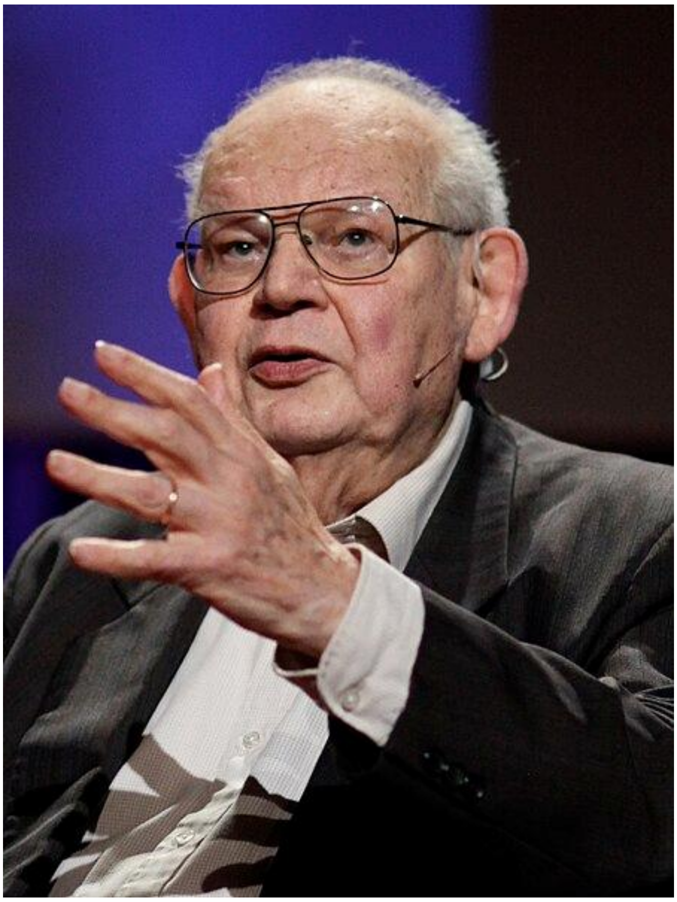
Обрії математики

УДК 515.12:514.8(091)Мандельброт **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.9**

Віктор ГРІНЧЕНКО, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,
ORCID: 0000-0003-3229-1810
e-mail: vgrinchenko@yahoo.com
Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

Володимир МАЦИПУРА, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,
ORCID: 0000-0002-0136-6659
e-mail: mnivtt@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

FRACTALIST[1]



https://www.flickr.com/photos/jurvetson/4770047266/

Анотація. *Стаття присвячена 100-річчю з дня народження Бенуа Мандельброта, людини, яка придумала слово «фрактал»' і, по суті, стала автором нового напряму в науці – фрактальної геометрії. У статті стисло наведені дані його біографії, обговорюється визначення поняття фрактала. Певна увага приділена попередникам Мандельброта і обмірковується, що саме*

[1] Назва останньої книги Бенуа Мандельброта

Б. Мандельброт завдяки своїй ерудиції та енциклопедичним знанням зміг систематизувати величезну кількість відомих раніше і знову відкритих фракталів. Сьогодні фрактали становлять важливий розділ сучасної науки. У цьому полягає головна заслуга Мандельброта. Його роботи продовжують надихати дослідників і митців, доводячи, що математика є не лише інструментом для розуміння Всесвіту, але й джерелом краси та творчості.

Ключові слова: *фрактальна геометрія; розмірність; ітерації; множина; зв'язність.*

1. Вступ

Ще з найдавніших часів, починаючи з китайського філософа Конфуція (прибл. 551 – прибл. 479 до н.е.) та грецького філософа Аристотеля (384 – 322 до н.е.), привертали увагу поняття імені та сам процес найменування. На початку XX століття, про роль процесу співвіднесення певним об'єктам їхніх імен, видатний французький математик Анрі Пуанкаре (1854 – 1912) відмітив (Puancare, 2019): «Дивуєшся силі, яку може мати одне слово. Ось об'єкт, про яий нічого було сказати, поки він не був охрещений. Достатньо було дати йому ім'я, щоб відбулося диво».

Про одне з таких чудес йдеться у даній статі.

Термін «*фрактал»* (*fractal*) був утворений Бенуа Мандельбротом від латинського слова *fractus* (фрагментований, розбитий на уламки). Мандельброт мабуть без наміру, можливо тільки завдяки натхненню, добудував в останній склад слова «фрактал» важливу асоціацію (FRACT_AL) – алгоритм. Нагадаємо, що слово «алгоритм» – це латинізована форма імені перського математика Мухаммад ібн Муса ал-Хорезмі (прибл. 783 – прибл. 850).

Алгоритм – це правило, інструкція, суть якої зводиться до формули «роби так, потім роби ось так». Чому комп'ютери люблять алгоритми? Тому що вони люблять чітко прописані операції. Завдяки властивості комп'ютера виконувати рутинні задачі без стомлення стало можливим створення фрактальної геометрії.

Звісно, представити матеріал статті у вигляді послідовного викладення математичних основ теорії фракталів, застосування цієї концепції в дослідженні різних явищ природи і в мистецтві, подати історичні події, що спонукали до народження такої теорії, та, зрештою, сказати про характер героїв оповідання практично неможливо в обмежених рамках статті. Тому автори вирішили, як то кажуть, мазками, висвітлити окремі фрагменти опису життя і творчості Мандельброта. При цьому ми прагнули зберегти певну цілісність оповідання та його доступність. Отже, спробуймо пройти по цьому шляху разом з читачами від сторінки до сторінки так, щоб у дорозі не розгубити наших попутників.

2. Визначення фракталу

Мандельброт завжди уникав остаточних формулювань, пов'язаних зі словом фрактал: «У 1975 році я вигадав термін фрактал, щоб дати назву моїй першій роботі в цій галузі. Однак я не став наводити математичне визначення, відчуваючи, що це поняття, як і хороше вино, вимагає витримки, перш ніж воно буде «розлите по пляшках». Усі фігури, які я досліджував і називав фракталами, у моїй уяві мали властивість бути «нерегулярними, але самоподібними». Слово «подібний» не завжди має класичний сенс «лінійно збільшений або зменшений», але завжди узгоджується зі зручним і широким тлумаченням слова «схожий» (Mandelbrot, (1977). І далі Мандельброт пише, що «...найкраще обійтися зовсім без визначення... Найпростіший аргумент на користь такого небажання полягає в тому, що справжнє визначення ...виключає з сімейства фракталів деякі множини, які не хотілося б втрачати».

Все ж таки, нагадаємо читачу визначення фрактала, яке спирається на дві основні його властивості.

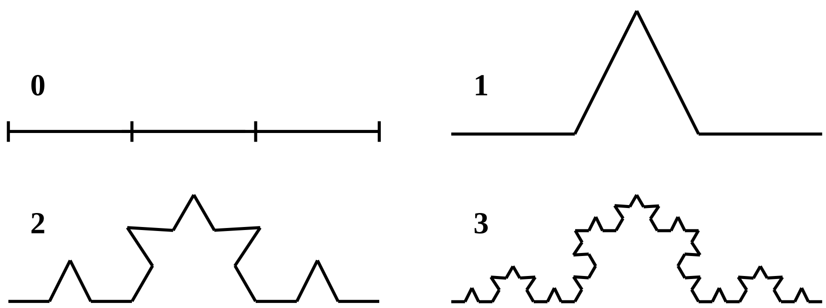


Рис. 1. Перші кроки побудови лінії Коха

Фрактал – це геометрична множина точок евклідового простору, що має властивість самоподібності та дробову розмірність. Самоподібність означає, що будь-який фрагмент множини подібний до всієї множини. Іншими словами, говорять про властивість *масштабної інваріантності* (від латинського *invarians* – незмінний) або *скейлінга* (від англійського слова *scaling* – вимірювати, масштабувати).

Відомим прикладом фрактальної лінії є крива Коха (рис. 1), на ім'я шведського математика Х. фон Коха (1870 – 1924), який уперше описав подібний феномен 1904 року. Схема побудови лінії Коха така: вибираємо відрізок одиничної довжини (йому приписуємо номер $n = 0$). Потім ділимо його на три частини, виймаємо середню частину і добудовуємо кут зі сторонами довжиною $1/3$ (на рис. 1 це відповідає $n = 1$) – маємо, так званий, утворюючий елемент. Далі, на кожному кроці побудови ми замінюємо відрізочки, що формують криву Коха, зменшеним утворюючим елементом і так до нескінченності.

Процес побудови лінії Коха дозволяє усвідомити основну властивість фракталів, а саме, внутрішню подібність. Інша властивість, яка відразу привертає увагу, полягає в тому, що фрактальна крива, в ідеалі, на будь-яких, навіть найменших, масштабах не зводиться до прямої лінії і є в загальному випадку геометрично нерегулярною, тобто для неї характерна зламаність. Очевидно, поняття дотичної в точці для такої кривої не існує.

Лінія Коха є прикладом побудови строго самоподібного фракталу, оскільки вона однаково сконструйована в будь-якому масштабі, тобто маленькі фрагменти фрактала повністю повторюють великі. Зрозуміло, що ця властивість характерна лише для *регулярних фракталів*.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

У продовженні знайомства з масштабно-інваріантними фрактальними кривими розглянемо функцію Вейєрштрасса, яка була запропонована німецьким математиком Карлом Вейєрштрассом (1815–1897) як приклад неперервної, але ніде не диференційовної функції (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013). Функція Вейєрштрасса задається формулою

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n x). \quad (1)$$

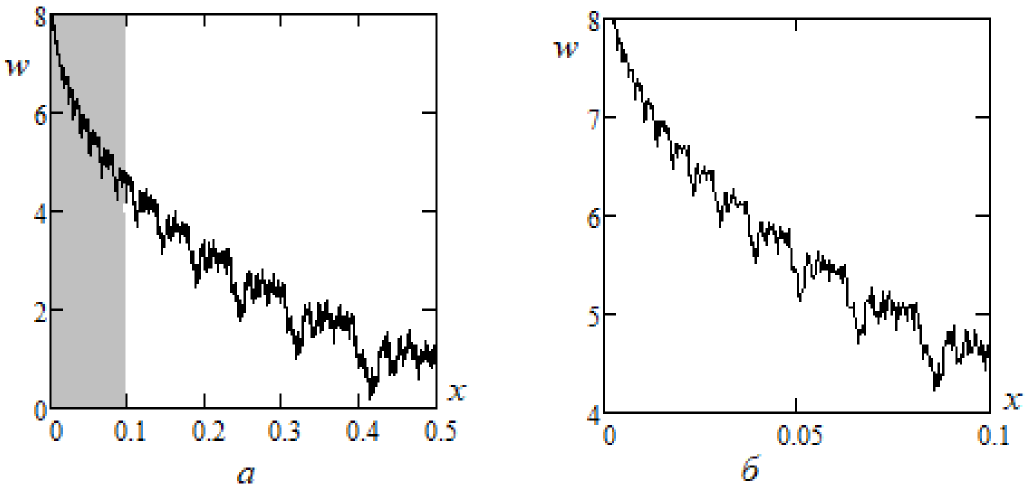


Рис. 2. Крива Вейєрштрасса

Така функція недиференційовна у жодній точці за умови: $a < 1$, $b > 1$, $ab > 1$. Уяву про функцію Вейєрштрасса дає рис. 2, а для $a = 0{,}9$; $b = 1{,}3$. Якісно зрозуміти причину її недиференційовності можна з наступного. Згідно з формулою (1) для побудови $w(x)$ спочатку береться гладка функція $w_1 = a\cos(bx)$. Потім на цю гладку функцію накладаються «брижі» $w_2 = a^2\cos(b^2x)$, що мають меншу амплітуду і більшу частоту. Потім додаються ще більш дрібні і густі «брижі» $w_3 = a^3\cos(b^3x)$ і так далі. На рис. 2, *а* наведено графік $w(x)$ для $0 \le x \le 0{,}5$. Якщо виділити діапазон зміни змінної $0 \le x \le 0{,}1$ і потім збільшити цю область до розмірів графіка на рис. 2, *а*, то можна отримати майже (адже при розрахунку за формулою (1) беремо скінчену суму доданків) таку ж вихідну криву, рис. 2, *б*. Повторюючи побудову, можна переконатися, що крива відтворюється на будь-якому як завгодно малому масштабі, тобто крива Вейєрштрасса є прикладом строго самоподібного фракталу.

Якщо замість детермінованого способу побудови в алгоритм їхнього створення внести деякий елемент випадковості, то виникнуть так звані випадкові фрактали. Дуже важливим прикладом випадкового фрактального об'єкта є траєкторія броунівської частинки. Графік кривої залежності координати броунівської частинки від часу також ніде не диференціюється. Основна їхня відмінність від регулярних фракталів полягає у тому, що властивість самоподібності справедлива лише після відповідного усереднення за всіма статистично незалежними реалізаціями об'єкта. Причому збільшена частина фрактала неточно ідентична початковому фрагменту, проте їхні статистичні характеристики збігаються.

Повернемося до лінії Коха (рис. 1) і обчислимо її довжину. На n-му кроці побудови довжина відрізків, з яких складається лінія Коха, становить $1/3^n$, а їхня кількість – $3 \cdot 4^n$. Тоді довжина лінії Коха на n-му кроці буде $3(4/3)^n$, а при $n \to \infty$ вона прямує до нескінченності. Отже, на відміну від гладкої кривої, довжина не може бути характерною величиною для фрактальної кривої.

3. Фрактальна розмірність множини

Представлені результати вимірювання довжини лінії Коха здаються абсолютно несподіваними. Справді, чим меншою є довжина лінійки, тим більша виміряна довжина лінії. Найпростіша процедура вимірювання довжини виявляється не такою простою, як здається спочатку. Виникає питання: яка розмірність може бути у такої лінії?

Мандельброт звернув увагу на те, що думка про розмірність як про внутрішню характеристику тіла, поверхні або кривої, неправильна. Насправді розмірність об'єкта залежить від спостерігача, точніше від зв'язку об'єкта із зовнішнім світом.

Наведемо наочний приклад. Уявімо, що ми розглядаємо клубок ниток. Якщо відстань, що відокремлює нас від клубка, досить велика, то клубок ми бачимо як точку, позбавлену будь-якої внутрішньої структури. Перед нами геометричний об'єкт із топологічною розмірністю $D_T = 0$. Підійшовши до клубка досить близько, ми побачимо, що він складається з ниток. Тепер топологічна розмірність клубка стане $D_T = 1$.

Отже, якщо розмірність залежить від конкретних умов, то її можна вибирати по-різному! Можна сказати, що труднощі визначення поняття розмірності у тому, що намічений шлях не єдиний. Можна сформулювати й інші, настільки ж природні, підходи до такого визначення. Раціональний вибір вказаного визначення залежить від того, для чого ми хочемо його використовувати.

Суть варіанта визначення розмірності множини, який для нас виявився цікавим, полягає у тому, що множина характеризується мінімальним числом шаблонів (елементів покриття), необхідних для її покриття. В ролі шаблонів можуть використовуватися кубики, кульки, квадратики, відрізки тощо.

Міркуючи далі, можна дійти до такого визначення *фрактальної розмірності*. Спочатку згадаємо про поняття міри множини. Власне, *міра* – це деяка числова функція μ, яка ставить у відповідність кожній множині (з деякого сімейства множин) деяке невід'ємне число.

Нехай треба визначити міру приміщення. Для цього покриємо його множиною кубиків з розміром ребра δ, що не мають спільних об'ємів. Тоді загальна міра, яка в даному випадку є об'ємом приміщення, дорівнює сумі мір кубиків (міра окремого кубика – δ^3). Для деякої поверхні, мірою якої є площа, використовуємо покриття шаблонами у вигляді квадратиків, для лінії, тут мірою є довжина, застосовуємо шаблони у вигляді відрізочків.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Отже, якщо множину можна покрити $N(\delta)$ непорожніми і неперетинними шаблонами розміром δ, то її міра $\mu = N(\delta)\delta^D$. Міра – величина скінченна і показник D можна вважати розмірністю. Що робити, якщо ми не знаємо її заздалегідь для довільної множини, структура якої не така проста, як у евклідових об'єктів? Все ж таки, спробуємо знайти розмірність, використовуючи вираз $\mu = N(\delta)\delta^D$. Будемо перебирати пробні значення D, домагаючись того, щоб μ була скінченна при зменшенні δ, тобто

$$0 < \lim_{\delta \to 0}[N(\delta)\delta^D] < \infty. \tag{2}$$

Дамо коментар до формули (2). Щоб зрозуміти її, розглянемо найпростіший приклад. Нехай наша множина – це фрагмент лінії завдовжки L. Покриємо її відрізочками, що не перетинаються, розміром δ. Очевидно, що для цього нам знадобиться $N(\delta) = L/\delta$ відрізочків. Тоді формула для міри набуває вигляду

$$\mu = \frac{L}{\delta}\delta^D = L\delta^{D-1}. \tag{3}$$

Бачимо, що для $D < 1$ міра прагне до нескінченності у разі зменшення δ. З іншого боку, міра прямує до нуля, якщо $D > 1$. Правильне значення $D = 1$ визначається точкою переходу міри від нескінченного значення до нульового! Цей факт має вирішальне значення для визначення розмірності.

З виразу $\mu = N(\delta)\delta^D$ маємо асимптотичне співвідношення між кількістю $N(\delta)$ елементів покриття множини і характерним розміром елемента покриття δ, а саме

$$N(\delta) \sim \delta^{-D}. \tag{4}$$

Тут необхідно зробити одне пояснення. Згідно з проведеними міркуваннями під *фрактальною розмірністю* розуміємо показник степені D у співвідношенні (4). Але число N – безрозмірна величина, тому воно має виражатися у вигляді безрозмірного відношення

$$N(\delta) \sim \left(\frac{L}{\delta}\right)^D, \tag{5}$$

де L – характерний розмір множини. Це пов'язано з тим, що у фрактала немає свого виділеного масштабу, окрім власного розміру. Дійсно, адже самоподібність означає, що в структурі фрактала відсутні будь-які характерні розміри. Тому фрактальна розмірність D, з одного боку, показує, як зі зменшенням масштабу δ зростає кількість елементів, необхідних для покриття даної фрактальної множини. З іншого боку, цей показник степені показує, як ця ж кількість зростає зі збільшенням розміру самого фрактала.

З формули (4) визначимо розмірність за допомогою границі

$$D = -\lim_{\delta\to 0}\frac{\log N(\delta)}{\log \delta} \qquad (6)$$

за припущення, що границя існує. Фрактальну розмірність D, яка визначається за допомогою покриття множини шаблонами визначеної форми і розміру, називають ємністю множини і це не обов'язково ціле число! Визначення ємності фігурує в основі більшості числових методів оцінювання розмірності.

Недолік визначення фрактальної розмірності як ємності полягає у тому, що покриття фрактальної множини проводиться шаблонами однакового розміру і їхній підрахунок є досить «грубим» вимірюванням. Більш точний результат можна отримати, якщо множина покривається шаблонами довільної форми і розміру, з тим обмеженням, що діаметр окремого шаблону не перевищує заданої величини δ. Строге визначення такої процедури приводить до *розмірності Хаусдорфа* D_H (Feder, 1988), (Schroeder, 1991), яка названа іменем німецького математика Фелікса Хаусдорфа (1868 – 1942), який дав строге визначення цієї розмірності.

Визначення розмірності Хаусдорфа має важливе теоретичне значення. Але на практиці ним не користуються з двох причин: по-перше, безпосереднє обчислення D_H, навіть за допомогою ЕОМ, неможливе, а по-друге, у важливих для практики «хороших» фракталів розмірність Хаусдорфа і ємність збігаються.

Топологічна розмірність, ємність і розмірність Хаусдорфа відносяться до самого об'єкта, який розглядається, а евклідова розмірність – до простору, в якому розміщено об'єкт. Розмірність Хаусдорфа, обчислена для зліченної кількості точок, відрізка лінії, частини поверхні, скінченного об'єму, дорівнює їхній топологічній розмірності.

Застосуємо описаний підхід до визначення розмірності лінії Коха (рис. 1). На n-му кроці побудови довжина відрізків (елементів покриття) становить $\delta = 1/3^n$, а їхня кількість $N(\delta) = 3\cdot 4^n$. Тоді згідно з (6) фрактальна розмірність лінії Коха (границя $\delta \to 0$ відповідає границі $n \to \infty$)

$$D = -\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(3\cdot 4^n)}{\ln(1/3)^n} = -\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(3)}{\ln(1/3)^n} - \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(4^n)}{\ln(1/3)^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}2618.$$

Як бачимо, фрактальна розмірність лінії Коха виявилася нецілою величиною, причому більшою за топологічну розмірність лінії $D_T = 1$ і меншою за евклідову розмірність простору $D_T = 2$ (у цьому випадку площини), в якому міститься лінія Коха. Той факт, що ємність лінії Коха більша одиниці, говорить про те, що швидкість зростання кількості шаблонів, які покривають лінію Коха у випадку зменшення розміру шаблону, більша аніж $1/\delta$, як це виконується для гладкої кривої. Фактично значення ємності характеризує ступінь нерегулярності кривої Коха.

Отже, дробова розмірність означає, що множина займає проміжне положення між системою нульвимірних точок і одновимірною лінією, між одновимірною лінією і двовимірною поверхнею, між двовимірною поверхнею і тривимірним тілом і так далі.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Дробова розмірність розуміється у широкому смислі: не як дріб, а як неціле дійсне число.

Для фізичних застосувань визначення (6) не підходить. Фрактальні властивості реальних об'єктів проявляються на масштабах, які перевищують деяку характерну величину. Наприклад, для траєкторії броунівської частинки на малих масштабах дається взнаки скінченність маси і розмірів броунівської частинки, а також скінченність часу співударів. Хоча, слід відмітити, що в броунівському русі діапазон зміни масштабів, у межах якого зберігається статистична самоподібність, дуже великий. При врахуванні зазначених обставин траєкторія броунівської частинки стає плавною лінією, і поняття самоподібності втрачається. Тому перехід до границі, необхідний згідно з формальним визначенням (6), неможливий. Типовий фізичний підхід полягає не у знаходженні границі (6), а в побудові графіка залежності $\log N(\delta)$ від $\log \delta$ (див. формулу (4)). Кут нахилу прямої, яку отримуємо під час побудови, визначає ємність D (Feder, 1988).

4. Сторінки біографії Мандельброта

Народився Б. Мандельброт (1924 – 2010) у Варшаві. У 1936 році сім'я Мандельбротів переїхала до Парижа, де Бенуа у 1947 році закінчив Політехнічну школу. У 1948 році в Каліфорнійському технологічному інституті (Калтех) у Пасадені він захистив магістерську дисертацію з аерокосмічних наук, а вчений ступінь доктора філософії (з математики) він отримав у 1952 році в Паризькому університеті. До 1958 року, коли Мандельброт остаточно переїхав до США, він був запрошеним професором в університетах Прінстона, Женеви та Парижа. З 1974 – став членом ради з наукових досліджень фірми IBM, а з 1984 – професором математики Гарвардського університету. Цей короткий опис його життя наповнений багатьма подіями: тут воєнні роки, життя в окупації, переїзд до США, робота, відстоювання своїх наукових позицій і, зрештою, визнання.

Цікаво відзначити одну його природну особливість. У Бенуа була прекрасна просторова уява – геометричними засобами він розв’язував навіть алгебраїчні задачі. Згадуючи свою початкову освіту в Польщі, Мандельброт казав, що він ніколи не вчив алфавіт чи таблицю множення. Замість цього його ранні роки були сформовані візуальними спогадами: досі пам’ятає геометричні візерунки, котрими був вкритий килимок, на якому він робив перші кроки. Коли його дядько почав домашнє навчання Бенуа, то заучування ніколи не використовувалося. «Все, що я робив, – це грав у шахи та читав карти», – каже Бенуа.

Перу Мандельброта належить багато статей і три класичні монографії про фрактали та їх важливу роль у природничих і соціальних науках, в математиці (Mandelbrot, 1975), (Mandelbrot, 1977), (Mandelbrot, 1983): «Фрактальні об'єкти: форма, випадковість і розмірність», «Фрактали, випадок та фінанси», Фрактальна геометрія природи".

Мабуть, назва останньої з них якнайкраще відображає реальну суть: «Чому успадкована від Евкліда геометрія так часто удостоюється визначення «холодної» і «сухої»? До певної міри тому, що вона нездатна описати форму фінансової хроніки, хмари, гори, морського берега чи дерева. Фінансові хроніки – це не періодичні коливання, не висхідні чи низхідні прямі, що зображують «тенденції»; хмари – не сфери; гори – не конуси; береги островів – не кола, кора дерева відмінна від поверхні циліндра, а блискавка вдаряє аж ніяк не по прямій.

Лише художники завжди це розуміли, а французький художник Ежен Делакруа (1798–1863) якось, говорячи про архітектуру, дуже вдало зауважив: людина все ідеалізує. Пряма лінія – його винахід, у природі прямих немає» (Mandelbrot, 1983).

Остання книга, яку задумав Бенуа Мандельброт, отримала назву Fractalist (Mandelbrot, 2012). Але її вже дописували його друзі та дружина. Мандельброт вибрав епіграф для своєї книги, що, певною мірою, відображає його власний погляд на життя, а саме написав таке посвячення: «Пам'яті Йоганна Кеплера, який об'єднав стародавні дані та стародавні прилади та заснував науку».

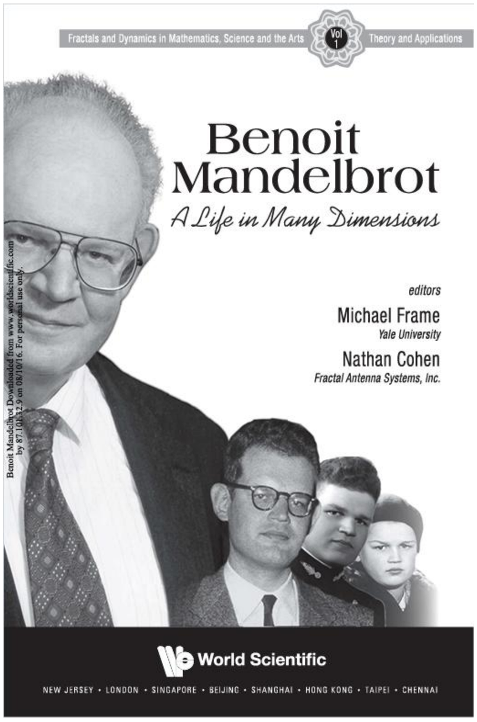


Рис. 3. Обкладинка до збірника статей [6]

На рис. 3 показана обкладинка збірника статей обсягом понад 500 сторінок (Frame & Cohen, 2015), який видано 2015 року. Відкривається книга розділом, написаним дружиною Мандельброта. Всього збірник має 26 розділів, написаних різними авторами.

5. Степеневі закони

Отримавши в 1952 році ступінь доктора філософії, Мандельброт заглибився у все, від теорії фінансових ринків до визначення довжини берегових ліній. Його методи

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

часто були незвичними. Замість того, щоб доводити теореми, як це робить більшість математиків, Мандельброт використовував моделі та графіки, щоб будувати припущення щодо фізичних законів. Звернемося до статті 1963 року (Mandelbrot, 1963) про коливання цін на бавовну, яку Мандельброт тепер описує як свій «великий вибух». У той час більшість економістів вважали, що такі зміни цін відбуваються згідно з нормальним законом розподілу (законом Гаусса). По суті, вони припускали, що ціни часто робили невеликі стрибки вартості, а великі коливання були рідкістю.

Проте, коли Мандельброт подивився на графіки цін на бавовну, він помітив дивне явище. Якщо мітка була видалена з часової осі, то неможливо було визначити, чи охоплюють діаграми один тиждень чи один рік; схема піків і спадів виглядала однаково на кожній шкалі. Мандельброт, який тоді працював у дослідницькому центрі IBM Томаса Дж. Уотсона в Йорктаун-Гайтс, Нью-Йорк, знав, що такі самоподібні системи мають інший розподіл, відомий як степеневий закон. Важливо те, що великі стрибки вартості набагато більш поширеніші в цих розподілах. Мандельброт показав, що це також стосується цін на бавовну – і таким чином він допоміг змінити спосіб управління ризиками у фірмах фондового ринку. Отриманий результат мав велике значення в творчому житті Мандельброта.

Дамо для читача маленький коментар (Грінченко, Маципура & Снарський, 2024). Нормальний розподіл (розподіл Гаусса) завжди відігравав центральну роль в теорії ймовірностей, оскільки виникає дуже часто як результат впливу множини факторів, внесок будь-якого одного з них незначний.

Однак, існує клас явищ, обумовлених випадковими процесами, що не описуються розподілом Гаусса. Такі процеси почали активно досліджуватися лише в останній чверті минулого століття. Відзначимо, що до теперішнього часу виявлено багато фізичних прикладів де має місце така ситуація.

Одним з прикладів виявився опис процесів міграції тварин. До недавнього часу вважалося, що тварини поводяться подібно класичним броунівським частинкам. Однак пошук їжі завдяки рівномірному «замітанню» області проживання навряд чи можна назвати раціональною стратегією виживання. Численні дані останніх років підтверджують, що більшість «розумних» тварин використовують стратегію пошуку, згідно з якою процес характерної локалізації пошуку чергується з рідкими довгими стрибками. Саме так рухаються акули і бджоли в пошуках нектару. Такі дані говорять про те, що подібний рух тварин обумовлений раціональним пошуком їжі при дослідженні території з невідомо розподіленим ресурсом.

Наша інтуїція «налаштована» на існування певних масштабів у навколишньому світі. Фізіологи, психологи, антропологи стверджують, що фізичні, інтелектуальні та інші характеристики людей прекрасно описуються кривою Гаусса

$$f(x) = \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{7}$$

Нехай $f(x)$ – щільність розподілу якої-небудь ознаки в популяції (наприклад, зросту), a – середнє значення, σ^2 – дисперсія. Життєва мудрість, яка відповідає виразу (7), – «Чудес не буває».

Оскільки зріст розподілений згідно з законом Гаусса, то функція $f(x)$ спадає дуже швидко (з ймовірністю $0{,}997$, тобто практично достовірно, можна вважати, що відхилення нормальної величини від її середнього значення a не перевищує 3σ), то ми з легким серцем можемо нехтувати ймовірністю зустрічі як з $2{,}5$-метровим гігантом, так і 30-сантиметровим карликом. Очевидно, тут є характерний розмір об'єкта a і характерна міра середнього відхилення від нього σ.

Але так буває далеко не завжди. Виявилося, у багатьох випадках у нелінійних системах відбуваються масштабно-інваріантні процеси, які не мають власних характерних величин. Їхнім статистичним виразом є степеневі розподіли ймовірності. Саме такі закономірності типові і для фракталів.

Відмітимо загальну властивість *самоподібності фракталів*. *Самоподібність* означає, що в структурі фрактала відсутні будь-які характерні розміри. За відсутності характерних розмірів система повинна мати однакові властивості у всіх масштабах, оскільки жодна область масштабів не виділена у порівнянні з іншими. Тому самоподібність інакше називають *масштабною інваріантністю*.

Отже, самоподібність (або масштабна інваріантність) означає, що будь-яка кількісна характеристика фрактала Q при зміні масштабу l в деяке число разів змінюється незалежно від величини l. Математичне співвідношення, яке виражає цю властивість, можна записати у вигляді

$$Q(\eta l) = \eta^D Q(l). \tag{8}$$

Розглядаючи це рівняння як функціональне рівняння для функції $Q(l)$, отримуємо

$$Q(l) = l^D, \tag{9}$$

тобто степеневу залежність. Експоненціальна залежність $g(x) = \exp(x/x_0)$ такої властивості не має (щоб показник експоненти був безрозмірним, до нього має входити характерний масштаб x_0).

Таким чином, самоподібність фракталів призводить до того, що їхні властивості описуються степеневими законами. Можна стверджувати, що наявність степеневого закону (9), висловлюючись образно, є невичерпним джерелом створення самоподібних структур, зокрема і фрактальних множин.

6. Від Ламберта до Мандельброта

Мабуть, усім знайомий вислів видатного англійського вченого Ісаака Ньютона (1643–1727), який казав про свій успіх тому, що стояв на плечах гігантів.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Велику кількість талановитих попередників мав і Б. Мандельброт. Але ми маємо можливість поговорити тільки про декількох з них.

Німецький фізик і математик Йоганн Генріх Ламберт (1728 – 1777) запропонував ієрархічну модель будови Всесвіту. Іншими словами, Всесвіт був представлений ним у вигляді фрактальної множини. Ламберт багато працював з нескінченними неперервними дробами та нескінченними рядами, що дозволило йому 1766 року першим довести ірраціональність числа π. Розказують, що прогулюючись того дня він зустрів друзів, які запитали у нього, чому він такий радісний, начебто довів ірраціональність числа π. На що він відповів: «Так я сьогодні це зробив».

Глибокий інтерес Ламберта до нескінченності багато в чому визначив напрямок його роздумів про структуру Всесвіту на великих просторових масштабах. У результаті народилася ієрархічна або, як сьогодні заведено говорити, фрактальна модель Всесвіту. Можливо, це був перший фрактал у науці. Обговоренню ієрархічної моделі Всесвіту свої роботи також присвятили у XVIII ст. німецький філософ Іммануїл Кант (1724 – 1804), а на початку XX ст. – французький математик Поль Леві (1886 – 1971) та ірландський вчений Фурн'є д'Альба (1868 – 1933). Фурн'є зробив припущення, що ієрархічні сходи тягнуться не тільки в бік великих просторових масштабів, а також усередину матерії у бік зменшення. Взагалі, у двадцятому столітті досить багато вчених розмірковували над ієрархічними моделями Всесвіту.

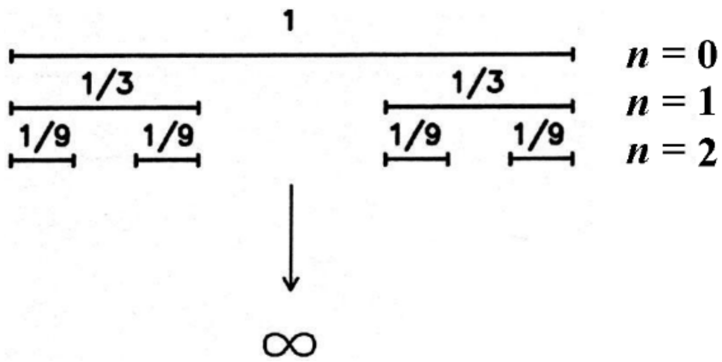


Рис. 4. Перші кроки побудови множини Кантора

Намагаючись знайти нескінченні множини, потужність яких займає проміжне положення між N_0 (потужність множини натуральних чисел) і N (потужність континууму), німецький математик Георг Кантор (1845 – 1918) побудував на прямій фрактальні множини, які пізніше отримали назву канторова множина (інакше, канторовий пил). Найпростішою є класична множина Кантора (Feder, 1988), (Schroeder, 1991), (Crownover, 1995), (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013), схема побудови якої показана на рис. 4. Вибираємо відрізок одиночної довжини (йому приписуємо номер $n = 0$). Потім ділимо його на три частини і виймаємо середню частину (без кінців), це відповідає $n = 1$. І так, згідно з рис. 4, до нескінченності. Отримана гранична множина є підмножиною одиничного відрізка прямої, що має потужність континууму і нульову довжину (рис. 4). Дійсно, неважко переконатися у тому, що сумарна довжина інтервалів, видалених при побудові множини Кантора, точно дорівнює 1, а між точками множини Кантора і точками відрізка $[0,1]$ має місце взаємно однозначна відповідність (Crownover, 1995), (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013).

Згідно з формулою (6), обчислимо фрактальну розмірність множини Кантора. На n-ому кроці побудови (рис. 4) маємо 2^n відрізків довжиною $1/3^n$ кожний. Утворимо покриття множини Кантора кубиками зі стороною, що дорівнює довжині відрізка на відповідному кроці. Тоді $N(\delta) = 2^n$ і $\delta = 1/3^n$. Границя $\delta \to 0$ відповідає границі $n \to \infty$, тому фрактальна розмірність

$$D = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln(1/3)^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}6309.$$

Вона виявляється нецілим числом, причому більшою топологічної розмірності $D_T = 0$ елементів (точок) множини Кантора. Фрактальні властивості множини Кантора мають велике значення, оскільки багато відомих фракталів мають подібні властивості.

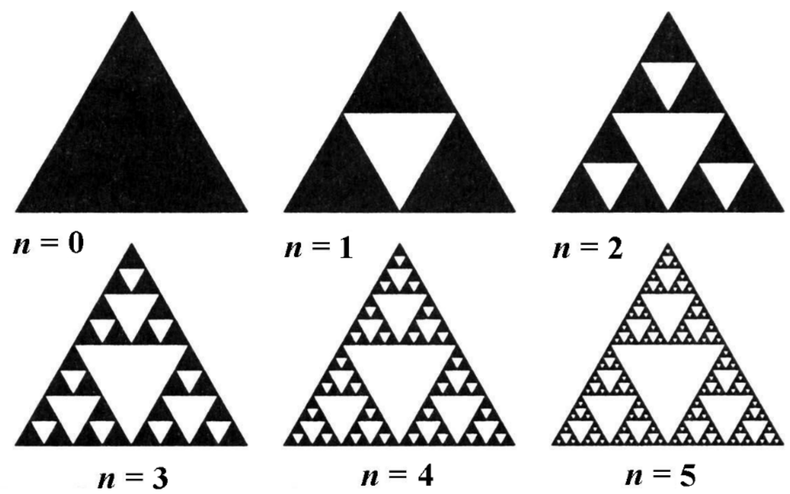


Рис. 5. Перші кроки побудови серветки Серпінського

Польський математик Вацлав Серпінський (1882 – 1969) побудував двовимірний аналог канторової множини – серветка Серпінського (1916 р.). Тут початковою множиною є рівносторонній трикутник, рис. 5 (Crownover, 1995), (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013). Ділимо його на чотири області, з'єднавши середини сторін початкового трикутника відрізками. Видалимо внутрішність центральної трикутної області. Потім повторимо процес для кожного з трьох трикутників, що залишилися. Продовжуючи цей процес до нескінченності, отримуємо множину, яка і є серветкою Серпінського. Із побудови видно, що на n-ому кроці кількість елементів покриття у вигляді рівносторонніх трикутників зі стороною $\delta = 1/2^n$ дорівнює $N(\delta) = 3^n$. Тоді фрактальна розмірність серветки Серпінського має значення

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}5849.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Отже, тканина такої серветки вийшла досить дірявою. Видалена площа, при побудові серветки, точно дорівнює площі початкового трикутника. Іншими словами, площа серветки дорівнює нулю, а периметр її дірок стає нескінченним.

Тривимірний аналог множини Кантора придумав австрійський математик Карл Менгер (1903 – 1985) – *губка Менгера*, рис. 6 (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013). Фрактальна розмірність губки Менгера $D \approx 2{,}7268$. Оскільки $2 < D < 3$, то це говорить про те, що губка Менгера має нульовий об'єм, але, як фрактальний об'єкт, володіє нескінченною площею своєї поверхні.

Ми побудували та дослідили кілька фракталів. Сподіваємося, що у читача склалося уявлення про фрактальну розмірність як про корисну концепцію. По суті, розмірність Хаусдорфа – це необхідне розширення поняття розмірності на фрактальні об'єкти, що моделюють, хоч і приблизно, величезну кількість явищ у реальному світі: навколо нас і всередині нас.

Для усіх розглянутих множин справедлива нерівність $D > D_T$. Так, для лінії Коха значення фрактальної розмірності $D \approx 1{,}2618$ більше за топологічну розмірність лінії $D_T = 1$. Нерівності $D > D_T$ можна надати певного фізичного змісту. Вона характеризує ускладнення множини. Якщо це лінія ($D_T = 1$), то її можна ускладнити, зробивши більш нерегулярною шляхом нескінченного числа вигинів. При цьому, значення фрактальної розмірності відображає ступінь нерегулярності фрактальної кривої.

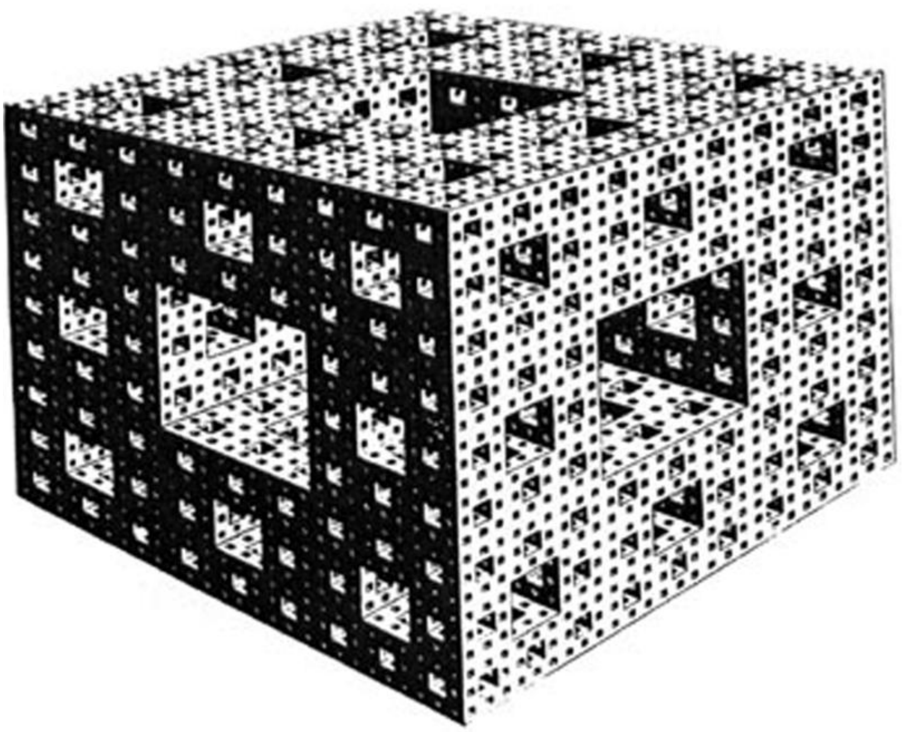


Рис. 6. Губка Мегнера

Зауважимо, що, для всіх розглянутих вище регулярних фракталів, фрактальна розмірність виявилася меншою, ніж евклідова розмірність простору, в якому міститься даний фрактальний об'єкт. Так, для лінії Коха, яка розташовується на площині, маємо нерівність $1 < D < 2$.

Виникає питання: чи існують фрактали, у яких $D > D_T$? Відповідь: «так». Ще у 1890 році італійський математик Джузеппе Пеано (1858 – 1932) малює неперервну криву (крива Пеано), що повністю заповнює квадрат, тобто проходить через усі його точки. На рис. 7 показано, як кожна зі сторін початкового одиничного квадрата замінюється утворюючим елементом, який складається з дев'яти відрізків довжиною $1/3$ кожний. Потім кожний з відрізків утвореної фігури перетворюється подібним чином, і так до нескінченності. Виникає самоподібна неперервна крива з фрактальною розмірністю

$$D = -\frac{\ln 9}{\ln(1/3)} \approx 2.$$

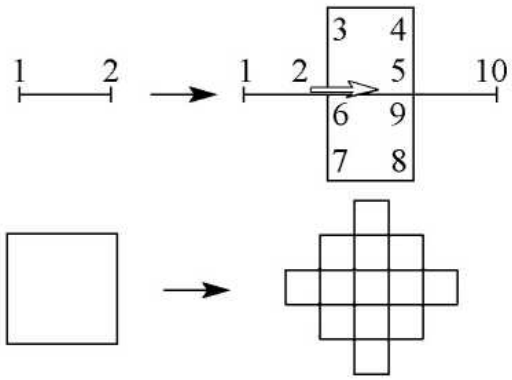


Рис. 7. Побудова кривої Пеано

Крива Пеано є регулярним фракталом. Виявляється, подібний результат можна привести і для випадкового фрактала, яким є траєкторія броунівської частинки. Нехай броунівська частинка рухається у площині. На рис. 8, а маємо повну траєкторію частинки, що виконала 10^5 переміщень (проєкції кожного випадкового переміщення на осі декартової системи координат x і y визначалися як випадкові величини з нормальним законом розподілу, математичним сподіванням рівним нулю і дисперсією рівною одиниці), а на рис. 8, *б* – збільшений фрагмент траєкторії, який на рис. 8, *а* виділений прямокутником (Грінченко, Маципура & Снарський, 2024).

Хоча траєкторія на рис. 8 має дуже складний звивистий характер, визначити її фрактальну розмірність дуже просто. Для цього відмітимо, що, коли, в процесі дифузії, частинка віддалилась на відстань R, то середня кількість «кроків», які вона зробила, дорівнює $N = R^2/\delta^2$, де δ – характерна довжина одного кроку. Покриємо траєкторію частинки шаблонами розміром δ і, використовуючи формулу (6), знаходимо значення розмірності

$$D = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N}{\ln \delta} = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\ln R^2}{\ln \delta} + \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln \delta^2}{\ln \delta} = 2,$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

оскільки перша границя прагне до нуля внаслідок скінченності величини R.

Отриманий результат означає, що характерний розмір дифузійної траєкторії на певній площині пропорційний величині цієї площини, тобто траєкторія на площині є достатньо густою (див. рис. 8). Разом з тим, це не означає скінченності площини, котру замітає сама дифузійна крива. Причиною цього є безліч самоперетинів дифузійної кривої. Виявляється, що для двовимірного броунівського руху ймовірність повернення в будь-який, як завгодно малий окіл довільно вибраної точки, дорівнює 1.

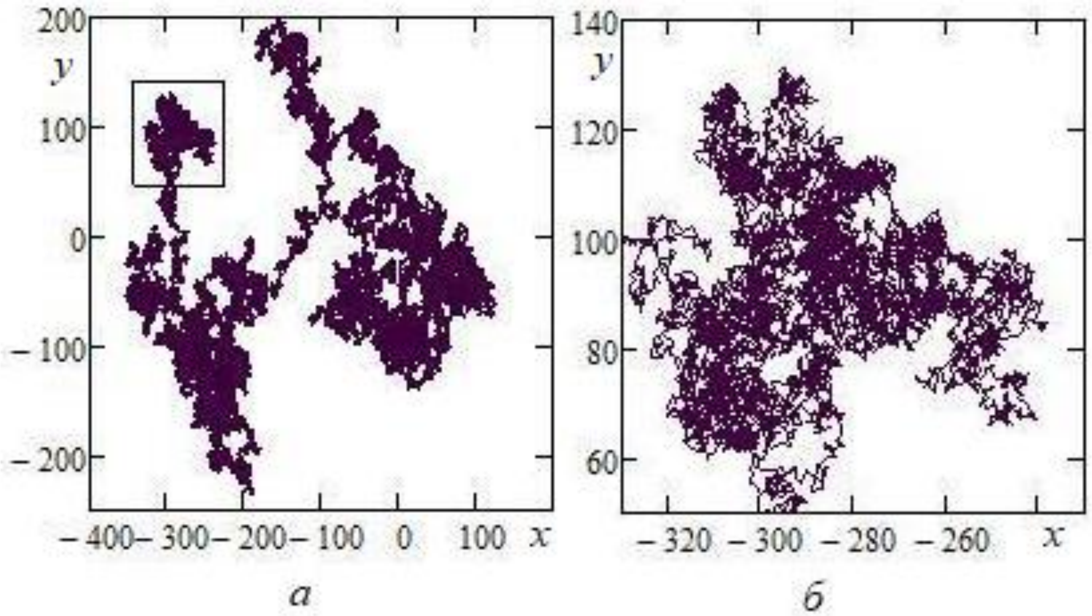


Рис. 8. Траєкторія броунівської частинки

У випадку дифузії в тривимірному просторі траєкторія броунівської частинки є, навпаки, дуже пухкою (її фрактальна розмірність залишається рівною 2) і не заповнює усього об’єму, в якому вона зосереджена. В цьому випадку ймовірність повертання виявляється меншою одиниці. Можливо по цій важливій причині багато хімічних реакцій, котрі необхідні для підтримання життя в природі, відбуваються не в тривимірному просторі, а на всіляких поверхнях. Прикладом є процес газообміну, що відбувається на поверхнях альвеол легенів людини. Їх кількість в обох легенях становить порядку 600 мільйонів, а загальна площа на видиху дорівнює приблизно 30 м^2, а на глибокому вдиху – 100 м^2.

Починаючи з кінця XIX ст. з'являється багато різних прикладів фрактальних множин. У 1879 році англійський математик Артур Келі (1821 – 1895) застосував ітераційний метод Ньютона (метод дотичних) для знаходження комплексних коренів многочленів і досліджував для кожного кореня даного многочлена геометричну форму комплексної області притягання, інакше кажуть басейну притягання (область притягання складається зі всіх початкових наближень до кореня, котрі забезпечують збіжність до нього ітерацій Ньютона). Келі виявив, що коли степінь многочлена вище двох, то межі областей притягання мають складну і незрозумілу структуру, що вимагає подальшого вивчення. Комп’ютерні дослідження в кінці XX століття зразу показали, що ці границі є фрактальними.

7. Ітерації Фату та Жюліа

Тісний зв'язок теорії ітерацій з фракталами було помічено вже понад сто років тому. Поява на початку XX ст. теорії ітерацій раціональних відображень комплексної площини дозволила визначити нові фрактальні множини, що породжуються ітераціями. Основи цієї теорії розробили два французькі математики П'єр Жозеф Луї Фату (1878 – 1929) та Гастон Моріс Жюліа (1893 – 1978).

Фату все життя працював у Паризькій обсерваторії. У грудні 1917 року він опублікував свої дослідження з теорії ітерацій.

Жюліа 1914 року, у зв'язку з Першою світовою війною, був мобілізований в армію. У січні 1915 року отримав тяжке поранення в голову і з 1915 по 1918 рік лежав у госпіталі. У госпіталі Жюліа, людина вольова і цілеспрямована, зміг поступово отямитися, став активно займатися математикою і у 1918 році опублікував мемуари про ітерації раціональних функцій обсягом 199 (!) сторінок.

Результати Фату та Жюліа виявилися близькими та схожими. У другій половині XX століття стало ясно, наскільки багатим за змістом є обраний ними науковий напрямок: було виявлено та відкрито цілу низку фундаментальних властивостей ітерацій нелінійних відображень, що описуються у термінах фрактальної геометрії.

Суть відображення на комплексній площині полягає у тому, що одному комплексному числу $z_n = x_n + iy_n$ ставиться у відповідність інше комплексне число $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$, що визначається за певною ітераційною процедурою $z_{n+1}f(z_n, c)$, де $f(z)$ – нелінійна функція, c – параметр, n – номер ітерації. Якщо z_0 – початкова точка, тоді послідовність ітерацій, котру також називають орбітою точки z_0, має вигляд:

$$z_0, \qquad z_1 = f(z_0, c), \qquad z_2 = f(z_1, c), \dots \ , \qquad z_{n+1} = f(z_n, c), \dots .$$

У залежності від значень параметра c та координати $z_o = x_0 + iy_0$ послідовності розпадаються на дві підсистеми. В одній із них члени послідовності z_n прямують до нескінченності, в другій прямують до певної скінченної величини. Прикладом нелінійної функції, що часто використовується для організації такої ітераційної процедури, є найпростіше нелінійне відображення $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ($n = 0,1,2, \dots$, c – комплексна стала).

8. Множина Мандельброта

Множина комплексних значень параметра c, для яких ітерації $z_{n+1} = z_n^2 + c$ початкової точки $z_0 = 0$ не дають послідовність, що прямує до нескінченності, утворює множину Мандельброта (рис. 9). Позначають цю множину літерою M. Фактично множину M вперше виявив і визначив Фату. Але, подібно до іспанського мореплавця Христофора Колумба (1451 – 1506), який відкрив Америку і не знав, як виглядає її карта, Фату, за відсутності комп'ютерних технологій, не міг навіть грубо уявити собі «карту» множини M. Тільки в 1980 році Мандельброт зміг, нарешті, вперше побачити

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

цю множину за допомогою комп'ютера і гідно оцінити її красу та нескінченне різноманіття структури.

Додатком до рис. 9 може служити словесний опис множини M, представлений французьким математиком Адріаном Дуаді (1935 – 2006) в книзі (Peitgen & Richter, 1986).

Якщо подивитись на множину Мандельброта, то перше, що кидається в очі – це область, обмежена кардіоїдою з вістрям у точці $0{,}25$ і заокругленою вершиною в точці –0,75. Потім бачимо дотичний до кардіоїди круг радіуса $0{,}25$ з центром у точці -1 і, зрештою, незліченну множину менших областей, які також дотичні до кардіоїди, і за формою нагадують круг. Більшість з них дуже малі.

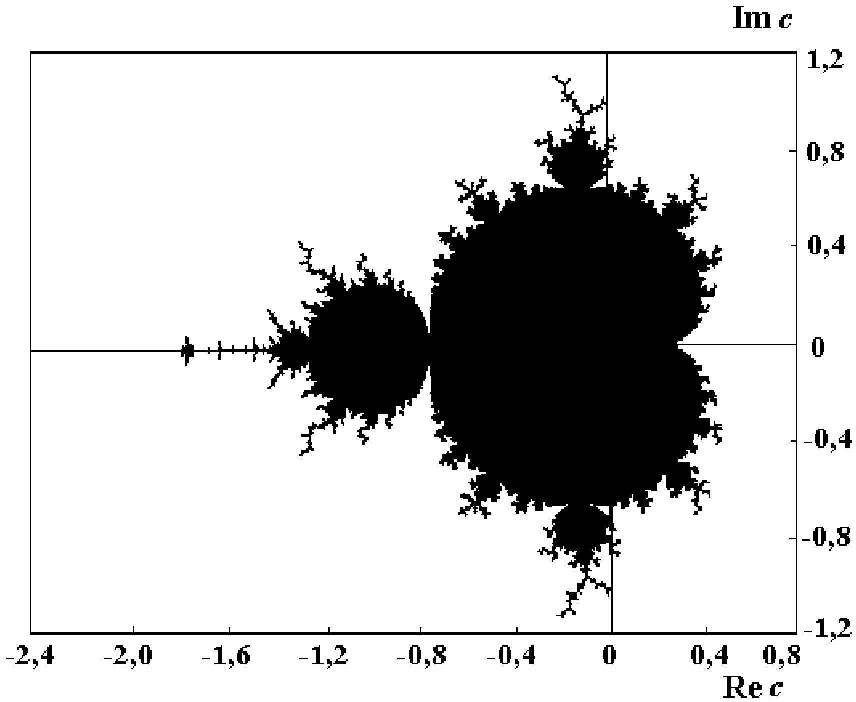


Рис. 9. Множина Мандельброта

До кожного з цих компонентів у свою чергу прикріплено нескінченну кількість менших областей, також схожих на круг, а в кожному з менших знову ж приєднано нескінчений набір ще менших, також таких, що мають форму круга областей і так далі. Але і це ще не все! Якщо ми, вийшовши з великої кардіоїди і рухаючись вліво, потрапимо в круг, потім (знову вліво) в наступну область і продовжимо рух вліво далі, то при цьому будемо весь час наближатися до точки, що має координату $-1{,}401\ldots$. Відрізок від цієї точки до точки -2 також належить множині M. І на ньому є маленька, подібна до кардіоїди, область із загостреною вершиною в точці $-1{,}75$ (її центр знаходиться в точці $-1{,}754877666\ldots$). До цієї маленької кардіоїди прикріплюється точно таке ж сімейство круглих областей, як і для великої. На рис. 10 показано фрагмент множини Мандельброта в околі кругової області з центром у точці -1; на своєрідній «антені» чітко видно контур маленької копії множини M.

Виявляється, що число таких «кадіоїдних» областей нескінченно велике. Окрім того, вони зустрічаються не тільки на дійсній осі. Так, Б. Мандельброт виявив кардіоїду з центром в точці $-0{,}1565201668 + 1{,}032247109\,i$ і багато інших. Фактично він довів, що існує нескінченно багато кардіоїд. Всі вони настільки маленькі, що їх важко відрізнити від плямочок на комп'ютерних рисунках (це можна зробити тільки завдяки тому, що вони з'являються симетрично). Але якщо зробити збільшену картинку, то в кожному випадку виявиться як сама кардіоїда, так і її супровідна компанія із круглих областей. Звісно технічні можливості комп'ютера, як пристрою, який формує зображення, обмежені роздільною здатністю монітора.

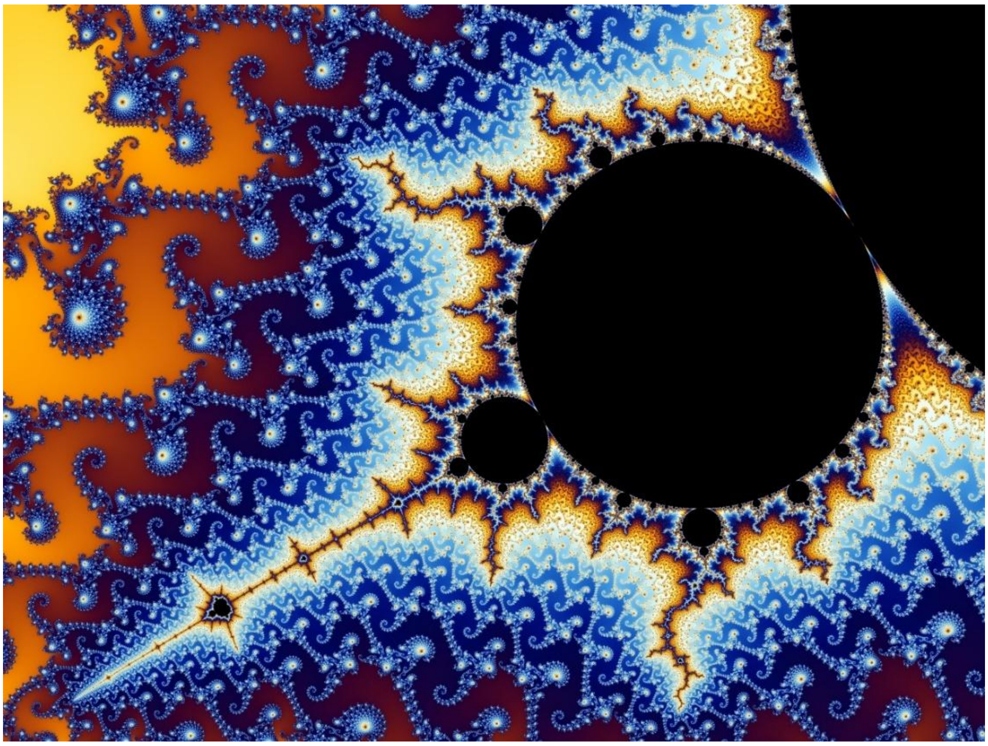


Рис. 10. Фрагмент множини Мандельброта

І це ще не все. Усі схожі на кардіоїду компоненти зв'язані з головною кардіоїдою за допомогою «ниток», насичених малими областями типу кардіоїд, кожна з яких супроводжується набором областей. Ці нитки розгалужуються, утворюючи дуже складні візерунки. Завдяки таким ниткам множина M виявляється зв'язною.

Відзначимо, що зв'язність множини M була доведена А. Дуаді і американським математиком Дж. Хаббардом (нар. 1945 р.).

Зазначимо, що множина Мандельброта M не володіє властивістю самоподібності: так, M дійсно містить нескінченну кількість малих копій самої себе, і, відповідно, в будь-якому місці подивившись на границю M в мікроскоп, ми побачимо малі копії M. Але ці копії вплетені в сітку ниток, вигляд котрої дуже сильно залежить від того, в якій точці дивитися. Більше того, якщо розглядати дві копії порівнянного розміру, то відношення відстані між ними до їхнього розміру буде сильно залежати не тільки від точки, в якій

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

ми спостерігаємо, але і від збільшення мікроскопу. Мабуть, такий вид «нелінійної самоподібності» ще треба осмислити і сформулювати в математичних термінах.

Дійсно, множина M має дуже нетривіальні властивості і їх дослідження далеко в чому не завершено. Так, як показано Міцухіро Шісікура (Shishikura, 1998), розмірність Хаусдорфа границі множини Мандельброта дорівнює 2. Той факт, що це ціле число більше, ніж його топологічна розмірність, яка дорівнює 1, відображає екстремальну фрактальну природу границі множини Мандельброта. Грубо кажучи, результат Шісікури стверджує, що границя множини Мандельброта настільки нерегулярна, що локально заповнює простір так само ефективно, як і двовимірна плоска область.

Особлива природа границі множини Мандельброта визначає складність обчислення площі множини M. Розглядаючи на комплексній площині круги з центром у нульовій точці (див. рис. 9), можна прийти до висновку, що існує максимальний круг, що міститься в множині M і мінімальний круг, який включає в себе M, а саме: $\{| z | \le 1/4\} \subset M \subset \{| z | \le 2\}$. Максимальний і мінімальний круги дають нижню і верхню оцінки для площі: $\pi/16 < S < 4\pi$.

У статті (Bittner, 2017) представлені нові вдосконалені розрахунки верхньої границі для площі множини M. Формула для обчислення площі A множини M має вигляд ряду

$$A = \pi\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} m|b_m|^2\right], \tag{10}$$

де визначення коефіцієнтів b_m пов’язано зі складними розрахунками (Bittner, 2017). Звісно, при чисельних розрахунках величини A_N утримується скінченна кількість N членів ряду (10).

Дані в табл. 1, де наведені верхні межі для площі множини M, чітко показують повільну збіжність величини площі A_N, а в табл. 2 наведено час роботи сучасного комп’ютера Computing Cluster at Rowan University для розрахунку коефіцієнтів b_m у партіях по $500\,000$. Як-то кажуть, коментарі зайві.

Таблиця. 1.

Верхні границі для площі множини M

N (мільйони)	A_N
0,5	1,72
1,0	1,70393
1,5	1,69702
2,0	1,69388
2,5	1,69096
3,0	1,68895
3,5	1,68740
4,0	1,68633
4,5	1,68447
5,0	1,68288

Інший підхід до визначення площі множини M полягає у підрахунку пікселів, які потрапляють до множини M. Тут громіздкі і складні розрахунки дають значення $1{,}50659$.

Якщо виявиться, що точне значення площі A лежить ближче до $1{,}50659$, тоді, звичайно, використання A_N для наближення A є непрактичною процедурою через надзвичайно велику кількість доданків у формулі (10). З іншого боку, якщо точне значення площі A виявиться ближче до величини $1{,}68$, то це означатиме, що границя множини Мандельброта може мати додатну площу.

Таблиця. 2.

Час розрахунку коефіцієнтів b_m у партіях по $500\ 000$

Діапазон m (мільйони)	Час роботи для обчислення b_m (дні)
2,5–3,0	9,0
3,0–3,5	10,8
3,5–4,0	12,5
4,0–4,5	14,4
4,5–5,0	16,2

Як пишуть автори статті (Bittner, 2017), наступні два десятиліття покажуть, як зміняться їхні розрахунки A_N при використанні більш потужних комп’ютерів, якщо тільки нам не пощастить побачити точну площу A, обчислену раніше.

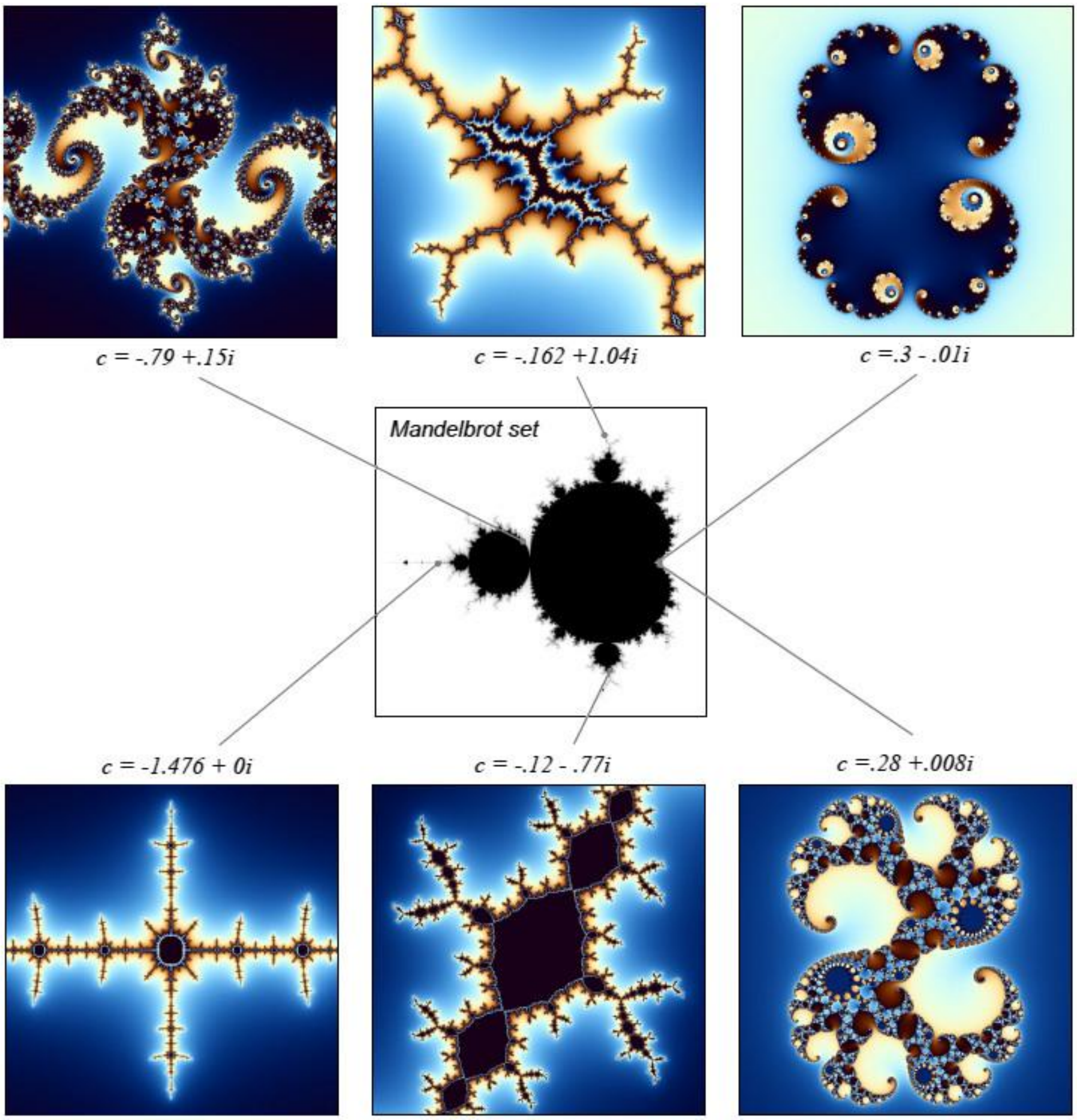
Тепер дамо визначення множини Жюліа, яка має тісний зв'язок з множиною Мандельброта. *Наповненою множиною* Жюліа $K(f)$ для відображення $z \mapsto f(z) = z^2 + c$ називають множину точок комплексної множини, орбіти яких обмежені, тобто в процесі ітерацій не прагнуть до нескінченності. Жюліа визначив множину $J(f)$, як множину, що є границею множини $K(f)$. Множина $J(f)$ називається просто множиною Жюліа. Множина $J(f)$ є підмножиною множини $K(f)$, але в будь-якому ε-околі ($\varepsilon > 0$) точки із множини $J(f)$ присутні як точки, орбіти яких обмежені, так і точки, орбіти яких йдуть у нескінченність.

Множина $J(f)$, на відміну від множини Мандельброта, є самоподібною множиною, тобто одна і та ж форма зустрічається в різних місцях і має різні розміри. При цьому, відображення $z \mapsto f(z) = z^2 + c$ перетворює $J(f)$ в себе, тобто множина $J(f)$ є інваріантною множиною відносно перетворення f. Іншими словами, якщо початкова точка z_0 знаходиться на множині Жюліа, то її орбіта ніколи не залишить множину $J(f)$.

Жюліа і Фату, незалежно один від одного, довели важливу теорему про те, що множина $J(f)$ для відображення $z \mapsto f(z) = z^2 + c$ зв'язна тоді і тільки тоді, коли $c \in M$. Іншими словами, множина Мандельброта для відображення $z \mapsto z^2 + c$ є каталогом всіх зв'язних множин Жюліа цього відображення: *кожній зв'язній множині Жюліа ставиться у взаємно-однозначну відповідність точка множини Мандельброта*. Кожна незв’язна множина Жюліа (фрактальний пил або пил Фату) відповідає деякій точці, розташованій поза множиною Мандельброта.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Отже, в залежності від значення сталої c, тобто від положення точки c на множині Мандельброта (чи поза нею) вигляд множини Жюліа суттєво змінюється. Різноманіття форм тут величезне. Тому ми не беремося зробити опис цих форм в межах цієї статті, а рекомендуємо читачу звернутись до відповідної літератури (Peitgen & Richter, 1986), (Crownover, 1995), (Dewdney, 1987), (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013) і познайомитися з алгоритмами побудови множини Жюліа. Оскільки ці алгоритми відносно прості для програмування на комп'ютері, то, проводячи розрахунки, ви не один раз відчуєте здивування і захоплення. Не забувайте також і про можливості Інтернету.



http://www.karlsims.com/julia.htm
Рис. 11. Множина Мандельброта і супутні множини Жюліа
для відображення $z \mapsto z^2 + c$ при різних значеннях параметра c

Можна стверджувати, що множини Жюліа належать до групи найбільш прекрасних фракталів. Мабуть, неможливо навести приклад такого комп’ютерного експерименту, який враженням від результату перевершував би те почуття здивування і захоплення, що викликає графічна побудова множин Жюліа і Мандельброта. Для прикладу, на рис. 11 показані множина Мандельброта і супутні множини Жюліа для відображення $z \mapsto z^2 + c$ за різних значень параметра c. Стрілочки вказують, які множини Жюліа відповідають виділеним точкам на множині Мандельброта.

Відзначимо, що існує багато способів візуалізації та розфарбування фракталів, щоб надати їм більш естетично цікавого вигляду. Загальний метод полягає в тому, щоб підрахувати кількість ітерацій, за яких величина $|\, z\,|$ перевищить дане вихідне значення (зазвичай це 2), тобто в процесі ітерацій орбіта точки вийде за межі кола радіуса 2. У справедливості даного твердження неважко переконатися. Якщо в процесі ітерацій маємо $|\, z\,| > 2$ (вважаємо, $|\, c\,| < 2$), то відношення двох, послідовних одна за одною ітерацій

$$\frac{|f(z)|}{|\, z\,|} = \frac{|z^2 + c|}{|\, z\,|} \geq \frac{|z^2| - |\, c\,|}{|\, z\,|} = |\, z\,| - \frac{|\, c\,|}{|\, z\,|} > |\, z\,| - 1 > 1$$

і, отже, в подальшому ітерації прагнуть до нескінченості. Це твердження служить критерієм, згідно з яким можна відрізнити точки z комплексної площини, орбіти яких йдуть на нескінченність, від точок z, що утворюють наповнену множину Жюліа.

Як варіант можна запропонувати такий план дій. Якщо зазначена умова $|\, z\,| > 2$ виконується для точок z при числі ітерацій $n \leq 10$, їх можна пофарбувати у перший колір; другим кольором пофарбувати точки зі значеннями ітерацій від 11 до 20; третім кольором – точки зі значеннями від 21 до 30; потім для наступних десяти значень можна повернутися до першого кольору і так далі. Тут можлива повна свобода творчості.

Доречно звернутися до статті Дуаді (Dewdney, 1987), де він наводить такі міркування німецького математика Хайнца-Отто Пайтгена (нар. 1945 року), одного з авторів чудової книги (Peitgen & Richter, 1986): «Пайтген охарактеризував множину Мандельброта як свого роду величезну книгу, в якій кожна множина Жюліа – не більше ніж сторінка. За тим положенням, яке займає точка в множині Мандельброта, можна передбачити поведінку змінної в процесі ітерацій, характеризуючи загальну форму і розмір супутньої множини Жюліа. Тут справа не тільки в тому, чи буде вона зв'язною або незв'язною ... Аналогія, згідно з якою множина Мандельброта є як би словником для множин Жюліа, передбачає фундаментальну відмінність між цими множинами. Структура множини Жюліа самоподібна (в різних масштабах), в той час як для множини Мандельброта (навіть для границі) це не так. В іншому випадку, як говорить Пайтген, множина Мандельброта не мала б здатності кодувати в собі незліченну кількість споріднених множин Жюліа».

Цікаві й думки самого А. Дуаді: «... дивлячись на малюнки, що зображують множини Мандельброта і Жюліа, дивуєшся величезній кількості інформації, що міститься в них.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Це нескінченне різноманіття форм і конструкцій, що відкривається нашому погляду, ніяк не можна порівняти з банальною простотою формули, яка їх породжує: $z_{n+1} \to z_n^2 + c$. Можна вважати, що ітераційний процес, який визначається цією формулою, – це надзвичайно ефективний спосіб розшифрування інформації, що міститься у вихідних даних (значення комплексного параметра c і положення початкової точки z_0), які є своєрідним ключем. Перед нами приклад того, як найпростіша динамічна система може розвинути незначну інформацію, що міститься в ключі, і породити різноманітні високоорганізовані структури».

9. Хто відкрив множину Мандельброта?

Це питання не є тестом на кмітливість і відповісти на нього виявляється не просто. Множина Мандельброта є дуже складним і найвідомішим математичним об'єктом, яка привертає до себе величезну увагу громадськості. Мандельброт стверджував, що він і тільки він відкрив цю множину. Про зображення множини M він говорив як про свій «підпис».

Слід сказати, що незвичні властивості цієї множини були описані П’єром Фату ще у 1906 році. Перші зображення були отримані кількома дослідниками раніше Мандельброта. Прикладом є спільна праця американських математиків Роберта Брукса і Пітера Мательскі (Brooks & Matelski, 1978). Але Мандельброт зауважив, що Брукс і Мательскі створили «грубу версію» множини і «не подумали» про її особливий характер. Не будемо говорити про результати інших дослідників, а процитуємо Дуаді: «Мандельброт був перший, хто отримав зображення на дисплеї комп’ютера і описав його в літературі». Саме Дуаді запропонував називати множину M множиною Мандельброта.

Щоб поставити логічну крапку в цьому питанні, звернемо увагу на суттєве зауваження американського гідромеханіка Мілтона Ван Дайка (1922–2010) з приводу коренів методу пограничного шару (Horgan, 2009), (Van Dyke, 1975). Перифразуючи його, зазначимо, що слід говорити не про корені створення множини M, а про її зерна, причому зерна непророслі, оскільки зазначені праці не мали продовження в роботах їхніх авторів або учнів. І це зовсім невипадково.

Тому саме Бенуа Мандельброта і слід вважати творцем множини Мандельброта.

10. Фрактали в геометрії природи

Фрактальна самоподібність присутня у багатьох реальних системах. Вона проявляється в геометрії дерев і русел річок, будові легень, розгалуженні кровоносних судин, динаміці серцевого ритму, зміні рівнів водних поверхонь, турбулентності тощо (Mandelbrot, 1975), (Mandelbrot, 1977), (Mandelbrot, 1983), (Feder, 1988), (Schroeder, 1991), (Goldberger, Rigney & West, 1990), (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013).

Якщо розглядати нейрони (нервові клітини) через мікроскоп із невеликим збільшенням, то можна чітко побачити клітини, що відходять від тіла нейрона, як асиметричні розгалужені відростки (дендрити). У подальшому збільшенні можна спостерігати ще менші відгалуження, що відходять від великих гілок. У ще більшому збільшенні виявляється новий рівень структури: відгалуження від відгалужень і т. д. На кожному рівні масштабу структура гілок нейрона подібна (хоча й не обов'язково ідентична, як у випадку ідеальних фракталів) структурам, що спостерігаються як у більших, так і у дрібніших масштабах (Goldberger, Rigney & West, 1990).

Взагалі, багато фракталоподібних утворень міститься у людському організмі, де вони відіграють важливу роль у підтримці нормального функціонування організму. Наприклад, фракталоподібна структура артерій і вен здійснює рівномірне кровопостачання різних ділянок органів, фрактальні відгалуження та складки значно збільшують поверхню всмоктування в кишечнику. Уявіть, як хитромудро влаштовані легені, нирки, за своєю структурою вони нагадують дерева з гіллястою кроною. Всі ці системи організму людини чудово описуються фрактальними конфігураціями та розмірностями Хаусдорфа (Goldberger, Rigney & West, 1990).

Послідовні злами, вигини та розгалуження дозволяють лінійній структурі «майже» заповнити певну область площини. Так само лінійна система артерій майже суцільно пронизує тривимірний організм, забезпечуючи його безперебійне кровопостачання. Тут фрактал постає як спосіб організувати взаємодію просторів різної розмірності.

Мабуть, можна стверджувати, що реальні фрактальні структури є слідом хаотичних процесів. Де б у природі, в результаті хаотичного процесу, не формувався той чи інший об'єкт (берег моря, атмосфера, геологічний розлом тощо), скрізь із великою імовірністю можна виявити фрактали (у контурі берегової лінії, у формі хмар, у конфігурації скельних утворень) (Schroeder, 1991).

Спостереження зображень фракталів заспокоює і викликає почуття полегшення й упевненості. Так само діє сталий ритм церковного богослужіння або рефрен колискової пісні.

Музичні твори в основі також фрактальні, оскільки правила їхнього створення аналогічні правилам, які за допомогою повторювань дозволяють творити фрактальні образи (Schroeder, 1991).

Ба більше, як влучно відмічено Мандельбротом, природа любить фрактали не менше (якщо не більше) регулярних форм. На кожну гладку криву або поверхню в навколишньому світі припадає багато (щоб не сказати дуже багато) нерегулярних, а нерідко фрактальних, кривих і поверхонь, наділених найтоншою структурою в різноманітних масштабах. Зрозуміло, що подібно до інших геометричних понять, таких як точка, лінія, поверхня, фрактал – це насамперед абстракція, теоретична модель реальності, результат граничного переходу, недосяжний в реальності.

Ерудиція та енциклопедичні знання Мандельброта допомогли йому систематизувати величезну кількість відомих раніше і знову відкритих фракталів, а також зібрати разом відповідні історичні факти. Його головна книга (Mandelbrot, 1983) про фрактали містить 670 літературних посилань, а кількість посилань на його головну книгу, на час написання цієї статті, дорівнює 55 252.

Сьогодні фрактали становлять важливий розділ сучасної науки. У цьому полягає головна заслуга Мандельброта. Його роботи продовжують надихати дослідників і

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

митців, доводячи, що математика є не лише інструментом для розуміння Всесвіту, але й джерелом краси та творчості.

Бенуа Мандельброт був далекоглядним математиком, чиї ідеї змінили наше уявлення про навколишній світ. Завдяки своїй роботі з фракталами він продемонстрував, що математика може бути як строгою дисципліною, так і джерелом дива, розкриваючи приховані закономірності, які лежать в основі хаотичної та непередбачуваної природи Всесвіту.

Спадщина Мандельброта продовжує надихати нові покоління вчених, митців і мислителів досліджувати нескінченну складність світу крізь призму фрактальної геометрії.

11. Про третю культуру

Беручи до уваги, з одного боку, глибоке наукове наповнення поняття фрактала, а, з іншого боку, красу їх зображень, ми вирішили в останньому розділі статті познайомимо читача з деякими думками авторів книг (Peitgen & Richter, 1986), (National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine, 2018), які, на наш погляд, є особливо актуальними в теперішній час.

Наука і мистецтво – два взаємодоповнюючих способи пізнання світу природи – один аналітичний, інший інтуїтивний. Ми звикли бачити в них протилежні полюси, але хіба вони не залежать один від одного? Мислитель, який намагається своїм розумінням проникнути в природні явища, прагнучи звести всю складність до кількох фундаментальних законів, – чи не мріє він також, занурюючись у багатство форм бачити себе частиною вічної гри природних явищ?

Цей досвід єдності, який може відчувати кожен з нас, не знаходить аналогів в інтелектуальній історії останніх двохсот років. Ніби відчуваючи себе занадто замкнутими в одній душі, розум мистецтва і розум науки розділилися. Єдиний Фауст став двома одновимірними сутностями. Цей поділ здається незворотним, і сьогодні вже не береться до уваги те, що обидві частини разом сприяли розвитку в епоху Просвітництва. Сміливість користуватися власним розумом перетворилася на зухвалість. Холодна раціональність науки й техніки пронизала й змінила світ до такої міри, що саме існування людини опинилося під загрозою. На жаль, мистецтво перед цим виявилося безсилим.

Звичайно, ця напруга позначається на природничих науках. Багато зрілих мислителів усвідомлюють неадекватність усталеної мудрості. Незважаючи на великі, об'єднуючі успіхи у фізиці елементарних частинок або у молекулярній генетиці, кредо «фундаменталістів» втратило свою виняткову привабливість. Вже недостатньо відкрити основні закони і зрозуміти, як «в принципі» влаштований світ.

Дедалі важливішим стає з'ясування закономірностей, через які ці принципи проявляються в реальності. Найточніші фундаментальні закони діють у реально існуючому світі. Будь-який нелінійний процес веде до точок розгалуження, до розгалужень шляху, на яких система може вибрати ту чи іншу гілку. Приймаються рішення, наслідки яких неможливо передбачити, оскільки кожне рішення має характерне підсилення.

Інший приклад зв'язку фундаментальної науки і мистецтва обумовлений результатами досліджень в астрофізиці. Зображення елементів Всесвіту, які раніше телескоп Габбл, а тепер Вебер доставляють землянам, мають величезний емоційний вплив на сучасних людей.

Математики, і особливо фізики, завжди мислили образами; навіть більше того, вони використовують естетичні категорії як критерії, якщо не істинності, то, принаймні, повноти. Видатний німецький математик Герман Вейль (1885–1955) відкрито визнав: «У своїй роботі я завжди прагнув поєднати істинне з прекрасним, і коли мені доводилося вибирати між ними, я зазвичай вибирав прекрасне». У подібних висловлюваннях промовляє глибоке почуття єдності науки і мистецтва.

Список використаних джерел

Mandelbrot B. B. (1975). *Les objects fractals: forme, hasard et dimension*. Flammarion, 190 p.

Mandelbrot B. B. (1977). *Fractals: form, chance and dimension*. W.H. Freeman, San Francisco, 365 p.

Mandelbrot B. B. (1983). *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman, N.Y., 1983. 485 p.

Mandelbrot B. B. (2012). *Fractalist. Memoir of Scientific Maverick*. Pantheon Boors, N. Y., 352 p.

Mandelbrot B. B. (1963). The variation of speculative prices // *The Journal of Business*. 36, No 4, – p. 394-419.

Frame M. and Cohen N. Eds. (2015). *Benoit Mandelbrot. A Life in Meny Dimensions*. World Scientific Publisheng, 553 p.

Puancare Henri.(2019). *Last Thoughts*. Multimeda Publishing, 142 p.

Peitgen H.-O., Richter P. H. (1986). *The Beauty of Fractals*. Images of Complex Dynamical Systems, Spriner, 199 p.

Feder J. (1988). *Fractals*. Plenum Press, N. Y. 283 p.

Schroeder M. (1991). *Fractals, Chaos, Power Laws*. Minutes from an Infinite Paradise, W. H. Freeman, 429 p.

Crownover R. M. (1995). *Introduction to Fractals and Chaos*. Jones and Bartlett Publisher, 299 p.

Goldberger, A. L., Rigney, D. R., & West, B. J. (1990). Science in Pictures: Chaos and Fractals in Human Physiology // *Scientific American*, 262(2). – pp. 42–49.

A. K. Dewdney.(1987). Beauty and profundity, the Mandelbrot set and a flock of its cousins called Julia // *Scientific American*, vol. 257, No 5. – pp. 118–122.

Shishikura Mitsuhiro. (1998). The Harsdorf dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets // *Annals of Mathematics. Second Series*., 147 (2). – pp. 225–267.

Bittner, Daniel, etal. (2017). New approximations for the area of the Mandelbrot set // *Involve, a Journal of Mathematics* 10.4. – pp. 555–572.

Horgan J. (2009). Who discovered the Mandelbrot set? // *Scientific American*. № 36. – pp. 1-4.

Brooks R. & Matelski J. P. (1978). in Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (Eds. Kra, I. &Maskit, B.) 65–71 (Princeton University Press, Princeton, 1981).

Van Dyke Milton. (1975). Computer extension of perturbation series in fluid mechanics. // *SIAM Journal on Applied Mathematics* 28.3 (1975). – pp. 720-734.

Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. (2013). *Фракталы: от удивления к рабочему инструменту. Учебное пособие*. К.: Наукова думка. 270 с.

Грінченко В. Т., Маципура В. Т., Снарський А. О. (2024). *Крок до таємниць нелінійного світу: хаос і фрактали. Навчальний посібник*. Київ: ВПЦ "Київський університет", 416 с.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine. (2018). *The Integration of the Humanities and Arts with Sciences, Engineering, and Medicine in Higher Education: Branches from the Same Tree*. Washington, DC: The National Academies Press, 282 p.

Отримано редакцією журналу: 29.11.2024
Прорецензовано: 10.12.2024
Схвалено до друку: 19.12.2024

Victor GRINCHENKO, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID: 0000-0003-3229-1810
e-mail: vgrinchenko@yahoo.com
Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,

Volodymyr MATSYPURA, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID: 0000-0002-0136-6659
e-mail: mnivtt@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

FRACTALIST

Abstract. *The article is dedicated to the 100-th anniversary of the birth of Benoit Mandelbrot, the man who coined the word "fractal" and, in fact, became the author of a new direction in science - fractal geometry. The article briefly presents his biography, discusses the definition of the concept of fractal. Some attention is paid to Mandelbrot's predecessors and it is considered that it was B. Mandelbrot, thanks to his erudition and encyclopedic knowledge, who was able to systematize a huge number of previously known and newly discovered fractals. Today, fractals constitute an important section of modern science. This is Mandelbrot's main merit. His works continue to inspire researchers and artists, proving that mathematics is not only a tool for understanding the Universe, but also a source of beauty and creativity.*

Keywords: *fractal geometry; dimension; iterations; set; connectedness.*