

УДК 519.9

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/1.20>

Тамара ПЕТРОВА, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ORCID ID: 0000-0002-5293-9701

e-mail: tamarapetrova2703@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ДЕЯКІ НЕГАТИВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДЛЯ МОНОТОННОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ДРОБОВУ ПОХІДНУ КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКУ

Розглянуто проблеми інтерполяційного наближення функцій із класу Соболева алгебраїчними поліномами. Питання позитивної апроксимації – це питання апроксимації позитивних та r -разів неперервно диференційованих функцій позитивними алгебраїчними поліномами. Питання монотонної апроксимації – це питання наближення монотонних функцій з класу Соболева монотонними алгебраїчними поліномами. У попередніх роботах учені розглядали як натуральний індекс у просторі Соболева, що не дорівнює одиниці, так і дійсний індекс, який строго більший за 2. Було доведено, що оцінки Гопенгауза не виконуються для дійсного індексу більшого за два для випадку монотонної апроксимації. В усіх попередніх дослідженнях розглянуто також дійсний індекс простора Соболева.

У пропонуваній роботі розглянуто питання наближення монотонних функцій у просторі Соболева з комплексним індексом $r \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} r \in (2, 3)$ ($\operatorname{Re} r$ – дійсна частина комплексного числа r , $\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел), тому отримані результати є актуальними. Побудовано контрприклад, який показує, що оцінка, яка узагальнює оцінку Гопенгауза, є хибною. Це дослідження є узагальненням відповідного результату на випадок простору Соболева з комплексним індексом. Згодом плануємо одержати результати для $r \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} r > 3$, а також аналогічні результати для опуклого наближення.

Ключові слова: наближення функції, простір Соболева з комплексним індексом, алгебраїчний поліном, монотонна функція, опукла функція.

AMS 2020 класифікація: 41A10.

Вступ

Нехай $W^r, r \in \mathbb{N}$ клас функцій $f \in C[0,1]$, таких, що мають абсолютно неперервну $(r-1)$ похідну і $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ майже скрізь на $[0,1]$.

А. Гопенгауз для $r \in \mathbb{N}$ (Gopengauz, 1994) посилив пряму теорему Нікольського – Тімана, довівши, що кожну функцію $f \in W^r$ можна наблизити алгебраїчним многочленом p_n степеня $< n$ так, що

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c(r) \left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} \right)^r, n > r, \quad (1)$$

де c – абсолютна стала.

Відомі фізики довели, що за $r = 1, 2$ оцінка (1) справедлива і за наближення монотонної функції монотонним многочленом (DeVore, & Yu, 1985). А саме, якщо монотонна функція $f \in W^r$, то існує монотонний многочлен p_n , такий, що бачимо в (1). У роботі (Gonska et al., 2000) з'ясовано, що для натурального $r > 2, r \in \mathbb{N}$ оцінка (1) хибна для монотонного наближення. Для опуклого наближення за $r > 2, r \in \mathbb{N}$ доведено, що оцінка (1) також є неправильною (Петрова, 2005).

Для $r \in \mathbb{R}$ уведемо клас функцій $W^r[0,1]$, таких, що $D_{0+}^{r-1}f$ абсолютно неперервна і $|D_{0+}^r f| \leq 1$ майже скрізь на $[0,1]$ (тут $D_{0+}^{r-1}f$ – лівостороння дробова похідна (Samko, Kilbas, & Marichev, 1987)). Через Π_n будемо позначати множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$ і через Δ^1 – множину монотонних на $[0,1]$ функцій.

Аналогічно можна ввести клас функцій $W^r[0,1]$ для $r \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} r > 0$ (тут $\operatorname{Re} r$ – дійсна частина комплексного числа r).

Простір Соболева $W^r[0,1]$ з $r \in \mathbb{R}, r > 2$ було розглянуто в роботі (Петрова, 2003) й отримано такий результат:

Теорема 1. Нехай $r > 2, r \in \mathbb{R}$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує така функція $F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \cap \Delta^1$, що для будь-якого полінома $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^1$ справджується одна з таких властивостей:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{(\varphi(x))^r} = +\infty$$

або

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{(\varphi(x))^r} = +\infty,$$

де $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

Вагомим здобутком цієї роботи є узагальнення результатів, отриманих у дослідженні (Петрова, 2003) на випадок $r \in \mathbb{C}, r = \alpha + i\beta, \alpha \in (2,3)$.

1. Основні означення та допоміжні твердження

Спочатку нагадаємо основні означення та факти, які використовуємо в роботі.

Означення 1. Нехай $\varphi(x) \in L_1(a,b)$. Інтеграли

$$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > a,$$

$$(I_{b-}^\alpha \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x < b,$$

де $\alpha > 0$ є інтегралами дробового порядку α . Перший називають лівостороннім, а другий – правостороннім. Що стосується дробового диференціювання, то його потрібно ввести як операцію, обернену до дробового інтегрування (Samko, Kilbas, & Marichev, 1987).

Означення 2. Для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a, b]$, кожен із виразів

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt,$$

$$(D_{b-}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt$$

називають дробовою похідною порядку α , $0 < \alpha < 1$, відповідно лівосторонньою та правосторонньою.

Перейдемо до дробових похідних порядків $\alpha \geq 1$

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},$$

де $[\alpha]$ – ціла частина числа і $\{\alpha\}$ – дробова частина числа α . Якщо α – ціле число, то під дробовою похідною порядку α будемо розуміти звичайне диференціювання:

$$D_{a+}^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, D_{b-}^{\alpha} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Якщо ж α – не ціле число, то правильно ввести означення дробових похідних за формулами:

$$D_{a+}^{\alpha}f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha] + 1,$$

$$D_{b-}^{\alpha}f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha] + 1.$$

Дробові інтеграли та похідні комплексного порядку. Уведеним за дійсного $\alpha > 0$ операціям дробового інтегрування $I_{a+}^{\alpha}, I_{b-}^{\alpha}$ та дробового диференціювання $D_{a+}^{\alpha}, D_{b-}^{\alpha}$ можна надати змісту і за комплексних значень α таких, що $Re \alpha > 0$. Для цього домовимося, що надалі

$$\tau^{\alpha} = \tau^{\alpha_0} (\cos(\theta \ln \tau) + i \sin(\theta \ln \tau)), \alpha = \alpha_0 + i\theta, \tau > 0.$$

Очевидно, що інтеграли (похідні) комплексного порядку α є аналітичним продовженням за параметром α дробових інтегралів (похідних) визначених за $Im \alpha = 0$.

Наступна теорема дає достатні умови для існування дробових похідних будь-якого порядку α , $Re \alpha > 0$.

Теорема 2. (Samko, Kilbas, & Marichev, 1987) Нехай $Re \alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{Z}$ та функція $f(x)$ має абсолютно неперервну похідну порядку $n-1$, $n = [Re \alpha] + 1$. Зважаючи на це, $\exists D_{a+}^{\alpha}f$ майже скрізь і правильне представлення є таким:

$$D_{a+}^{\alpha}f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \quad (2)$$

2. Основний результат

Теорема 3. Нехай $r \in \mathbb{C}$, $Re r \in (2, 3)$, тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує така функція $F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \cap \Delta^1$, що для будь-якого полінома $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^1$ справедливою є одна з таких властивостей:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{(\varphi(x))^{Re r}} = +\infty \quad (3)$$

або

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{(\varphi(x))^{Re r}} = +\infty, \quad (4)$$

де $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

Доведення. Нехай $Re r \in (2, 3)$ і $m = [Re r] + 1 = 3$.

Розглянемо функцію:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{(b-x)^3}{3!} + b^3(x+7) - b^3(1+x)^{-\frac{1}{b}} + \frac{b^3}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}}, & x \in [0, b] \\ b^3(x+7) - b^3(1+x)^{-\frac{1}{b}} + \frac{b^3}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}}, & x \in (b, 1], \end{cases}$$

де $b = \frac{1}{468n^2}$.

З огляду на це

$$f'(x) := \begin{cases} -\frac{(b-x)^2}{2!} + b^3 + b^2(1+x)^{-\frac{1}{b}-1} - \frac{b^2}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-1}, & x \in [0, b] \\ b^3 + b^2(1+x)^{-\frac{1}{b}-1} - \frac{b^2}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-1}, & x \in (b, 1], \end{cases}$$

$$f''(x) := \begin{cases} b-x - b(b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-2} + \frac{b(1-b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-2}, & x \in [0, b] \\ -b(b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-2} + \frac{b(1-b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-2}, & x \in (b, 1], \end{cases}$$

$$f'''(x) := \begin{cases} -1 + (b+1)(2b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-3} - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-3}, & x \in [0, b] \\ (b+1)(2b+1)(1+x)^{-\frac{1}{b}-3} - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}(1-x)^{\frac{1}{b}-3}, & x \in (b, 1]. \end{cases}$$

З явного вигляду функції $f(x)$ та її похідних можна отримати нерівності:

$$f(0) = \frac{17}{3}b^3 > 0,$$

$$f(1) = 8b^3 - b^3 2^{-\frac{1}{b}} < 8b^3 < \frac{45}{4}b^3,$$

$$\begin{aligned}
 f(b) &= b^3(b+7) - b^3(1+b)^{-\frac{1}{b}} + \frac{b^3}{4}(1-b)^{\frac{1}{b}} \sim b^4 + 7b^3 - \frac{b^3}{e} + \frac{b^3}{4e} \sim 7b^3 - \frac{3b^3}{4e} = \frac{(28e-3)b^3}{4e}, \\
 f'(0) &= -\frac{b^2}{2} + b^3 + b^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} + b^3 > 0, \\
 f'(1) &= b^3 + b^2 \times 2 \times 2^{-\frac{1}{b}-1} \sim b^3 > 0, \\
 f'(b) &= b^3 + b^2(1+b)^{-\frac{1}{b}-1} - \frac{b^2}{4}(1-b)^{\frac{1}{b}-1} \sim b^3 + \frac{b^2}{e} - \frac{b^2}{4e} = b^3 + \frac{3b^2}{4e} > 0, \\
 f''(0) &= b - b(b+1) + \frac{b(1-b)}{4} = b - b^2 - b + \frac{b}{4} - \frac{b^2}{4} = \frac{b}{4} - \frac{5b^2}{4} \sim \frac{b}{4} > 0, \\
 f''(1) &= -b(b+1)2^{-\frac{1}{b}-2} < 0, \\
 f''(b) &= -b(b+1)e^{-1} + \frac{b(1-b)}{4}e^{-1} = -\frac{b}{e}(b+1 - \frac{1-b}{4}) = -\frac{b}{e} \times \frac{3+5b}{4} < 0, \\
 f'''(0) &= -1 + (b+1)(2b+1) - \frac{(1-b)(1-2b)}{4} = 3b + 2b^2 - \frac{1}{4} + \frac{3b}{4} - \frac{b^2}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{15b}{4} + \frac{7b^2}{4} < 0, \\
 f'''(1) &= (b+1)(2b+1)2^{-\frac{1}{b}-3} > 0, \\
 f'''(b+) &= (b+1)(2b+1)(1+b)^{-\frac{1}{b}-3} - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}(1-b)^{-\frac{1}{b}-3} \sim (b+1)(2b+1)e^{-1} - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}e^{-1} > 0, \\
 f'''(b-) &= -1 + (b+1)(2b+1) - \frac{(1-b)(1-2b)}{4}e^{-1} < 0.
 \end{aligned}$$

Очевидно, що $\forall x \in [0, b): f'''(x) < 0$ і $\forall x \in (b, 1]: f'''(x) > 0$.

З поданих нерівностей бачимо, що $\forall x \in [0, 1]: f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]: f(x) \geq 0$, тобто $f(x)$ зростає.

Далі розглянемо функцію $F(x) = x^3 f(x)$. Доведемо, що $F \in W^r[0, 1] \cap \Delta^1$.

Спочатку покажемо, що $F \in \Delta^1$. $F'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) \geq 0$ з доведеного вище, тоді $F \in \Delta^1$. Тепер доведемо, що $F \in W^r[0, 1]$. За теоремою 2 маємо:

$$D_{0+}^r F(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt = \sum_{k=0}^2 \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(3-r)} \int_0^x \frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-2}} dt$$

майже скрізь на $[0, 1]$.

Оскільки $F^{(k)}(0) = 0$ за $k = 0, 1, 2$, тоді $D_{0+}^r F(x) = \frac{1}{\Gamma(3-r)} \int_0^x \frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-2}} dt$ майже скрізь на $[0, 1]$.

Отже, згідно з теоремою 2 $D_{0+}^r F(x)$ існує майже скрізь на $[0, 1]$ та є обмеженою.

Очевидно, що $D_{0+}^{r-1} F(x) = \frac{1}{\Gamma(2-r)} \int_0^x \frac{F^{(2)}(t)}{(x-t)^{r-2}} dt$ буде абсолютно неперервною (Samko, Kilbas, & Marichev, 1987).

Зважаючи на це, $F \in W^r[0, 1] \cap \Delta^1$.

Нехай існує многочлен q_n , що є монотонним і для якого умова (3) не виконується. Тоді для деякої сталої B маємо:

$$|F(x) - q_n(x)| \leq Bx^{\frac{Rer}{2}}, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Звідси випливає, що $q_n(0) = F(0) = 0$ і $q_n'(0) = F'(0) = 0$.

Оскільки $q_n'(x) \geq 0, x \in [0, 1]$ і $q_n(0) = 0$ зумовлює, що $q_n(x) \geq 0, x \in [0, 1]$, тоді многочлен q_n має вигляд $q_n(x) = x^2 h_{n1}(x)$, де h_{n1} многочлен степеня $\leq n_1, n_1 \leq n-2$.

Розглянемо многочлен $\tilde{q}_n(x) = q_n(x) + f(0)x + f'(0)$.

$$\frac{b^2}{18} < \frac{b^2}{4} + b^3 = |f'(0)| = |\tilde{q}_n'(0)| \leq 2n^2 \|\tilde{q}_n\|$$

згідно з нерівністю Маркова. За побудовою многочлена $\tilde{q}_n(x)$ бачимо, що він зростає, тоді $\|\tilde{q}_n(x)\| = \tilde{q}_n(1)$.

Отже, маємо

$$\frac{b^2}{18} < 2n^2 \tilde{q}_n(1) \Rightarrow \tilde{q}_n(1) > \frac{b^2}{36n^2}. \quad (5)$$

З іншого боку,

$$f(1) < \frac{45b^3}{4} = \frac{45b^3 \times b \times 36n^2}{36n^2 \times 4} = \frac{b^2}{36n^2} \times 45n^2 \times 364 = \frac{b^2}{36n^2} \times \frac{45 \times \frac{1}{468} n^2 \times 36}{4} = \frac{b^2}{36n^2} \times \frac{405}{468} < \frac{b^2}{36n^2}. \quad (6)$$

З нерівностей (5) і (6) випливає, що $f(1) \neq \tilde{q}_n(1)$, а саме $f(1) < \tilde{q}_n(1)$.

Далі розглянемо $\tilde{q}_n(1) = q_n(1) + f'(0) + f(0)$.

Припустимо, що $q_n(1) = f(1)$, тоді $\tilde{q}_n(1) = f(1) + f'(0) + f(0) \Rightarrow \tilde{q}_n(1) - f'(0) - f(0) = f(1)$.

Вважатимемо, що $q_n(1) > 0$, тому що у протилежному разі твердження про те, що $f(1) \neq q_n(1)$, очевидне.

Маємо, що $8b^3 - b^3 \times 2^{-\frac{1}{b}} = \tilde{q}_n(1) - \frac{b^2}{4} - b^3 - \frac{17}{3} b^3 = \tilde{q}_n(1) - \frac{b^2}{4} - \frac{20}{3} b^3 \Rightarrow \tilde{q}_n(1) = \frac{44}{3} b^3 - b^3 \times 2^{-\frac{1}{b}} + \frac{b^2}{4}$.

З огляду на це бачимо, що $\tilde{q}_n(1) \sim c \times b^2$, де $c > \frac{1}{4}, c = \text{const}$. З останніх міркувань випливає, що $q_n(1) \sim c \times b^2 - \frac{17}{3} b^3 - \frac{b^2}{4} - b^3 = c_1 b^2 - \frac{14}{3} b^3 \sim c_1 b^2, c_1 = \text{const}, c_1 > 0$.

Проте, з іншого боку, $f(1) \sim 8b^3$. Отже, маємо суперечність із припущенням, що $q_n(1) = f(1)$. Звідси $q_n(1) \neq f(1) = F(1)$. Теорему доведено.

Дискусія і висновки

Побудовано контрприклад, який показує, що результат, доведений у роботі (Петрова, 2003), можна узагальнити на випадок простору Соболева з комплексним індексом $r \in \mathbb{C}, \text{Re } r \in (2; 3)$. Актуальність результатів полягає в тому, що в попередніх роботах розглядали тільки дійсний індекс простору Соболева. Надалі бажано узагальнити результат роботи (Петрова, 2003) для індексу $r \in \mathbb{C}, \text{Re } r > 2$.

Список використаних джерел

- Петрова, Т. О. (2005). Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні. *Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Теорія наближення функцій*, 35, 107–112.
- Петрова, Т. О. (2003). Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну. *Вісник Київського університету. Математика. Механіка*, 9–10, 125–127.
- DeVore, R. A., & Yu, X. M. (1985). Pointwise estimates for monotone polynomial approximation. *Constructive Approximation*, 1, 323–331. <https://doi.org/10.1007/BF01890039>
- Gonska, H. H., Leviatan, D., Shevchuk, I. A., & Wenz, H. J. (2000). Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation. *Constructive Approximation*, 16, 603–629. <https://doi.org/10.1007/s003650010008>
- Gopengauz, A. I. (1994). Pointwise estimates of Hermitian interpolation. *Journal of Approximation Theory*, 77, 31–41.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers.

References

- DeVore, R. A., & Yu, X. M. (1985). Pointwise estimates for monotone polynomial approximation. *Constructive Approximation*, 1, 323–331. <https://doi.org/10.1007/BF01890039>
- Gonska, H. H., Leviatan, D., Shevchuk, I. A., & Wenz, H. J. (2000). Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation. *Constructive Approximation*, 16, 603–629. <https://doi.org/10.1007/s003650010008>
- Gopengauz, A. I. (1994). Pointwise estimates of Hermitian interpolation. *Journal of Approximation Theory*, 77, 31–41.
- Petrova, T. O. (2003). On current interpolation estimates of monotonic approximation of functions with a fractional derivative, *Bulletin of Kiev University. Mathematics. Mechanics*, 9–10, 125–127
- Petrova, T. O. (2005). Counterexample in the interpolation convex approximation. *Proceedings of the Institute of mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Mathematics and its problems. Theory of function approximation*, 35, 107–112.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers.

Отримано редакцією журналу / Received: 21.04.24

Прорецензовано / Revised: 17.05.24

Схвалено до друку / Accepted: 22.05.24

Tamar PETROVA, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.

ORCID ID: 0000-0002-5293-9701

e-mail: tamarapetrova2703@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

SOME NEGATIVE RESULTS FOR A MONOTONIC APPROXIMATION OF A FUNCTION THAT HAVE A FRACTIONAL DERIVATIVE OF A COMPLEX ORDER

The issues of the interpolative approximation of functions from the Sobolev class by algebraic polynomials are considered. The positive approximation question is the question of approximating positive and r -times continuously differentiable functions by positive algebraic polynomials. The question of monotonic approximation is the question of approximating monotonic functions from the Sobolev class by monotonic algebraic polynomials. In previous works, we consider both the natural index of the Sobolev space, which is not equal to one, and the real index, which is strictly greater than 2. It is proved that Gopengauz estimates do not hold for a real index greater than two in the case of monotone approximation. In all previous works the real-valued Sobolev space index is considered.

The proposed paper examines the approximation of monotonic functions in the Sobolev space with a complex index $r \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} r \in (2, 3)$ ($\operatorname{Re} r$ is the real part of a complex number r , $\mathbb{C}$ is the set of complex numbers), so the result of the work is actual. A counterexample is constructed that shows that the estimate that generalizes the Gopengauz estimate is false. This paper is a generalization of the result for the case of a Sobolev space with a complex index. Subsequently, we plan to obtain results for $r \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} r > 3$, as well as similar results for the convex approximation.

Keywords: approximation of the function; Sobolev space with a complex index; algebraic polynomial; monotone function; convex function.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The author declares no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.