

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/1.9>

Веніамін КУБЕНКО, акад. НАН України

ORCID ID: 0000-0002-8863-8580

e-mail: vdk@inmech.kiev.ua

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

Ігор ЯНЧЕВСЬКИЙ, д-р фіз.-мат. наук

ORCID ID: 0000-0002-7113-2276

e-mail: i.yanchevskiy@kpi.ua

Національний технічний університет України "КПІ ім. І. Сікорського", Київ, Україна

Олександр ОСТОС, д-р філософії

ORCID ID: 0009-0007-3546-2247

e-mail: ostos.alexander1994@gmail.com

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ІДЕАЛЬНОЇ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ, ЩО ЗБУДЖУЄТЬСЯ СФЕРИЧНИМ СЕГМЕНТОМ У ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОРОЖНИНІ

Представлено розв'язання осесиметричної задачі визначення потенціалу швидкостей ідеальної стисливої рідини у нескінченній круговій циліндричній порожнині зі сферичним сегментом, що вібрує за заданим законом. Розв'язок задачі побудовано на принципі суперпозиції потенціальних функцій, на перерозвиненні частинних розв'язків рівняння Гельмгольца, записаного в циліндричних (сферичних) координатах, по сферичних (циліндричних) хвильових функціях відповідно, що дало можливість, застосувавши також теореми додавання циліндричних функцій, представити повний потенціал швидкостей рідини як у сферичній, так і в циліндричній системах координат. Задовольняючи граничним умовам на поверхні сферичного сегмента та на циліндричній поверхні, задачу зведено до розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів розвинення сферичних і циліндричних складових шуканих потенціалів. Числові експерименти дають змогу виявити так звані резонансоподібні частоти, за яких гідродинамічні параметри суттєво збільшуються. Результати роботи можуть бути використані під час проєктування акустичних датчиків і решіток на основі сферичних ковпачків.

Ключові слова: циліндрична порожнина, стислива рідина, сферичний сегмент, гідродинамічні параметри.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 33E15, 35Q35, 76N30.

Вступ

Дослідження взаємодії акустичних хвиль з різноманітними перешкодами викликають значний науковий і практичний інтерес. Вони передбачають розгляд так званих задач багатократного розсіяння. Актуальність розробки ефективних методів їхнього розв'язання пов'язана із широкими можливостями впровадження результатів у різноманітних галузях людської діяльності. Це, наприклад, керування рухом занурених у рідину частинок акустичним полем, акустична левітація, генерація бульбашок у рідині під дією швидко рухомих твердих тіл тощо. Сучасна медицина є ще однією галуззю застосування ефектів дифракції акустичних хвиль із бульбашками газу – газові мікробульбашки, які вводять у кровоносну систему живих організмів, дають змогу візуалізувати морфологію та різні процеси у серцево-судинній системі й інших органах.

У більшості випадків у задачах багатократного розсіяння розглянуто перешкоди сферичної форми. Найповніше сучасний стан досліджень за цією тематикою відображено в монографіях (Жук, О., Гузь, & Жук Я., 2023), (Кубенко, & Янчевський, 2024) та (Doinikov, 2005). Зокрема, монографія (Жук О., Гузь, & Жук Я., 2023) містить низку теоретичних задач динаміки акустичного збурення рідких крапель в іншій рідині. У монографії (Кубенко, & Янчевський, 2024) викладено методи і результати досліджень взаємодії акустичних хвиль із твердими та деформівними кулями. Вивченню дифракції акустичних хвиль на системах тіл як сферичної, так і циліндричної форм, присвячено монографію (Doinikov, 2005). Методика розв'язання відповідних задач ґрунтується на застосуванні принципу суперпозиції, методу розділення змінних і формул перерозвинення для скалярних гармонічних/хвильових функцій, за допомогою яких задачі зводяться до нескінченних систем алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів розвинення загальних розв'язків диференціальних рівнянь математичної моделі.

Менш дослідженими залишаються методи розв'язання задач багатократного розсіяння в механічних системах, що містять об'єкти неканонічної форми. У прикладному контексті певний інтерес представляють дослідження дифракції акустичних хвиль на об'єктах у вигляді сферичного сегменту, кулях із круговим отвором, сегментованих кулях із різними фізичними параметрами. У публікації (Xia et al., 2018) вивчено характеристики та закономірності акустичного випромінювання сферичним сегментом в безмежному середовищі. Показано, що отримані аналітично результати добре узгоджуються з експериментальними даними, зокрема, було досліджено властивості односпрямованих широкосмугових п'єзоелектричних акустичних датчиків, що використовують осесиметричні коливання як повних, так і неповних сферичних п'єзоелектричних оболонок методом електромеханічного модального аналізу. Також було проаналізовано спрямованість випромінювання складного масиву підводних акустичних решіток на напівсферичній перегородці на основі методу граничних елементів. Подібну задачу розсіювання плоскої хвилі деформівним сегментом замкненої кулі було розв'язано шляхом зведення до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь типу Фредгольма (Liang et al., 2022) та (Резуненко, 2016), на основі якої досліджено спектр власних коливань кулі. У публікації (Резуненко, 2009) запропоновано методику розв'язання задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на кулі з коловим отвором. У роботі (Кубенко, & Савін, 1995) викладено аналітичний метод розрахунку гідродинамічних параметрів ідеальної нестисливої рідини в нескінченній циліндричній порожнині, що збуджується сферичним сегментом на її осі. Проведені авторами (Кубенко, & Савін, 1995) дослідження свідчать про те, що за наявності

циліндричної порожнини амплітудні значення тиску та швидкості більші порівняно з випадком безмежного середовища. При цьому вони підвищуються зі збільшенням відносного радіуса сегмента.

Метою пропонованої роботи є дослідження особливостей хвильового поля рідини в циліндричній порожнині, обумовлених гармонічними коливаннями сферичного сегмента. Очікуємо, що певні співвідношення між радіусами порожнини

і сегмента та частоти збуджувального впливу можуть суттєво позначитися на характеристиках акустичного поля.

1. Постановка задачі

Розглянемо нескінченну кругову циліндричну порожнину радіусом ρ_0 , що заповнена ідеальною стисливою рідиною. Усередині порожнини симетрично відносно її осі перебуває сферичний сегмент, геометрію якого визначаємо радіусом R і кутом θ_0 (рис. 1.1).

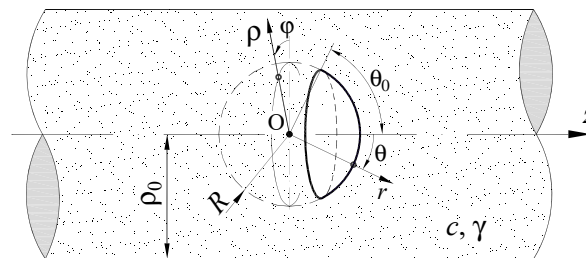


Рис. 1.1. Системи координат

Віднесемо порожнину до циліндричних координат (ρ, z, ϕ) так, що вісь порожнини збігається з віссю z . Із сегментом пов'яжемо сферичну систему координат $Or\theta\phi$ з початком у центрі сегменту, а зенітний кут θ виміряємо від осі z (рис. 1.1). Оскільки наявна осьова симетрія задачі, то координата ϕ випадає з розгляду.

Вважаємо, що сегмент здійснює гармонічні за часом осесиметричні радіальні коливання, амплітуда швидкості яких є заданою функцією частоти ω і кута θ – $V(\theta, t) = V(\theta)e^{-i\omega t}$.

Під час розв'язання задачі доцільно ввести до розгляду безрозмірнісні позначення, прийнявши за основні величини радіус циліндричної порожнини ρ_0 і характеристики рідини, що заповнює порожнину, а саме – швидкість поширення в ній звуку c та густину γ :

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}; \bar{r} = \frac{r}{\rho_0}; \bar{z} = \frac{z}{\rho_0}; \bar{R} = \frac{R}{\rho_0}; \bar{\omega} = \frac{\omega \rho_0}{c}; \bar{v} = \frac{v}{c}; \bar{p} = \frac{p}{\gamma c^2}; \bar{\kappa} = \kappa \rho_0; \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{c \rho_0}. \quad (1.1)$$

Тут v – швидкість руху рідини, p – гідродинамічний тиск.

Надалі використовуємо тільки безрозмірнісні величини, тому риска над ними буде опущена.

Позначимо потенціали швидкостей розсіяних хвиль у рідині всередині сферичної області $0 \leq \rho < R$ через Φ_1 , а ззовні неї ($\rho \geq R$) – через Φ_0 . Ці потенціали є розв'язками рівняння Гельмгольца (Кубенко, & Янчевський, 2024)

$$\Delta \Phi_j + \kappa^2 \Phi_j = 0 \quad (j = 0, 1) \quad (1.2)$$

і мають задовольняти певним граничним умовам. Зокрема, на твердій поверхні циліндричної порожнини нормальна складова швидкості рідини має дорівнювати нулю –

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (1.3)$$

За умови, що на сегменті і поза його поверхнею маємо безвідривну взаємодію "зовнішньої" та "внутрішньої" до області $\rho = R$ рідин, то граничні умови полягають у рівності їхніх нормальних складових швидкостей

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (0 \leq \theta < \pi) \quad (1.4)$$

та рівності тиску на умовній поверхні розділення областей:

$$\Phi_0|_{r=R} = \Phi_1|_{r=R} \quad (\theta_0 \leq \theta < \pi). \quad (1.5)$$

Варто зауважити, що в (1.2) і далі множник $e^{-i\omega t}$ маємо на увазі; Δ – диференціальний оператор Лапласа, а у записі (1.3)–(1.5) враховані співвідношення лінійної гідроаеропружності для швидкості і гідродинамічного тиску в рідині:

$$\mathbf{v}_j = \text{grad } \Phi_j; \quad p_j = i\omega \Phi_j \quad (j = 0, 1). \quad (1.6)$$

Умову для заданої швидкості на поверхні сегмента запишемо так:

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right|_{r=R} = V(\theta) \quad (0 \leq \theta < \theta_0). \quad (1.7)$$

Потенціал поля розсіяних сегментом хвиль у порожнині має задовольняти також умовам випромінювання Зоммерфельда на нескінченності (Кубенко, & Янчевський, 2024)

$$\left(\frac{d\Phi_0}{d\rho} - i\kappa \Phi_0 \right) \rightarrow 0, \quad \Phi_0 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{\rho^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Також обидва потенціали мають бути обмеженими на осі z і в початку координат (точці O):

$$\begin{aligned}\Phi_0 &\rightarrow \text{const} \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow 0; \\ \Phi_1 &\rightarrow \text{const} \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Визначення гідродинамічних параметрів рідини (1.6) полягає в розв'язанні рівнянь (1.2) із граничними умовами багатозв'язної задачі (1.4), (1.5), (1.7)–(1.9).

2. Побудова потенціалів

Використаємо метод розділення змінних у відповідних системах координат. Виходячи з виду граничних поверхонь задачі й користуючись принципом суперпозиції, хвильовий потенціал Φ_0 акустичного поля в циліндричній порожнині представимо у вигляді суми циліндричного $\Phi_{0\text{cyl}}(\rho, z)$ і сферичного $\Phi_{0\text{sph}}(r, \theta)$ потенціалів –

$$\Phi_0 = \Phi_{0\text{cyl}}(\rho, z) + \Phi_{0\text{sph}}(r, \theta). \quad (2.1)$$

Циліндричний і сферичний розв'язки рівняння Гельмгольца (1.2) мають вигляд (Кубенко, & Янчевський, 2024)

$$\Phi_{0\text{cyl}}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0(\sqrt{\kappa^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi; \quad (2.2)$$

$$\Phi_{0\text{sph}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n h_n(\kappa r) P_n(\cos \theta). \quad (2.3)$$

Потенціал Φ_1 рідини всередині сферичної області $\rho < R$ обираємо у формі

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n j_n(\kappa r) P_n(\cos \theta). \quad (2.4)$$

Тут $j_n(z)$, $h_n(z)$ – сферичні функції Бесселя і Ганкеля першого роду порядку n , відповідно; $J_0(z)$ – циліндрична функція Бесселя нульового порядку; $P_n(x)$ – функція Лежандра; X_n , Z_n – невідомі константи; $B(\xi)$ – невідома густина; ξ – константа поділу.

Вибір необхідного розв'язку з множини (2.2)–(2.4) реалізується шляхом задоволення граничних умов. Відзначимо, що умови (1.8) і (1.9) вже задоволені вибором розв'язків (2.2)–(2.4). Складові $\Phi_{0\text{cyl}}$ і $\Phi_{0\text{sph}}$ потенціалу Φ_0 у формулі (2.1), згідно з (2.2) і (2.3), записані в системах координат, координатна поверхня яких збігається з відповідною граничною поверхнею гідропружної системи. Для задоволення граничних умов на кожній такій поверхні необхідно потенціал Φ_0 представити в системі координат, пов'язаній із цією поверхнею. Для цього скористаємося співвідношеннями (Кубенко, & Янчевський, 2024), що дозволяють циліндричні хвильові функції виразити через сферичні хвильові функції, і навпаки.

У підсумку вирази для потенціалу Φ_0 сумарного акустичного поля рідини в циліндричній і сферичній системах координат можуть бути записані так:

$$\Phi_0(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) H_0(\sqrt{\kappa^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0(\sqrt{\kappa^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi; \quad (2.5)$$

$$\Phi_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [X_n h_n(\kappa r) + Y_n j_n(\kappa r)] P_n(\cos \theta), \quad (2.6)$$

причому між невідомими функціями і коефіцієнтами виконуються рівності:

$$A(\xi) = \frac{1}{2\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} X_n i^{-n} P_n\left(\frac{\xi}{\kappa}\right); \quad Y_n = i^n (2n+1) \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) P_n\left(\frac{\xi}{\kappa}\right) d\xi. \quad (2.7)$$

Тут $H_0(z)$ – циліндрична функція Ганкеля нульового порядку 1-го роду.

3. Виконання граничних умов

Співвідношення (2.1)–(2.7) дають можливість перейти до задоволення граничних умов. Умова (2.3) на поверхні циліндричної порожнини з урахуванням виразів (2.7) і єдиності перетворення Фур'є дає змогу записати потенціал Φ_0 у сферичній системі координат через коефіцієнти X_n (Кубенко, & Янчевський, 2024)

$$\Phi_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [X_n h_n(\kappa r) - j_n(\kappa r) \frac{2n+1}{2\kappa} \sum_{m=0}^{\infty} X_m i^{n-m} q_{nm}] P_n(\cos \theta), \quad (3.1)$$

$$\text{де } q_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1(\sqrt{\kappa^2 - \xi^2} \rho_0)}{J_1(\sqrt{\kappa^2 - \xi^2} \rho_0)} P_m\left(\frac{\xi}{\kappa}\right) P_n\left(\frac{\xi}{\kappa}\right) d\xi.$$

На наступному етапі подання потенціалів (3.1) і (3.4) використовують для задоволення умов (1.4), (1.5). Унаслідок ортогональності поліномів Лежандра з умови (1.4) одержимо

$$Z_n = X_n \frac{h'_n(\kappa R)}{j'_n(\kappa R)} - \frac{2n+1}{2\kappa} \sum_{m=0}^{\infty} X_m i^{n-m} q_{nm}. \quad (3.2)$$

Тут штрих позначає похідну спеціальної функції за радіальною координатою, наприклад $j'_n(\kappa R) = \frac{d}{dr} [j_n(\kappa r)] \Big|_{r=R}$.

Невідомі коефіцієнти X_n визначаємо з граничних умов (1.5) і (1.7), які можуть бути об'єднані так:

$$H(\theta_0 - \theta) \cdot [v_0(R, \theta) - V(\theta)] + H(\theta - \theta_0) \cdot [p_0(R, \theta) - p_1(R, \theta)] = 0, \quad (3.3)$$

де $H(\theta)$ – функція Гевісайда.

Підставляючи у (3.3) вирази (2.4) і (2.6) з урахуванням (3.2), отримаємо рівняння:

$$0 = H(\theta_0 - \theta) \left\{ V(\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \left[X_n h'_n(\kappa R) - \frac{2n+1}{2\kappa} j'_n(\kappa R) \sum_{m=0}^{\infty} X_m i^{n-m} q_{nm} \right] P_n(\cos \theta) \right\} + \\ + H(\theta - \theta_0) i \kappa \sum_{n=0}^{\infty} X_n \left[h_n(\kappa R) - \frac{h'_n(\kappa R)}{j'_n(\kappa R)} j_n(\kappa R) \right] P_n(\cos \theta),$$

яке, помноживши на $P_f(\cos \theta) \sin \theta$ та проінтегрувавши за кутовою координатою, дає змогу одержати нескінченну систему алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів X_n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n \left[h'_n(\kappa R) \alpha_{fn} - i \omega \left[h_n(\kappa R) - \frac{h'_n(\kappa R)}{j'_n(\kappa R)} j_n(\kappa R) \right] \beta_{fn} - \sum_{m=0}^{\infty} i^{m-n} q_{mn} \alpha_{fm} \frac{2m+1}{2\kappa} j'_m(\kappa R) \right] = W_f \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (3.4)$$

Тут позначено:

$$W_f = \int_0^{\theta_0} V(\theta) P_f(\cos \theta) \sin \theta d\theta; \quad \alpha_{fn} = \int_0^{\theta_0} P_f(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta; \quad \beta_{fn} = \delta_{fn} \frac{2}{2n+1} - \alpha_{fn}.$$

Можна припустити, що система (3.4) належить до класу регулярних і її розв'язок можна побудувати методом усичення з параметром N , тобто X_n варто розглядати як розв'язок скінченної системи з N -рівнянь. Параметр усичення при цьому визначається пробним шляхом за критерієм досягнення достатньої точності задоволення граничних умов задачі.

Аналіз системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.4) показує, що вона структурно подібна до розрахункової системи у випадку нестисливої рідини (Кубенко, & Савін, 1995), водночас замість степеневих функцій (див. Кубенко, & Савін, 1995) тут використано сферичні функції Бесселя. Це обумовлено залученням принципово інших трансляційних формул і теорем додавання спеціальних функцій, що і визначає певну складність методу розв'язання розглянутої задачі порівняно з представленою у роботі (Кубенко, & Савін, 1995) для нестисливої рідини.

Визначивши коефіцієнти X_n ($n = 0, N$), на наступному етапі обчислюємо гідродинамічний тиск і швидкість точок акустичного середовища за співвідношеннями (1.6), у яких потенціали Φ_j ($j = 0, 1$) визначаємо виразами (2.4), (3.1) і (3.2). Зокрема, для радіальних швидкостей точок рідини у сферичній системі координат будуть справедливими такі рівності:

$$v_0(r, \theta, t) = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^N \left[X_n \frac{h'_n(\kappa r)}{j'_n(\kappa r)} - \frac{2n+1}{2\kappa} \sum_{m=0}^{\infty} X_m i^{n-m} q_{nm} \right] j'_n(\kappa r) P_n(\cos \theta); \\ v_1(r, \theta, t) = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^N \left[X_n \frac{h'_n(\kappa r)}{j'_n(\kappa r)} - \frac{2n+1}{2\kappa} \sum_{m=0}^{\infty} X_m i^{n-m} q_{nm} \right] j'_n(\kappa r) P_n(\cos \theta). \quad (3.5)$$

Тут ураховано множник $e^{-i\omega t}$, який до цього мали на увазі.

Дійсна частина гідродинамічного параметру визначає його значення на початку періоду, а уявна – через чверть періоду. Амплітудне значення обчислюємо за теоремою Піфагора від дійсної та уявної частин.

4. Числові результати

Під час проведення числових експериментів ми вважали, що циліндрична порожнина заповнена водою, густина і швидкість поширення в ній звуку дорівнюють $\gamma = 1000 \text{ кг/м}^3$ і $c = 1500 \text{ м/с}$, відповідно.

У розв'язанні нескінченної системи алгебраїчних рівнянь (3.4) параметр усичення прийнято таким, що дорівнює $N = 40$, а безрозмірна частота коливань сегмента ω варіювалася в діапазоні від 0.2 до 10 з кроком 0.05 ($\kappa = \omega$).

Рисунок 4.1 ілюструє обчислений на основі співвідношень (1.6), (2.4), (3.1) і (3.2) розподіл амплітудного значення гідродинамічного тиску в околі сферичного сегмента з кутом розкриття $2\theta_0 = \pi/2$ за різних значень його радіуса на тій частоті збудження ω , що є однією з резонансоподібних для цієї механічної системи (Жук О., Гузь, & Жук Я., 2023; Кубенко, & Янчевський, 2024).

Рисунок 4.1а відповідає параметрам $R = 0.25$ і $\omega = 7.0$, рис. 4.1б – $R = 0.5$ і $\omega = 8.4$, рис. 4.1в – $R = 0.75$ і $\omega = 5.65$. Функцію $V(\theta)$ обрано у вигляді $V(\theta) = \cos(\pi\theta/2\theta_0)$.

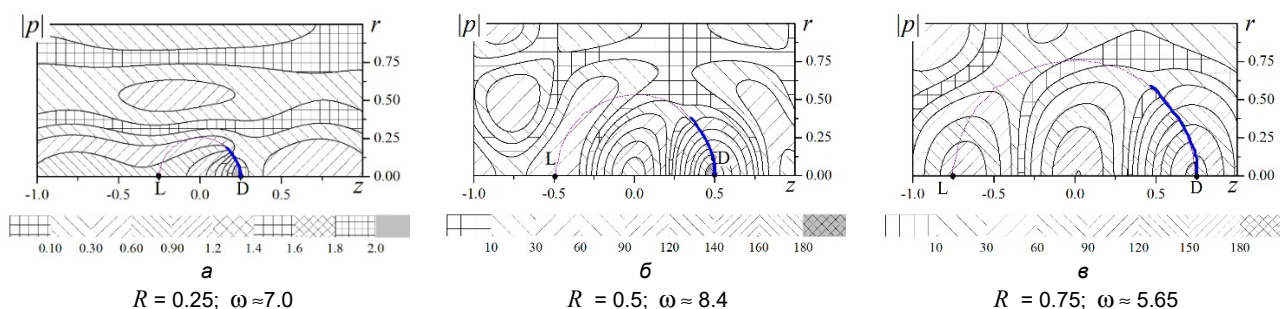


Рис. 4.1. Поле тиску в околі сегмента

З рисунку видно, що тиск набуває найбільших значень в околі сегмента, а максимальний тиск спостерігаємо вздовж осьової координати z в околі точки D з координатами $(+R, 0)$.

На рис. 4.1 також показано виконання граничної умови (1.7) про рівність гідродинамічного тиску зовні і зсередини умовної поверхні розділення областей ($r = R$). Видно, що збільшення відносного радіуса сегмента за відповідних значень частоти збуджувального впливу суттєво позначається на характеристиках акустичного поля, а саме розподіл тиску стає більш нерівномірним і вираженим в околі початку координат і точці D. За відносно великих радіусів сегмента ($R \geq 0.5$) виявлено утворення кількох ексцентричних областей зміни значень тиску, на відміну від випадку $R = 0.25$.

Варто також зауважити, що "умовно резонансні частоти" механічної системи можуть бути визначені виключно через аналіз усіченої розрахункової системи рівнянь (3.4) – на цих частотах детермінант матриці набуває великих значень.

На рис. 4.2 для сегмента з $R = 0.5$ проведено сканування гідродинамічного тиску у точці D від різних значень частоти коливань сегмента з $\theta_0 = \pi/4$ (рис. 4.2a) і з $\theta_0 = \pi/2$ (рис. 4.2б). На цьому рисунку $\text{Re}(p)$ та $\text{Im}(p)$ відображають дійсну й уявну частину тиску, відповідно.

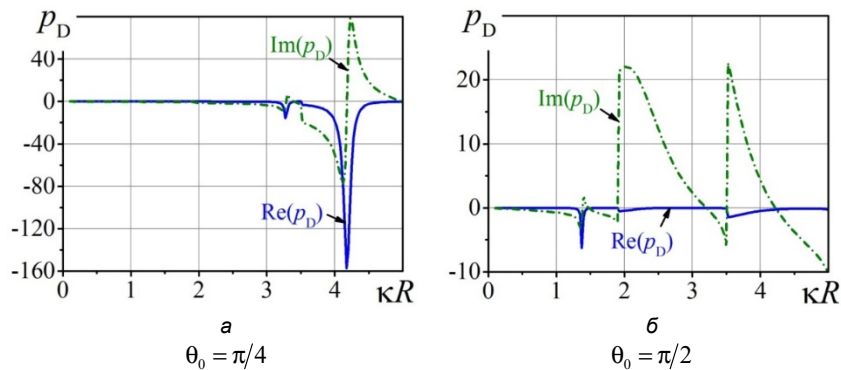


Рис. 4.2. Тиск у точці D за $R = 0.5$

З аналізу представлених на рис. 4.2a результатів випливає, що сплески значень тиску спостерігаємо за великих значень частоти, а саме за $\omega > 3$. Резонансоподібну поведінку тиску виявлено за $\kappa R \approx 4.2$ ($\omega \approx 8.4$). На рис. 4.2б помітно більше резонансоподібних частот. Також варто зауважити, що уявна частина тиску має більші значення, ніж дійсна.

На рис. 4.3 представлені розподіли дійсних та уявних частин радіальної та кутової швидкостей уздовж осьової координати r за частоти $\omega = 8.4$ та фіксованого значення кутової координати $\theta_1 = \pi/2$. Рисунок 4.3a побудовано для сегмента розміром $\theta_0 = \pi/4$, рис. 4.3б – для $\theta_0 = \pi/2$.

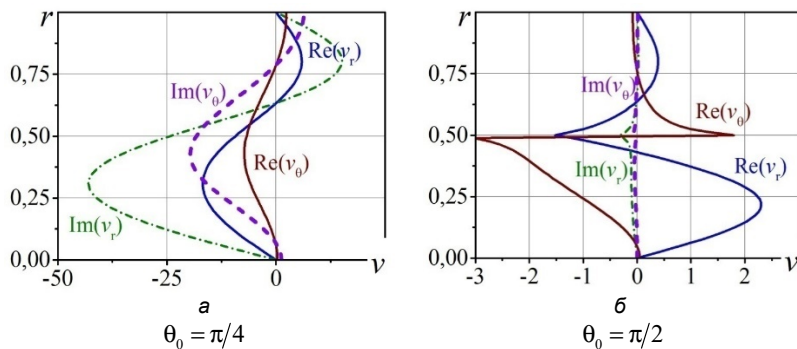


Рис. 4.3. Розподіл швидкості вздовж осі r за $\theta_1 = \pi/2$

Із цих рисунків видно, що виконується гранична умова як на твердій поверхні циліндричної порожнини (1.5), оскільки за $r = 1$ маємо $|v_r| \approx 0$, так і на уявній границі поділу рідини за $r = R$. З рисунку також випливає, що у випадку $\theta_0 = \pi/4$ (рис. 4.3a) уявні частини як радіальної, так і кутової швидкості набувають вищих амплітудних значень, ніж відповідні їхні дійсні частини. За $\theta_0 = \pi/2$ (рис. 4.3б) – навпаки. Визначення причини цього явища потребує окремого дослідження.

Аналіз представлених на рис. 4.3 кривих свідчить, що амплітуда швидкості для сегмента з удвічі меншим кутом розкриття ($\theta_0 = \pi/4$), приблизно в десять разів більша. Це може бути обумовлено локалізацією області збурення рідини.

Для аналізу впливу циліндричної границі на дифракційні процеси в околі сферичного сегмента були обчислені гідродинамічні параметри рідини за коливань сегмента в безмежному середовищі. Усунення граничної умови (1.3) у цьому випадку приводить до аналогічних до (3.4) і (3.5) розрахункових виразів, у яких необхідно покласти $q_{nm} = 0$.

На рис. 4.4 представлено залежність амплітуди швидкості рідини у точці D від частоти коливань сегментів з різними кутами θ_0 у циліндричній порожнині (криві cyl) і у безмежному середовищі (криві unl).

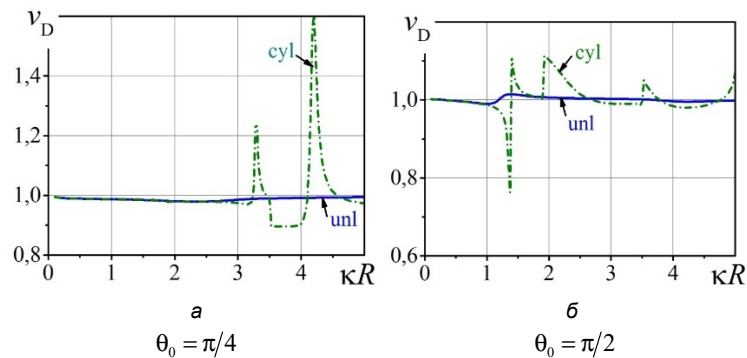


Рис. 4.4. Швидкість у точці D за $R = 0.5$

З рис. 4.4 можна зробити висновок, що в безмежному середовищі амплітуда швидкості рідини в точці D майже не залежить від частоти коливання сегмента. За наявності циліндричної порожнини (криві cyl) чітко виявляються «умовно резонансні» частоти. Рисунок 4.4 підтверджує той факт, що для сегмента з меншим кутом θ_0 ($\theta_0 = \pi/4$) максимальні значення швидкості у лобовій точці D значно більші, ніж для випадку $\theta_0 = \pi/2$, і це також відбувається за більших частот збудження сегмента.

На рис. 4.5 криві compr відображають розподіл радіальної швидкості стисливої рідини уздовж зенітного кута θ за фіксованого значення частоти коливання сегмента ($\omega = 8.4$).

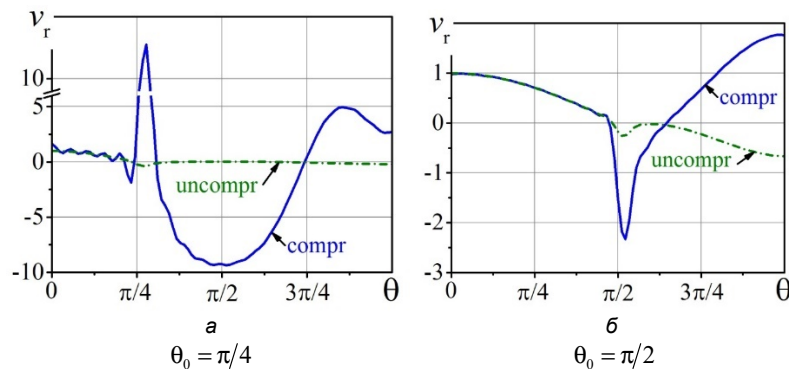


Рис. 4.5. Розподіл швидкості за перерізом сегмента за $R = 0.5$; $\omega = 8.4$

Криві uncompr на цьому рисунку відображають результати розв'язання задачі про коливання також сегмента у нестисливій рідині, що побудовані на підставі представлених у роботі (Kubenko, & Savin, 1995) виразів. З порівняння кривих видно, що на поверхні сегмента результати приблизно збігаються. Суттєву відмінність спостерігається на уявній межі розділення розрахункових областей ($\theta > \theta_0$). Амплітуда швидкості коливань сегмента у постановці ідеально стисливої рідини (крива compr) значно вища, ніж для випадку нестисливої рідини. Це пояснюємо врахуванням стисливості рідини в розглянутій постановці.

Дискусія і висновки

У роботі запропоновано аналітичний метод дослідження гідродинамічних параметрів у заповненій ідеальною стислою рідиною нескінченній циліндричній порожнині, що містить вібруючий осесиметрично сферичний сегмент. Розв'язок граничної задачі багатократного розсіяння побудовано у вигляді розвинення за власними функціями в циліндричних і сферичних координатах, пов'язаних із кожною граничною поверхнею. Для задоволення граничних умов використано співвідношення, що виражають циліндричні хвильові функції через сферичні, та навпаки. Це дало змогу одержати нескінченну систему алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів шуканого розв'язку, під час розв'язання якої використано метод усичення.

Проведені числові експерименти показали, що в околі досліджуваного сферичного сегмента тиск набуває найбільших значень, причому зі зменшенням кутової довжини сегмента чи зі збільшенням його відносного радіуса абсолютні значення тиску та швидкості зростають. При цьому так звані умовно резонансні частоти, за яких відбувається це зростання, можуть бути визначені виключно через аналіз детермінанту розрахункової системи рівнянь. Наявність циліндричної порожнини обумовлює появу нових умовно резонансних частот, яких не було у відповідній постановці задачі з безмежним середовищем.

На відміну від задачі для нестисливої рідини, де усталені процеси моделюються рівнянням Лапласа, застосування рівняння Гельмгольца для моделювання динамічних процесів у стисливій рідині приводить до необхідності застосування принципово інших базових співвідношень, зокрема і трансляційних теорем та формул додавання спеціальних функцій. Хоча як у випадку стисливої, так і у випадку нестисливої рідин для отримання прийнятної точності результатів знадобилося приймати практично однакові параметри усичення для розв'язання розрахункових нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Для стисливої рідини у циліндричній порожнині характерне

існування умовно резонансних частот, за яких амплітудні значення гідродинамічних параметрів у разі перевищують амплітуду зовнішнього навантаження. Проте модель нестисливої рідини не дає змоги виявляти такі ефекти.

Внесок авторів: Веніамін Кубенко – постановка задачі, концептуалізація, методологія, написання чорнового варіанту рукопису; Ігор Янчевський – методологія, побудова графіків, числові експерименти, аналіз результатів; Олександр Остос – аналіз джерел, побудова аналітичного розв'язку, аналіз результатів, оформлення рукопису.

Список використаних джерел

- Жук, О. П., Гузь, О. М., & Жук Я. О. (2023). *Радіаційні сили акустичного поля в рідині з включеннями*. Альянт.
- Кубенко, В. Д., & Янчевський, І. В. (2024). *Дифракція акустичних хвиль на системах неоднотипних тіл*. Політехніка.
- Резуценко, В. А. (2009). Дифракция плоской акустической волны на сфере с круговым отверстием. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка*, 850, 71–77.
- Резуценко, В. А. (2016). Сфера, составленная из мягкого и жесткого круговых сегментов, в поле плоской акустической волны. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія: Радіофізика та електроніка*, 25, 58–65.
- Doinikov, A. A. (2005). *Bubble and Particle Dynamics in Acoustic Fields: Modern Trends and Applications*. Research Signpost.
- Kubenko, V. D., & Savin, V. A. (1995). Determination of the dynamic characteristics of an ideal incompressible liquid excited by a spherical segment in a cylindrical cavity. *International Applied Mechanics*, 31, 567–574.
- Liang, X.-X., Linz, N., Freidank, S., Paltauf, G., & Vogel, A. (2022). Comprehensive analysis of spherical bubble oscillations and shock wave emission in laser-induced cavitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 940, A5.
- Xia, J., Huang, H., Zhang, C., & Li, Q. (2018). Analysis on acoustic directivity of spherical cap transducers. *Acta Acustica*, 43, 592–599.

References

- Zhuk, O. P., Guz, O. M., & Zhuk, Ya. O. (2023). *Radiation forces of acoustic field in liquid with inclusions*. Aliant [in Ukrainian].
- Kubenko, V. D., & Yanchevskyi, I. V. (2024). *Acoustic waves diffraction on systems of heterogeneous bodies*. Polytechnic [in Ukrainian].
- Doinikov, A. A. (2005) *Bubble and Particle Dynamics in Acoustic Fields: Modern Trends and Applications*. Research Signpost.
- Xia J., Huang H., Zhang C., & Li Q. (2018). Analysis on acoustic directivity of spherical cap transducers. *Acta Acustica*, 43, 592–599.
- Liang, X.-X., Linz, N., Freidank, S., Paltauf, G., & Vogel, A. (2022). Comprehensive analysis of spherical bubble oscillations and shock wave emission in laser-induced cavitation. *Journal of Fluid Mechanics*, 940, A5.
- Rezunencko, V. A. (2009). Diffraction of a plane acoustic wave on a sphere with a circular hole. *Bulletin of V. N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, 850, 71–77 [In Russian].
- Rezunencko, V. A. (2016). A sphere composed of soft and rigid circular segments in the field of a plane acoustic wave. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Series: Radiophysics and Electronics*, 25, 58–65 [In Russian].
- Kubenko, V. D., & Savin, V. A. (1995). Determination of the dynamic characteristics of an ideal incompressible liquid excited by a spherical segment in a cylindrical cavity. *International Applied Mechanics*, 31, 567–574.

Отримано редакцією журналу / Received: 26.06.24

Прорецензовано / Revised: 07.02.25

Схвалено до друку / Accepted: 12.03.25

Veniamin KUBENKO, Active Member of the National Academy of Sciences of Ukraine

ORCID ID: 0000-0002-8863-8580

e-mail: vdk@inmech.kiev.ua

S. P. Tymoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Ihor YANCHEVSKIY, DSc, Prof.

ORCID ID: 0000-0002-7113-2276

e-mail: i.yanchevskiy@kpi.ua

National Technical University of Ukraine "I. Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine

Oleksandr OSTOS, PhD (Phys. & Math.)

ORCID ID: 0009-0007-3546-2247

e-mail: ostos.alexander1994@gmail.com

S. P. Tymoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

DYNAMIC CHARACTERISTICS OF AN IDEAL COMPRESSIBLE FLUID EXCITED BY A SPHERICAL SEGMENT IN A CYLINDRICAL CAVITY

The manuscript presents solving of axisymmetric problem of determining the velocity potential of an ideal compressible fluid in an infinite circular cylindrical cavity with a spherical segment, vibrating according to a given law. The solution of the problem is based on the principle of superposition of potential functions, on the redevelopment of partial solutions of the Helmholtz equation, written in cylindrical (spherical) coordinates, in spherical (cylindrical) wave functions, respectively, which made it possible, also using the theorems of addition of cylindrical functions, to represent the full potential of fluid velocities in both spherical and cylindrical coordinate systems. Satisfying the boundary conditions on the surface of the spherical segment and on the cylindrical surface, the problem is reduced to solving an infinite system of algebraic equations for the coefficients of the expansion of the spherical and cylindrical components of the desired potentials. Numerical experiments allow us to identify the so-called "resonance-like frequencies", at which the hydrodynamic parameters increase significantly. The results of the work can be used in the design of acoustic sensors and arrays based on spherical caps.

Key words: cylindrical cavity, compressible fluid, spherical segment, hydrodynamic parameters

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.