якість отриманих у пункті 4.2.1 оцінок проілюстровано за допомогою моделювання. Спочатку згенеруємо траєкторії розв'язку  $u(t, x)$  рівняння (3.6), дискретизуючи формулу (3.7). Оскільки параметр  $\sigma$  входить в

праву частину рівняння (3.7) мультиплікативно, то достатньо розглянути лише випадок  $\sigma = 1$ . Також обираємо  $t = 1$  як момент часу. Для кожного значення індекса Хюрста  $H$  симулюємо 100 траєкторій розв'язку  $u(1, x)$ , використовуючи розбиття з кроком  $\Delta x = 2^{-7}$ . Спочатку інтегруємо функцію Гріна чисельно відносно  $s$ , після цього обчислюємо стохастичний інтеграл відносно дробового броунівського руху  $B_y^H$ , замінюючи його сумою (інтегруємо по  $[x - 4, x + 4]$  замість  $\mathbb{R}$ ).

Вивчається якість оцінки  $\tilde{\sigma}_N^2$  для різних значень індекса Хюрста  $H$  і три значення кроку  $\delta = 1, 0.5, 0.25$ . Середні та стандартні відхилення оцінок наведено в таблицях 4.1–4.3. Можна побачити, що оцінки збігаються до дійсного значення параметра  $\sigma^2$  і їх стандартне відхилення прямує до нуля. Таким чином, результати моделювання підтверджують консистентність оцінки. Проте швидкість збіжності для  $H = 0.9$  не дуже висока. Також бачимо, що найкращі результати отримано для  $\delta = 1$ . Ймовірно горизонт спостережень  $T = N\delta$  більш важливий для якості оцінки ніж крок  $\delta$ .

Табл. 4.1. Середні та стандартні відхилення оцінки  $\tilde{\sigma}_N^2$  для кроку  $\delta = 1$

	$N$	$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$
$H = 0.1$	Середнє	1.0470	1.0120	1.0017	0.9981	1.0073	1.0132	1.0135
	Стд.відх.	0.3880	0.2619	0.1812	0.1254	0.0892	0.0658	0.0455
$H = 0.3$	Середнє	0.9991	1.0161	0.9994	0.9932	0.9992	0.9964	0.9951
	Стд.відх.	0.4326	0.2920	0.1928	0.1467	0.1088	0.0699	0.0502
$H = 0.5$	Середнє	1.0051	0.9613	0.9576	0.9883	0.9833	0.9893	0.9915
	Стд.відх.	0.4292	0.2601	0.2009	0.1343	0.0858	0.0731	0.0479
$H = 0.7$	Середнє	0.9476	0.9532	0.9916	1.0299	1.0187	1.0038	1.0049
	Стд.відх.	0.5587	0.4144	0.2941	0.2363	0.1780	0.1161	0.0775
$H = 0.9$	Середнє	0.9910	1.0163	0.9722	0.9800	0.9588	0.9543	0.9602
	Стд.відх.	0.9989	0.8766	0.7046	0.5660	0.4976	0.4934	0.3416

#### 4.2.3.2 Моделювання оцінок параметра дифузії $\sigma$ та параметра Хюрста для невідомого $H$

У цьому підпункті ілюструємо якість оцінки  $(\hat{H}_N, \hat{\sigma}_N^2)$  за допомогою моделювання. Аналогічно до попереднього пункту генеруємо траєкторії розв'язку  $u(t, x)$  рівняння (3.6), дискретизуючи формулу (3.7).

Табл. 4.2. Середні та стандартні відхилення оцінки  $\tilde{\sigma}_N^2$  для кроку  $\delta = \frac{1}{2}$ 

	$N$	$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$
H = 0.1	Середнє	1.1065	1.0451	1.0291	1.0155	1.0182	1.0325	1.0268
	Стд.відх.	0.6812	0.5189	0.3806	0.2639	0.1821	0.1363	0.0948
H = 0.3	Середнє	1.0415	1.0292	1.0489	1.0109	1.0064	1.0150	1.0078
	Стд.відх.	0.7277	0.5332	0.3749	0.2667	0.1944	0.1325	0.0875
H = 0.5	Середнє	1.0695	0.9728	1.0597	1.0671	1.0327	1.0205	1.0079
	Стд.відх.	0.9274	0.6440	0.4363	0.2916	0.1742	0.1215	0.1086
H = 0.7	Середнє	0.9555	0.9919	0.9982	0.9838	0.9821	1.0414	1.0228
	Стд.відх.	0.9722	0.7945	0.5504	0.3966	0.2896	0.2088	0.1417
H = 0.9	Середнє	0.9763	0.9302	0.9012	0.9731	0.9667	0.9365	0.9323
	Стд.відх.	1.3018	1.1639	0.8602	0.7813	0.7033	0.5201	0.4076

Табл. 4.3. Середні та стандартні відхилення оцінки  $\tilde{\sigma}_N^2$  для кроку  $\delta = \frac{1}{4}$ 

	$N$	$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$
H = 0.1	Середнє	0.8753	1.0704	1.1010	1.0429	1.0229	0.9875	0.9893
	Стд.відх.	0.8769	0.9028	0.6155	0.4187	0.3364	0.2298	0.1550
H = 0.3	Середнє	1.1555	1.0970	1.0627	0.9430	0.9469	0.9717	0.9923
	Стд.відх.	1.0885	0.8464	0.6896	0.4895	0.3406	0.2733	0.1872
H = 0.5	Середнє	0.9159	0.9157	0.9598	0.9836	1.0244	1.0295	1.0139
	Стд.відх.	1.2274	0.8237	0.6379	0.5033	0.4382	0.3087	0.2228
H = 0.7	Середнє	0.9758	0.9743	0.9323	0.8939	0.9806	1.0009	1.0069
	Стд.відх.	1.3749	1.1514	0.9001	0.6895	0.5734	0.4143	0.3277
H = 0.9	Середнє	0.6687	0.6877	0.7213	0.7765	0.8427	0.8468	0.9224
	Стд.відх.	0.8962	0.8343	0.7729	0.7604	0.7558	0.6637	0.6916

Спочатку обираємо  $t = 1$  та  $s = 2$  як моменти часу спостережень з кроком  $\delta = 1$ . Для кожного значення індексу Хюрста  $H$  симулюємо 50 траєкторій розв'язку. Середні та стандартні відхилення оцінок  $\hat{H}_N$ ,  $\hat{\sigma}_N^2$  та  $\tilde{\sigma}_N^2$  (підрховано для  $t = 1$ ) наведено в таблицях [4.4](#)–[4.6](#).

Табл. 4.4. Середні та стандартні відхилення оцінки  $\hat{H}_N$  для  $t = 1, s = 2$ .

	$N$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
$H = 0.1$	Середнє	0.0977	0.1062	0.0983	0.0985	0.0988	0.0980
	Стд.відх.	0.0765	0.0627	0.0403	0.0305	0.0201	0.0144
$H = 0.3$	Середнє	0.2992	0.2961	0.2988	0.2979	0.2982	0.3006
	Стд.відх.	0.0727	0.0550	0.0349	0.0244	0.0178	0.0123
$H = 0.5$	Середнє	0.4757	0.4902	0.4950	0.4993	0.4996	0.4993
	Стд.відх.	0.0761	0.0528	0.0347	0.0255	0.0191	0.0145
$H = 0.7$	Середнє	0.6718	0.6771	0.6877	0.6940	0.6974	0.7006
	Стд.відх.	0.0672	0.0451	0.0341	0.0223	0.0181	0.0121
$H = 0.9$	Середнє	0.8566	0.8659	0.8757	0.8785	0.8863	0.8882
	Стд.відх.	0.0694	0.0576	0.0458	0.0350	0.0282	0.0261

Табл. 4.5. Середні та стандартні відхилення оцінки  $\hat{\sigma}_N^2$  для  $t = 1, s = 2$ .

	$N$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
$H = 0.1$	Середнє	0.1651	0.9607	1.3173	1.1360	1.0656	1.0521
	Стд.відх.	3.9560	1.8089	1.1705	0.4197	0.2202	0.1452
$H = 0.3$	Середнє	1.0587	1.0441	1.0259	1.0140	1.0095	0.9994
	Стд.відх.	0.2615	0.1760	0.1017	0.0796	0.0527	0.0379
$H = 0.5$	Середнє	1.0543	1.0176	1.0015	1.0013	1.0031	1.0026
	Стд.відх.	0.1508	0.1121	0.0734	0.0532	0.0341	0.0277
$H = 0.7$	Середнє	1.0077	0.9858	0.9989	1.0070	1.0014	0.9992
	Стд.відх.	0.1321	0.1064	0.0820	0.0503	0.0368	0.0262
$H = 0.9$	Середнє	0.9562	0.9318	0.9669	0.9471	0.9751	0.9818
	Стд.відх.	0.4938	0.4088	0.4445	0.3148	0.2690	0.2536

Табл. 4.6. Середні та стандартні відхилення оцінки  $\tilde{\sigma}_N^2$  для  $t = 1, s = 2$ .

	$N$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
$H = 0.1$	Середнє	0.9868	1.0002	0.9985	1.0078	1.0136	1.0142
	Стд.відх.	0.1395	0.1030	0.0689	0.0499	0.0376	0.0273
$H = 0.3$	Середнє	1.0110	1.0099	1.0147	1.0038	1.0027	0.9999
	Стд.відх.	0.1270	0.0817	0.0662	0.0455	0.0329	0.0222
$H = 0.5$	Середнє	1.0042	0.9971	0.9917	0.9999	1.0022	1.0013
	Стд.відх.	0.1718	0.1112	0.0795	0.0606	0.0404	0.0295
$H = 0.7$	Середнє	0.9702	0.9545	0.9820	0.9984	0.9980	1.0005
	Стд.відх.	0.1870	0.1478	0.1179	0.0721	0.0575	0.0375
$H = 0.9$	Середнє	0.9381	0.9158	0.9587	0.9320	0.9655	0.9738
	Стд.відх.	0.5870	0.4877	0.5289	0.3756	0.3191	0.3005

Бачимо, що оцінки параметра  $H$  збігаються до дійсного значення для всіх випадків і вони демонструють однакову асимптотичну поведінку для різних значень  $H$ . Починаючи з  $N = 2^9$ , стандартне відхилення стає меншим за 0.05 для всіх значень  $H$ .

Також видно, що обидві оцінки параметра  $\sigma_N^2$  повільно збігаються порівняно з  $\hat{H}_N$ . Однак загалом отримано відносно непогані результати для всіх значень  $H$  окрім 0.1 і 0.9. Можна помітити, що у випадку  $H = 0.1$  оцінки  $\hat{\sigma}_N^2$  і  $\tilde{\sigma}_N^2$  демонструють дуже різну поведінку. Оцінка  $\hat{\sigma}_N^2$  працює досить погано для малих  $N$ ; вона стає резонною лише для  $N$  більших за  $2^{10}$ . В той самий час  $\tilde{\sigma}^2$  демонструє порівняно гарні результати для  $H = 0.1$ , більше того, вони суттєво кращі ніж у випадку  $H \geq \frac{1}{2}$ . Також обидві оцінки  $\sigma_N^2$  повільно збігаються для  $H = 0.9$  (ці значення відповідають випадку не гауссового асимптотичного розподілу). Це відповідає нашій теорії, оскільки в цьому випадку нормуючий множник в (4.9) рівний  $N^{2-2H}$  і він зростає відносно повільно для великих значень  $H$ . Спостерігаємо також, що для  $H \geq 0.5$  оцінка  $\hat{\sigma}_N^2$  (для невідомого  $H$ ) дещо переважає оцінку  $\tilde{\sigma}_N^2$  (для відомих  $H$ ).

Проте, всі наведені вище спостереження узгоджуються з теоретичними результатами. Для того, щоб це побачити, наведено графік теоретичного асимптотичного стандартного відхилення  $\hat{\sigma}_N^2$  та  $\tilde{\sigma}_N^2$ , див. рис. 4.1. Стандартне відхилення обчислено наближено, всі нескінченні суми було замінено на суми по  $-40 \leq k \leq 40$ . Зокрема тут видно, що стандартне відхилення  $\hat{\sigma}_N^2$  значно зростає, коли  $H$  наближається до 0 на відміну від  $\tilde{\sigma}_N^2$ .

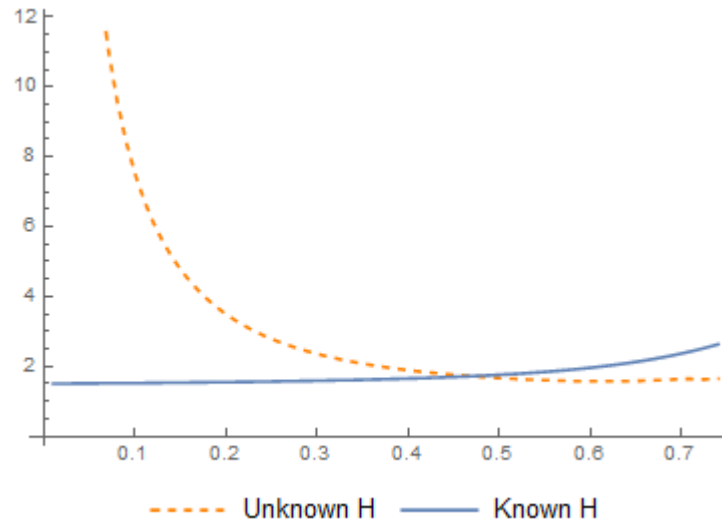


Рис. 4.1. Теоретичне асимптотичне стандартне відхилення оцінок  $\widehat{\sigma}_N^2$  (пунктирна лінія) та  $\widetilde{\sigma}_N^2$  (суцільна лінія) для  $H \in (0, \frac{3}{4})$ .

Далі, щоб дослідити залежність від  $t$  та  $s$ , всі обчислення були повторені для більш віддалених точок, а саме  $t = 0.25$  та  $s = 2$ . Результати наведено в таблицях [4.7](#) та [4.8](#). Завдяки наявності  $\log \frac{t}{s}$  в знаменнику асимптотичної дисперсії, можна очікувати кращих результатів у цій ситуації. Видно, що оцінка  $\widehat{H}_N$  дійсно працює трохи краще. Те саме стосується  $\widehat{\sigma}_N^2$  для малих значень  $H$ , проте, це не так для  $H = 0.7$  та  $H = 0.9$ .

Табл. 4.7. Середні та стандартні відхилення оцінки  $\widehat{H}_N$  для  $t = 0.25, s = 2$

$N$		$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
$H = 0.1$	Середнє	0.0828	0.0830	0.0893	0.0935	0.0929	0.0923
	Стд.відх.	0.0533	0.0448	0.0315	0.0177	0.0135	0.0097
$H = 0.3$	Середнє	0.2998	0.3103	0.3008	0.3035	0.3039	0.3012
	Стд.відх.	0.0660	0.0440	0.0349	0.0221	0.0181	0.0085
$H = 0.5$	Середнє	0.4962	0.4881	0.4990	0.4961	0.4984	0.4986
	Стд.відх.	0.0701	0.0450	0.0277	0.0206	0.0140	0.0104
$H = 0.7$	Середнє	0.7085	0.6953	0.6957	0.6985	0.6976	0.6970
	Стд.відх.	0.0533	0.0399	0.0307	0.0240	0.0169	0.0114
$H = 0.9$	Середнє	0.8720	0.8859	0.8893	0.8941	0.8939	0.8960
	Стд.відх.	0.0567	0.0406	0.0341	0.0313	0.0260	0.0242

Табл. 4.8. Середні та стандартні відхилення оцінки  $\widehat{\sigma}_N^2$  для  $t = 0.25, s = 2$ 

	$N$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
$H = 0.1$	Середнє	1.1138	1.1060	1.4208	1.1133	1.0947	1.0928
	Стд.відх.	5.2974	2.5661	1.3274	0.2052	0.1574	0.1074
$H = 0.3$	Середнє	1.0376	0.9900	1.0047	0.9974	1.0037	0.9999
	Стд.відх.	0.1955	0.1152	0.0867	0.0490	0.0439	0.0260
$H = 0.5$	Середнє	1.0199	1.0127	0.9988	0.9998	1.0011	1.0065
	Стд.відх.	0.1294	0.1135	0.0746	0.0506	0.0316	0.0244
$H = 0.7$	Середнє	1.0068	0.9806	0.9873	0.9932	0.9976	0.9990
	Стд.відх.	0.1775	0.1123	0.0845	0.0562	0.0382	0.0318
$H = 0.9$	Середнє	1.0472	1.0509	1.0453	1.0504	1.0213	1.0296
	Стд.відх.	0.5939	0.4824	0.4000	0.3744	0.2841	0.2933

### 4.3 Оцінювання параметрів у рівнянні теплопровідності зі змішаним дробовим шумом

Нехай для фіксованих точок  $t_1, \dots, t_n$  і фіксованого кроку  $\delta > 0$ , випадкове поле  $u$ , задане у (3.34), спостерігається в точках  $x_k = k\delta, k = 1, \dots, N$ . Таким чином, спостереження мають вигляд:

$$\{u(t_i, k\delta), i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, N\}.$$

Метою є оцінити невідомі параметри  $H, \sigma$  та  $\kappa$  рівняння (3.32).

Це буде зроблено в два кроки. Спочатку буде побудовано строго консистентну оцінку параметра  $H$ , яка не залежить від  $\kappa$  та  $\sigma$ , буде доведена її асимптотична нормальність. Далі, припускаючи, що параметр  $H$  відомо, буде побудовано оцінку параметрів  $\sigma$  і  $\kappa$ .

Припускаємо, що  $H \neq \frac{1}{2}$ , бо інакше модель є неідентифікованою. Параметри  $\sigma$  і  $\kappa$  вважаються додатними.

Зафіксуємо деяке  $\delta > 0$  і розглянемо наступну послідовність:

$$V_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(t, k\delta)^2, \quad t > 0, N \in \mathbb{N}. \quad (4.25)$$

Введемо позначення додатково до (3.37):

$$\mu(t) := \mathbb{E}V_N(t) = \mathbb{E}[u(t, 0)^2] = \sigma^2 v_t(H) + \kappa^2 v_t\left(\frac{1}{2}\right), \quad (4.26)$$

$$\rho_{ts}^H(k) = \text{Cov}(u(t, k\delta), u(s, 0)), \quad r_{ts}(H) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_{ts}^H(k)^2, \quad t, s > 0.$$

Наступна теорема описує асимптотичну поведінку стохастичного процесу  $V_N$ . Вона описує закон великих чисел та центральну граничну теорему для скінченновимірної розподілу  $(V_N(t_1), \dots, V_N(t_n))$  при  $N \rightarrow \infty$ . Дані результати є ключовими для побудови оцінок і дослідження їх асимптотичної нормальності.

**Теорема 4.6.** Нехай  $H \in (0, 1)$ .

1. Для будь-якого  $t > 0$ ,

$$V_N(t) \rightarrow \mu(t) \quad \text{м.н., при } N \rightarrow \infty. \quad (4.27)$$

2. Якщо додатково  $H \in (0, \frac{3}{4})$ , тоді для будь-яких  $n \geq 1$  і для будь-яких різних додатних точок  $t_1, \dots, t_n$ ,

$$\sqrt{N} \begin{pmatrix} V_N(t_1) - \mu(t_1) \\ \vdots \\ V_N(t_n) - \mu(t_n) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, R) \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (4.28)$$

де  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, R)$  є багатовимірним нормальним розподілом з нульовим середнім та коваріаційною матрицею

$$R = \left( r_{t_i t_j}(H) \right)_{i,j=1}^n.$$

*Доведення.* Із ергодичної теореми слідує, що для будь-якого  $t > 0$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(t, k\delta)^2 \rightarrow \mathbb{E}[u(t, 0)^2] \quad \text{м. н. при } N \rightarrow \infty,$$

що еквівалентно (4.27).

2. Для доведення збіжності (4.28) застосуємо теорему Крамера-Волда. Іншими словами потрібно показати, що для всіх  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , має місце збіжність

$$\sqrt{N} \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i (V_N(t_i) - \mu(t_i)) \right] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, s^2) \quad (4.29)$$

з асимптотичною дисперсією

$$s^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 r_{t_i t_i}(H) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j r_{t_i t_j}(H). \quad (4.30)$$

Представляючи  $V_N$  у вигляді суми (4.25) та використовуючи (4.26), перепишемо (4.29) в наступному вигляді

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n [\alpha_i (u(t_i, k\delta))^2 - \mathbb{E}u(t_i, k\delta)^2] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, s^2). \quad (4.31)$$

Далі, оскільки  $\begin{pmatrix} u(t_1, k\delta) \\ \vdots \\ u(t_n, k\delta) \end{pmatrix}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  є багатовимірною гауссовою стаціонарною послідовністю, збіжність (4.31) можна встановити шляхом застосування багатовимірної теореми Breuer–Major 2.7. Щоб перевірити умови цієї теореми, зауважимо, що функція  $F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2$  є ермітовою рангу 2, тому потрібно перевірити збіжність ряду:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_{t_i t_j}^H(k)^2 < \infty, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

З верхньої межі (3.38) одразу випливає, що цей степеневий ряд збігається тоді і тільки тоді, коли  $H \in (0, \frac{3}{4})$ . Тому припущення теореми 2.7 задовольняється, звідки випливає збіжність (4.31) з наступною асимптотичною дисперсією:

$$s^2 = \text{Var}\left(F(u(t_1, 0), \dots, u(t_n, 0))\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}\left(F(u(t_1, 0), \dots, u(t_n, 0)), F(u(t_1, k\delta), \dots, u(t_n, k\delta))\right).$$

Тепер потрібно лише перевірити, що асимптотична дисперсія  $s^2$  задовольняє (4.30). За означенням функції  $F$  маємо

$$\begin{aligned} s^2 &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u(t_i, 0)^2\right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u(t_i, 0)^2, \sum_{j=1}^n \alpha_j u(t_j, k\delta)^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \text{Var}(u(t_i, 0)^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(u(t_i, 0)^2, u(t_j, 0)^2) \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \text{Cov}(u(t_i, 0)^2, u(t_i, k\delta)^2) \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \left( \text{Cov}(u(t_i, 0)^2, u(t_j, k\delta)^2) + \text{Cov}(u(t_j, 0)^2, u(t_i, k\delta)^2) \right). \end{aligned}$$

Використаємо формулу Іссерліса для дисперсії та коваріації, див. приклад [2.3](#), одержимо

$$s^2 = 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \rho_{t_i t_i}^H(0)^2 + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \rho_{t_i t_j}^H(0)^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \rho_{t_i t_i}^H(k)^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \left( \rho_{t_i t_j}^H(k)^2 + \rho_{t_j t_i}^H(k)^2 \right).$$

Беручи до уваги рівність  $\rho_{ts}^H(k) = \rho_{st}^H(-k)$ , можемо переписати даний вираз в більш компактному вигляді:

$$s^2 = 2 \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_{t_i t_i}^H(k)^2 \right) + 4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \alpha_i \alpha_j \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_{t_i t_j}^H(k)^2 \right).$$

Тому рівність [\(4.30\)](#) перевірено. Це завершує доведення Теорема [4.6](#).  $\square$

### 4.3.1 Оцінювання параметра Хюрста $H$

Для оцінювання параметра  $H$  без відомостей про  $\sigma$  і  $\kappa$  достатньо спостерігати процес  $u(t_i, x_k)$  лише в трьох різних точках часу  $t_1 < t_2 < t_3$ . Якщо записати [\(4.27\)](#) в цих точках і замінити збіжність на рівність, то отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} V_N(t_1) = \sigma^2 c_H t_1^{H+1} + \kappa^2 c_{\frac{1}{2}} t_1^{3/2}, \\ V_N(t_2) = \sigma^2 c_H t_2^{H+1} + \kappa^2 c_{\frac{1}{2}} t_2^{3/2}, \\ V_N(t_3) = \sigma^2 c_H t_3^{H+1} + \kappa^2 c_{\frac{1}{2}} t_3^{3/2}, \end{cases} \quad (4.32)$$

де  $V_N(t)$  та  $c_H$  визначені формулами [\(4.25\)](#), [\(3.37\)](#) відповідно. Виключаючи невідомий параметр  $\kappa$  з системи, маємо

$$\begin{cases} t_2^{-3/2} V_N(t_2) - t_1^{-3/2} V_N(t_1) = \sigma^2 c_H \left( t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}} \right), \\ t_3^{-3/2} V_N(t_3) - t_2^{-3/2} V_N(t_2) = \sigma^2 c_H \left( t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right). \end{cases} \quad (4.33)$$

Після цього, виключаючи  $\sigma$ , отримуємо наступне оцінювальне рівняння для  $H$ :

$$\frac{t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}}}{t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}} = \frac{t_3^{-3/2} V_N(t_3) - t_2^{-3/2} V_N(t_2)}{t_2^{-3/2} V_N(t_2) - t_1^{-3/2} V_N(t_1)}. \quad (4.34)$$

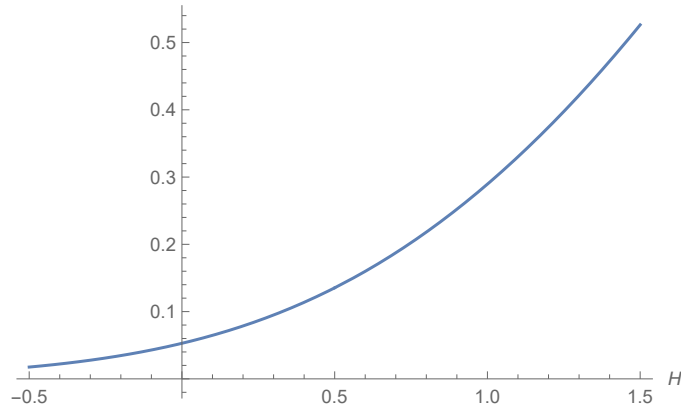


Рис. 4.2. Функція  $f(H)$  для  $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$ .

Розв'язок (4.34) (якщо він існує), може бути розглянуто як оцінку  $H$ .

Зазначимо, що ліва частина (4.34) є невизначеною для  $H = 1/2$ . Однак, досить просто показати, що за правилом Лопіталя існує границя

$$\lim_{H \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}}}{t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}} = \lim_{H \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{t_3^{H-\frac{1}{2}} \log t_3 - t_2^{H-\frac{1}{2}} \log t_2}{t_2^{H-\frac{1}{2}} \log t_2 - t_1^{H-\frac{1}{2}} \log t_1} = \frac{\log t_3 - \log t_2}{\log t_2 - \log t_1}.$$

Отже, можна до визначити за неперервністю

$$f(H) := \begin{cases} \frac{t_3^{H-1/2} - t_2^{H-1/2}}{t_2^{H-1/2} - t_1^{H-1/2}}, & \text{якщо } H \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{\log t_3 - \log t_2}{\log t_2 - \log t_1} & \text{якщо } H = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.35)$$

Тоді, оцінка  $H$  може бути визначено, як

$$\widehat{H}_N = f^{(-1)} \left( \frac{t_3^{-3/2} V_N(t_3) - t_2^{-3/2} V_N(t_2)}{t_2^{-3/2} V_N(t_2) - t_1^{-3/2} V_N(t_1)} \right), \quad (4.36)$$

де  $f^{(-1)}$  позначає обернену функцію  $f$ . Щоб довести існування цієї оцінки, потрібно довести, що  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  є взаємо однозначною функцією. Це дійсно так, оскільки  $f$  є строго зростаючою функцією (див рис. 4.2), як показано у наступній лемі.

**Лема 4.6.** Для будь-яких  $0 < t_1 < t_2 < t_3$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  визначена у (4.35) є строго зростаючою відносно  $H$ .

Доведення. Доведемо твердження для випадку  $H \in (\frac{1}{2}, \infty)$ . Інтервал  $(-\infty, \frac{1}{2})$  розглядається аналогічно. Похідна  $f$  відносно  $H$  дорівнює

$$f'(H) = \frac{\left(t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}\right) \left(t_3^{H-\frac{1}{2}} \log t_3 - t_2^{H-\frac{1}{2}} \log t_2\right)}{\left(t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}\right)^2} - \frac{\left(t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}}\right) \left(t_2^{H-\frac{1}{2}} \log t_2 - t_1^{H-\frac{1}{2}} \log t_1\right)}{\left(t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}\right)^2}. \quad (4.37)$$

Отже, достатньо довести нерівність

$$\begin{aligned} \left(t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}\right) \left(t_3^{H-\frac{1}{2}} \log t_3 - t_2^{H-\frac{1}{2}} \log t_2\right) \\ > \left(t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}}\right) \left(t_2^{H-\frac{1}{2}} \log t_2 - t_1^{H-\frac{1}{2}} \log t_1\right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Для доведення (4.38) зауважимо, що функція  $h(x) = x \log x$ ,  $x > 0$  є строго опуклою (дійсно, друга похідна  $h''(x) = 1/x > 0$ ). Це означає, що для будь-яких  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $x > 0$  і  $y > 0$ ,

$$\alpha h(x) + (1 - \alpha)h(y) > h(\alpha x + (1 - \alpha)y). \quad (4.39)$$

Покладемо

$$x = t_3^{H-\frac{1}{2}} > 0, \quad y = t_1^{H-\frac{1}{2}} > 0, \quad \text{та} \quad \alpha = \frac{t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}}{t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}} \in (0, 1).$$

Тоді

$$1 - \alpha = \frac{t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}}}{t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}}, \quad \alpha x + (1 - \alpha)y = t_2^{H-\frac{1}{2}},$$

і (4.39) перетвориться на

$$\begin{aligned} \frac{t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}}{t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}} (H - \frac{1}{2}) t_3^{H-\frac{1}{2}} \log t_3 + \frac{t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}}}{t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}} (H - \frac{1}{2}) t_1^{H-\frac{1}{2}} \log t_1 \\ > (H - \frac{1}{2}) t_2^{H-\frac{1}{2}} \log t_2, \end{aligned}$$

що еквівалентно (4.38). □

З наведеної вище леми випливає, що оцінка  $\widehat{H}_N$  коректно визначена хоча б для відносно великих  $N$  (коли права частина оцінювального рівняння (4.34) стає додатною). Асимптотичні властивості  $\widehat{H}_N$  наведено в наступній теоремі.

**Теорема 4.7.** 1. Для всіх  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $\widehat{H}_N$  є строго консистентною оцінкою параметра  $H$  при  $N \rightarrow \infty$ .

2. Для  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ , оцінка  $\widehat{H}_N$  є асимптотично нормальною:

$$\sqrt{N} \left( \widehat{H}_N - H \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \zeta^2) \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (4.40)$$

де

$$\zeta^2 = \frac{1}{D^2 \sigma^4 c_H^2} \sum_{i,j=1}^3 r_{t_i t_j}(H) L_i L_j,$$

$$L_1 = \frac{t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}}}{t_1^{3/2}}, \quad L_2 = \frac{t_1^{H-\frac{1}{2}} - t_3^{H-\frac{1}{2}}}{t_2^{3/2}}, \quad L_3 = \frac{t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}}{t_3^{3/2}},$$

$$D = \left( t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}} \right) \left( t_3^{H-\frac{1}{2}} \log t_3 - t_2^{H-\frac{1}{2}} \log t_2 \right) - \left( t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right) \left( t_2^{H-\frac{1}{2}} \log t_2 - t_1^{H-\frac{1}{2}} \log t_1 \right).$$

**Зауваження 4.3.** Нерівність (4.38) з доведення Леми 4.6 означає, що  $D > 0$  для всіх  $H \neq 1/2$ .

**Доведення.** 1. Строга консистентність випливає з побудови оцінки. Дійсно, (4.27) означає, що

$$\frac{t_3^{-3/2} V_N(t_3) - t_2^{-3/2} V_N(t_2)}{t_2^{-3/2} V_N(t_2) - t_1^{-3/2} V_N(t_1)} \rightarrow f(H) \quad \text{м. н., при } N \rightarrow \infty. \quad (4.41)$$

Тоді збіжність  $\widehat{H}_N \rightarrow H$  м. н. при  $N \rightarrow \infty$  випливає з (4.36) і (4.41) в силу неперервності  $f^{(-1)}$ .

2. Беручи математичне сподівання в рівностях (4.33), отримуємо такі співвідношення

$$t_2^{-3/2} \mu(t_2) - t_1^{-3/2} \mu(t_1) = \sigma^2 c_H \left( t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}} \right),$$

$$t_3^{-3/2} \mu(t_3) - t_2^{-3/2} \mu(t_2) = \sigma^2 c_H \left( t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right), \quad (4.42)$$

звідки

$$\frac{t_3^{-3/2} \mu(t_3) - t_2^{-3/2} \mu(t_2)}{t_2^{-3/2} \mu(t_2) - t_1^{-3/2} \mu(t_1)} = \frac{t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}}}{t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}} = f(H), \quad (4.43)$$

або

$$H = f^{(-1)} \left( \frac{t_3^{-3/2} \mu(t_3) - t_2^{-3/2} \mu(t_2)}{t_2^{-3/2} \mu(t_2) - t_1^{-3/2} \mu(t_1)} \right).$$

Тому,

$$\sqrt{N} \left( \widehat{H}_N - H \right) = \sqrt{N} \left( g(V_N(t_1), V_N(t_2), V_N(t_3)) - g(\mu(t_1), \mu(t_2), \mu(t_3)) \right),$$

де

$$g(x_1, x_2, x_3) = f^{(-1)} \left( \frac{t_3^{-3/2} x_3 - t_2^{-3/2} x_2}{t_2^{-3/2} x_2 - t_1^{-3/2} x_1} \right).$$

Для того, щоб встановити потрібну асимптотичну нормальність зі збіжності (4.28), застосуємо дельта-метод. Позначаючи

$$h(x) = \frac{d}{dx} f^{(-1)}(x) = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(x))}, \quad (4.44)$$

бачимо, що частинні похідні функції  $g$  дорівнюють

$$\begin{aligned} g'_1(x_1, x_2, x_3) &= h \left( \frac{t_3^{-3/2} x_3 - t_2^{-3/2} x_2}{t_2^{-3/2} x_2 - t_1^{-3/2} x_1} \right) \cdot \frac{t_1^{-3/2} \left( t_3^{-3/2} x_3 - t_2^{-3/2} x_2 \right)}{\left( t_2^{-3/2} x_2 - t_1^{-3/2} x_1 \right)^2}, \\ g'_2(x_1, x_2, x_3) &= -h \left( \frac{t_3^{-3/2} x_3 - t_2^{-3/2} x_2}{t_2^{-3/2} x_2 - t_1^{-3/2} x_1} \right) \cdot \frac{t_2^{-3/2} \left( t_3^{-3/2} x_3 - t_1^{-3/2} x_1 \right)}{\left( t_2^{-3/2} x_2 - t_1^{-3/2} x_1 \right)^2}, \\ g'_3(x_1, x_2, x_3) &= h \left( \frac{t_3^{-3/2} x_3 - t_2^{-3/2} x_2}{t_2^{-3/2} x_2 - t_1^{-3/2} x_1} \right) \cdot \frac{t_3^{-3/2}}{t_2^{-3/2} x_2 - t_1^{-3/2} x_1}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Згідно дельта-методу з (4.28) впливає збіжність (4.40) з

$$\zeta^2 = \sum_{i,j=1}^3 r_{t_i t_j}(H) g'_i g'_j(\mu(t_1), \mu(t_2), \mu(t_3)).$$

Залишається довести, що  $g'_i(\mu(t_1), \mu(t_2), \mu(t_3)) = L_i / (D \sigma^2 c_H)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Розглянемо в деталях доведення даної рівності для  $i = 1$ , випадки  $i = 2$  та  $i = 3$  розглядаються аналогічно. Використовуючи послідовно (4.43), (4.44) і (4.37), отримуємо

$$h \left( \frac{t_3^{-3/2} x_3 - t_2^{-3/2} x_2}{t_2^{-3/2} x_2 - t_1^{-3/2} x_1} \right) \Bigg|_{x_i = \mu(t_i)} = h(f(H)) = \frac{1}{f'(H)} = \frac{\left( t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}} \right)^2}{D}.$$

Далі, підставляючи цей вираз в (4.45) і враховуючи співвідношення (4.42), маємо

$$\begin{aligned} g'_1(\mu(t_1), \mu(t_2), \mu(t_3)) &= \frac{\left(t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}\right)^2}{D} \cdot \frac{t_1^{-3/2} \left(t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma^2 c_H \left(t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}\right)^2} \\ &= \frac{t_1^{-3/2} \left(t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}}\right)}{D \sigma^2 c_H} = \frac{L_1}{D \sigma^2 c_H}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що наведене вище представлення виділяє  $g'_1(x_1, x_2, x_3) \neq 0$  в околі точок  $(\mu(t_1), \mu(t_2), \mu(t_3))$ , що є необхідною умовою для застосування дельта-методу. Похідні  $g'_2$  та  $g'_3$  розглядаються аналогічно.  $\square$

Оцінка  $H$  була отримана як розв'язок деякого експоненційного рівняння. Проте, мати явний вигляд оцінки буде зручніше для застосування та моделювання. Виявляється, що для деяких окремих випадків можливо розв'язати оцінювальне рівняння в явному вигляді. Розглянемо такі приклади детальніше.

Припустимо, що  $t_1 = h > 0$ ,  $t_2 = 2h$ ,  $t_3 = 4h$ . Підставляючи ці значення в означення  $f$ , отримаємо

$$f(H) = \frac{t_3^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}}}{t_2^{H-\frac{1}{2}} - t_1^{H-\frac{1}{2}}} = \frac{4^{H-\frac{1}{2}} h^{H-\frac{1}{2}} - 2^{H-\frac{1}{2}} h^{H-\frac{1}{2}}}{2^{H-\frac{1}{2}} h^{H-\frac{1}{2}} - h^{H-\frac{1}{2}}} = 2^{H-\frac{1}{2}}.$$

Тому  $f^{(-1)}(x) = \frac{1}{2} + \log_2 x$ ,  $x > 0$ , отже (4.36) матиме вигляд<sup>1</sup>

$$\widehat{H}_N = \frac{1}{2} + \log_2^+ \frac{t_3^{-3/2} V_N(t_3) - t_2^{-3/2} V_N(t_2)}{t_2^{-3/2} V_N(t_2) - t_1^{-3/2} V_N(t_1)}. \quad (4.46)$$

В такому випадку

$$L_1 = \frac{4^{H-\frac{1}{2}} - 2^{H-\frac{1}{2}}}{h^{2-H}}, \quad L_2 = -\frac{4^{H-\frac{1}{2}} - 1}{2^{\frac{3}{2}} h^{2-H}}, \quad L_3 = \frac{2^{H-\frac{1}{2}} - 1}{8 h^{2-H}},$$

та

$$\begin{aligned} D &= h^{2H-1} \left(2^{H-\frac{1}{2}} - 1\right) \left(4^{H-\frac{1}{2}} \log(4h) - 2^{H-\frac{1}{2}} \log(2h)\right) \\ &\quad - h^{2H-1} \left(4^{H-\frac{1}{2}} - 2^{H-\frac{1}{2}}\right) \left(2^{H-\frac{1}{2}} \log(2h) - \log h\right) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Використовується  $\log_2^+$ , а не  $\log_2$  щоб права частина (4.46) була завжди коректно визначеною. Функція  $\log_2^+ x$  визначено як  $\log_2 x$  якщо  $x > 0$  і 0 якщо  $x \leq 0$ . Зауважимо, що вираз під  $\log_2^+$  в (4.46) зрештою стає додатним, оскільки збігається до  $2^{H-1/2}$ .

$$\begin{aligned}
&= h^{2H-1} \left( 4^{H-\frac{1}{2}} - 2^{H-\frac{1}{2}} \right) \left( 2^{H-\frac{1}{2}} \log(4h) - \log(2h) - 2^{H-\frac{1}{2}} \log(2h) + \log h \right) \\
&= h^{2H-1} 2^{H-\frac{1}{2}} \left( 2^{H-\frac{1}{2}} - 1 \right) \left( 2^{H-\frac{1}{2}} \log 2 - \log 2 \right) \\
&= h^{2H-1} 2^{H-\frac{1}{2}} \left( 2^{H-\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \log 2.
\end{aligned}$$

Позначаючи  $\ell_i = D^{-1} L_i h^{1+H} \log 2$ , отримуємо наступний результат.

**Наслідок 4.1.** Нехай  $t_1 = h > 0$ ,  $t_2 = 2h$ ,  $t_3 = 4h$ . Тоді оцінка  $\widehat{H}_N$  може бути записана в явному вигляді (4.46). В цьому випадку теорема 4.7 виконується з

$$\zeta^2 = \frac{1}{\sigma^4 c_H^2 h^{2+2H} (\log 2)^2} \sum_{i,j=1}^3 r_{t_i t_j}(H) \ell_i \ell_j,$$

$$\text{де } \ell_1 = \frac{1}{2^{H-\frac{1}{2}-1}}, \ell_2 = -\frac{2^{H-\frac{1}{2}+1}}{2^{H+1}(2^{H-\frac{1}{2}-1})}, \ell_3 = \frac{1}{2^{H+\frac{5}{2}}(2^{H-\frac{1}{2}-1})}.$$

*Зауваження 4.4.* Очевидно явний вигляд оцінки можна отримати і для більш загального випадку, коли  $t_1 = h$ ,  $t_2 = ah$ ,  $t_3 = a^2 h$  з деяким  $a > 0$ . Тоді буде мати місце оцінка форми (4.46) з  $\log_a^+$  замість  $\log_2^+$ .

### 4.3.2 Оцінювання параметрів $\sigma$ та $\kappa$

Тепер припустимо, що індекс Хюрста  $H$  відомий і побудуємо оцінки коефіцієнтів  $\sigma$  і  $\kappa$ . З перших двох рівнянь системи (4.32) можна отримати наступні оцінки:

$$\widehat{\sigma}_N^2 = \frac{t_1^{-3/2} V_N(t_1) - t_2^{-3/2} V_N(t_2)}{c_H \left( t_1^{H-1/2} - t_2^{H-1/2} \right)}, \quad \widehat{\kappa}_N^2 = \frac{t_1^{-1-H} V_N(t_1) - t_2^{-1-H} V_N(t_2)}{c_{\frac{1}{2}} \left( t_1^{1/2-H} - t_2^{1/2-H} \right)}. \quad (4.47)$$

**Теорема 4.8.** 1. Для будь-якого  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $(\widehat{\sigma}_N^2, \widehat{\kappa}_N^2) \in$  строго консистентною оцінкою параметра  $(\sigma^2, \kappa^2)$  при  $N \rightarrow \infty$ .

2. Для  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ , оцінка  $(\widehat{\sigma}_N^2, \widehat{\kappa}_N^2) \in$  асимптотично нормальною:

$$\sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 \\ \widehat{\kappa}_N^2 - \kappa^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \quad (4.48)$$

де асимптотична коваріаційна матриця  $\Sigma$  складається з наступних елементів:

$$\Sigma_{11} = \frac{t_1^{-3} (r_{t_1 t_1}(H) + r_{t_1 t_2}(H)) + t_2^{-3} (r_{t_1 t_2}(H) + r_{t_2 t_2}(H))}{c_H^2 \left( t_1^{2H-1} - 2(t_1 t_2)^{H-\frac{1}{2}} + t_2^{2H-1} \right)},$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{12} = \Sigma_{21} &= \frac{t_1^{-\frac{5}{2}-H}(r_{t_1 t_1}(H) + r_{t_1 t_2}(H)) + t_2^{-\frac{5}{2}-H}(r_{t_1 t_2}(H) + r_{t_2 t_2}(H))}{c_H c_{\frac{1}{2}} \left( 2 - t_1^{H-\frac{1}{2}} t_2^{\frac{1}{2}-H} - t_1^{\frac{1}{2}-H} t_2^{H-\frac{1}{2}} \right)}, \\ \Sigma_{22} &= \frac{t_1^{-2-H}(r_{t_1 t_1}(H) + r_{t_1 t_2}(H)) + t_2^{-2-H}(r_{t_1 t_2}(H) + r_{t_2 t_2}(H))}{c_{\frac{1}{2}}^2 \left( t_1^{1-2H} - 2(t_1 t_2)^{\frac{1}{2}-H} + t_2^{1-2H} \right)}.\end{aligned}$$

Доведення. Використовуючи означення (4.47) оцінки  $\widehat{\sigma}_N^2$ , можна переписати помилку  $\widehat{\sigma}_N^2 - \sigma^2$  у вигляді

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 &= \frac{t_1^{-3/2} \widehat{V}_N(t_1) - t_2^{-3/2} \widehat{V}_N(t_2) - \sigma^2 c_H t_1^{H-\frac{1}{2}} + \sigma^2 c_H t_2^{H-\frac{1}{2}}}{c_H \left( t_1^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right)} \\ &= \frac{1}{c_H \left( t_1^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right)} \left( t_1^{-3/2} \left( \widehat{V}_N(t_1) - \sigma^2 c_H t_1^{H+1} - \kappa^2 c_{\frac{1}{2}} t_1^{3/2} \right) \right. \\ &\quad \left. - t_2^{-3/2} \left( \widehat{V}_N(t_2) - \sigma^2 c_H t_2^{H+1} - \kappa^2 c_{\frac{1}{2}} t_2^{3/2} \right) \right) \\ &= \frac{t_1^{-3/2} \left( \widehat{V}_N(t_1) - \mu(t_1) \right) - t_2^{-3/2} \left( \widehat{V}_N(t_2) - \mu(t_2) \right)}{c_H \left( t_1^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right)},\end{aligned}$$

де остання рівність випливає з (4.26). Аналогічно можна розписати  $\widehat{\kappa}_N^2 - \kappa^2$ :

$$\widehat{\kappa}_N^2 - \kappa^2 = \frac{t_1^{-1-H} \left( \widehat{V}_N(t_1) - \mu(t_1) \right) - t_2^{-1-H} \left( \widehat{V}_N(t_2) - \mu(t_2) \right)}{c_{\frac{1}{2}} \left( t_1^{\frac{1}{2}-H} - t_2^{\frac{1}{2}-H} \right)}.$$

Отже, бачимо, що випадковий вектор у лівій частині (4.48) є лінійним перетворенням лівої частини (4.28) (для  $n = 2$ ), а саме

$$\begin{aligned}&\sqrt{N} \begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_N^2 - \sigma^2 \\ \widehat{\kappa}_N^2 - \kappa^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{t_1^{-3/2}}{c_H \left( t_1^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right)} & -\frac{t_2^{-3/2}}{c_H \left( t_1^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right)} \\ \frac{t_1^{-1-H}}{c_{\frac{1}{2}} \left( t_1^{\frac{1}{2}-H} - t_2^{\frac{1}{2}-H} \right)} & -\frac{t_2^{-1-H}}{c_{\frac{1}{2}} \left( t_1^{\frac{1}{2}-H} - t_2^{\frac{1}{2}-H} \right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{N} \left( \widehat{V}_N(t_1) - \mu(t_1) \right) \\ \sqrt{N} \left( \widehat{V}_N(t_2) - \mu(t_2) \right) \end{pmatrix} \quad (4.49)\end{aligned}$$

Тому, з урахуванням збіжності (4.28), можна зробити висновок, що (4.49) слабо збігається за розподілом до двовимірного нормального розподілу з наступною коваріаційною матрицею:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{t_1^{-3/2}}{c_H \left( t_1^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right)} & -\frac{t_2^{-3/2}}{c_H \left( t_1^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right)} \\ \frac{t_1^{-1-H}}{c_{\frac{1}{2}} \left( t_1^{\frac{1}{2}-H} - t_2^{\frac{1}{2}-H} \right)} & -\frac{t_2^{-1-H}}{c_{\frac{1}{2}} \left( t_1^{\frac{1}{2}-H} - t_2^{\frac{1}{2}-H} \right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{t_1 t_1}(H) & r_{t_1 t_2}(H) \\ r_{t_1 t_2}(H) & r_{t_2 t_2}(H) \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} \frac{t_1^{-3/2}}{c_H \left( t_1^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right)} & \frac{t_1^{-1-H}}{c_{\frac{1}{2}} \left( t_1^{\frac{1}{2}-H} - t_2^{\frac{1}{2}-H} \right)} \\ -\frac{t_2^{-3/2}}{c_H \left( t_1^{H-\frac{1}{2}} - t_2^{H-\frac{1}{2}} \right)} & -\frac{t_2^{-1-H}}{c_{\frac{1}{2}} \left( t_1^{\frac{1}{2}-H} - t_2^{\frac{1}{2}-H} \right)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, теорему доведено.  $\square$

### 4.3.3 Оцінка максимальної вірогідності та інформація Фішера

В цьому пункті аналізується ефективність оцінки  $(\widehat{\sigma}_N^2, \widehat{\kappa}_N^2)$  порівняно з оцінкою максимальної вірогідності (ОМВ). Зауважимо, що ОМВ складно обчислити, проте, можливо знайти відповідну інформаційну матрицю Фішера. Для побудови ОМВ використовуються такі ж спостереження, як в попередньому пункті, а саме вектор спостережень буде

$$\mathbf{X}_N = (u(t_1, \delta), u(t_1, 2\delta), \dots, u(t_1, N\delta), u(t_2, \delta), u(t_2, 2\delta), \dots, u(t_2, N\delta))^\top.$$

Очевидно,  $\mathbf{X}_N$  має  $2N$ -вимірний гауссів розподіл зі щільністю

$$f(\mathbf{X}_N, \theta) = (2\pi)^{-N} (\det \Gamma_N)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{X}_N^\top \Gamma^{-1} \mathbf{X}_N \right\},$$

де  $\Gamma_N$  – коваріаційна матриця  $\mathbf{X}_N$ , тобто,

$$\Gamma_N = \begin{pmatrix} \rho_{t_1 t_1}^H(0) & \cdots & \rho_{t_1 t_1}^H(N-1) & \rho_{t_2 t_1}^H(0) & \cdots & \rho_{t_2 t_1}^H(N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{t_1 t_1}^H(N-1) & \cdots & \rho_{t_1 t_1}^H(0) & \rho_{t_2 t_1}^H(N-1) & \cdots & \rho_{t_2 t_1}^H(0) \\ \rho_{t_2 t_1}^H(0) & \cdots & \rho_{t_2 t_1}^H(N-1) & \rho_{t_2 t_2}^H(0) & \cdots & \rho_{t_2 t_2}^H(N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{t_2 t_1}^H(N-1) & \cdots & \rho_{t_2 t_1}^H(0) & \rho_{t_2 t_2}^H(N-1) & \cdots & \rho_{t_2 t_2}^H(0) \end{pmatrix}.$$

В силу (3.40), ця матриця може бути розписана як  $\Gamma_N = \sigma^2 \Gamma_N^b + \kappa^2 \Gamma_N^w$ , де  $\Gamma_N^b$  та  $\Gamma_N^w$  є коваріаційними матрицями

$$(u_b(t_1, \delta), u_b(t_1, 2\delta), \dots, u_b(t_1, N\delta), u_b(t_2, \delta), u_b(t_2, 2\delta), \dots, u_b(t_2, N\delta))^\top$$

та

$$(u_w(t_1, \delta), u_w(t_1, 2\delta), \dots, u_w(t_1, N\delta), u_w(t_2, \delta), u_w(t_2, 2\delta), \dots, u_w(t_2, N\delta))^T$$

відповідно. Логарифмічна функція вірогідності має вигляд

$$\ell(\mathbf{X}_N, \theta) = -N \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\det \Gamma_N) - \frac{1}{2} \mathbf{X}_N^T \Gamma_N^{-1} \mathbf{X}_N.$$

Тоді ОМВ  $\theta = (\sigma^2, \kappa^2)$  може бути отримано як розв'язок наступної системи рівнянь:

$$\frac{\partial \ell(\mathbf{X}_N, \theta)}{\partial \sigma^2} = -\frac{1}{2} \text{tr}(\Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b) + \frac{1}{2} \mathbf{X}_N^T \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \Gamma_N^{-1} \mathbf{X}_N = 0, \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial \ell(\mathbf{X}_N, \theta)}{\partial \kappa^2} = -\frac{1}{2} \text{tr}(\Gamma_N^{-1} \Gamma_N^w) + \frac{1}{2} \mathbf{X}_N^T \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^w \Gamma_N^{-1} \mathbf{X}_N = 0 \quad (4.51)$$

(тут і далі використовуємо диференціальні формули матриці відносно заданого параметра<sup>2</sup>, див. [84] для детального опису).

Оцінку максимальної вірогідності  $\hat{\theta}_N^{mle}$  параметра  $\theta$  навряд чи можна записати в явному вигляді, оскільки оцінювальні рівняння містять обернену матрицю  $\Gamma_N^{-1}$ , які нелінійно залежать від  $\sigma^2$  і  $\kappa^2$ . Проте, використовуючи загальну теорію оцінок максимальної вірогідності для залежних спостережень [32], можливо обчислити асимптотичну нормальність в наступній формі

$$(T_N(\theta))^{1/2} \left( \hat{\theta}_N^{mle} - \theta \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, I_2) \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (4.52)$$

де  $T_N(\theta)$  – інформаційна матриця Фішера і  $I_2$  є одиничною матрицею розмірності  $2 \times 2$ . Строге доведення (4.52), так само, як і детальний аналіз асимптотичної поведінки  $T_N(\theta)$ , потребує додаткових досліджень. Наскільки нам відомо, навіть для набагато простішої моделі змішаного броунівського шуму ця проблема поки що не повністю розв'язана, див. нову статтю [41] для деталей. Таким чином, тут обмежуємося ідентифікацією матриці  $T_N(\theta)$ .

**Лема 4.7.** Інформаційна матриця Фішера  $T_N(\theta)$  записується у формі:

$$T_N(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \text{tr} \left( (\Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b)^2 \right) & \frac{1}{2} \text{tr} \left( (\Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b) (\Gamma_N^{-1} \Gamma_N^w) \right) \\ \frac{1}{2} \text{tr} \left( (\Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b) (\Gamma_N^{-1} \Gamma_N^w) \right) & \frac{1}{2} \text{tr} \left( (\Gamma_N^{-1} \Gamma_N^w)^2 \right) \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup>Для квадратичних матриць  $X$  і  $Y$ ,  $\partial(XY) = (\partial X)Y + X(\partial Y)$ ,  $\partial(X^{-1}) = -X^{-1}(\partial X)X^{-1}$ ,  $\partial(\log(\det X)) = \text{tr}(X^{-1}\partial X)$ ,  $\partial(\text{tr}(X)) = \text{tr}(\partial X)$ .

*Доведення.* Для того, щоб ідентифікувати  $T_N(\theta)$ , обчислимо другі похідні. Зауважимо, що

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \Gamma_N^{-1} \right) \Gamma_N^b = \left( -\Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \Gamma_N^{-1} \right) \Gamma_N^b = - \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \right)^2, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \Gamma_N^{-1} \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \right) \Gamma_N^{-1} + \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \left( \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \Gamma_N^{-1} \right) \\ &= - \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \right)^2 \Gamma_N^{-1} - \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \Gamma_N^{-1} \right) \\ &= -2 \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \right)^2 \Gamma_N^{-1}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 \ell(\mathbf{X}_N, \theta)}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \right)^2 \right) - \mathbf{X}_N^\top \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \right)^2 \Gamma_N^{-1} \mathbf{X}_N.$$

Беручи математичне сподівання, отримуємо відповідний елемент інформаційної матриці Фішера:

$$\begin{aligned}-\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ell(\mathbf{X}_N, \theta)}{\partial (\sigma^2)^2} \right] &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \right)^2 \right) + \mathbb{E} \left[ \mathbf{X}_N^\top \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \right)^2 \Gamma_N^{-1} \mathbf{X}_N \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \right)^2 \right),\end{aligned}$$

після чого для будь-якої матриці  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,2N}$  отримуємо рівність  $\mathbb{E} \left[ \mathbf{X}_N^\top A \mathbf{X}_N \right] = \sum_{i,j} a_{ij} \mathbb{E} \left[ X_i X_j \right] = \operatorname{tr} (A \Gamma_N)$ . Міркуючи аналогічно, можна записати похідні

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ell(\mathbf{X}_N, \theta)}{\partial (\kappa^2)^2} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^w \right)^2 \right) - \mathbf{X}_N^\top \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^w \right)^2 \Gamma_N^{-1} \mathbf{X}_N \\ \frac{\partial^2 \ell(\mathbf{X}_N, \theta)}{\partial \sigma^2 \partial \kappa^2} &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^w \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{X}_N^\top \Gamma_N^{-1} \left( \Gamma_N^b \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^w + \Gamma_N^w \Gamma_N^{-1} \Gamma_N^b \right) \Gamma_N^{-1} \mathbf{X}_N,\end{aligned}$$

і обчислити їх математичне сподівання та знайти інші елементи матриці  $T_N(\theta)$ .  $\square$

*Зауваження 4.5.* 1. Аналогічно до попереднього пункту у випадку  $H = \frac{1}{2}$  неможливо оцінити обидва параметри  $\sigma^2$  і  $\kappa^2$  одночасно. Можливо оцінити лише суму  $\sigma^2 + \kappa^2$ . В цьому випадку  $\Gamma_N^b = \Gamma_N^w$ , тому оцінюючі рівняння (4.50) та (4.51) збігаються.

2. Результати даного пункту є дійсними для будь-яких інших спостережень вектора форми  $X = (u(t_i, x_k), i = 1 \dots, M, k = 1, \dots, N)$  і коваріаційною матрицею  $\Gamma$  (з розкладом  $\Gamma = \sigma^2 \Gamma^b + \kappa^2 \Gamma^w$ ).

3. Аналогічний підхід може бути застосовано для випадку невідомого  $H$ , тобто до проблеми одночасного оцінювання всіх трьох невідомих параметрів  $\sigma^2$ ,  $\kappa^2$  та  $H$ .

#### 4.3.4 Моделювання

Проілюструємо теоретичні властивості оцінок деякими чисельними результатами. Розглянемо модель з коефіцієнтами  $\sigma = \kappa = 1$  для різних значень  $H$ . Для кожного значення індекса Хюрста  $H$  генеруємо 50 траєкторій розв'язку  $u(t, x)$  рівняння (3.32). Траєкторії розв'язку згенеровані за допомогою дискретизації формули (3.34).

Табл. 4.9. Середні та стандартні відхилення оцінки  $\hat{H}_N$ .

	$N$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
$H = 0.1$	Середнє	-0.0121	-0.0299	0.0353	0.0527	0.0682
	Стд. відх.	0.5237	0.5552	0.2061	0.1242	0.0752
$H = 0.2$	Середнє	0.1616	0.1415	0.1910	0.1961	0.1799
	Стд. відх.	0.3419	0.2243	0.1540	0.0897	0.0692
$H = 0.3$	Середнє	0.1543	0.2845	0.2685	0.2955	0.2999
	Стд. відх.	0.4451	0.4177	0.1930	0.1314	0.0781
$H = 0.4$	Середнє	0.2254	0.2725	0.3129	0.2854	0.3313
	Стд. відх.	0.8089	0.8803	0.4661	0.1608	0.1299
$H = 0.6$	Середнє	0.4563	0.3495	0.5266	0.5618	0.5775
	Стд. відх.	0.7108	0.9010	0.2926	0.1992	0.1108
$H = 0.7$	Середнє	0.6384	0.7024	0.7160	0.7151	0.6980
	Стд. відх.	0.3391	0.1512	0.1065	0.0848	0.0511
$H = 0.8$	Середнє	0.8160	0.8042	0.8073	0.8022	0.8074
	Стд. відх.	0.1929	0.0922	0.0644	0.0467	0.0333
$H = 0.9$	Середнє	0.8583	0.8722	0.8815	0.8939	0.8958
	Стд. відх.	0.1216	0.0772	0.0671	0.0474	0.0334

Вибрано  $t_1 = 0.25$ ,  $t_2 = 0.5$ ,  $t_3 = 1$  в якості моментів спостережень, щоб задовольнялися умови Наслідку 4.1 і оцінка  $H$  могла бути обчислена, використовуючи явну формулу (4.46). Для кожного  $t_i$  спостерігається  $u(t_i, k\delta)$ ,  $k = 1, \dots, N$  з кроком  $\delta = 1$ .

Таблиця 4.9 містить значення середніх та стандартного відхилення  $\hat{H}_N$  для різних  $H$  та  $N$ . Видно, що оцінки збігаються до дійсних значень параметра  $H$ . Проте, збіжність набагато повільніша порівняно з оцінкою  $H$  у випадку лише дробового броунівського руху (тобто у випадку  $\kappa = 0$ ), який було розглянуто у підрозділі 4.2. Результати погіршуються, коли  $H$  наближається до  $1/2$  або, коли  $H$  близький до нуля. Варто помітити, що найкращі результати для  $\hat{H}_N$  спостерігаються при великих значеннях  $H$  (0.8 та 0.9), для яких немає асимптотичної нормальності.

Середні та стандартні відхилення оцінок  $\hat{\sigma}_N^2$  та  $\hat{\kappa}_N^2$  наведені в таблицях 4.10–4.11. З них чітко видно, що оцінки збігаються до дійсних значень параметрів, проте, результати обох оцінок погіршуються, коли значення  $H$  близькі до  $1/2$ . Спостерігаємо, що, навідміну від  $\hat{H}_N$ , оцінка  $\hat{\sigma}^2$  повільно збігається для  $H = 0.9$ , показуючи кращі результати для малих  $H$ . Зауважимо, що результати є аналогічними до випадку дробового броунівського руху, що були розглянуті у підрозділі 4.2.

Табл. 4.10. Середні та стандартні відхилення оцінки  $\hat{\sigma}_N^2$  для  $\sigma = 1$ ,  $\kappa = 1$ .

	$N$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
$H = 0.1$	Середнє	1.0084	1.0511	1.0571	1.0405	1.0440
	Стд. відх.	0.3971	0.2933	0.1829	0.1355	0.0909
$H = 0.2$	Середнє	1.0963	1.0478	1.0407	1.0183	1.0170
	Стд. відх.	0.3742	0.2370	0.1888	0.1261	0.1014
$H = 0.3$	Середнє	1.0107	1.0437	0.9616	0.9939	1.0032
	Стд. відх.	0.4530	0.3618	0.2454	0.1673	0.1216
$H = 0.4$	Середнє	0.8117	1.0042	1.0566	1.0964	1.0660
	Стд. відх.	0.9423	0.7003	0.4789	0.3048	0.2167
$H = 0.6$	Середнє	1.0905	1.1579	1.0793	1.0667	1.0673
	Стд. відх.	0.6755	0.5750	0.3875	0.2967	0.2154
$H = 0.7$	Середнє	0.9536	1.0545	1.0653	1.0106	0.9889
	Стд. відх.	0.4650	0.3498	0.2526	0.1649	0.1202
$H = 0.8$	Середнє	1.0171	1.0216	1.0287	1.0252	1.0095
	Стд. відх.	0.4619	0.2805	0.2465	0.1720	0.1368
$H = 0.9$	Середнє	1.1814	1.1236	1.0738	1.0391	1.0308
	Стд. відх.	0.8814	0.7882	0.6851	0.4922	0.3681

Табл. 4.11. Середні та стандартні відхилення оцінки  $\widehat{\kappa}_N^2$  для  $\sigma = 1, \kappa = 1$ .

	$N$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
$H = 0.1$	Середнє	1.0472	1.0133	1.0005	0.9953	0.9886
	Стд. відх.	0.1664	0.1483	0.0963	0.0606	0.0442
$H = 0.2$	Середнє	0.9608	0.9720	0.9732	0.9876	0.9859
	Стд. відх.	0.2430	0.1712	0.1338	0.0834	0.0720
$H = 0.3$	Середнє	0.9899	0.9638	1.0355	1.0075	1.0032
	Стд. відх.	0.4197	0.3056	0.2059	0.1472	0.1017
$H = 0.4$	Середнє	1.2052	1.0076	0.9417	0.9092	0.9365
	Стд. відх.	0.8747	0.6671	0.4480	0.2988	0.2188
$H = 0.6$	Середнє	0.8934	0.8285	0.9070	0.9258	0.9279
	Стд. відх.	0.6869	0.5600	0.3733	0.2869	0.2137
$H = 0.7$	Середнє	1.0483	0.9526	0.9519	0.9863	1.0040
	Стд. відх.	0.4351	0.3250	0.2228	0.1448	0.1078
$H = 0.8$	Середнє	0.9996	0.9938	0.9905	0.9848	0.9974
	Стд. відх.	0.3113	0.1941	0.1429	0.1031	0.0795
$H = 0.9$	Середнє	1.0017	0.9877	0.9767	0.9870	0.9945
	Стд. відх.	0.2985	0.2311	0.2072	0.1480	0.1084

## 4.4 Висновки

У четвертому розділі розглянуто задачу оцінювання параметрів стохастичних диференціальних рівнянь теплопровідності з різними видами шуму.

Побудовано оцінку параметра дифузії стохастичного диференціального рівняння теплопровідності у просторі  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$ , доведено строгу консистентність та асимптотичну нормальність отриманої оцінки.

На основі властивостей розв'язку стохастичного рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом, а саме стаціонарності та ергодичності процесу, використовуючи ергодичну теорему, отримано оцінку параметра дифузії при відомому параметрі Хюрста. Доведено строгу консистентність та асимптотичну нормальність побудованої оцінки. Також розглянуто задачу спільного оцінювання параметра дифузії та параметра Хюрста, наведено строгу консистентну та асимптотично нормальну оцінку. Проведено чисельне моделювання отриманих оцінок, результати якого показують, що оцінки збігаються до дійсних значень параметрів, що підтверджує теоретичні результати.

Розглянуто задачу оцінювання невідомих параметрів у стохастичному рівнянні теплопровідності зі змішаним дробовим броунівським шумом. Спочатку

було побудовано строго консистентну та асимптотично нормальну оцінку параметра Хюрста, яка не залежить від інших параметрів рівняння. Далі було отримано спільну оцінку параметрів при вінерівському процесі та дробовому броунівському шумі, вважаючи параметр Хюрста відомим. Доведено строго консистентність та асимптотичну нормальність одержаної оцінки. Проведно моделювання запропонованих у роботі оцінок параметрів стохастичного диференціального рівняння теплопровідності зі змішаним шумом. Отримані чисельні результати показали, що оцінки збігаються до дійсних значень параметрів, що підтверджує теоретичні результати.

## Висновки

У дисертаційній роботі одержано наступні результати.

1. Розглянуто стохастичне диференціальне рівняння теплопровідності з білим шумом. Доведено стаціонарність та ергодичність випадкового поля, що є розв'язком даного рівняння. Окрім того, було обчислено дисперсію та коваріацію цього випадкового поля.
2. Побудовано оцінку параметра дифузії  $\sigma$  стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з білим шумом використовуючи ергодичну теорему. Доведено строгу консистентність та асимптотичну нормальність отриманої оцінки.
3. Досліджено стохастичне диференціальне рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом та властивості його розв'язку. Доведено, що випадковий процес, який є розв'язком заданого рівняння теплопровідності, є стаціонарним та ергодичним. Більш того, обчислено дисперсію та коваріацію цього випадкового процесу та отримано верхню межу для коваріаційної функції.
4. На основі властивостей розв'язку стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом побудовано оцінку параметра дифузії  $\sigma$  вважаючи параметр Хюрста  $H$  відомим. Доведено строгу консистентність та асимптотичну нормальність одержаної оцінки.
5. Отримано спільну оцінку параметра дифузії та параметра Хюрста  $(\sigma, H)$  стохастичного диференціального рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом, доведено строгу консистентність оцінки для всіх  $H \in (0, 1)$  та асимптотичну нормальність для  $H \in (0, \frac{3}{4})$ .
6. Проведено моделювання отриманих оцінок параметра дифузії при відомому  $H$  та спільної оцінки параметра дифузії та параметра Хюрста. Отримані чисельні результати показали, що оцінки збігаються до дійсного значення параметра, що підтверджує теоретичні результати.

7. Розглянуто стохастичне диференціальне рівняння теплопровідності зі змішаним дробовим броунівським шумом, що складається з двох незалежних стохастичних процесів, а саме дробового броунівського руху з індексом Хюрста  $H$  та вінерівського процесу. Доведено, що випадковий процес, що є розв'язком даного рівняння є стаціонарним та ергодичним. Знайдено явний вигляд дисперсії та коваріації. Також показано, що коваріаційна функція обмежена зверху.
8. Побудовано оцінку параметра Хюрста  $H$  стохастичного диференціального рівняння теплопровідності зі змішаним шумом, яка не залежить від інших параметрів рівняння. Доведено строгу консистентність для  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$  та асимптотичну нормальність запропонованої оцінки для  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ .
9. Отримано оцінку параметрів  $(\sigma, \kappa)$  стохастичного диференціального рівняння теплопровідності зі змішаним дробовим броунівським шумом вважаючи параметр Хюрста  $H$  відомим. Доведено строгу консистентність для  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$  та асимптотичну нормальність для  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ .
10. Проаналізовано ефективність оцінки параметрів  $(\sigma, \kappa)$  порівняно з оцінкою максимальної вірогідності.
11. Проведено моделювання запропонованих у роботі оцінок параметрів для стохастичного диференціального рівняння теплопровідності зі змішаним шумом. З отриманих чисельних результатів видно, що оцінки збігаються до дійсного значення параметрів, що підтверджує отримані у роботі теоретичні результати.

## Список використаних джерел

1. Aihara S. I., Bagchi A. Stochastic hyperbolic dynamics for infinite-dimensional forward rates and option pricing // *Mathematical Finance. An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*. 2005. Vol. 15, no. 1. P. 27–47.
2. Aihara S. I., Bagchi A. Parameter estimation of parabolic type factor model and empirical study of US treasury bonds // *System modeling and optimization*. New York : Springer, 2006. P. 207–217.
3. Arcones M. A. Limit theorems for nonlinear functionals of a stationary Gaussian sequence of vectors // *The Annals of Probability*. 1994. Vol. 22, no. 4. P. 2242–2274.
4. Avetisian D., Ralchenko K. Ergodic properties of the solution to a fractional stochastic heat equation, with an application to diffusion parameter estimation // *Modern Stochastics. Theory and Applications*. 2020. Vol. 7, no. 3. P. 339–356.
5. Avetisian D., Ralchenko K. Ergodic properties of the solution to a fractional stochastic heat equation, with an application to diffusion parameter estimation // *Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”*. Tashkent, Uzbekistan. February 20-21, 2021. P. 34–37.
6. Avetisian D., Ralchenko K. V. Parameter estimation in stochastic heat equation driven by fractional Brownian motion // *International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”*. Kyiv, Ukraine. June 1-4, 2021. P. 83–84.
7. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Estimation of the Hurst and diffusion parameters in fractional stochastic heat equation // *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 2021. no. 104. P. 61–76.
8. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Parameter estimation in mixed fractional stochastic heat equation // *Modern Stochastics. Theory and Applications*. 2023. Vol. 10, no. 2. P. 175–195.

9. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Parameter estimation in stochastic heat equation with fractional Brownian motion // 15th Bachelier colloquium. Metabief, France. January 16-21, 2023. P. 4.
10. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Asymptotic properties of parameter estimators in mixed fractional stochastic heat equation // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. June 1-3, 2023. Access mode: [https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts\\_2023/PS/Avetisian-Ralchenko.pdf](https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Avetisian-Ralchenko.pdf).
11. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Asymptotic properties of the Hurst and diffusion parameters estimators in fractional stochastic heat equation // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. June 3-5, 2021. P. 83.
12. Avetisian D. A., Shevchenko G. M. Estimation of diffusion parameter for stochastic heat equation with white noise // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. 2018. no. 3. P. 9–16.
13. Bally V., Gyöngy I., Pardoux E. White noise driven parabolic SPDEs with measurable drift // Journal of Functional Analysis. 1994. Vol. 120, no. 2. P. 484–510.
14. Bibinger M., Trabs M. On central limit theorems for power variations of the solution to the stochastic heat equation // Stochastic models, statistics and their applications. Cham : Springer, 2019. P. 69–84.
15. Bibinger M., Trabs M. Volatility estimation for stochastic PDEs using high-frequency observations // Stochastic Processes and their Applications. 2020. Vol. 130, no. 5. P. 3005–3052.
16. Björk T. A geometric view of interest rate theory // Option pricing, interest rates and risk management. Cambridge : Cambridge University Press, 2001. P. 241–277.
17. Breuer P., Major P. Central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields // Journal of Multivariate Analysis. 1983. Vol. 13, no. 3. P. 425–441.
18. Cai C., Chigansky P., Kleptsyna M. Mixed Gaussian processes: a filtering approach // The Annals of Probability. 2016. Vol. 44, no. 4. P. 3032–3075.
19. Carmona R., Nualart D. Random nonlinear wave equations: smoothness of the solutions // Probability Theory and Related Fields. 1988. Vol. 79, no. 4. P. 469–508.

20. Chen B., Duan J. Stochastic quantification of missing mechanisms in dynamical systems // Recent development in stochastic dynamics and stochastic analysis. Hackensack : World Sci. Publ., 2010. P. 67–76.
21. Cheridito P. Mixed fractional Brownian motion // Bernoulli. 2001. Vol. 7, no. 6. P. 913–934.
22. Cheridito P., Kawaguchi H., Maejima M. Fractional Ornstein–Uhlenbeck processes // Electronic Journal of Probability. 2003. Vol. 8. P. no. 3, 14.
23. Chong C. High-frequency analysis of parabolic stochastic PDEs // The Annals of Statistics. 2020. Vol. 48, no. 2. P. 1143–1167.
24. Chow P.-L. Stochastic partial differential equations. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2007. 281 p.
25. Cialenco I. Statistical inference for SPDEs: an overview // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2018. Vol. 21, no. 2. P. 309–329.
26. Cialenco I., Delgado-Vences F., Kim H.-J. Drift estimation for discretely sampled SPDEs // Stochastic Partial Differential Equations. Analysis and Computations. 2020. Vol. 8, no. 4. P. 895–920.
27. Cialenco I., Huang Y. A note on parameter estimation for discretely sampled SPDEs // Stochastics and Dynamics. 2020. Vol. 20, no. 3. P. 2050016,28.
28. Cialenco I., Kim H.-J. Parameter estimation for discretely sampled stochastic heat equation driven by space-only noise // Stochastic Processes and their Applications. 2022. Vol. 143. P. 1–30.
29. Cialenco I., Kim H.-J., Lototsky S. V. Statistical analysis of some evolution equations driven by space-only noise // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2020. Vol. 23, no. 1. P. 83–103.
30. Cont R. Modeling term structure dynamics: an infinite dimensional approach // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2005. Vol. 8, no. 3. P. 357–380.
31. Conus D., Dalang R. C. The non-linear stochastic wave equation in high dimensions // Electronic Journal of Probability. 2008. Vol. 13, no. 22. P. 629–670.

32. Crowder M. J. Maximum likelihood estimation for dependent observations // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Methodological.* 1976. Vol. 38, no. 1. P. 45–53.
33. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Second ed. Cambridge : Cambridge University Press, 2014. 493 p.
34. Da Silva J. L., Erraoui M., Essaky E. H. Mixed stochastic differential equations: existence and uniqueness result // *Journal of Theoretical Probability.* 2018. Vol. 31, no. 2. P. 1119–1141.
35. Dalang R. C. Extending the martingale measure stochastic integral with applications to spatially homogeneous s.p.d.e.'s // *Electronic Journal of Probability.* 1999. Vol. 4. P. no. 6, 29 pp.
36. Dawson D. A. *Qualitative behavior of geostochastic systems* // *Stochastic Processes and their Applications.* 1980. Vol. 10, no. 1. P. 1–31.
37. De S. S. Stochastic model of population growth and spread // *Bulletin of Mathematical Biology.* 1987. Vol. 49, no. 1. P. 1–11.
38. Ditlevsen S., De Gaetano A. Mixed effects in stochastic differential equation models // *REVSTAT Statistical Journal.* 2005. Vol. 3, no. 2. P. 137–153.
39. Dobrushin R. L., Major P. Non-central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields // *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete.* 1979. Vol. 50, no. 1. P. 27–52.
40. Dozzi M., Mishura Y., Shevchenko G. Asymptotic behavior of mixed power variations and statistical estimation in mixed models // *Statistical Inference for Stochastic Processes.* 2015. Vol. 18, no. 2. P. 151–175.
41. Dufitinema J., Pynnönen S., Sottinen T. Maximum likelihood estimators from discrete data modeled by mixed fractional Brownian motion with application to the Nordic stock markets // *Communications in Statistics. Simulation and Computation.* 2022. Vol. 51, no. 9. P. 5264–5287.
42. Efficient inference for stochastic differential equation mixed-effects models using correlated particle pseudo-marginal algorithms / Wiqvist S., Golightly A., McLean A. T., and Picchini U. // *Computational Statistics & Data Analysis.* 2021. Vol. 157. P. 26, Paper No. 107151.

43. Fractional Brownian Motion. Approximations and Projections / Banna O., Mishura Y., Ralchenko K., and Shklyar S. Wiley-ISTE, 2019. 288 p.
44. Geissert M., Kovács M., Larsson S. Rate of weak convergence of the finite element method for the stochastic heat equation with additive noise // BIT. Numerical Mathematics. 2009. Vol. 49, no. 2. P. 343–356.
45. Gubinelli M., Lejay A., Tindel S. Young integrals and SPDEs // Potential Analysis. 2006. Vol. 25, no. 4. P. 307–326.
46. Guerra J., Nualart D. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion // Stochastic Analysis and Applications. 2008. Vol. 26, no. 5. P. 1053–1075.
47. Gyöngy I. Approximations of stochastic partial differential equations // Stochastic partial differential equations and applications (Trento, 2002). New York : Dekker, 2002. P. 287–307.
48. Han M., Xu Y., Pei B. Mixed stochastic differential equations: averaging principle result // Applied Mathematics Letters. 2021. Vol. 112. P. 7, Paper No. 106705.
49. Henry O. Long memory in stock returns: some international evidence // Applied financial economics. 2002. Vol. 12, no. 10. P. 725–729.
50. Hu Y., Nualart D. Stochastic heat equation driven by fractional noise and local time // Probability Theory and Related Fields. 2009. Vol. 143, no. 1-2. P. 285–328.
51. Imkeller P. Energy balance models—viewed from stochastic dynamics // Stochastic climate models (Chorin, 1999). Basel : Birkhäuser, 2001. P. 213–240.
52. Isserlis L. On a Formula for the Product-Moment Coefficient of any Order of a Normal Frequency Distribution in any Number of Variables // Biometrika. 1918. Vol. 12, no. 1/2. P. 134–139.
53. Kaino Y., Uchida M. Parametric estimation for a parabolic linear SPDE model based on discrete observations // Journal of Statistical Planning and Inference. 2021. Vol. 211. P. 190–220.
54. Kolmogorov A. N. Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbert'schen Raum // C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.). 1940. Vol. 26. P. 115–118.

55. Kovács M., Larsson S., Lindgren F. Strong convergence of the finite element method with truncated noise for semilinear parabolic stochastic equations with additive noise // *Numerical Algorithms*. 2010. Vol. 53, no. 2-3. P. 309–320.
56. Kozachenko Y., Melnikov A., Mishura Y. On drift parameter estimation in models with fractional Brownian motion // *Statistics. A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. 2015. Vol. 49, no. 1. P. 35–62.
57. Kubilius K., Mishura Y., Ralchenko K. Parameter estimation in fractional diffusion models. Cham : Bocconi University Press, [Milan]; Springer, 2017. 390 p.
58. Lototsky S. V., Rozovskii B. L. Stochastic partial differential equations driven by purely spatial noise // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2009. Vol. 41, no. 4. P. 1295–1322.
59. Mahdi Khalil Z., Tudor C. Estimation of the drift parameter for the fractional stochastic heat equation via power variation // *Modern Stochastics. Theory and Applications*. 2019. Vol. 6, no. 4. P. 397–417.
60. Major P. Non-central limit theorem for non-linear functionals of vector valued Gaussian stationary random fields. 2019. 1901.04086.
61. Mandelbrot B. B., Van Ness J. W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // *SIAM Review*. 1968. Vol. 10. P. 422–437.
62. Markussen B. Likelihood inference for a discretely observed stochastic partial differential equation // *Bernoulli*. 2003. Vol. 9, no. 5. P. 745–762.
63. Maslowski B., Nualart D. Evolution equations driven by a fractional Brownian motion // *Journal of Functional Analysis*. 2003. Vol. 202, no. 1. P. 277–305.
64. Maximum likelihood estimation for mixed fractional Vasicek processes. / Cai C. H., Huang Y. Z., Sun L., and Xiao W. L. // *Fractal and Fractional*. 2022. Vol. 6, no. 1. P. 44.
65. Millet A., Sanz-Solé M. A stochastic wave equation in two space dimension: smoothness of the law // *The Annals of Probability*. 1999. Vol. 27, no. 2. P. 803–844.
66. Mishura Y., Ralchenko K., Shevchenko G. Existence and uniqueness of mild solution to stochastic heat equation with white and fractional noises // *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 2019. no. 98. P. 149–170.

67. Mishura Y., Ralchenko K., Shklyar S. Maximum Likelihood Drift Estimation for Gaussian Process with Stationary Increments // *Austrian Journal of Statistics*. 2017. Vol. 46, no. 3-4. P. 67–78.
68. Mishura Y., Shevchenko G. Mixed stochastic differential equations with long-range dependence: Existence, uniqueness and convergence of solutions // *Computers & Mathematics with Applications*. 2012. Vol. 64, no. 10. P. 3217–3227.
69. Mishura Y., Zili M. Stochastic analysis of mixed fractional Gaussian processes. London; Oxford : ISTE Press; Elsevier Ltd, 2018. 194 p.
70. Mishura Y. S. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. Berlin : Springer-Verlag, 2008.
71. Mishura Y. S., Shevchenko G. M. Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index  $H > 1/2$  // *Communications in Statistics. Theory and Methods*. 2011. Vol. 40, no. 19-20. P. 3492–3508.
72. Mishura Y. S., Shevchenko G. M. Rate of convergence of Euler approximations of solution to mixed stochastic differential equation involving Brownian motion and fractional Brownian motion // *Random Operators and Stochastic Equations*. 2011. Vol. 19, no. 4. P. 387–406.
73. Nualart D., Peccati G. Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals // *The Annals of Probability*. 2005. Vol. 33, no. 1. P. 177–193.
74. Patrizio C. R., Thompson D. W. Understanding the role of ocean dynamics in midlatitude sea surface temperature variability using a simple stochastic climate model // *Journal of Climate*. 2022. Vol. 35, no. 11. P. 3313–3333.
75. Paxson V., Floyd S. Wide area traffic: the failure of Poisson modeling // *IEEE/ACM Transactions on networking*. 1995. Vol. 3, no. 3. P. 226–244.
76. Peccati G., Taqqu M. S. Wiener chaos: moments, cumulants and diagrams. Milan : Springer; Bocconi University Press, 2011. 274 p.
77. Piterbarg L., Rozovskii B. Maximum likelihood estimators in the equations of physical oceanography // *Stochastic modelling in physical oceanography*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996. Vol. 39 of *Progr. Probab.* P. 397–421.

78. Pospíšil J., Tribe R. Parameter estimates and exact variations for stochastic heat equations driven by space-time white noise // *Stochastic Analysis and Applications*. 2007. Vol. 25, no. 3. P. 593–611.
79. Prakasa Rao B. Maximum Likelihood Estimation in the Mixed Fractional Vasicek Model // *Journal of the Indian Society for Probability and Statistics*. 2021. 06. Vol. 22.
80. Quer-Sardanyons L., Tindel S. The 1-d stochastic wave equation driven by a fractional Brownian sheet // *Stochastic Processes and their Applications*. 2007. Vol. 117, no. 10. P. 1448–1472.
81. Ralchenko K., Shevchenko G. Existence and uniqueness of mild solution to fractional stochastic heat equation // *Modern Stochastics. Theory and Applications*. 2019. Vol. 6, no. 1. P. 57–79.
82. Rostek S., Schobel R. A note on the use of fractional Brownian motion for financial modeling // *Economic Modelling*. 2013. Vol. 30. P. 30–35.
83. Rozovsky B. L., Lototsky S. V. *Stochastic evolution systems*. Cham : Springer, 2018. 330 p.
84. Schott J. R. *Matrix analysis for statistics*. Second ed. Hoboken : Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 2005. 456 p.
85. Shevchenko G. Mixed stochastic delay differential equations // *Teoriya ĭmovirnostei ta Matematichna Statistika*. Kiiivskii Unīversitet ĭmeni Tarasa Shevchenka. 2013. no. 89. P. 167–180.
86. *Stochastic modelling in physical oceanography* / ed. by Adler R. J., Müller P. Boston : Birkhäuser Boston, Inc., 1996. 467 p.
87. Taqqu M. S. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank // *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*. 1979. Vol. 50, no. 1. P. 53–83.
88. Tindel S., Tudor C. A., Viens F. Stochastic evolution equations with fractional Brownian motion // *Probability Theory and Related Fields*. 2003. Vol. 127, no. 2. P. 186–204.
89. Tudor C. A. *Analysis of variations for self-similar processes*. Cham : Springer, 2013.

90. Two approaches to consistent estimation of parameters of mixed fractional Brownian motion with trend / Kukush A., Lohvinenko S., Mishura Y., and Ralchenko K. // *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 2022. Vol. 25, no. 1. P. 159–187.
91. Vergara R. Development of geostatistical models using stochastic partial differential equations : Ph.D. thesis ; MINES, Paris Tech. 2018. Access mode: [http://cg.ensmp.fr/bibliotheque/public/CARRIZO\\_These\\_02513.pdf](http://cg.ensmp.fr/bibliotheque/public/CARRIZO_These_02513.pdf).
92. Walsh J. B. An introduction to stochastic partial differential equations // *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*. Berlin : Springer, 1986. P. 265–439.
93. Young L. C. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration // *Acta Mathematica*. 1936. Vol. 67, no. 1. P. 251–282.
94. Zähle M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I // *Probability Theory Related Fields*. 1998. Vol. 111, no. 3. P. 333–374.
95. Zhang W., Xiao W., He C. Equity warrants pricing model under Fractional Brownian motion and an empirical study // *Expert Systems with Applications*. 2009. Vol. 36, no. 2. P. 3056–3065.
96. Zili M. On the mixed fractional Brownian motion // *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*. 2006. P. Art. ID 32435, 9.
97. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Оцінювання параметрів у стохастичному диференціальному рівнянні теплопровідності з дробовим броунівським шумом // XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях». Харків, Україна : Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна. 12-14 травня 2023. С. 22–24.
98. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Оцінювання параметрів у змішаному дробовому стохастичному рівнянні теплопровідності // XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2022. С. 3.
99. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів у змішаному дробовому стохастичному рівнянні теплопровідності // XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська

весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз.Методика викладання математики». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2023. С. 3–4.

100. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Оцінювання параметру дифузії стохастичного рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом // XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 15-16 квітня 2020. С. 3–4.
101. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Оцінювання параметрів Хюрста і дифузії у дробовому стохастичному рівнянні теплопровідності // XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 15-16 квітня 2021. С. 4.
102. Аветісян Д. А., Шевченко Г. М. Оцінювання параметру дифузії стохастичного рівняння теплопровідності з білим шумом // XVII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2019». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 17-19 квітня 2019. С. 32–33.

# Додаток 1

## Список публікацій здобувача за темою дисертації

### Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Avetisian D. A. and Shevchenko G. M. Estimation of diffusion parameter for stochastic heat equation with white noise // [Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics](#). 2018. no. 55, P. 9–16.
2. Avetisian D. A. and Ralchenko K. V. Ergodic properties of the solution to a fractional stochastic heat equation, with an application to diffusion parameter estimation // [Modern Stochastics: Theory and Applications](#). 2020. Vol. 7, no. 3, P. 339–356.
3. Avetisian D. A. and Ralchenko K. V. Estimation of the Hurst and diffusion parameters in fractional stochastic heat equation // [Theory of Probability and Mathematical Statistics](#). 2021. no. 104, P. 61–76.
4. Avetisian D. A. and Ralchenko K. V. Parameter estimation in mixed fractional stochastic heat equation // [Modern Stochastics: Theory and Applications](#). 2023. Vol. 10, no. 2, P. 175–195.

### Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Аветісян Д. А., Шевченко Г. М. Оцінювання параметру дифузії стохастичного рівняння теплопровідності з білим шумом // XVII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2019». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 17-19 квітня 2019. С. 32–33.
2. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Оцінювання параметру дифузії стохастичного рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом // XVIII

- Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 15-16 квітня 2020. С. 3–4.
3. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Оцінювання параметрів Хюрста і дифузії у дробовому стохастичному рівнянні теплопровідності // XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 15-16 квітня 2021. С. 4.
  4. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Асимптотична нормальність оцінок параметрів у змішаному дробовому стохастичному рівнянні теплопровідності // XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз. Методика викладання математики». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2023. С. 3–4.
  5. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Оцінювання параметрів у стохастичному диференціальному рівнянні теплопровідності з дробовим броунівським шумом // XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях». Харків, Україна : Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна. 12-14 травня 2023. С. 22–24.
  6. Аветісян Д. А., Ральченко К. В. Оцінювання параметрів у змішаному дробовому стохастичному рівнянні теплопровідності // XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз». Київ, Україна : Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 14 квітня 2022. С. 3.
  7. Avetisian D., Ralchenko K. Ergodic properties of the solution to a fractional stochastic heat equation, with an application to diffusion parameter estimation // Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”. Tashkent, Uzbekistan. February 20-21, 2021. P. 34–37.

8. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Parameter estimation in stochastic heat equation driven by fractional Brownian motion // International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”. Kyiv, Ukraine. June 1-4, 2021. P. 83–84.
9. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Asymptotic properties of the Hurst and diffusion parameters estimators in fractional stochastic heat equation // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. June 3-5, 2021. P. 83.
10. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Parameter estimation in stochastic heat equation with fractional Brownian motion // 15th Bachelier colloquium. Metabief, France. January 16-21, 2023. P. 4.
11. Avetisian D. A., Ralchenko K. V. Asymptotic properties of parameter estimators in mixed fractional stochastic heat equation // International Conference of Young Mathematicians. Kyiv, Ukraine. June 1-3, 2023. [https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts\\_2023/PS/Avetisian-Ralchenko.pdf](https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/PS/Avetisian-Ralchenko.pdf).

## Відомості про апробацію результатів дисертації

### Конференції

1. XVII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2019», 17-19 квітня, 2019, Київ, Україна.
2. XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2020: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз», 15-16 квітня, 2020, Київ, Україна.
3. Scientific conference “Actual Problems of Stochastic Analysis”, February 20-21, 2021, Tashkent, Uzbekistan.
4. XIX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2021: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз», 15–16 квітня, 2021, Київ, Україна.
5. International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications. V”, June 1-4, 2021, Kyiv, Ukraine.
6. International Conference of Young Mathematicians, June 3-5, 2021, Kyiv, Ukraine.

7. XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз», 14 квітня, 2022, Київ, Україна.
8. 15th Bachelier colloquium, January 16-21, 2023, Metabief, France.
9. XXI Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2023: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз.Методика викладання математики», 14 квітня, 2023, Київ, Україна.
10. XVIII Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях», 12-14 травня, 2023, Харків, Україна.
11. International Conference of Young Mathematicians, June 1-3, 2023, Kyiv, Ukraine.

## Додаток 2

### Р код для моделювання оцінок

```
require(somebm)

#Define Green function
G <- function(t,x){
  1/sqrt(2*pi*t)*exp(-x^2/(2*t))
}

# generation of fBm on  $[-2^m, 2^m]$ 
generate.fbm <- function(H, n, m){
  ymn <- (-2^(n+m):2^(n+m))/2^n # time partition for simulation
  FBM <- fbm(hurst = H, n = 2^(n+m+1)) # path of fBm on  $[0, 1]$ 
  FBM <- ts(2^((m+1)*H)*(FBM - FBM[2^(n+m)+1]), start = ymn[1],
  end = ymn[length(ymn)], frequency = 2^n) # rescale fBm to  $[-2^m, 2^m]$ 
  return(FBM)
}

# double integration (we calculate  $u(t,x)$ )
double.int <- function(B, W, n, m, t, x, sigma, kapa){
  yn <- seq(x-2^m, x+2^m, 2^(-n))
  Bn <- window(B, start=x-2^m, end = x+2^m) #fBm
  Wn <- window(W, start=x-2^m, end = x+2^m) #Wn -White noise
  tn <- length(Bn)
  delta_B <- Bn[2:tn] - Bn[1:(tn-1)] # vector of increments of fBm
  delta_W <- Wn[2:tn] - Wn[1:(tn-1)] # vector of increments of Wn
```

```

u <- 0
for (i in 1:length(delta_B))
{
  integrand <- function(s) {G(t-s,x-yn[i])}
  int <- integrate(integrand, 0, t)
  u <- u + int$value * (sigma * delta_B[i] + kapa * delta_W[i])
}
return(u)
}

# calculate vector of u(t,xk)
generate.u <- function(B, W, xk, n, m, t, sigma, kapa){
  process <- c()
  for (k in 1:length(xk))
  {
    process <- c(process, double.int(B, W, n, m, t, xk[k], sigma, kapa))
  }
  return(process)
}

# H estimate
H_N <- function(uu1,uu2,uu3,t1,t2,t3){
  H_est<-1/2+ifelse((t2^(-3/2)*mean(uu2)-t3^(-3/2)*mean(uu3))/
(t1^(-3/2)*mean(uu1)-t2^(-3/2)*mean(uu2))>0,
log2((t2^(-3/2)*mean(uu2)-t3^(-3/2)*mean(uu3))/
(t1^(-3/2)*mean(uu1)-t2^(-3/2)*mean(uu2))),0)
  return(H_est)
}

const <- function(H){
  (2^(H+1)*(2^H-1)*gamma(H+1/2))/(sqrt(pi)*(H+1))
}

```

```

# parameters of the model
t1 <- 0.25
t2 <- 0.5
t3 <- 1
sigma <- 1
kapa <- 1
H <- 0.6
n <- 7 # partition step  $2^{-n}$ 
m <- 2 # we replace integral over R with integral over  $[x-2^m, x+2^m]$ 
l <- 0 # step for observations  $\delta = 2^{-l}$ 
rr <- 8:12 # 12 number of observations  $N = 2^r$ 
traj <- 50 # number of trajectories

matestimates_H <- c()
matestimates_sigma <- c() # matrix of estimates with known H for sigma
matestimates_sigmaH <- c() # matrix of estimates with unknown H for sigma
matestimates_kapa <- c() # matrix of estimates with known H for kapa
matestimates_kapaH <- c() # matrix of estimates with unknown H for kapa
rmax <- rr[length(rr)] # max number or observations

for(k in 1:traj){
  print(paste('Running simulation number', k, '...'))
  vecestimates_sigmaH <- c()
  vecestimates_sigma <- c()
  vecestimates_kapaH <- c()
  vecestimates_kapa <- c()
  vecestimates_H <- c()

  B <- generate.fbm(H,n,m+rmax-l-1)
  W <- generate.fbm(0.5,n,m+rmax-l-1)
}

```

```

xk <- seq(2^(-l), 2^(rmax-l), by = 2^(-l))

u1 <- generate.u(B, W, xk, n, m, t1, sigma, kapa) # vector of observations in t1
u1 <- u1^2 # squares of observations

u2 <- generate.u(B, W, xk, n, m, t2, sigma, kapa) # vector of observations in t2
u2 <- u2^2 # squares of observations

u3 <- generate.u(B, W, xk, n, m, t3, sigma, kapa) # vector of observations in t3
u3 <- u3^2 # squares of observations

for(r in rr){
  xkk <- seq(from = 1, to = 2^(r-l), by = 2^(-l))
  uu1 <- u1[xkk]
  uu2 <- u2[xkk]
  uu3 <- u3[xkk]

  est_H <- H_N(uu1,uu2,uu3,t1,t2,t3)
  vecestimates_H <- c(vecestimates_H,est_H)

  est_sigmaH <- (t1^(-3/2)*mean(uu1)-t2^(-3/2)*mean(uu2))/
  (const(est_H)*(t1^(est_H-1/2)-t2^(est_H-1/2)))
  est_kapaH <- (t1^(-1-est_H)*mean(uu1)-t2^(-1-est_H)*mean(uu2))/
  (const(1/2)*(t1^(1/2-est_H)-t2^(1/2-est_H)))

  est_sigma <- (t1^(-3/2)*mean(uu1)-t2^(-3/2)*mean(uu2))/
  (const(H)*(t1^(H-1/2)-t2^(H-1/2)))
  est_kapa <- (t1^(-1-H)*mean(uu1)-t2^(-1-H)*mean(uu2))/
  (const(1/2)*(t1^(1/2-H)-t2^(1/2-H)))

  vecestimates_sigmaH <- c(vecestimates_sigmaH, est_sigmaH)
  vecestimates_kapaH <- c(vecestimates_kapaH, est_kapaH)

```

```

vecestimates_sigma <- c(vecestimates_sigma, est_sigma)
vecestimates_kapa <- c(vecestimates_kapa, est_kapa)
}

matestimates_H <- rbind(matestimates_H,vecestimates_H)
matestimates_sigmaH <- rbind(matestimates_sigmaH,vecestimates_sigmaH)
matestimates_kapaH <- rbind(matestimates_kapaH,vecestimates_kapaH)

matestimates_sigma <- rbind(matestimates_sigma,vecestimates_sigma)
matestimates_kapa <- rbind(matestimates_kapa,vecestimates_kapa)
}
print(paste('Estimation for H', H, '...'))
# average values of estimates for H
apply(matestimates_H, 2, mean)
# standard deviations of estimates for H
apply(matestimates_H, 2, sd)

print(paste('Estimation for sigma=', sigma,'for unknown H'))
# average values of estimates for unknown H for sigma
apply(matestimates_sigmaH, 2, mean)
# standard deviations of estimates for unknown H for sigma
apply(matestimates_sigmaH, 2, sd)

print(paste('Estimation for sigma=', sigma,'for known H'))
# average values of estimates for sigma
apply(matestimates_sigma, 2, mean)
# standard deviations of estimates for sigma
apply(matestimates_sigma, 2, sd)

print(paste('Estimation for kapa=', kapa,'for unknown H'))
# average values of estimates for unknown H for kapa
apply(matestimates_kapaH, 2, mean)
# standard deviations of estimates for unknown H for kapa

```

```
apply(matestimates_kapaH, 2, sd)

print(paste('Estimation for kapa=', kapa,'for known H'))
# average values of estimates for kappa
apply(matestimates_kapa, 2, mean)
# standard deviations of estimates for kappa
apply(matestimates_kapa, 2, sd)
```