КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Кафедра системного аналізу та теорії прийняття рішень

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 124 Системний аналіз
на тему:

АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПОШИРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ В СОЦІУМІ

Виконала студентка 4-го курсу
Мірошніченко Карина Олегівна
(підпис)

Науковий керівник:
доцент, кандидат фізико-математичних наук
Зінько Петро Миколайович
(підпис)

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент (підпис)

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень
«07» 06 2022 р.,
протокол № 10
Завідувач кафедри
О. Г. Наконечний

Київ-2022

Зміст

Вступ

Побудова та дослідження математичних моделей мають велике значення майже для всіх спеціальних дисциплін. Сучасні дослідники використовують засоби математичного моделювання в різноманітних прикладних областях. Роль математичних моделей не обмежується проблемою розуміння закономірностей. У пізнавальному процесі для створення детального опису процесу дослідження необхідно будувати все більш складні математичні моделі, а ці моделі потребують загальних математичних засобів. Математичне моделювання є одним з основних методів дослідження сучасних систем. Зазвичай це передбачає створення концептуальної моделі об'єкта дослідження, формалізацію та перетворення її в математичну чи комп'ютерну модель, перевірку адекватності та проведення подальших досліджень отриманої моделі з використанням аналітичних або множинних методів та сучасних комп'ютерних технологій. Сьогодні моделювання систем найчастіше реалізують за допомогою сучасних комп'ютерних технологій. Такий підхід передбачає необхідність попередньої формалізації концептуальної моделі об'єкта дослідження та її подання у вигляді, придатному для реалізації тих чи інших алгоритмів чисельного аналізу або комп'ютерної імітації. Обидва підходи передбачають необхідність застосування сучасних математичних методів, що використовуються при створенні алгоритмів моделювання. Навіть при застосуванні спеціалізованих пакетів для програмного забезпечення досліднику необхідно володіти основами відповідних математичних методів, оскільки користування такими пакетами зазвичай передбачає необхідність вибору оптимального алгоритму та певних параметрів його реалізації, іноді з декількох десятків можливих варіантів. Це зумовлює необхідність вивчення основних методів математичного моделювання систем майбутніми фахівцями.

Задачі інформаційного протиборства при повільному розвитку процесів розглядалися в багатьох роботах (напр. [1 - 4]). Проте відомо [5 - 7], що для моделювання процесів, які швидко зростають за часом може бути застосована динаміка Гомперца. В ситуації швидкого росту процесів доцільно вводити керуючі впливи, що уповільнюють такий ріст. В той же час на динаміку росту можуть впливати особи, що зацікавлені в протилежному результаті. В такому випадку виникають задачі протиборства (зокрема інформаційного протиборства).

Актуальність

Нині роль інформаційного середовища виходить на перший план, а тому національна безпека будь-якої держави, в тому числі й України, все більше залежить від інформаційної безпеки. Для успішного відображення інформаційних загроз необхідне розуміння механізмів інформаційних процесів.

Розділ 1. Задачі протиборства в системах з динамікою Гомперця

1.1 Постановка задачі

Задачі інформаційного протиборства при повільному розвитку процесів розглядалися в багатьох роботах (напр. [1 - 4]). Проте відомо [5 - 7], що для моделювання процесів, які швидко зростають за часом може бути застосована динаміка Гомперця. В ситуації швидкого росту процесів доцільно вводити керуючі впливи, що уповільнюють такий ріст. В той же час на динаміку росту можуть впливати особи, що зацікавлені в протилежному результаті. В такому випадку виникають задачі протиборства (зокрема інформаційного протиборства). Нами будуть розглядатися дві коаліції гравців, динаміка процесів яких описується диференціальними рівняннями Гомперця. Коаліції вибирають як програмні так і позиційні стратегії. Для знаходження оптимальних стратегій використовується принцип гарантованого результату. Для знаходження лінійних позиційних стратегій коаліції використовується матричний принцип максимуму Гамільтона – Понтрягіна. Розглядається також регуляризоване керування з певним функціоналом регуляризації.

Нехай є дві коаліції гравців K_1 та K_2 із стратегіями

$U = \left\{u(t) = \left(u_1(t), \dots, u_{m_1}(t)\right), t \in [0, t_1]\right\}$,

$V = \left\{v(t) = \left(v_1(t), \dots, v_{m_2}(t)\right), t \in [0, t_1]\right\}$, відповідно.

При вибраних стратегіях $u(t)$, $v(t)$ динаміка процесу описується системою диференціальних рівнянь Гомперця вигляду:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \ln x_j(t) + \sum_{j=1}^{m_1} b_{ij}(t)u_j(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij}(t)v_j(t)\right)x_i(t), i = \overline{1,n}$$

(1)

з початковою умовою

$x_i(0) = x_i^0, i = \overline{1,n},$ (2)

відповідно, для коаліції K_1 при $i = \overline{1,s}$ та для коаліції K_2 при $i = \overline{s+1,n}$, де $s < n$, $a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t) -$ неперервні на $[0, t_1]$ функції; $u_j(t), v_j(t) -$ кусково-неперервні на $[0, t_1]$функції. Під розв'язком системи рівнянь (1), (2) будемо розуміти функції $x_i(t), i = \overline{1,n}$, що задовольняють рівнянню (1) майже всюди. Якщо стратегії $u(t), v(t)$ належать деяким множинам певних функціональних просторів, то будемо досліджувати такі задачі:

$$I_k(u,v) \to \max_{u \in U}, k = \overline{1,s},$$

$$I_k(u,v) \to \min_{v \in V}, k = \overline{s+1,r}$$

де $I_k(u,v) = g_k\left(x_k(t_1)\right), k = \overline{1,r} -$ функції цілі для гравців коаліцій K_1, K_2. Варто зауважити, що має місце таке твердження:

Твердження 1. Нехай вектор-функція $\varphi(t)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A(t)\varphi(t) + B(t)u(t) + C(t)v(t), \varphi(0) = \varphi^0,$$

(3)

де $A(t), B(t), C(t) -$ матриці з елементами $a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t)$, відповідно, $u(t) = \left(u_1(t), \ldots, u_{m_1}(t)\right), v(t) = \left(v_1(t), \ldots, v_{m_2}(t)\right)$.

Тоді, якщо $x_i^0 > 0$, то мають місце такі рівності $x_i(t) = e^{(\varphi(t), e^i)}, i = \overline{1, n}$, де $e^i - i$ -й орт.

Доведення. Оскільки $\frac{d \, ln \, x_i(t)}{dt} = \frac{dx_i(t)}{dt} x_i^{-1}(t)$, то поклавши $ln \, x_i \, (t) = \varphi_i(t)$, одержимо рівняння (3).

1.2 Принцип гарантованого результату

Кожен гравець із коаліцій K_1, K_2 знає множини стратегій U, V а також свої функції цілі. Потрібно знайти «оптимальні стратегії» для кожної коаліції. Для знаходження «оптимальних стратегій» використаємо принцип гарантованого результату. Надалі будемо виходити із інтересів коаліції K_1 (аналогічні результати можна отримати для коаліції K_2) . Нехай стратегії коаліції K_2 відомі. Тоді ми будемо мати s критеріїв для коаліції K_1 . За оптимальне значення $u(t)$ візьмемо векторний максимум за Парето.

Твердження 2. Нехай $g_k(x), k = \overline{1,s}$ $-$ додатні та монотонно зростаючі функції на $0,\infty)$. Тоді має місце співвідношення

$$\underset{u\epsilon U}{m\vec{a}x}\left(g_1\left(x_1(t_1)\right), \dots, g_s\left(x_s(t_1)\right)\right) = \underset{u\epsilon U}{m\vec{a}x}(\varphi_1(t_1), \dots, \varphi_s(t_1)),$$

де $x_i(t)$ та$\varphi_i(t) = \left(\varphi(t), e^i\right)$ знаходяться як розв'язки рівнянь (1) – (3), відповідно, а через $\underline{max}^{\vec{}}(\cdot)$ позначено векторний максимум за Парето.

Доведення. Позначимо через P бінарне відношення Парето в просторі R^s та нехай $\vec{x} = (x_1, \dots, x_s)$ та $\vec{y} = (y_1, \dots, y_s)$ два вектори із R^s . Тоді $\vec{x}P\vec{y}$ тоді і тільки тоді, коли $x_i \geq y_i, i = \overline{1,s}$, причому принаймі одна нерівність строга. Нехай далі u_1 та u_2 дві стратегії гравців із коаліції K_1 . Тоді $u_1 P u_2$ тоді і тільки тоді, коли $g_i\left(x_i^{(1)}(t_1)\right) \geq g_i\left(x_i^{(2)}(t_1)\right), i = \overline{1,s}$, де $x_i^{(q)}(t_1) = x_i(t_1)|_{u=u_q}, q = \overline{1,2}$. В силу монотонності g_i ці нерівності виконуються тоді і тільки тоді, коли $x_i^{(1)}(t_1) \geq x_i^{(2)}(t_1)$, а оскільки $x_i(t_1) = e^{(\varphi(t_1), e^i)}$, то $\left(\varphi^{(1)}(t_1), e^i\right) \geq \left(\varphi^{(2)}(t_1), e^i\right)$, що і потрібно було показати.

Далі розглядаються два випадки:

- коли коаліція K_1 вибирає програмні стратегії;
- коли коаліція K_1 вибирає позиційні стратегії.

1.3 Множина Парето

Твердження 3. Нехай $U -$ опукла замкнена обмежена множина в просторі $L_2(0, t_1)$. Тоді множина Парето має вигляд

$$\Pi = \{u^0(\lambda) | \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s), \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1\} ,$$

де $u^0(\lambda) \in \underset{u \in U}{Argmax} \int_0^{t_1} \big(z(t), B(t)u(t)\big)\, dt$, а функція $z(t)$ є розв'язком рівняння

$$-\frac{dz(t)}{dt} = A^T(t)z(t), z(t_1) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i e^i .$$

Доведення. Оскільки множина U опукла, то множина точок $\big(\varphi_1(t_1), \dots, \varphi_s(t_1)\big)$ також опукла в просторі R^s . Тому множина Парето співпадає з множиною $\underset{u \in U}{Argmax} \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi_i(t_1)$. Зауважимо, що справедливі рівності$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi_i(t_1) = \big(\varphi(t_1), \sum_{i=1}^{s} \lambda_i e^i\big) = (z(0), \varphi^0) + \int_0^{t_1} \big(z(t), B(t)u(t)\big) dt + \int_0^{t_1} \big(z(t), C(t)v(t)\big) dt$ а тому виконується рівність

$\underset{u \in U}{Argmax} \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi_i(t_1) = \underset{u \in U}{Argmax} \int_0^{t_1} \big(z(t), B(t)u(t)\big) dt,$ що і потрібно було показати.

Наслідок. Стратегії гравців із коаліції K_1 , що належать множині Парето Π , не залежать від стратегій гравців із коаліції K_2.

Твердження 4. Нехай $u^0(\lambda) \in \Pi$ а множина V стратегій гравців коаліції $K_2 -$ обмежена та слабо замкнена. Тоді має місце співвідношення

$$g_i\big(x_i(t_1, \lambda)\big) \in \left[g_i^{(1)}(\lambda), g_i^{(2)}(\lambda)\right],$$

де $x_i(t_1, \lambda) = x_i(t_1)|_{u=u^0(\lambda)}$, а $g_i^{(q)}(\lambda) = g_i\left(x_i^{(q)}(t_1)\right), q = \overline{1,2}$, та $x_i^{(q)}(t_1)$ визначаються із рівнянь

$$\frac{dx_i^{(q)}(t)}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)\, ln\, x_j^{(q)}(t) + \sum_{j=1}^{m_1} b_{ij}(t) u_j^0(\lambda)\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij}(t) \bar{v}_{ij}^{(q)}(t)\right) x_i^{(q)}(t),$$

$$x_i^{(q)}(0) = x_i^0,$$

$$\bar{v}_i^{(1)}(t) \in \underset{v\in V}{Argmin} \int_0^{t_1} \big(\bar{z}_i(t), C(t)v(t)\big)dt,$$

$$\bar{v}_i^{(2)}(t) \in \underset{v\in V}{Argmax} \int_0^{t_1} \big(\bar{z}_i(t), C(t)v(t)\big)dt,$$

$$-\frac{d\bar{z}_i(t)}{dt} = A^T(t)\bar{z}_i(t), \bar{z}_i(t_1) = e^i.$$

Доведення. Оскільки для $i = \overline{1, s}$ виконується:

$\underset{v\in V}{min} g_i\big(x_i(t,\lambda)\big) = g_i\left(exp\left(\underset{v\in V}{min}\big(\varphi(t), e^i\big)\right)\right)$, то враховуючи, що $\big(\varphi(t_1), e^i\big) = (\bar{z}_i(t_1), \varphi_0) + \int_0^{t_1}\big(\bar{z}_i(t), B(t)u^0(\lambda)\big)dt + \int_0^{t_1}\big(\bar{z}_i(t), C(t)v(t)\big)dt$, одержимо такі співвідношення

$\underset{v\in V}{min}\big(\varphi(t_1), e^i\big) = (\bar{z}_i(t), \varphi_0) + \int_0^{t_1}\big(\bar{z}_i(t), B(t)u^0(\lambda)\big)dt +$
$+\underset{v\in V}{min} \int_0^{t_1}\big(\bar{z}_i(t), C(t)v(t)\big)dt = \big(\varphi^{(1)}(t_1), e^i\big),$

де $\varphi^{(1)}(t)$ знаходиться із рівняння

$\frac{d\varphi^{(1)}(t)}{dt} = A(t)\varphi^{(1)}(t) + B(t)u^0(\lambda) + C(t)\bar{v}_i^{(1)}(t), \varphi^{(1)}(0) = x^0$. Аналогічно отримаємо $\underset{v\in V}{max}\big(\varphi(t_1), e^i\big) = \big(\varphi^{(2)}(t_1), e^i\big)$.

На основі отриманих співвідношень можемо записати послідовно такі нерівності $\left(\varphi^{(1)}(t_1), e^i\right) \leq \left(\varphi(t_1), e^i\right) \leq \left(\varphi^{(2)}(t_1), e^i\right)$,

$x_i^{(1)}(t_1, \lambda) \leq x_i(t_1, \lambda) \leq x_i^{(2)}(t_1, \lambda)$,

$g_i\left(x_i^{(1)}(t_1, \lambda)\right) \leq g_i\left(x_i(t_1, \lambda)\right) \leq g_i\left(x_i^{(2)}(t_1, \lambda)\right)$. Таким чином твердження 4 доведено.

1.4 Позиційні стратегії

Тепер припустимо, що в коаліції K_1 використовуються позиційні стратегії у вигляді $u(t) = L(t)\varphi(t)$, тобто $u_i(t) = \left(L(t)\varphi(t), e^i\right) = \left(\varphi(t), L^T(t)e^i\right) =$

$= \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) l_{ki}(t) = \sum_{k=1}^{n} l_{ki}(t) \ln x_k(t),$

де $l_{ki}(t) = \left(L^T(t)e^i, e^k\right)$.

Введемо зважений критерій

$$J(u,v) = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k (\varphi(t_1), e^k),$$

де $\lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{s} \lambda_k = 1$.

Твердження 5. Нехай $u^0(t) -$ деяка стратегія коаліції K_1 , а невідомі значення φ^0 та $v(t)$ належать обмеженій множині G в просторі $R^n \times L_2(0, t_1)$. Тоді мають місце такі нерівності

$$J_1(u^0) \leq J(u,v) \leq J_2(u^0),$$

Де

$$J_1(u^0) = -\left(\left(Q_0^{(1)} z^{(1)}(0), z^{(1)}(0)\right) + \int_0^{t_1} (Q_1^{(1)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t))dt \right)^{1/2}$$

$J_2(u^0) = (\left(Q_0^{(2)} z^{(1)}(0), z^{(1)}(0)\right) + \int_0^{t_1} \left(Q_1^{(2)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)\right) dt)^{1/2},$

$Q_0^{(q)}, Q_1^{(q)} -$ деякі невід'ємно визначені матриці,$z^{(1)}(t) -$ розв'язок рівняння

$$-\frac{dz^{(1)}(t)}{dt} = \left(A(t) + B(t)L(t)\right)^T z^{(1)}(t), z^{(1)}(t_1) = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k e^k.$$

Доведення. Зауважимо, що справедливі рівності

$(\sum_{k=1}^{s} \lambda_k e^k, \varphi(t_1)) = \left(z^{(1)}(t_1), \varphi(t_1)\right) = \left(z^{(1)}(0), \varphi^0\right) +$

$\int_0^{t_1} \left(z^{(1)}(t), C(t)v(t)\right) dt$. Оскільки множини G, яким належать (φ^0, f)

обмежені, то знайдуться додатно визначені матриці $\bar{Q}_0^{(q)}, \bar{Q}_1^{(q)}, q = \overline{1,2}$, такі, що$G_1 \subseteq G \subseteq G_2$, де

$$G_q = \left\{(\varphi^0, f) \middle| \left(\bar{Q}_0^{(q)}\varphi^0, \varphi^0\right) + \int_0^{t_1} \left(\bar{Q}_1^{(q)} f(t), f(t)\right) dt \le 1\right\}.$$

Отже, можемо записати такі співвідношення

$$\sup_G \left(z^{(1)}(t_1), \varphi(t_1)\right) \le \sup_{G_2} \left(z^{(1)}(t_1), \varphi(t_1)\right) =$$

$$= \left(\left(\left(\bar{Q}_o^{(2)}\right)^{-1} z^{(1)}(0), z^{(1)}(0)\right) + \right.$$

$$\left. \int_0^{t_1} \left(C \left(\bar{Q}_1^{(2)}\right)^{-1} C^T z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)\right) dt\right)^{1/2},$$

$$\inf_G \left(z^{(1)}(t_1), \varphi(t_1)\right) \ge \inf_{G_1} \left(z^{(1)}(t_1), \varphi(t_1)\right) =$$

$$= \left(\left(\left(\bar{Q}_o^{(1)}\right)^{-1} z^{(1)}(0), z^{(1)}(0)\right) + \right.$$

$$\left. \int_0^{t_1} \left(C \left(\bar{Q}_1^{(1)}\right)^{-1} C^T z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)\right) dt\right)^{1/2}$$. Твердження 5 доведено.

Твердження 6. Нехай $L(t)$ при кожному t належить множині D простору матриць та існує матриця $\hat{L} \in D$ така, що виконується рівність

$$\max_L \min_{v \in G_1} \left(\boldsymbol{z}^{(\mathbf{1})}(\boldsymbol{t}_\mathbf{1}), \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}_\mathbf{1})\right) = \min_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{G}_\mathbf{1}} \left(\boldsymbol{z}^{(\mathbf{1})}(\boldsymbol{t}_\mathbf{1}), \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{t}_\mathbf{1})\right),$$ де $\hat{\varphi}(t_1)$

знаходиться із розв’язку рівняня (3) при $u(t) = \hat{u}(t) = \hat{L}(t)\varphi(t)$. Тоді матриця $\hat{L}(t)$ може бути знайдена із умови

$$\hat{L}(t) \in Arg\max_L f(L), \qquad (4)$$

де

$$f(L) = -\left(\psi(t), \left(B(t)L(t)\right)^T z^{(1)}(t)\right) = -\left(B(t)L(t)\psi(t), z^{(1)}(t)\right)$$

$$=$$

$= -SpL(t)\psi(t)\left(B^T(t)z^{(1)}(t)\right)^T = -\left(L(t), B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\right)$, а функція $\psi(t)$ із рівнянь

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \left(A(t) + B(t)L(t)\right)\psi(t) + C(t)\left(\bar{Q}_1^{(1)}\right)^{-1} C^T(t),$$

$\psi(0) = \left(\bar{Q}_0^{(1)}\right)^{-1} z^{(1)}(0)$. *Доведення.* Із співвідношень $\min\limits_{v\in G_1}\left(z^{(1)}(t_1), \varphi(t_1)\right) = -\left(\left(Q_0^{(1)} z^{(1)}(0), z^{(1)}(0)\right) + \int_0^{t_1}\left(Q_1^{(1)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)\right)dt\right)^{1/2} = -\Phi(L)$, отримуємо

$\max\limits_{L\in D}\min\limits_{v\in G_1}\left(z^{(1)}(t_1), \varphi(t_1)\right) = -\min\limits_{L\in D}\Phi(L) = -\left(\min\limits_{L\in D}\Phi_1(L)\right)^{1/2}$, де $\Phi_1(L) = \Phi^2(L)$.

Для знаходження матриці $L(t)$ застосуємо принцип максимуму. Введемо функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$H\left(\psi(t), z^{(1)}(t), L(t)\right) = -\left(\psi(t), \left(A(t) + B(t)L(t)\right)^T z^{(1)}(t)\right) + \left(Q_1^{(1)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)\right) =$$

$= -\left(\left(A(t) + B(t)L(t)\right)\psi(t), z^{(1)}(t)\right) + \left(Q_1^{(1)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)\right)$, де функція $\psi(t)$ є розв'язком спряженого рівняння $\frac{d\psi(t)}{dt} = \left(A(t) + B(t)L(t)\right)\psi(t) + \left(Q_1^{(1)} z^{(1)}(t), z^{(1)}(t)\right), \psi(0) = Q_0^{(1)} z^{(1)}(0)$. Тоді, якщо $\min\limits_{L\in D}\Phi_1(L) = \Phi_1(\hat{L})$, то

$$\hat{L} \in \underset{L \in D}{Argmax} f\big(L(t)\big), f\big(L(t)\big) = -\Big(B(t)L(t)\psi(t), z^{(1)}(t)\Big),$$

що й потрібно було довести.

Наслідок. Нехай

$$D = \{L(t) | SpL(t)L^T(t) \le \gamma_1^2(t), \gamma_1(t) > 0\}.$$

Тоді $\hat{L} = -\gamma_1 \frac{B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)}{\left(SpB^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\psi(t)z^{(1)T}(t)B(t)\right)^{1/2}}$. *Доведення.* Оскільки $f_1\big(L(t)\big) = -\big\langle L(t), B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\big\rangle$, то в силу нерівності Коші-Буняковського будемо мати співвідношення

$$\max_{L \in D} f_1\big(L(t)\big) = \big\|B^T(t)z^{(1)}(t)\psi(t)\big\|\gamma_1,$$

де $\|L(t)\| = \big(SpL(t)L^T(t)\big)^{1/2}$, при цьому

$$\hat{L}(t) = -\gamma_1 \frac{B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)}{\|B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\|} = =$$

$$-\gamma_1 \frac{B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)}{\left(SpB^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\psi(t)z^{(1)T}(t)B(t)\right)^{1/2}}.$$

Твердження 7. Нехай матриця L не залежить від t. Тоді якщо $D -$ компактна в просторі матриць, то існує $\hat{L}$ таке, що $\min_{L \in D} \Phi_1(L) = \Phi_1(\hat{L})$,

при цьому

$$\hat{L} = -\gamma_1 \int_0^{t_1} B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)dt \times$$

$\times \left(\int_0^{t_1} SpB^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)\psi(t)z^{(1)T}(t)B(t)dt\right)^{-1/2}$. *Доведення.* Оскільки функція $\Phi_1(L)$ неперервно залежить від матриці L, а $D -$ компакт, то існує матриця $\hat{L} \in D$ така, що

$$\Phi_1(\hat{L}) = \min_{L \in D} \Phi_1(L).$$

Зауважимо, що у випадку незалежності L від t функція

Гамільтона-Понтрягіна буде мати вигляд

$H\left(\psi(t), z^{(1)}(t), L\right) = -(\int_0^{t_1} B^T(t) z^{(1)}(t) \psi^T(t) dt, L) +$

$\beta\left(\psi(t), z^{(1)}(t)\right)$, де $\beta\left(\psi(t), z^{(1)}(t)\right)$ не залежить від L. Отже справджується рівність

$\max\limits_{L \in D} H\left(\psi(t), z^{(1)}(t), L\right) = \left|\int_0^{t_1} B^T(t) z^{(1)}(t) \psi^T(t) dt\right| \gamma_1(t) +$

$\beta\left(\psi(t), z^{(1)}(t)\right)$ і максимум досягається при $L = \hat{L}$, що й потрібно було довести.

1.5 Регуляризація критерію

Нижче розглядається регуляризація критерію $\Phi\big(L(t)\big)$. Назвемо функцію $\hat{u}_\alpha(t) = \hat{L}_\alpha(t)\varphi(t)$, де матриця $\hat{L}_\alpha(t)$ знаходиться із умови

$$\hat{L}_\alpha(t) \in \underset{L\in D}{Argmin}\,\Phi_\alpha\big(L(t)\big),$$

а функціонал $\Phi_\alpha\big(L(t)\big)$ визначається за формулою $\Phi_\alpha\big(L(t)\big) = \Phi_1\big(L(t)\big) + \alpha F\big(L(t)\big), \alpha > 0, F\big(L(t)\big) > 0,$ регуляризованим керуванням із функціоналом регуляризації $F\big(L(t)\big)$.

Твердження 8. Нехай $F\big(L(t)\big) = \int_0^{t_1} SpL(t)L^T(t)\,dt$. Тоді регуляризоване керування має вигляд $\hat{L}(t) = -B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)/\alpha$. (5)

Доведення. Будуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна $H\left(\psi(t), z^{(1)}(t), L(t)\right) = -\left\langle B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t), L(t)\right\rangle + \big(L(t), L(t)\big)(\alpha/2) + \beta_1\left(\psi(t), z^{(1)}(t)\right)$. Отримуємо

$H\left(\psi(t), z^{(1)}(t), \hat{L}(t)\right) = \underset{L\in D}{max}\,H\left(\psi(t), z^{(1)}(t), L(t)\right)$, де $\hat{L}(t) = -B^T(t)z^{(1)}(t)\psi^T(t)/\alpha$, що й потрібно було показати.

<u>Зауваження.</u> Із загальної теорії регуляризації [9] випливає, що $\underset{\alpha\to 0}{lim}\Phi_\alpha\left(\hat{L}_\alpha(t)\right) = \underset{L\in D}{inf}\,\Phi_1\big(L(t)\big)$.

Зрозуміло, що в загальному випадку для знаходження $\hat{L}_\alpha(t)$ потрібно розв'язувати крайову задачу для знаходження $z^{(1)}(t)$ та $\psi(t)$ із відповідних систем нелінійних диференціальних рівнянь при $L(t) = \hat{L}(t)$. Наведемо нижче функціонал регуляризації

$F\big(L(t)\big)$ спеціального типу, для якого задача знаходження $\hat{L}_\alpha(t)$ значно спрощується. Покладемо

$$F\big(L(t)\big) = \int_0^{t_1} SpL(t)P(t)L^T(t)dt,$$

де симетрична матриця $P(t)$ є розв'язком лінійного рівняння

$$\frac{dP(t)}{dt} = \big(A(t) + B(t)L(t)\big)P(t) + P(t)\big(A(t) + B(t)L(t)\big)^T +$$

$+Q_1^{(1)}, P(0) = Q_0^{(1)}.$ (6)

Твердження 9. Має місце рівність

$$\min_{L\in D} \Phi_\alpha\big(L(t)\big) = \Phi_\alpha\left(\hat{L}_\alpha(t)\right),$$

де $\hat{L}_\alpha(t) = -B^T(t)S_\alpha(t)$ а функція $S_\alpha(t)$ є розв'язком рівняння Ріккаті

$$-\frac{dS_\alpha(t)}{dt} = A^T(t)S_\alpha(t) + S_\alpha(t)A(t) - S_\alpha(t)B(t)B^T(t)S_\alpha(t),$$

$S_\alpha(t_1) = R_0, R_0 = \sum_{k,j=1}^{s} \lambda_k\lambda_j e^k e^{jT}.$ (7) При цьому

$$\Phi_1\left(\hat{L}_\alpha(t)\right) = Sp\hat{P}(t_1)R_0 \le SpS_\alpha(0)Q_0^{(1)} + \int_0^{t_1} SpS_\alpha(t)Q_1^{(1)}dt,$$

де $\hat{P}(t) -$ розв'язок рівняння (6) при $L(t) = \hat{L}_\alpha(t)$.

Доведення цього твердження проводиться аналогічно тому, як це зроблено в [8].

Наслідок. Нехай $\Phi(t,\tau)$ матриця, що є розв'язком рівняння

$$\frac{d\Phi(t,\tau)}{dt} = A(t)\Phi(t,\tau), \Phi(\tau,\tau) = E.$$

Тоді має місце рівність

$S_1(\beta,t) = \Phi(t,t_1)\tilde{R}_0\Phi^T(t,t_1) +$

$\int_t^{t_1} \Phi(t,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t,\tau)d\tau$, де $S_1(\beta,t) = S^{-1}(\beta,t)$ і $S(\beta,t)$ є розв'язком рівняння (7) при $R_0 = \tilde{R}_0, \tilde{R}_0 = R_0 + \beta E, \beta > 0.$

Доведення. Оскільки $R_0 + \beta E -$ додатно визначена матриця, то матриця $S(\beta, t)$ також буде додатно визначена. Покладемо $S_1(\beta, t) = S^{-1}(\beta, t)$. Оскільки

$$\frac{dS_1(\beta,t)}{dt} = -S_1(\beta, t)\frac{dS(\beta,t)}{dt}S_1(\beta, t),$$

то рівняння (7) запишеться у вигляді

$\frac{dS_1(t)}{dt} = A(t)S_1(t) + S_1(t)A^T(t) - B(t)B^T(t)/\alpha, S_1(t_1) = (R_0 + \beta E)^{-1}$. Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$S_1(\beta, t) = \Phi(t, t_1)(R_0 + \beta E)^{-1}\Phi^T(t, t_1) +$$
$$+\frac{1}{\alpha}\int_t^{t_1}\Phi(t,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t,\tau)d\tau,$$

що й потрібно було показати.

Наслідок. Має місце рівність

$S(\beta, t) = \left(\Phi(t, t_1)(R_0 + \beta E)^{-1}\Phi^T(t, t_1) + (1/\alpha)\int_t^{t_1}\Phi(t,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t,\tau)d\tau\right)^{-1}$ при $\beta > 0$, причому

$$S(\beta, t) \le \Phi_1^T(t, t_1)(R_0 + \beta E)^{-1}\Phi_1(t, t_1),$$

де $\Phi_1(t, t_1) = \Phi^{-1}(t, t_1) = \Phi(t_1, t)$.

Доведення. Оскільки $\alpha > 0$ а матриця

$$\int_t^{t_1}\Phi(t,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t,\tau)dt \ge 0,$$

то виконуються нерівності

$$S_1(\beta, t) \ge \Phi(t, t_1)(R_0 + \beta E)^{-1}\Phi^T(t, t_1) > 0 .$$

Наслідок доведено.

Твердження 10. Нехай $\beta \in [0, \beta_1]$. Тоді має місце співвідношення

$$S(\beta, t) = S(0, t) + \beta S_2(\beta_0, t),$$

де $0 < \beta_0 \le \beta_1$ а функція $S_2(\beta_0, t)$ має вигляд

$$S_2(\beta_0, t) = \frac{dS(\beta,t)}{dt}|_{\beta=\beta_0} = S_2(t)$$

та є розв'язком лінійного рівняння

$$-\frac{dS_2(t)}{dt} = A_1^T(t)S_2(t) + S_2(t)A_1(t) \qquad (8)$$

при $S_2(t_1) = R_0 + \beta_0 E, A_1(t) = A(t) - (1/\alpha)B(t)B^T(t)S(\beta_0, t).$ *Доведення* цього твердження випливає із існування похідної $S_2(\beta_0, t)$, яка задовольняє рівняння (8) та розкладу функції $S(\beta, t)$ в ряд Тейлора в околі нуля.

Розділ 2. Прогнозні оцінки в математичних моделях поширення інформації при невизначеностях

2.1 Побудова прогнозних оцінок

Розглядається деяка соціальна група чисельністю L, на яку провадиться інформаційна дія (атака, вплив) по N каналах, причому число суб'єктів, що сприйняли інформацію k-го типу залежить як від зовнішньої дії, так і від спілкування суб'єктів між собою. Позначимо через $x_k(t)$ число суб'єктів, що сприйняли інформацію k-го типу в момент t, через $\beta_k(t)$ – інтенсивність спілкування, $u_k(t)$ – зовнішні дії. Тоді зміну з часом величини $x_k(t)$ можливо описати системою диференційних рівнянь:

$$\dot{x}_k(t) = \beta_k(t)x_k(t)\left(L - \sum_{j=1}^{N} x_j(t)\right) + u_k(t), x_k(0) = L_{0k}, k = \overline{1, N}. \tag{9}$$

В роботах [10] – [13] проводився аналіз рівнянь (9) при постійних параметрах і спеціальному виборі функцій $\mathrm{u_k(t)}$. Аналіз властивостей розв'язків системи (9) при спеціальному виборі $\mathrm{u_k(t)}$ проводився в роботі [14]. Постановки задач про гарантоване оцінювання параметрів за результатами спостережень та методи їх розв'язання розглядались в [15], [16].

Нехай в точках $t_1 < t_2 < \ldots < t_m, t_i \in \left(0, \overline{T}\right), i = \overline{1, m},$ спостерігаються при невідомих параметрах $\theta_k = (\alpha_k, \beta_k)$ величини $x_k(t_j)$ та $y_{kj} = \dot{x}_k(t_j) + v_{kj}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, N}$, де функції $x_k(t)$ є розв'язками системи рівнянь:

$$\dot{x}_k(t) = (\alpha_k + \beta_k x_k(t))\left(L - \sum_{j=1}^{N} x_j(t)\right), x_k(0) = L_{0k}, k = \overline{1, N} \tag{10}$$

(тут $v_k = (v_{k1}, \dots, v_{km})^T$ – вектор похибок спостережень).

Відомо також, що невідомі похибки спостережень та невідомі параметри θ_k належать, відповідно, заданим множинам $V_k \subset R^m$ та $\Theta_k, k = \overline{1, N}$.

Означення 1. *Прогнозними оцінками величин* $x_k(t_{m+1}), k = \overline{1, N}$, де $t_{m+1} > t_m$, назвемо

$$\hat{x}_k(t_{m+1}) = g_k(y, x)$$

(тут $y = (y_1, \dots, y_N)$, $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y_k = (y_{k1}, \dots, y_{km})$, $x_k = (x_k(t_1), \dots, x_k(t_m))$, а $g_k, k = \overline{1, m}$ – деякі функції векторних аргументів).

Проблема, яка досліджується в статті полягає в знаходженні оптимальних в деякому сенсі прогнозних оцінок.

Позначимо через $G_k(x, y), k = \overline{1, m}$ множини

$$G_k(x, y) = \{\theta_k : (y_k - f_k(\theta_k)) \in V_k\} \cap \Theta_k, k = \overline{1, N},$$

де

$$f_k(\theta_k) = (f_{k1}(\theta_k), \dots, f_{km}(\theta_k)); f_{kj}(\theta_k) = \alpha_k \phi_j + \beta_k \psi_{kj};$$

$$\phi_j = L - \sum_{s=1}^{N} x_s(t_j)\,; \psi_{kj} = x_k(t_j)\phi_j, k = \overline{1, N}, j = \overline{1, m}.$$

Твердження 1. Нехай множини $V_k, k = \overline{1, N}$ – обмежені, а вектори $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$ та $\psi(k) = (\psi_{k1}, \dots, \psi_{km})$ є лінійно незалежними при кожному k. Тоді множини $G_k(x, y), k = \overline{1, N}$ обмежені в R^2.

Доведення. Оскільки множини $V_k, k = \overline{1, N}$ – обмежені, то при деякому q^2 справедливе включення $V_k \subseteq S_q(k), k = \overline{1, N}$, де

$$S_q(k) = \{v_k : (v_k, v_k) \leq q^2\}, k = \overline{1, m},$$

а значить $G_k(x, y), k = \overline{1, N}$ будуть включатись в множини $G_k^+(x, y), k = \overline{1, N}$, де

$$G_k^+(x,y) = \{\theta_k : (y_k - f_k(\theta_k), y_k - f_k(\theta_k)) \leq q^2\} \cap \Theta_k =$$
$$= G_k^{(1)}(x,y) \cap \Theta_k, k = \overline{1,N}. \quad (11)$$

Оскільки $\hat{\theta}_k, k = \overline{1,N}$ точки мінімуму функцій $\Phi_k(\theta_k), k = \overline{1,N}$, то $\Phi_k^{'}(\hat{\theta}_k) = 0$.

Розкладемо функції $\Phi_k(\theta_k), k = \overline{1,N}$ в ряд Тейлора в відповідних точках $\hat{\theta}_k$ і одержимо:

$$\Phi_k(\theta_k) \cong \Phi_k(\hat{\theta}_k) + \frac{1}{2}\left(\Phi_k^{''}(\hat{\theta}_k)(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k\right), k = \overline{1,N},$$

де $\Phi_k^{''}(\hat{\theta}_k)$ – матриці других похідних, які дорівнюють $2P_k, k = \overline{1,N}$. Звідси одержимо, що множини $G_k^{(1)}(x,y), k = \overline{1,N}$ мають вигляд

$$G_k^{(1)}(x,y) = \{\theta_k : (P_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k) \leq q^2 - \Phi_k(\hat{\theta}_k)\},$$

де $\Phi_k(\hat{\theta}_k) = (y_k - f_k(\hat{\theta}_k), y_k - f_k(\hat{\theta}_k))$, P_k – матриці вигляду

$$P_k = \begin{pmatrix} P_{11}(k) & P_{12}(k) \\ P_{21}(k) & P_{22}(k) \end{pmatrix},$$

$$P_{11}(k) = (\phi, \phi), P_{22}(k) = (\psi(k), \psi(k)), P_{12}(k) = P_{21}(k) =$$
$$(\phi, \psi_k),$$
$$\hat{\theta}_k \in Arg\, min\, \Phi_k\, (\theta_k).$$

Оскільки множини $G_k^{(1)}(x,y), k = \overline{1,N}$ обмежені, то обмеженими є і множини $G_k^+(x,y), k = \overline{1,N}$, а значить і множини $G_k(x,y), k = \overline{1,N}$.

Позначимо

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N), \theta_1 \in G_1(x,y), \dots, \theta_N \in G_N(x,y).$$

Уведемо далі множину прогнозних оцінок вектора

$$x(t_{m+1}, \theta) = (x_1(t_{m+1}, \theta), \dots, x_N(t_{m+1}, \theta)),$$

яка визначається наступним чином

$$X = \{x(t_{m+1}, \theta)\}.$$

Уведемо також на вимірних підмножинах множин $\mathrm{G_k(x,y)}, \mathrm{k} = \overline{1,\mathrm{N}}$ ймовірнісні міри $\mu_k(\cdot), k = \overline{1,N}$, такі, що$\mu_k(G_k(x,y)) = 1$.

Якщо $\hat{x}(\theta) = \hat{x}(t_{m+1},\theta)$ – деяка прогнозна оцінка, то визначимо середньоквадратичну похибку такої оцінки у вигляді:

$$\sigma(\hat{x}) = \left\{\int_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - x(\theta)|^2 \mu(d\theta)\right\}^{1/2},$$

де $G(x,y) = \prod_{k=1}^{N} G_k(x,y)$, $\mu(d\theta) = \prod_{k=1}^{N} \mu_k(d\theta)$.

Означення 2. Величину $\tilde{x}$, що визначається з умови

$$\tilde{x} \in Arg\min_{\hat{x}\in X} \sigma(\hat{x}),$$

назвемо *усередненою оптимальною середньоквадратичною прогнозною оцінкою* величини $x(t_{m+1},\theta)$, (далі УОСКП-оцінка), а величину $\sigma(\tilde{x})$ – *середньоквадратичною похибкою такої оцінки*.

Твердження 2. УОСКП-оцінка має вигляд

$$\tilde{x} = \int_{G(x,y)} x(t_{m+1},\theta)\mu(d\theta), \tag{12}$$

де рівність виконується майже скрізь по мірі $\mu(\cdot)$; при цьому

$$\sigma(\tilde{x}) = \int_{G(x,y)} |x(t_{m+1},\theta)|^2 \mu(d\theta) - |\tilde{x}|^2.$$

Доведення. Оскільки

$$\sigma^2(\hat{x}) = \int_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - \tilde{x}|^2 \mu(d\theta) + \int_{G(x,y)} |\tilde{x} - x(t_{m+1},\theta)|^2 \mu(d\theta) \geq$$

$$\geq \int_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - \tilde{x}|^2 \mu(d\theta),$$

то

$$\min_{\hat{x}\in X} \sigma^2(\hat{x}) = \int_{G(x,y)} |\tilde{x} - x(t_{m+1},\theta)|^2 \mu(d\theta) =$$

$$\int_{G(x,y)} |x(t_{m+1},\theta)|^2 \mu(d\theta) - |\tilde{x}|^2,$$

і мінімум досягається на такому векторі $\hat{x}(\theta)$, для якого виконується рівність

$$\int_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - \tilde{x}|^2 \mu(d\theta) = 0,$$

тому майже скрізь по мірі μ виконується рівність $\tilde{x} = \int_{G(x,y)} x(t_{m+1}, \theta)\mu(d\theta)$, що й потрібно було показати.

Нехай далі вектори $v_k, k = \overline{1, N}$ належать відповідним множинам $V_k, k = \overline{1, N}$ вигляду

$$V_k = \{v_k: (Q_k v_k, v_k) \leq 1\},$$

а вектор θ належить простору R^2; $Q_k, k = \overline{1, N}$ – додатно визначені матриці.

Твердження 3. Нехай вектори $\phi, \psi(k), k = \overline{1, N}$ – лінійно незалежні. Тоді множини $G_k(x, y), k = \overline{1, N}$ будуть мати вигляд

$$G_k(x, y) = \{\theta_k: (P_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k) \leq \gamma^2\}, k = \overline{1, N},$$

де $P_k, k = \overline{1, N}$ – матриці з елементами $P_{ij}(k), i, j = 1{,}2, k = \overline{1, N}$:

$$P_{11}(k) = (Q_k\phi, \phi), P_{22}(k) = (Q_k\psi(k), \psi(k)), P_{12}(k) = P_{21}(k) = (Q_k\phi, \psi(k));$$

а вектори $\hat{\theta}_k = (\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k), k = \overline{1, N}$ є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} P_{11}(k)\alpha_k + P_{12}(k)\beta_k = (Q_k y_k, \phi), \\ P_{21}(k)\alpha_k + P_{22}(k)\beta_k = (Q_k y_k, \psi(k)), \end{cases} \quad (13)$$

і параметри $\gamma_k, k = \overline{1, N}$ наступні:

$$\gamma_k = 1 - \Phi_k(\hat{\theta}_k),$$

$$\Phi_k(\theta_k) = (Q_k(y_k - \alpha_k\phi - \beta_k\psi(k)), y_k - \alpha_k\phi - \beta_k\psi(k)), k = \overline{1, N}.$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що

$$\min_{\theta} \Phi_k(\theta_k) = \Phi_k(\hat{\theta}_k),$$

де $\hat{\theta}_k, k = \overline{1, N}$ визначають із системи рівнянь (13).

Із формули Тейлора будемо мати рівності

$$\Phi_k(\theta_k) = \Phi_k(\hat{\theta}_k) + (P_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k), k = \overline{1, N},$$

із яких отримуємо

$$G_k(x,y)=\{\theta_k:(P_k(\theta_k-\hat{\theta}_k),\theta_k-\hat{\theta}_k)\le 1-\Phi_k(\hat{\theta}_k)\},$$

що й треба було показати.

Наслідок. Візьмемо міри $\mu_k(\cdot), k=\overline{1,N}$ у вигляді $\mu_k(d\theta)=d\theta/S(G_k(x,y))$, де $S(G_k(x,y))$ – площа еліпсу $\mathrm{G_k(x,y)}$. Тоді справедлива рівність:

$$\tilde{x}=\pi^{-N}\prod_{k=1}^{N}\left(\frac{\lambda_1(k)\lambda_2(k)}{\gamma_k}\right)^{1/2}\int_{\bar{G}(x.y)}x(t_{m+1},\theta+\hat{\theta})d\theta,$$

де $\hat{\theta}=(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_N)$,

$$\bar{G}(x,y)=\prod_{k=1}^{N}\bar{G}_k(x,y)\,,\bar{G}_k(x,y)=\{\theta_k:(P_k\theta_k,\theta_k)\le\gamma_k\};$$

$\lambda_1(k)$ та $\lambda_2(k)$ – власні значення матриць $P_k, k=\overline{1,N}$.

Розглянемо далі гарантовані прогнозні оцінки величин $x_k(t_{m+1},\theta), k=\overline{1,N}$. Припускаємо, що вектори $\theta_k, k=\overline{1,N}$ належать заданим множинам $\Theta_k\subset R^m, k=\overline{1,N}$.

Означення 3. *Гарантованою прогнозною оцінкою* величин $\mathrm{x_k(t_{m+1},\theta), k=\overline{1,N}}$ назвемо вектори $\mathrm{z_k, k=\overline{1,N}}$, які визначаються із умов:

$$\min_{\gamma_i,i=\overline{1,N}}\max_{\theta_i,i=\overline{1,N}}|x_k(t_{m+1},\gamma_1,\ldots,\gamma_N)-x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)|=$$

$$=\max_{\theta_i,i=\overline{1,N}}|z_k-x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)|=\sigma_{1k}, k=\overline{1,N}$$

(тут$\gamma_1\in G_1(x,y),\ldots,\gamma_N\in G_N(x,y),\theta_1\in G_1(x,y),\ldots,\theta_N\in G_N(x,y)$);

а $\sigma_{1k}, k=\overline{1,N}$ назвемо *гарантованими похибками оцінок* $\mathrm{z_k, k=\overline{1,N}}$.

Твердження 4. Нехай множини $G_k(x,y), k=\overline{1,N}$ – обмежені та замкнені. Гарантовані прогнозні оцінки $\mathrm{z_k, k=\overline{1,N}}$ мають вигляд:

$$z_k=\frac{1}{2}\left(\max_{\theta_i,i=\overline{1,N}}x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)+\min_{\theta_i,i=\overline{1,N}}x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)\right),$$

$$\theta_1 \in G_1(x,y),\ldots,\theta_N \in G_N(x,y),$$

при цьому

$$\sigma_{1k} = \frac{1}{2}\left(\underset{\theta_i, i=\overline{1,N}}{max} x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N) - \underset{\theta_i, i=\overline{1,N}}{min} x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)\right),$$

$$\theta_1 \in G_1(x,y),\ldots,\theta_N \in G_N(x,y).$$

Доведення. Зауважимо, що величини $\mathrm{x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N), k = \overline{1,N}}$ належать відповідним відрізам $[x_k^-, x_k^+], k = \overline{1,N}$, де

$$x_k^- = \underset{\theta_i, i=\overline{1,N}}{min} x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N), x_k^+ = \underset{\theta_i, i=\overline{1,N}}{max} x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N),$$

$$\theta_1 \in G_1(x,y),\ldots,\theta_N \in G_N(x,y).$$

Тоді справджується:

$$\underset{\theta_i, i=\overline{1,N}}{max} |x_k(t_{m+1},\gamma_1,\ldots,\gamma_N) - x_k(t_{m+1},\theta_1,\ldots,\theta_N)| =$$

$$= \left|x_k(t_{m+1},\gamma_1,\ldots,\gamma_N) - \frac{1}{2}(x_k^- + x_k^+)\right| + \sigma_{1k} \geq \sigma_{1k}, \theta_i \in$$

$$G_i(x,y), k = \overline{1,N},$$

а значить, нижня границя досягається на значеннях, які дорівнюють векторам $\mathrm{z_k, k = \overline{1,N}}$, що і потрібно було довести.

Розглянемо тепер випадок, коли в точках $t_1 < t_2 <\ldots< t_m, t_i \in (0,\overline{T}), i = \overline{1,m}$ спостерігають вектори:

$$y_k = H_k(t_k,\theta) + v_k, k = \overline{1,m},$$

де $H_k, k = \overline{1,m}$ – матриці розмірності $n \times N$, $x(t_k) = (x_1(t_k),\ldots,x_N(t_k))^T, k = \overline{1,m},$ $v_k, k = \overline{1,m}$ – похибки спостережень, $x(t_k,\theta), k = \overline{1,m}$ є розв'язком системи рівнянь (10) при деяких значеннях параметра $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_N)$.

Будемо припускати, що вектор $v = (v_1,\ldots,v_m)$ та параметр θ належать, відповідно, V та Θ .

Уведемо множину

$$\Theta_y = \{\theta: (y_1 - H_1 x(t_1, \theta), \ldots, y_m - H_m x(t_m, \theta)) \in V\} \cap \Theta.$$

Припустимо, що множина Θ_y – обмежена. Через $co\Theta_y$ позначимо найменшу замкнену опуклу множину, що містить множину Θ_y. На множині Θ_y розглянемо гарантовані прогнозні оцінки величин $x_k(t_{m+1}, \theta), k = \overline{1, N}$, які знаходяться з умов:

$$\min_{\hat{\theta} \in co\Theta_y} \max_{\theta \in co\Theta_y} \left| x_x(t_{m+1}, \hat{\theta}) - x_k(t_{m+1}, \theta) \right| =$$

$$= \max_{\theta \in co\Theta_y} |\hat{x}_x - x_k(t_{m+1}, \theta)| = \sigma_{2k}, k = \overline{1, N}.$$

Аналогічно тому, як це зроблено у твердженні 4, можна показати, що:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{2}(\hat{x}_k^+ + \hat{x}_k^-), \sigma_{2k} = \frac{1}{2}(\hat{x}_k^+ - \hat{x}_k^-), k = \overline{1, N},$$

де $\hat{x}_k^+ = \max\limits_{\theta \in co\Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta), \hat{x}_k^- = \min\limits_{\theta \in co\Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta), k = \overline{1, N}.$

Для прикладу розглянемо випадок, коли множина V має вигляд

$$V = (v: \textstyle\sum_{k=1}^m (Q_k v_k, v_k) \leq 1),$$

де Q_k – додатно визначена матриця, $\Theta = R^{2N}$.

Згідно (11) множина Θ_y задається у вигляді

$$\Theta_y = \{\theta: \textstyle\sum_{k=1}^m (Q_k(y_k - H_k x(t_k, \theta)), y_k - H_k x(t_k, \theta)) \leq 1\},$$

і задачі знаходження гарантованих оцінок і похибок прогнозу зведуться до проблеми знаходження значень $\min\limits_{\theta \in \Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta)$ та $\max\limits_{\theta \in \Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta), k = \overline{1, N}$ на множині

$$\Theta_y = \{\theta: \textstyle\sum_{k=1}^m (Q_k(y_k - H_k x(t_k, \theta)), y_k - H_k x(t_k, \theta)) \leq 1\}.$$

2.2 Приклад знаходження УОСКП оцінки

Розглянемо приклад інформаційного потоку(коли немає зовнішніх впливів, тобто $\alpha = 0$, а параметр інтенсивності міжособистісного спілкування β невідомий) при спостереженнях:

$$y_j = \dot{x}(t_j) + v_j, j = \overline{1,m}, \sum_{j=1}^{m} v_j^2 \leq \delta_m^2.$$

Потрібно знайти прогнозну оцінку кількості осіб, що сприйняли дану інформацію. Математична модель у такому випадку буде мати вигляд:

$$\dot{x}(t) = \beta x(t)(L - x(t)), x(0) = L_0.$$

Уважатимемо, що обмеження на параметр β відсутні (тобто $\beta \in R$). Будемо використовувати усереднений метод знаходження прогнозних оцінок.

Тоді згідно (11) отримаємо

$$G(x, y) = \left\{\beta : \sum_{j=1}^{m}(y_j - \beta x(t_j)(L - x(t_j)))^2 \leq \delta_m^2\right\}.$$

Нерівність

$$\sum_{j=1}^{m}(y_j - \beta x(t_j)(L - x(t_j)))^2 \leq \delta_m^2,$$

можна представити у вигляді

$$\beta^2 \sum_{j=1}^{m}\left[x(t_j)(L - x(t_j))\right]^2 - \beta \sum_{j=1}^{m} 2y_j x(t_j)(L - x(t_j)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} y_j^2 - \delta_m^2 \leq 0.$$

Звідси отримуємо:

$$(\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2) \leq 0, \qquad (14)$$

де

$$\beta_{1,2} = \frac{2\sum_{j=1}^{m} y_j x(t_j)(L - x(t_j)) \pm \sqrt{D}}{2\sum_{j=1}^{m}\left[x(t_j)(L - x(t_j))\right]^2},$$

$$D = \left[2\sum_{j=1}^{m} y_j x(t_j)(L - x(t_j))\right]^2 + 4(\delta_m^2 - \sum_{l=1}^{m} y_l^2)\sum_{j=1}^{m}\left[x(t_j)(L - x(t_j))\right]^2$$

$$=$$

$$= 4\delta_m^2 \sum_{j=1}^{m}\left[x(t_j)(L - x(t_j))\right]^2 +$$

$$+4\textstyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1,l\neq j}^{m} y_j x(t_l)\,(L - x(t_l))\left[y_l x(t_j)(L - x(t_j)) - y_j x(t_l)(L - x(t_l))\right].$$

Тоді розв’язок нерівності (6) буде таким

$$G(x, y) = [\beta_1, \beta_2].$$

Для того, щоб знайти УОСКП-оцінку (μ-усереднену оптимальну прогнозну оцінку, де$\mu(\cdot)$– нормована міра Лебега), розв’яжемо рівняння Рікатті:

$$\dot{x}(t) = \beta L x(t) - \beta x^2(t).$$

Зробивши заміну

$$z(t) = \tfrac{1}{x(t)}, \dot{z}(t) = -\tfrac{1}{x^2(t)}\dot{x}(t),$$

одержимо диференційне рівняння та відповідну йому початкову умову:

$$\dot{z}(t) = \beta - \beta L z(t), z(0) = 1/L_0.$$

Користуючись формулою Коші отримаємо:

$$z(t) = z(0)\,exp\left(-\textstyle\int_0^t \beta L ds\right) + \textstyle\int_0^t \left[exp\left(-\textstyle\int_\tau^t \beta L ds\right)\beta\right] d\tau = \tfrac{L_0 + (L - L_0)e^{-\beta L t}}{L L_0}.$$

Звідси

$$x(t) = \tfrac{L L_0}{L_0 + (L - L_0)e^{-\beta L t}}.$$

Тоді із (4)буде справджуватись

$$\tilde{x} = \int_{G(x,y)} x(t_{m+1}, \beta)\mu(d\beta) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1}\int_{\beta_1}^{\beta_2} x(t_{m+1}, \beta)d\beta =$$

$$= \frac{1}{\beta_2-\beta_1}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{LL_0 d\beta}{L_0+(L-L_0)e^{-\beta L_{m+1}}}.$$

Зробивши заміну

$p = e^{-\beta L t_{m+1}}, dp = -Lt_{m+1}e^{-\beta L t_{m+1}}d\beta,$

знайдемо прогноз $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = \frac{-L_0}{(\beta_2-\beta_1)t_{m+1}}\int_{e^{-\beta_1 L t_{m+1}}}^{e^{-\beta_2 L t_{m+1}}}\frac{dp}{p(L_0+(L-L_0)p)} = = L -$$

$$\frac{1}{(\beta_2-\beta_1)t_{m+1}} ln\left|\frac{L_0+(L-L_0)e^{-\beta_1 L t_{m+1}}}{L_0+(L-L_0)e^{-\beta_2 L t_{m+1}}}\right|.$$

2.3 Результати числового експерименту

Наведемо результати комп'ютерного моделювання динаміки чисельності прихильників певних інформаційних повідомлень.

Нехай є певна спільнота чисельністю $L = 100$ осіб, що піддається впливу повідомлень з двох джерел інформації. Тоді в момент часу $t \in (0, \bar{T}]$ ту частину спільноти, що піддалась впливу першого джерела позначимо через $x_1(t)$; ту частину спільноти, що піддалась впливу другого джерела – $x_2(t)$; частину спільноти, яка ще не визначилась зі своїм ставленням до трансльованої інформації (не сприйняла повідомлення жодного виду), визначимо як $(L - x_1(t) - x_2(t))$. Припускається, що інформація розповсюджується по двох інформаційних каналах:

1) *Міжособове спілкування членів спільноти.* Кожен, хто засвоїв інформаційне повідомлення, починає впливати на неохоплених членів. Суттєвим тут є те, як часто він ділиться своєю інформацією і наскільки вона є правдоподібною. Представимо цей вплив через параметри β_1 та β_2.

2) *Зовнішній по відношенню до спільноти інформаційний вплив.* Його характеристиками є частота транслювання повідомлення, наскільки воно правдоподібне та резонансне. Представимо цей вплив через параметри α_1 та α_2.

Тоді процес розповсюдження інформації в соціумі можна представити за допомогою системи диференційних рівнянь:

$$\dot{x}_i(t) = (\alpha_i - \beta_i x_i(t))(L - x_1(t) - x_2(t)), x_i(0) = L_{0i}, i = 1,2.$$

Зведемо цю систему до безрозмірного вигляду, використовуючи заміну $\bar{x}_i(t) = x_i(t)/L, i = 1,2$. Таким чином отримаємо:

$$\bar{x}'(t) = (\alpha_i - L\beta_i \bar{x}_i(t))(1 - \bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)), \bar{x}_i(0) = L_{0i}/L, i = 1,2.$$

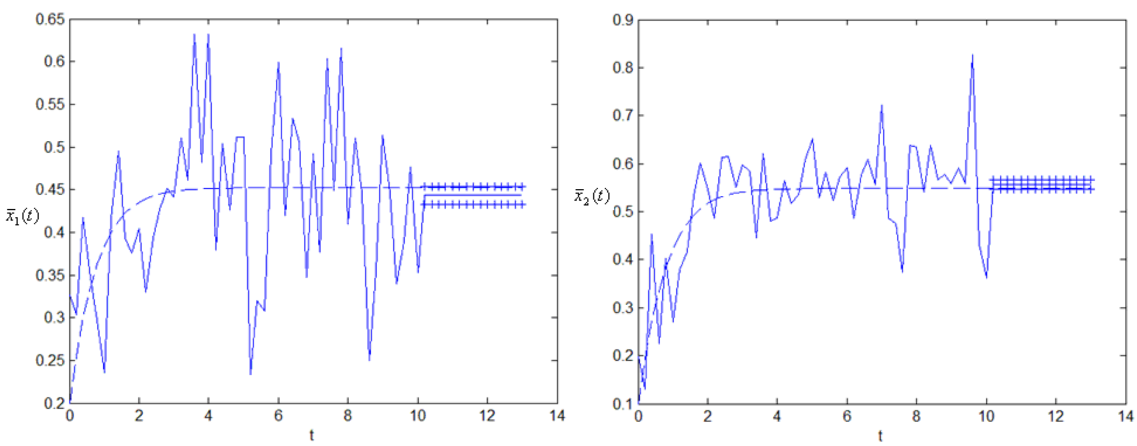
Нехай $\alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.7, \beta_1 = 0.002$ та $\beta_2 = 0.004$, й на момент $t = 0$ в спільноті $L_{01} = 20, L_{02} = 10$ прихильників відповідних інформаційних дій. Процес розповсюдження інформації при таких даних можна змоделювати за допомогою системи диференційних рівнянь:

$$\bar{x}_1' = (0.4 - 100 * 0.002\bar{x}_1(t))(1 - \bar{x}_1(t)) - \bar{x}_2(t), \bar{x}_1(0) = 0.2,$$
$$\bar{x}_2' = (0.7 - 100 * 0.004\bar{x}_2(t))(1 - \bar{x}_1(t)) - \tilde{x}_2(t), \bar{x}_2(0) = 0.1. \quad (15)$$

Припускаємо, що в точках $t_1 < t_2 <\ldots< t_m, t_i \in (0,10], i = \overline{1,50}$, проводяться спостереження за $\bar{x}_i(t), i = 1,2$ з похибками

$$\sum_{k=1}^{50}(v_k, v_k) < 0.85.$$

Тоді отримаємо таку динаміку системи (Мал. 1).

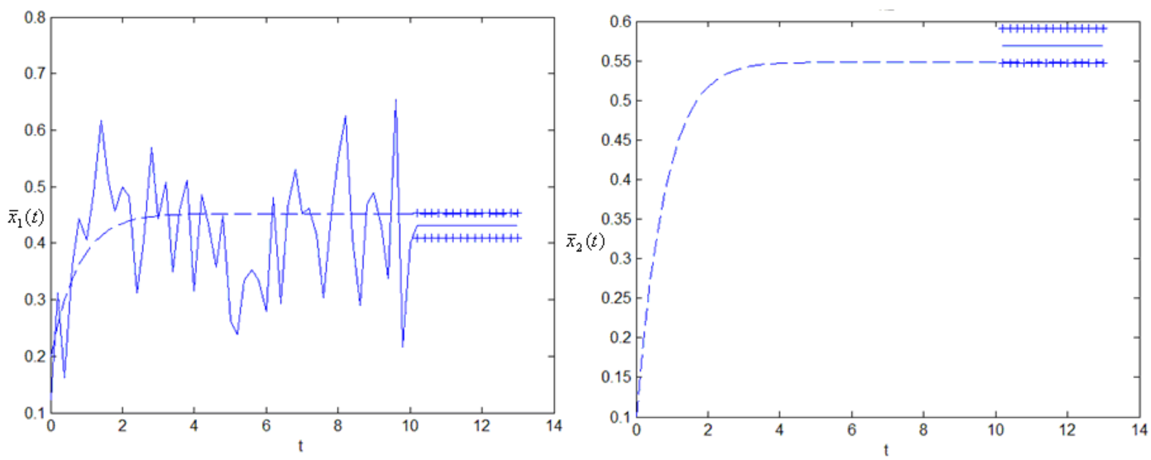


Мал. 1. Динаміка системи (15) при спостереженнях за кількістю прихильників обох інформаційних джерел, де пунктирною лінією зображені $\bar{x}_i(t), i = 1,2$, а суцільною – зображено спостереження за $\bar{x}_i(t), i = 1,2$ на $(0,10]$ та на проміжку $(10,13]$ гарантована прогнозна оцінка разом з діапазоном похибки гарантованої прогнозної оцінки.

Тепер припускаємо, що в точках $t_1 < t_2 < \ldots < t_m, t_i \in (0,10], i = \overline{1,50}$ проводяться спостереження тільки за кількістю прихильників лише одного джерела інформації $\bar{x}_1(t)$ з похибками

$$\sum_{k=1}^{50}(v_k, v_k) < 0.57.$$

Тоді отримаємо такі прогнозні оцінки (Мал. 2).



Мал 2. Динаміка системи (15) при спостереженнях за кількістю прихильників першого інформаційного джерела, де пунктирною лінією зображені $\bar{x}_i(t), i = 1,2$, а суцільною – зображено спостереження за $\bar{x}_1(t)$ на $(0,10]$ та на проміжку $(10,13]$ гарантована прогнозна оцінка разом з діапазоном похибки гарантованої прогнозної оцінки.

Розділ 3. Гарантовані оцінки нестаціонарних параметрів різницевих рівнянь в умовах невизначеності

3.1 Гарантовані оцінки

Дослідження математичних моделей в умовах невизначеності проводилися в роботах [17] – [19]. Огляд літератури, в якій висвітлено проблему побудови оцінок в умовах невизначеності, наприклад, наведено в роботах [20], [21]. Аналіз алгоритмів побудови оцінок параметрів диференціальних рівнянь проводився в роботах [22], [23]; постановка аналогічної задачі для систем різницевих рівнянь наведена в [24].

Нехай спостерігаються вектори $x(k) \in R^n, k = \overline{1, N+1}, n \geq 1$ при невідомих параметрах $a_k \in R^m, k = \overline{1, N}, m \geq 1$, які є розв'язками різницевих рівнянь:

$$x(k+1) = f(k, x(k))a_k + g(k, x(k)) + \eta_k, k = \overline{1, N},$$

де $f(k, x(k)), k = \overline{1, N}$ – задані матриці розмірності $n \times m$, $g(k, x(k)) \in R^n, k = \overline{1, N}$ – відомі вектори, $\eta_k \in R^n, k = \overline{1, N}$ – невідомі вектори завад. Відомо, що $\Delta_+ a_k \in U_k \subseteq R^m, k = \overline{1, N-1}$, де $\Delta_+ a_k = a_{k+1} - a_k, k = \overline{1, N-1}$. Припустимо, що $\eta_k \in V_k \subseteq R^n, k = \overline{1, N}$.

Апостеріорні множини матимуть вигляд:

$$G_a = \left\{a: (x(k+1) - f(k, x(k))a_k - g(k, x(k))) \in V_k, k = \overline{1, N}, \Delta_+ a_j \in U_j, j = \overline{1, N-1}\right\},$$

де $a = (a_1, \dots, a_N)$.

Означення 1. Матриці $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_N) \in G_a$ називатимемо *апостеріорними оцінками* матриціa.

Нехай G_a^- та G_a^+ такі множини, що виконуються умови $G_a^- \subseteq G_a \subseteq G_a^+$.

Означення 2. Матриці $a^- = (a_1^-, \dots, a_N^-) \in G_a^-$ та $a^+ = (a_1^+, \dots, a_N^+) \in G_a^+$ називаються *нижніми* та *верхніми апостеріорними оцінками матриці* a.

Нехай множини $U_j, j = \overline{1, N-1}$ та $V_k, k = \overline{1, N}$ – обмежені, тоді існують послідовності скалярних величин $q_{1j}^-, q_{1j}^+, j = \overline{1, N-1}, q_{2k}^-, q_{2k}^+, k = \overline{1, N}$та $\gamma_1^2(N), \gamma_2^2(N)$ таких, що:

$$G_a^- = \left\{ a: \sum_{k=1}^{N} (q_{2k}^-)^2 |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (q_{1k}^-)^2 |\Delta_+ a_k|^2 \le \gamma_1^2(N) \right\},$$

$$G_a^+ = \left\{ a: \sum_{k=1}^{N} (q_{2k}^+)^2 |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (q_{1k}^+)^2 |\Delta_+ a_k|^2 \le \gamma_2^2(N) \right\},$$

де

$$y(k) = x(k+1) - g(k, x(k)), f_k = f(k, x(k)), k = \overline{1, N}.$$

Для множин G_a^- та G_a^+ також справедливе представлення:

$$G_a^- = G_{a_1}^- \times \ldots \times G_{a_N}^-, a_k^- \in G_{a_k}^- \subseteq R^m, k = \overline{1, N},$$

$$G_a^+ = G_{a_1}^+ \times \ldots \times G_{a_N}^+, a_k^+ \in G_{a_k}^+ \subseteq R^m, k = \overline{1, N}.$$

Розглянемо функції:

$$\Phi^-(a) = \sum_{k=1}^{N} (q_{2k}^-)^2 |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (q_{1k}^-)^2 |\Delta_+ a_k|^2,$$

$$\Phi^+(a) = \sum_{k=1}^{N} (q_{2k}^+)^2 |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (q_{1k}^+)^2 |\Delta_+ a_k|^2.$$

Лема 1. Має місце представлення:

$$G_a^- = \{a: (A^-(a - \bar{a}^-), a - \bar{a}^-) \le \gamma_1^2(N) - \Phi^-(\bar{a}^-)\},$$

$$G_a^+ = \{a: (A^+(a - \bar{a}^+), a - \bar{a}^+) \le \gamma_2^2(N) - \Phi^+(\bar{a}^+)\},$$

де матриці $A^- = \left(A_{ij}^-\right)_{i,j=\overline{1,N}}$ та $A^+ = \left(A_{ij}^+\right)_{i,j=\overline{1,N}}$– три діагональні, причому:

$$A_{11}^{-} = (q_{11}^{-})^2 + (q_{21}^{-})^2 f_1^T f_1, A_{12}^{-} = -(q_{11}^{-})^2, A_{11}^{+} = (q_{11}^{+})^2 + (q_{21}^{+})^2 f_1^T f_1, A_{12}^{+} = -(q_{11}^{+})^2,$$

$$A_{k,k-1}^{-} = -(q_{1,k-1}^{-})^2, A_{kk}^{-} = (q_{1,k-1}^{-})^2 + (q_{1k}^{-})^2 + (q_{2k}^{-})^2 f_k^T f_k, A_{k,k+1}^{-} = -(q_{1k}^{-})^2, k = \overline{2, N-1},$$

$$A_{k,k-1}^{+} = -(q_{1,k-1}^{+})^2, A_{kk}^{+} = (q_{1,k-1}^{+})^2 + (q_{1k}^{+})^2 + (q_{2k}^{+})^2 f_k^T f_k, A_{k,k+1}^{+} = -(q_{1k}^{+})^2, k = \overline{2, N-1},$$

$$A_{N,N-1}^{-} = -(q_{1,N-1}^{-})^2, A_{NN}^{-} = (q_{1,N-1}^{-})^2 + (q_{2N}^{-})^2 f_N^T f_N, A_{N,N-1}^{-} = -(q_{1,N-1}^{+})^2, A_{NN}^{+} = (q_{1,N-1}^{+})^2 + (q_{2N}^{+})^2 f_N^T f_N.$$

Доведення. Спочатку покажемо справедливість представлення для множини G_a^+. Оскільки $\bar{a}^+$ – верхня гарантована оцінка, то $(\Phi^+)'(\bar{a}^+) = 0$. Розклавши функцію $\Phi^+(a)$ в ряд Тейлора, отримаємо:

$$\Phi^+(a) = \Phi(\bar{a}^+) + \frac{1}{2}((\Phi^+)''(\bar{a}^+)(a - \bar{a}^+), a - \bar{a}^+),$$

(тут $(\Phi^+)''(\bar{a}^+)$ – матриця других похідних, яка дорівнює $2A^+$), одержимо, що для множини G_a^+ справедливе представлення:

$$G_a^+ = \{a: (A^+(a - \bar{a}^+), a - \bar{a}^+) \le \gamma_2^2(N) - \Phi^+(\bar{a}^+)\},$$

що і потрібно було показати. Для множини G_a^- доведення аналогічне.

Означення 3. *Верхня* та *нижня гарантовані оцінки* $\bar{a}_k^-$ та $\bar{a}_k^+$ векторів $a_k, k = \overline{1, N}$ визначаються з умов:

$$\max_{a_k^- \in G_{a_k}^-} \|\bar{a}_k^- - a_k^-\| = \min_{a_k \in G_{a_k}^-} \max_{a_k^- \in G_{a_k}^-} \|a_k - a_k^-\| = \sigma_k^-, k = \overline{1, N},$$

$$\max_{a_k^+ \in G_{a_k}^+} \|\bar{a}_k^+ - a_k^+\| = \min_{a_k \in G_{a_k}^+} \max_{a_k^+ \in G_{a_k}^+} \|a_k - a_k^+\| = \sigma_k^+, k = \overline{1, N},$$

а величини σ_k^- та $\sigma_k^+, k = \overline{1, N}$ називаються *верхніми* та *нижніми похибками оцінювання*.

Твердження 1. Справедливі рівності:

$$\sigma_k^- = \lambda_{max}^{1/2k^{--1}{}_{k_1}^{-T^{2^{--1/2}}}} \overline{1,N}$$

$$\sigma_k^+ = \lambda_{max}^{1/2k^{+-1}{}_{k_2}^{-T^{2^{++1/2}}}} \overline{1,N}$$

де $\lambda k^{+-1}{}_k^T\overline{1,N}_{max}$ – максимальне власне число матриці $H_k(A^+)^{-1}H_k^T, k = \overline{1,N}$ (знак "T" – символ транспонування), а $H_k, k = \overline{1,N}$ – оператор проектування для якого справедливо $H_k a = a_k, k = \overline{1,N}$.

Доведення. Оскільки алгоритми знаходження верхніх та нижніх похибок оцінок для таких множин однакові, то знайдемо вирази для $\sigma_k^+, k = \overline{1,N}$.

Справедливе представлення

$$\sigma_k^+ = \max_{a_k^+ \in G_{a_k}^+} \|\bar{a}_k^+ - a_k^+\| = \max_{a^+ \in G_a^+} \|H_k(\bar{a}_k^+ - a^+)\|, k = \overline{1,N}.$$

Тоді справедливі перетворення:

$$\sigma_k^+ = \max_{a^+ \in G_a^+} \|H_k(\bar{a}^+ - a^+)\| = \max_{(A^+(a^+ - \bar{a}^+), a^+ - \bar{a}^+) \le 1} \|H_k(\bar{a}^+ - a^+)\| =$$

$$= \max_{\|p\| \le 1} \max_{(A^+(a^+ - \bar{a}^+), a^+ - \bar{a}^+) \le 1} (p, H_k(\bar{a}^+ - a^+))(\gamma_2^2(N) - \Phi^+(\bar{a}^+))^{1/2} =$$

$$= \max_{\|p\| \le 1} (H_k(A^+)^{-1}H_k^T p, p)^{1/2}(\gamma_2^2(N) - \Phi^+(\bar{a}^+))^{1/2} = \lambda_{max}^{1/2k^{+-1}{}_{k_2}^{-T^{2^{++1/2}}}} \overline{1,N}$$

де p – матриця розмірності $m \times N$, $\|p\| \le 1$.

При обмежених множинах $U_j, j = \overline{1, N-1}$ та $V_k, k = \overline{1,N}$, множину G_a можна представити у вигляді:

$$G_a = \Big\{a: \sum_{k=1}^{N} q_{2k}^2 |x(k+1) - f(k, x(k))a_k - g(k, x(k))|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^2 |a_{k+1} - a_k|^2 \le \beta^2\Big\}, \quad (16)$$

де $q_{1j}^2, j = \overline{1, N-1}$ та $q_{2k}^2, k = \overline{1,N}$; β^2 – відомі скалярні величини.

Для множини G_a також справедливе представлення:

$$G_a = G_{a_1} \times \ldots \times G_{a_N}, a_k \in G_{a_k} \subseteq R^m, k = \overline{1, N}.$$

Уведемо функцію вигляду:

$$\Phi(a) = \sum_{k=1}^{N} q_{2k}^2 |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^2 |a_{k-1} - a_k|^2. \quad (17)$$

Означення 4. Матрицю $\hat{a} = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_N)$, яка знаходиться з умови $\hat{a} \in \underset{a \in G_a}{Argmin} \Phi(a)$, назвемо *оптимальною оцінкою за функцією* $\Phi(a)$.

Означення 5. Назвемо *гарантованою оцінкою* параметрів $a_k, k = \overline{1, N}$ матрицю $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_N)$, яка знаходиться з умови:

$$\max_{a'' \in G_a} \|\tilde{a} - a''\| = \min_{a' \in G_a} \max_{a'' \in G_a} \|a' - a''\| = \sigma,$$

а σ назвемо *похибкою гарантованої оцінки* $\tilde{a}$ (тут $\|A\| = \{SpAA^T\}^{1/2}$).

Позначимо через$u_j, j = \overline{1, N-1}$ вектори $u_j = a_{j+1} - a_j, j = \overline{1, N-1}, a_1 \in G_{a_1}$, а через G_1 множину:

$$G_1 = \left\{ (u, a_1) : \sum_{k=1}^{N} q_{2k}^2 |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^2 |u_k|^2 \leq \beta^2 \right\},$$

де $u = (u_1, \ldots, u_{N-1})$.

Множину G_1 можна також представити у вигляді:

$$G_1 = U_{(1)} \times \ldots \times U_{(N-1)} \times G_{a_1}, u_i \in U_{(i)} \subset R^m, i = \overline{1, N-1}.$$

Задача знаходження оптимальної за функцією $\Phi(a)$ оцінки $\hat{a}$ еквівалентна задачі знаходження $(\hat{u}, \hat{a}_1) \in Arg \min_{(u,c) \in G_1} I(u, a_1)$, де

$$I(u, a_1) = \sum_{k=1}^{N} q_{2k}^2 |y(k) - f_k a_k|^2 + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^2 |u_k|^2. \quad (18)$$

Спочатку знайдемо оптимальну за функцією $\Phi(a)$ оцінку $\hat{a}$.

Твердження 2. Оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a}$ обчислюється за формулою:

$$\hat{a} = A^{-1} b, \quad (19)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} q_{11}^2 + q_{21}^2 f_1^T f_1 & -q_{11}^2 & \dots & 0 & & \dots & \rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\ 0 & 0 \\ & \dots & & \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & -q_{1,k-1}^2 & q_{1,k-1}^2 + q_{1k}^2 + q_{2k}^2 f_k^T f_k & -q_{1k}^2 & \dots & \rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\ 0 & 0 \\ & \dots & & \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & & \dots & -q_{1,N-1}^2 & q_{1,N-1}^2 + q_{2N}^2 f_N^T f_N \end{pmatrix}, b = (q_{21}^2 f_1^T y_1 \quad \dots \quad q_{2k}^2 f_k^T y_k \quad \dots \quad q_{2N}^2 f_N^T y_N)^T;$$

а A^{-1} – обернена матриця до матриці A.

Доведення. Знайдемо $\hat{a} \in \underset{a \in G_x}{Argmin} \Phi(a)$ з умови $\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\Phi(a+\tau v)\Big|_{\tau=0} = 0$, яка еквівалентна системі лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\begin{cases} (q_{11}^2 + q_{21}^2 f_1^T f_1)\hat{a}_1 - q_{11}^2 \hat{a}_2 = q_{21}^2 f_1^T y_1, \\ -q_{1,k-1}^2 \hat{a}_{k-1} + (q_{1,k-1}^2 + q_{1k}^2 + q_{2k}^2 f_k^T f_k)\hat{a}_k - q_{1k}^2 \hat{a}_{k+1} = q_{2k}^2 f_k^T y_k, k = \overline{2, N-1}, \\ -q_{1,N-1}^2 \hat{a}_{N-1} + (q_{1,N-1}^2 + q_{2N}^2 f_N^T f_N)\hat{a}_k = q_{2N}^2 f_N^T y_N. \end{cases} \tag{20}$$

СЛАР (5) можна представити у матричному вигляді:

$$A\hat{a} = b. \tag{21}$$

Розв’язок системи рівнянь (6) має вигляд:

$$\hat{a} = A^{-1} b,$$

що і потрібно було показати.

Лема 2. Множину G_a можна записати також у вигляді:

$$G_a = \{a: (A(a-\hat{a}), a-\hat{a}) \le \beta^2 - \Phi(\hat{a})\}.$$

Доведення. Оскільки $\hat{a}$ точка мінімуму функції $\Phi(a)$, то $\Phi'(\hat{a}) = 0$. Розклавши (17) в ряд Тейлора:

$$\Phi(a) = \Phi(\hat{a}) + \frac{1}{2}(\Phi''(\hat{a})(a-\hat{a}), a-\hat{a})$$

(тут $\Phi''(\hat{a})$ – матриця других похідних, яка дорівнює $2A$), одержимо, що для множини G_a справедливе представлення:

$$G_a = \{a: (A(a-\hat{a}), a-\hat{a}) \le \beta^2 - \Phi(\hat{a})\},$$

що і потрібно було показати.

Твердження 3. Оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a}$ є гарантованою оцінкою для матриці a, і при цьому для похибки гарантованої оцінки справедлива рівність:

$$\sigma = \lambda_{max}^{1/2^{-1}(\beta^2-\Phi(\hat{a}))^{1/2}}$$

де $\lambda-1_{max}$ найбільше власне число матриці A^{-1}.

Доведення. Має місце нерівність

$$\min_{a^{'}\in G_a}\max_{a^{''}\in G_a}\left\|a^{'}-a^{''}\right\| \geq \max_{\|l\|\leq 1}\min_{a^{'}\in G_a}\max_{a^{''}\in G_a}((l,a^{'})-(l,a^{''}))^2,$$

де l – матриця розмірності $m\times N$, норма якої $\|l\|\leq 1$.

Обчислимо $\max_{a''\in G_a}((l,a')-(l,a''))^2$. Поклавши $a^{''}-\hat{a}=\bar{a}$, отримаємо співвідношення:

$$\max_{a^{''}\in G_a}((l,a^{'})-(l,a^{''}))^2 = \max_{\bar{a}\in \bar{G}_a}((l,a^{'})-(l,\bar{a}+\hat{a}))^2$$

$$=\left[\max_{\bar{a}\in \bar{G}_a}(l,\bar{a}) + \left|(l,a^{'})-(l,\hat{a})\right|\right]^2 \geq$$

$$\geq \max_{\bar{a}\in\bar{G}_a}(l,\bar{a})^2 = \max_{(A\bar{a},\bar{a})\leq 1}(l,\bar{a})^2\left(\beta^2-\Phi(\hat{a})\right)^{1/2}, \tag{22}$$

де $\bar{G}_a = \{\bar{a}: (A\bar{a},\bar{a}) \leq \beta^2 - \Phi(\hat{a})\}$.

Нижня границя досягається при $a^{'}=\hat{a}$, тоді з (7) одержимо:

$$\max_{\|l\|\leq 1}\min_{a^{'}\in G_a}\max_{a^{''}\in G_a}((l,a^{'})-(l,a^{''}))^2 = \max_{\|l\|\leq 1}\min_{a^{'}\in G_a}\max_{(A\bar{a},\bar{a})\leq 1}(l,\bar{a})^2(\beta^2-\Phi(\hat{a}))^{1/2}$$

$$=\max_{(A\bar{a},\bar{a})\leq 1}\|\bar{a}\|(\beta^2-\Phi(\hat{a}))^{1/2}.$$

Для $\max_{(A\bar{a},\bar{a})\leq 1}\|\bar{a}\|$ справедливі рівності:

$$\max_{(A\bar{a},\bar{a})\leq 1}\|\bar{a}\| = \max_{(A\bar{a},\bar{a})\leq 1}\max_{\|p\|\leq 1}(p,\bar{a}) = \max_{\|p\|\leq 1}\max_{(A\bar{a},\bar{a})\leq 1}(p,\bar{a}),$$

де p – матриця розмірності $m\times N$, $\|p\|\leq 1$.

З узагальненої нерівності Коші-Буняковського випливає:

$$(p,\bar{a}) \le (A\bar{a},\bar{a})^{1/2}(A^{-1}p,p)^{1/2} \le (A^{-1}p,p)^{1/2}.$$

Тоді

$$\max_{(A\bar{a},\bar{a})\le 1}\|\bar{a}\| = \max_{\|p\|\le 1}(A^{-1}p,p)^{1/2} = \lambda_{max}^{1/2^{-1}} \quad (23)$$

З (8) отримаємо представлення для похибки гарантованої оцінки матриці a:

$$\sigma = \min_{a'\in G_a}\max_{a''\in G_a}\left\|a' - a''\right\| = \max_{a''\in G_a}\left\|\tilde{a} - a''\right\| = \lambda_{max}^{1/2^{-1}(\beta^2-\Phi(\hat{a}))^{1/2}}$$

що і потрібно було показати.

3.2 Інтерполяція параметрів різницевих рівнянь

В цьому розділі задачу знаходження гарантованої оцінки $\tilde{a}$ на основі спостережень $x(k), k = \overline{1, N+1}$ розв'яжемо за допомогою функцій Беллмана.

Твердження 4. Оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a}$ знаходиться за формулами:

$$\hat{a}_{j+1} = \hat{a}_j + \hat{u}_j, j = \overline{\rightleftarrows 1, N-1}; \tag{24}$$

$$\hat{a}_1 = \Bigg[q_{22}^2(E + A_2^T D_2^T) f_2^T f_2 (E + D_2 A_2) + q_{21}^2 f_1^T f_1 + \sum_{k=3}^{N} q_{2k}^2 W_{k2}^T f_k^T f_k W_{k2}$$

$$+ \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k}^2 W_{k2}^T A_{k+1}^T D_{k+1}^T D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} +$$

$$+ q_{11}^2 A_2^T D_2^T D_2 A_2 + q_{12}^2 (E + A_2^T D_2^T) A_3^T D_3^T D_3 A_3 (E + D_2 A_2)\Big]^{-1} \times$$

$$\times \Big[q_{21}^2 f_1^T y(1) + q_{22}^2 (E + A_2^T D_2^T) f_2^T \big(y(2) - f_2 D_2 \varphi_2\big) + \sum_{k=3}^{N} q_{2k}^2 W_{k2}^T f_k^T \Big(y(k) - f_k D_k \varphi_k - f_k \sum_{j=k}^{3} W_{kj} D_{j-1} \varphi_{j-1}\Big) -$$

$$- \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k}^2 W_{k2}^T A_{k+1}^T D_{k+1}^T Z_{k+1} - q_{11}^2 A_2^T D_2^T D_2 \phi_2 - q_{12}^2 (E + A_2^T D_2^T) A_3^T D_3^T (D_3 \phi_3 +$$

$$D_3 A_3 D_2 \phi_2)\Big];$$

$$\hat{u}_k = D_{k+1}(\phi_{k+1} + A_{k+1}\hat{a}_k), k = \overline{\rightleftarrows 1, N-1};$$

$$\phi_k = -2q_{2k}^2 f_k^T y(k) + 2q_{1k}^2 A_{k+1}^T D_{k+1}^T Q_{k+1} + S_{k+1}^T A_{k+1} Q_{k+1} + S_{k+1}^T \phi_{k+1}, k$$

$$= \overline{N-1, \rightleftarrows 1};$$

$$P_k = q_{2k}^2 f_k^T f_k + q_{1k}^2 A_{k+1}^T D_{k+1}^T D_{k+1} A_{k+1} + S_{k+1}^T P_{k+1} S_{k+1}, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1};$$

$$P_N = q_{2N}^2 f_N^T f_N, \phi_N = -2q_{2N}^2 f_N^T y(N);$$

$$A_{k+1} = P_{k+1}^T + P_{k+1}, k = \overline{N-1, 1}; D_{k+1} = -(2q_{1k}^2 E + A_{k+1})^{-1}, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1};$$

$$S_{k+1} = E + D_{k+1} A_{k+1}, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1}; Q_{k+1} = D_{k+1}\phi_{k+1}, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1};$$

$$W_{ki} = \prod_{j=i}^{k} \big(E + D_j A_j\big), k = \overline{3, N-1}, i = \overline{3, N-1};$$

$$Z_{k+1} = D_{k+1}(\phi_{k+1} + A_{k+1}D_k\phi_k + A_{k+1}\sum_{j=k}^{3} W_{kj}\, D_{j-1}\phi_{j-1}), k = \overline{3, N-1};$$

де E – одинична матриця розмірності $m \times m$.

Доведення. Функція Беллмана для задачі (18) має вигляд:

$$B_k(z) == \inf_{(u_k,\dots,u_{N-1})\in U_{(k)}\times\dots\times U_{(N-1)}} \Bigg\{ q_{2k}^2|y(z) - f_k z|^2 + q_{1k}^2|u_k|^2$$

$$+ \sum_{l=k+1}^{N-1} [q_{2l}^2|y(l) - f_l a_l|^2 + q_{1l}^2|u_l|^2] + q_{2N}^2|y(N) - f_N a_N|^2 \Bigg\}, z = a_k, k$$

$$\in \overline{N-1, \rightleftarrows 1};$$

$$B_N(z_1) = q_{2N}^2|y(N) - f_N z_1|^2, z_1 = a_N;$$

та задовольняє рівняння Беллмана:

$$B_k(z) = \min_{\tilde{v}\in U_{(k)}} \{q_{2k}^2|y(k) - f_k a_k|^2 + q_{1k}^2|\tilde{v}|^2 + B_{k+1}(z + \tilde{v})\}, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1}.$$

Шукатимемо функцію Беллмана у вигляді квадратичної форми:

$$B_k(z) = (P_k z, z) + (\phi_k, z) + d_k, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1}, \tag{25}$$

тоді отримуємо:

$$P_N = q_{2N}^2 f_N^T f_N,\ \varphi_N = -2q_{2N}^2 f_N^T y(N), d_N = q_{2N}^2|y(N)|^2.$$

Рівняння Беллмана набуває вигляду:

$$(P_k z, z) + (\phi_k, z) + d_k = H_k(v_k^*),$$

де

$$H_k(v_k) = q_{2k}^2|y(k) - f_k z|^2 + q_{1k}^2|v_k|^2 +$$

$$+(P_{k+1}(z + v_k), (z + v_k)) + (\phi_{k+1}, (z + v_k)) + d_{k+1}, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1},$$

$$v_k^* \in Arg \min_{v_k\in U_{(k)}} H_k(v_k), k = \overline{N-1,1}.$$

Знайдемо точки екстремуму $H_k(v_k), k = \overline{N-1,1}$:

$$\frac{d}{d\tau}H_k(v+\tau p)\Big|_{\tau=0} = 2q_{1k}^2(v,p) + (\phi_{k+1},p) + \Big((P_{k+1}^T + P_{k+1})(z+v),p\Big) = 0, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1}. \quad (26)$$

З (11) отримаємо рівності:

$$2q_{1k}^2 v_k^* + \phi_{k+1} + (P_{k+1}^T + P_{k+1})(z + v_k^*) = 0, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1},$$

$$(2q_{1k}^2 E + A_{k+1})v_k^* = -\phi_{k+1} - A_{k+1}z, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1}.$$

Справедливі наступні перетворення:

$$v_k^* = -(2q_{1k}^2 E + A_{k+1})^{-1}(\phi_{k+1} + A_{k+1}z) =$$

$$= D_{k+1}(\phi_{k+1} + A_{k+1}z) = D_{k+1}\phi_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1}.$$

Підставимо отримані точки екстремуму в (10):

$$(P_k z, z) + (\phi_k, z) + d_k = q_{2k}^2|y(k) - f_k z|^2 + q_{1k}^2|D_{k+1}\phi_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z|^2 +$$
$$+(P_{k+1}(z + D_{k+1}\phi_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z), z + D_{k+1}\phi_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z) +$$
$$+(\phi_{k+1}, (z + D_{k+1}\phi_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z)) + d_{k+1}, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1}.$$

Згрупувавши в скалярних добутках вектори при z, отримаємо:

$$(P_k z, z) + (\phi_k, z) + d_k = q_{2k}^2|y(k) - f_k z|^2 + q_{1k}^2|D_{k+1}\phi_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z|^2 +$$
$$+(P_{k+1}(D_{k+1}\phi_{k+1} + (E + D_{k+1}A_{k+1})z), D_{k+1}\phi_{k+1} + (E + D_{k+1}A_{k+1})z) +$$
$$+(\phi_{k+1}, D_{k+1}\phi_{k+1} + (E + D_{k+1}A_{k+1})z) + d_{k+1} =$$
$$= q_{2k}^2|y(k) - f_k z|^2 + q_{1k}^2|Q_{k+1} + D_{k+1}A_{k+1}z|^2 +$$
$$+(P_{k+1}(Q_{k+1} + S_{k+1}z), Q_{k+1} + S_{k+1}z) + (\phi_{k+1}, Q_{k+1} + S_{k+1}z) + d_{k+1}, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1}.$$

Останній вираз можна представити у вигляді:

$$(P_k z, z) + (\phi_k, z) + d_k = q_{2k}^2|y(k)|^2 - 2q_{2k}^2(f_k^T y(k), z) + q_{2k}^2(f_k^T f_k z, z) +$$
$$+q_{1k}^2|Q_{k+1}|^2 + 2q_{1k}^2(A_{k+1}^T D_{k+1}^T Q_{k+1}, z) + q_{1k}^2(A_{k+1}^T D_{k+1}^T D_{k+1}A_{k+1}z, z) +$$
$$+(P_{k+1}Q_{k+1}, Q_{k+1}) + (S_{k+1}^T A_{k+1}Q_{k+1}, z) + (S_{k+1}^T P_{k+1}S_{k+1}z, z) +$$
$$+(\phi_{k+1}, Q_{k+1}) + (S_{k+1}^T \phi_{k+1}, z) + d_{k+1}, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1},$$

з якого отримуються матриці P_k, вектори ϕ_k та скаляри d_k:

$$P_k = q_{2k}^2 f_k^T f_k + q_{1k}^2 A_{k+1}^T D_{k+1}^T D_{k+1} A_{k+1} + S_{k+1}^T P_{k+1}^T S_{k+1}, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1},$$

$$\phi_k = -2q_{2k}^2 f_k^T y(k) + 2q_{1k}^2 A_{k+1}^T D_{k+1}^T Q_{k+1} + S_{k+1}^T A_{k+1} Q_{k+1} + S_{k+1}^T \phi_{k+1}, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1},$$

$$d_k = q_{2k}^2 |y(k)|^2 + q_{1k}^2 |Q_{k+1}|^2 + (P_{k+1} Q_{k+1}, Q_{k+1}) + (\phi_{k+1}, Q_{k+1}) + d_{k+1}, k = \overline{N-1, \rightleftarrows 1}.$$

Тоді вектори $\hat{u}_k$ обчислюються за формулами:

$$\hat{u}_k = D_{k+1}(\phi_{k+1} + A_{k+1}\hat{a}_k), k = \overline{\rightleftarrows 1, N-1}. \qquad (27)$$

Знайдемо $\hat{a}_1 \in Arg \min_{a_1 \in G_{a_1}} I(\hat{u}, a_1)$. З (27) отримуємо представлення для $\hat{a}_k, k = \overline{2, N}$ та $\hat{u}_k, k = \overline{1, N-1}$:

$$\hat{a}_k = D_k \phi_k + \sum_{j=k}^{3} W_{kj} D_{j-1} \phi_{j-1} + W_{k2} a_1, k = \overline{3, \rightleftarrows N},$$

$$\hat{a}_2 = D_2 \phi_2 + (E + D_2 A_2) a_1,$$

$$\hat{u}_k = Z_{k+1} + D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} a_1, k = \overline{2, N-1},$$

$$\hat{u}_1 = D_2 \phi_2 + D_2 A_2 a_1, \hat{u}_2 = D_3 \phi_3 + D_3 A_3 D_2 \phi_2 + D_3 A_3 (E + D_2 A_2) a_1.$$

Функцію (18) можна також представити у вигляді:

$$I(\hat{u}, a_1) = q_{21}^2 |y(1) - f_1 a_1|^2 + q_{22}^2 |y(2) - f_2(D_2 \phi_2 + (E + D_2 A_2) a_1)|^2 +$$

$$+ \sum_{k=3}^{N} q_{2k}^2 \left| y(k) - f_k \left(D_k \phi_k + \sum_{j=k}^{3} W_{kj} D_{j-1} \phi_{j-1} + W_{k2} a_1 \right) \right|^2$$

$$+ \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k}^2 |Z_{k+1} + D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} a_1|^2 +$$

$$+ q_{11}^2 |D_2 \phi_2 + D_2 A_2 a_1|^2 + q_{12}^2 |D_3 \phi_3 + D_3 A_3 D_2 \phi_2 + D_3 A_3 (E + D_2 A_2) a_1|^2.$$

Знайдемо вектор $\hat{a}_1$ з умови:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} I(\hat{u}, a_1 + \tau v) \Big|_{\tau=0} =$$

$$= -q_{21}^2(f_1^T(y(1) - f_1 a_1), v)$$
$$- q_{22}^2\big((E + A_2^T D_2^T) f_2^T \big(y(2) - f_2(D_2\phi_2 + (E + D_2 A_2) a_1)\big), v\big) -$$
$$-\sum_{k=3}^{N} q_{2k}^2 \left(W_{k2}^T f_k^T \left(y(k) - f_k \left(D_k \phi_k + \sum_{j=k}^{3} W_{kj}\, D_{j-1}\phi_{j-1} + W_{k2} a_1 \right)\right), v \right) +$$
$$+ \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k}^2 (W_{k2}^T A_{k+1}^T D_{k+1}^T (Z_{k+1} + D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} a_1), v) +$$
$$+ q_{11}^2 (A_2^T D_2^T (D_2 \phi_2 + D_2 A_2 a_1), v)$$
$$+ q_{12}^2((E$$
$$+ A_2^T D_2^T) A_3^T D_3^T (D_3\phi_3 + D_3 A_3 D_2 \phi_2 + D_3 A_3 (E + D_2 A_2) a_1), v) = 0.$$

Звідси отримаємо рівності:

$$-q_{21}^2 f_1^T (y(1) - f_1 \hat{a}_1) - q_{22}^2 (E + A_2^T D_2^T) f_2^T \big(y(2) - f_2(D_2\phi_2 + (E + D_2 A_2)\hat{a}_1)\big) -$$
$$-\sum_{k=3}^{N} q_{2k}^2 W_{k2}^T f_k^T \left(y(k) - f_k D_k \phi_k - f_k \sum_{j=k}^{3} W_{kj}\, D_{j-1}\phi_{j-1} - f_k W_{k2}\hat{a}_1 \right) +$$
$$+ \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k}^2 W_{k2}^T A_{k+1}^T D_{k+1}^T (Z_{k+1} + D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} \hat{a}_1) +$$
$$+ q_{11}^2 A_2^T D_2^T (D_2\phi_2 + D_2 A_2 \hat{a}_1) + q_{12}^2 (E$$
$$+ A_2^T D_2^T) A_3^T D_3^T (D_3\phi_3 + D_3 A_3 D_2\phi_2 + D_3 A_3 (E + D_2 A_2)\hat{a}_1) =$$
$$= -q_{21}^2 f_1^T y(1) + q_{21}^2 f_1^T f_1 \hat{a}_1 - q_{22}^2 (E + A_2^T D_2^T) f_2^T (y(2) - f_2 D_2 \phi_2) + q_{22}^2 (E$$
$$+ A_2^T D_2^T) f_2^T f_2 (E + D_2 A_2)\hat{a}_1 -$$
$$-\sum_{k=3}^{N} q_{2k}^2 W_{k2}^T f_k^T \left(y(k) - f_k D_k \phi_k - f_k \sum_{j=k}^{3} W_{kj}\, D_{j-1}\phi_{j-1} \right)$$
$$+ \sum_{k=3}^{N} q_{2k}^2 W_{k2}^T f_k^T f_k W_{k2} \hat{a}_1 +$$

$$+\sum_{k=3}^{N-1} q_{1k}^2 W_{k2}^T A_{k+1}^T D_{k+1}^T Z_{k+1} + \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k}^2 W_{k2}^T A_{k+1}^T D_{k+1}^T D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} \hat{a}_1 +$$

$$+q_{11}^2 A_2^T D_2^T D_2 \phi_2 + q_{11}^2 A_2^T D_2^T D_2 A_2 \hat{a}_1 + q_{12}^2 (E + A_2^T D_2^T) A_3^T D_3^T (D_3 \phi_3 + D_3 A_3 D_2 \phi_2) +$$

$$+q_{12}^2 (E + A_2^T D_2^T) A_3^T D_3^T D_3 A_3 (E + D_2 A_2) \hat{a}_1 = 0,$$

з яких випливає система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\Bigg[q_{22}^2 (E + A_2^T D_2^T) f_2^T f_2 (E + D_2 A_2) + q_{21}^2 f_1^T f_1 + \sum_{k=3}^{N} q_{2k}^2 W_{k2}^T f_k^T f_k W_{k2}$$

$$+ \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k}^2 W_{k2}^T A_{k+1}^T D_{k+1}^T D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} +$$

$$+ q_{11}^2 A_2^T D_2^T D_2 A_2 + q_{12}^2 (E + A_2^T D_2^T) A_3^T D_3^T D_3 A_3 (E + D_2 A_2) \Big] \hat{a}_1 =$$

$$= q_{21}^2 f_1^T y(1) + q_{22}^2 (E + A_2^T D_2^T) f_2^T (y(2) - f_2 D_2 \phi_2)$$

$$+ \sum_{k=3}^{N} q_{2k}^2 W_{k2}^T f_k^T \left(y(k) - f_k D_k \phi_k - f_k \sum_{j=k}^{3} W_{kj} D_{j-1} \phi_{j-1} \right)$$

$$- - \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k}^2 W_{k2}^T A_{k+1}^T D_{k+1}^T Z_{k+1} - q_{11}^2 A_2^T D_2^T D_2 \phi_2 - q_{12}^2 (E$$

$$+ A_2^T D_2^T) A_3^T D_3^T (D_3 \phi_3 + D_3 A_3 D_2 \phi_2).$$

Отже, вектор $\hat{a}_1$ обчислюється за формулою:

$$\hat{a}_1 = \Bigg[q_{22}^2 (E + A_2^T D_2^T) f_2^T f_2 (E + D_2 A_2) + q_{21}^2 f_1^T f_1 + \sum_{k=3}^{N} q_{2k}^2 W_{k2}^T f_k^T f_k W_{k2}$$

$$+ \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k}^2 W_{k2}^T A_{k+1}^T D_{k+1}^T D_{k+1} A_{k+1} W_{k2} +$$

$$+ q_{11}^2 A_2^T D_2^T D_2 A_2 + q_{12}^2 (E + A_2^T D_2^T) A_3^T D_3^T D_3 A_3 (E + D_2 A_2) \Big]^{-1} \times$$

$$\times\Big[q_{21}^2 f_1^T y(1) + q_{22}^2 (E + A_2^T D_2^T) f_2^T \big(y(2) - f_2 D_2 \varphi_2\big) + \sum_{k=3}^{N} q_{2k}^2 W_{k2}^T f_k^T \Big(y(k) - f_k D_k \varphi_k - f_k \sum_{j=k}^{3} W_{kj} D_{j-1} \varphi_{j-1}\Big) -$$

$$- \sum_{k=3}^{N-1} q_{1k}^2 W_{k2}^T A_{k+1}^T D_{k+1}^T Z_{k+1} - q_{11}^2 A_2^T D_2^T D_2 \phi_2 - q_{12}^2 (E + A_2^T D_2^T) A_3^T D_3^T (D_3 \phi_3 + D_3 A_3 D_2 \phi_2)\Big],$$

що і треба було показати.

3.3 Мінімаксні оцінки параметрів різницевих рівнянь

В цьому розділі задачу знаходження гарантованої оцінки $\hat{a}$ на основі спостережень $x(k), k = \overline{1, N+1}$ розв'язуємо шляхом реалізації багатокрокової процедури. На j -у кроці ($j = \overline{1, N-1}$) відбувається пошук оцінки $\hat{a}_{j+1}$на основі оцінки $\hat{a}_j$ та спостережень $x(j)$ і$x(j+1)$ з використанням фільтра Калмана-Бюсі.

Для спрощення, припускаємо $a_1 = 0$, тоді покладемо $\hat{a}_1 = 0$ та позначимо $I(u, \tilde{a}) = I(u)$.

Знайдемо $\hat{u} \in Arg \min_{u \in U_{(1)} \times \ldots \times U_{(N-1)}} I(u)$ з виразу:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} I(u + v\tau)\Big|_{\tau=0} = -\sum_{k=1}^{N} q_{2k}^2 (y(k) - f_k a_k, f_k \dot{a}_k) + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^2 (u_k, v_k) = 0, \quad (28)$$

де $\dot{a}_{k+1} = \dot{a}_k + v_k, k = \overline{1, N-1}, \dot{a}_1 = 0$.

Визначимо оператори Δ_+ та Δ_- за правилами:

$$\Delta_+ u_j = u_{j+1} - u_j, \ j = \overline{1, N-2}; \Delta_- u_j = u_j - u_{j-1}, j = \overline{2, N-1},$$

та позначимо:

$$\Delta_- \hat{p}_k = q_{2k}^2 f_k^T (y(k) - f_k \hat{a}_k), k = \overline{1, N-1}, \hat{p}_N = 0.$$

Вираз (28) набуває вигляду:

$$-\sum_{k=1}^{N} q_{2k}^2 (y(k) - f_k \hat{a}_k, f_k \dot{a}_k) + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^2 (\hat{u}_k, v_k)$$

$$= -\sum_{k=1}^{N} (\Delta_- \hat{p}_k, \dot{a}_k) + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^2 (\hat{u}_k, v_k) =$$

$$= -[-\hat{p}_0 \dot{a}_1 + \hat{p}_N \dot{a}_N - \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{p}_k, \Delta_+ \dot{a}_k)] + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^2 (\hat{u}_k, v_k) = \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{p}_k, v_k) + \sum_{k=1}^{N-1} q_{1k}^2 (\hat{u}_k, v_k) = 0. \quad (29)$$

З (29) отримаємо рівності:

$$\hat{u}_k = -q_{1k}^{-2} \hat{p}_k, k = \overline{1, N-1}.$$

Тоді оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_N)$ знаходиться за формулами:

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k - q_{1k}^{-2}\hat{p}_k, k = \overline{1, N-1}, \hat{a}_1 = 0.$$

Спряжена система для системи (15) має вигляд:

$$\begin{cases} \hat{p}_{k-1} = \hat{p}_k - q_{2k}^2 f_k^T (y(k) - f_k \hat{a}_k), k = \overline{1, N}, \hat{p}_N = 0, \\ \hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k - q_{1k}^{-2}\hat{p}_k, k = \overline{1, N-1}, \hat{a}_1 = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Уведемо функцію

$$I_1(w) = \sum_{k=1}^N q_{2k}^{-2}|w_k|^2 + \sum_{k=1}^N q_{1k}^{-2}|z_k|^2, \quad (31)$$

де $z_{k-1} = z_k + f_k^T w_k, k = \overline{1, N}, z_N = \alpha, \alpha \in R^m; w = (w_1, \dots, w_N), w_k \in R^n$.

Для того щоб знайти $\widehat{w} \in Arg \min\limits_{w \in R^n \times \ldots \times R^n} I_1(w)$, де $\widehat{w} = (\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_N)$,

обчислимо похідну та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau} I_1(w + v\tau)\Big|_{\tau=0} = \sum_{k=1}^N q_{2k}^{-2}(w_k, v_k) + \sum_{k=1}^N q_{1k}^{-2}(z_k, \tilde{z}_k) = 0, \quad (32)$$

де $\tilde{z}_{k-1} = \tilde{z}_k + f_k^T v_k, k = \overline{2, N}, \tilde{z}_N = 0; v = (v_1, \dots, v_N), v_k \in R^n$.

Позначимо

$$\Delta_+ \tilde{p}_k = q_{1k}^{-2}\hat{z}_k, k = \overline{1, N}, \tilde{p}_1 = 0.$$

Отже, (18) набуває вигляду:

$$\sum_{k=1}^N q_{2k}^{-2}(\widehat{w}_k, v_k) + \sum_{k=1}^N q_{1k}^{-2}(\hat{z}_k, \tilde{z}_k) = \sum_{k=1}^N q_{2k}^{-2}(\widehat{w}_k, v_k) + \sum_{k=1}^N (\Delta_+\tilde{p}_k, \tilde{z}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^N q_{2k}^{-2}(\widehat{w}_k, v_k) + \left[-\tilde{p}_1\tilde{z}_1 + \tilde{p}_{N+1}\tilde{z}_N - \sum_{k=2}^N (\tilde{p}_k, \Delta_-\tilde{z}_k)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^N q_{2k}^{-2}(\widehat{w}_k, v_k) - \sum_{k=2}^N (\tilde{p}_k, \Delta_-\tilde{z}_k) - \tilde{p}_1(z_1 - z_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} q_{2k}^{-2}(\widehat{w}_k, v_k) - \sum_{k=1}^{N} (\tilde{p}_k, \Delta_- \tilde{z}_k) = \sum_{k=1}^{N} q_{2k}^{-2}(\widehat{w}_k, v_k) + \sum_{k=1}^{N} (\tilde{p}_k, f_k^T v_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} q_{2k}^{-2}(\widehat{w}_k, v_k) + \sum_{k=1}^{N} (f_k \tilde{p}_k, v_k) = 0.$$

З останньої рівності отримуємо:

$$\widehat{w}_k = -q_{2k}^{2} f_k \tilde{p}_k, k = \overline{1, N}. \tag{33}$$

Мінімізуючи функції (17), отримуємо систему вигляду:

$$\begin{cases} \hat{z}_{k-1} = \hat{z}_k + f_k^T w_k, \hat{z}_N = \alpha, k = \overline{1, N}, \\ \tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_k + q_{1k}^{-2} \hat{z}_k, \tilde{p}_1 = 0, k = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{34}$$

Твердження 5. Оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a}$ знаходиться за формулами:

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + F_k(y(k) - f_k \hat{a}_k), \hat{a}_1 = 0, k = \overline{1, N-1}, \tag{35}$$

де

$$F_k = P_k f_k^T [f_k P_k f_k^T + q_{2k}^{-2} E]^{-1}, k = \overline{1, N-1},$$

$$P_{k+1} = [E - F_k f_k] P_k [E - F_k f_k]^T + q_{1k}^{-2} E + q_{2k}^{-2} F_k F_k^T, k = \overline{1, N-2}, P_1 = 0.$$

Доведення. Згідно з теоремою двоїстості [25], задача знаходження оцінки $\hat{a}$ для системи (16) є еквівалентною задачі знаходження $w_k, k = \overline{1, N}$для системи (20), за умови, що має місце рівність:

$$(\alpha, \hat{a}_N) = -\sum_{k=1}^{N} (\widehat{w}_k, y(k)). \tag{36}$$

Оскільки $\hat{z}_N = \alpha$, то виконується умова:

$$(\alpha, \hat{a}_N) = (\hat{z}_N, \hat{a}_N). \tag{37}$$

З рівності

$$\sum_{k=1}^{N} (\Delta_- \hat{z}_k, \hat{a}_k) = -(\hat{z}_0, \hat{a}_1) - \sum_{k=1}^{N-1} (\hat{z}_k, \Delta_+ \hat{a}_k) + (\hat{z}_N, \hat{a}_N),$$

отримуємо представлення

$$(\hat{z}_N, \hat{a}_N) = \sum_{k=1}^{N}(\Delta_-\hat{z}_k, \hat{a}_k) + \sum_{k=1}^{N-1}(\hat{z}_k, \Delta_+\hat{a}_k). \tag{38}$$

Підставивши (24) у (23), одержимо:

$$(\alpha, \hat{a}_N) = \sum_{k=1}^{N}(\Delta_-\hat{z}_k, \hat{a}_k) + \sum_{k=1}^{N-1}(\hat{z}_k, \Delta_+\hat{a}_k).$$

Із (16) і (20) випливають рівності:

$$(\alpha, \hat{a}_N) = \sum_{k=1}^{N}(q_{2k}^2 f_k^T f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) - \sum_{k=1}^{N-1}(\hat{z}_k, q_{1k}^{-2}\hat{p}_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(q_{2k}^2 f_k^T f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) - \sum_{k=1}^{N-1}(q_{1k}^{-2}\hat{z}_k, \hat{p}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(q_{2k}^2 f_k^T f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) - \sum_{k=1}^{N-1}(\Delta_+\tilde{p}_k, \hat{p}_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(q_{2k}^2 f_k^T f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) - \sum_{k=1}^{N-1}(\Delta_+\tilde{p}_k, \hat{p}_k) - (\tilde{p}_{N+1} - \tilde{p}_N)\hat{p}_N =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(q_{2k}^2 f_k^T f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) - \sum_{k=1}^{N}(\Delta_+\tilde{p}_k, \hat{p}_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(q_{2k}^2 f_k^T f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) - \left[-(\tilde{p}_1, \hat{p}_1) - \sum_{k=2}^{N}(\tilde{p}_k, \Delta_-\hat{p}_k) + (\tilde{p}_{N+1}, \hat{p}_N)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(q_{2k}^2 f_k^T f_k \tilde{p}_k, \hat{a}_k) + \sum_{k=2}^{N}(\tilde{p}_k, \Delta_-\hat{p}_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(q_{2k}^2 \tilde{p}_k, f_k^T f_k \hat{a}_k) + \sum_{k=2}^{N}(\tilde{p}_k, \Delta_-\hat{p}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}(\tilde{p}_k, \Delta_-\hat{p}_k + q_{2k}^2 f_k^T f_k \hat{a}_k). \tag{39}$$

З (16) отримаємо формули:

$$q_{2k}^2 f_k^T y(k) = \Delta_-\hat{p}_k + q_{2k}^2 f_k^T f_k \hat{a}_k, k = \overline{1, N}. \tag{40}$$

Тоді, з врахуванням (26), для (25) справедливі перетворення:

$$(\alpha, \hat{a}_N) = \sum_{k=1}^{N} (\tilde{p}_k, \Delta_- \hat{p}_k + q_{2k}^2 f_k^T f_k \hat{a}_k) = \sum_{k=1}^{N} (\tilde{p}_k, q_{2k}^2 f_k^T y(k)) =$$

$$\sum_{k=1}^{N} (q_{2k}^2 f_k \tilde{p}_k, y(k)). \quad (41)$$

Використовуючи (19), із (27) отримаємо рівність:

$$(\alpha, \hat{a}_N) = -\sum_{k=1}^{N} (\widehat{w}_k, y(k)).$$

Згідно з [25], оптимальна за функцією $\Phi(a)$ оцінка $\hat{a}$ знаходиться наступним чином:

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + F_k(y(k) - f_k \hat{a}_k), \hat{a}_1 = 0, k = \overline{1, N-1},$$

що і потрібно було показати.

Похибка алгоритму обчислюється за формулами:

$$\sigma_f = \max_{a_N \in G_N} \|\hat{a}_N - a_N\| = \lambda_{max}^{1/2 \widehat{N^{-1} {}^{T}_{N}}^{2}{}^{1/2}}$$

3.4 Результати числових експериментів

В якості прикладу наведемо результати оцінювання невизначених параметрів для системи диференціальних рівнянь, яка використовується в задачах розповсюдження інформації в соціумі при $n = 1$ [26] – [29].

В соціумі чисельністю L осіб поширюються інформаційні повідомлення з одного джерела. Спостереження за кількістю осіб, що стали прихильниками розповсюджуваної інформації в момент $t_k \in (0, \bar{T}), k = \overline{1, N+1}$, позначимо $x(k) \in R^1$. Ці величини задовольняють різницеві рівняння:

$$x(k+1) = x(k) + \Delta t_k (a_k + b_k x(k))(L - x(k)) + \eta_k, k = \overline{1, N}, \tag{42}$$

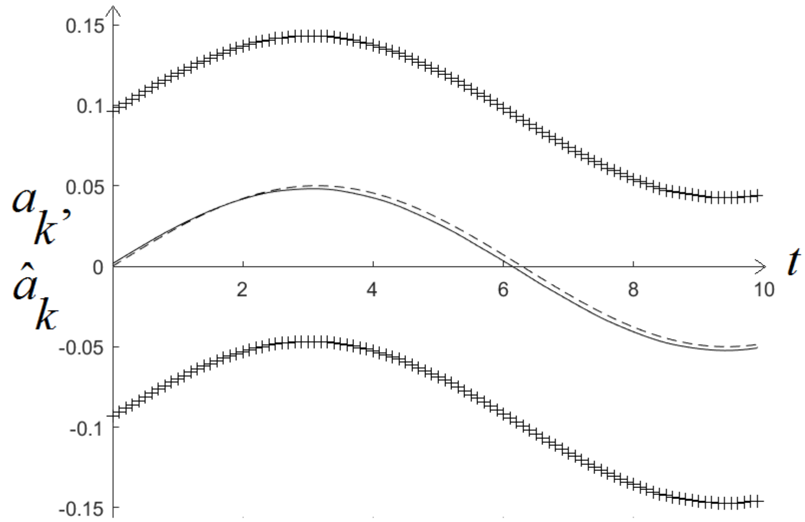
де $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, k = \overline{1, N}$; $b_k, k = \overline{1, N}$ – відомі параметри інтенсивності міжособистісного спілкування, а $a_k, k = \overline{1, N}$ – невідомі параметри зовнішнього впливу (наприклад, дія засобів масової інформації), які потрібно оцінити.

Покладемо $L = 100$, $\bar{T} = 10$, $N = 100$, $\Delta t_k = 0.1$, $b_k = 0.003$, $q_{1k} = 0.1$, $q_{2k} = 1$, $k = \overline{1{,}100}$, $\beta = 0.059$. Тоді при таких значеннях параметрів модель (28) набуває вигляду:

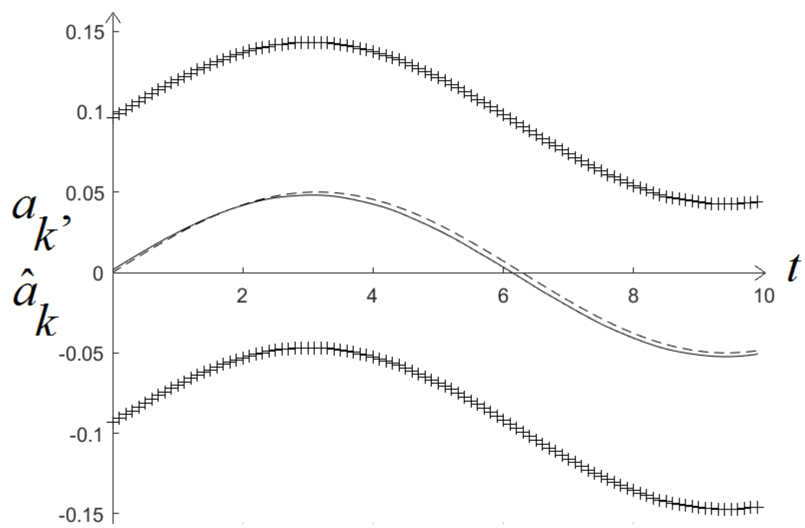
$$x(k+1) = x(k) + 0.1(a_k + 0.003x(k))(100 - x(k)) + \eta_k, k = \overline{1{,}100}. \tag{43}$$

На мал.3 зображено гарантовану оцінку параметрів $a_k, k = \overline{1{,}100}$, обчислених за формулою (18), та похибки для них.

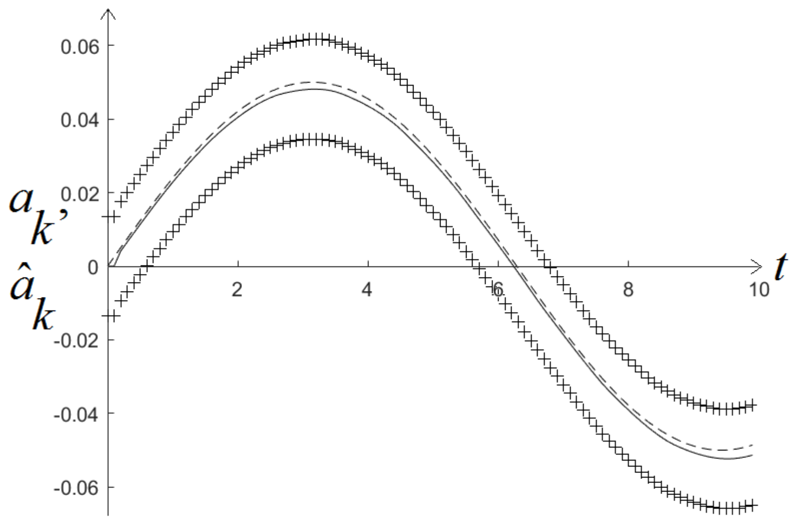
Результати побудови оцінок $\hat{a}_k, k = \overline{1{,}100}$ для математичної моделі (43), отримані на основі алгоритмів, сформульованих в Твердженні 4 та Твердженні 5, наведено на мал.4 та мал. 5, відповідно.



Мал.3. Графік оцінки параметрів зовнішнього спілкування математичної моделі (43), отриманий на основі (18), де пунктирною лінією зображено $a_k, k = \overline{1,100}$, суцільною – $\hat{a}_k, k = \overline{1,100}$, позначками $' + '$.– коридор похибки гарантованої оцінки $\hat{a}_k, k = \overline{1,100}$.



Мал.4. Графік оцінки параметрів зовнішнього спілкування математичної моделі (43), отриманий на основі (23), де пунктирною лінією зображено $a_k, k = \overline{1{,}100}$, суцільною – $\hat{a}_k, k = \overline{1{,}100}$.



Мал.5. Графік оцінки параметрів зовнішнього спілкування математичної моделі (43), отриманий на основі (35), де пунктирною лінією зображено $a_k, k = \overline{1{,}100}$, суцільною – $\hat{a}_k, k = \overline{1{,}100}$.

Висновки

Для моделей поширення інформації із спеціальним вибором функції зовнішньої дії та стаціонарними параметрами наведено алгоритми знаходження прогнозних оцінок: усередненої оптимальної середньоквадратичної прогнозної оцінки та гарантованої прогнозної оцінки. Представлено приклад знаходження усередненої оптимальної середньоквадратичної прогнозної оцінки для випадку розповсюдження одного виду інформації. Результати числового експерименту дозволяють зробити висновок про практичну важливість даного підходу. На основі цього можна говорити про необхідність використання даного підходу до окремих випадків загальної моделі інформаційного протиборства, які враховують забування та двох етапне засвоєння інформації. Наведено алгоритми знаходження оптимальних оцінок нестаціонарних параметрів нелінійних різницевих рівнянь, що містять завади. Також наведено приклад знаходження оптимальної оцінки параметрів. Представлено результати чисельних експериментів для задачі оцінки параметрів математичної моделі поширення одного виду інформації в соціумі, які дозволяють зробити висновок про практичну важливість даного підходу. На основі цього можна стверджувати про доцільність застосування даного підходу для задач прогнозування динамічних процесів, що описуються системами нелінійних різницевих рівнянь з невідомими параметрами.

Література

1. Михайлов А.П. Модели информационной борьбы /А.П.Михайлов,Н.А.Маревцева//Математическое моделирование. – 2011. – Т.23,№10. – С.19 – 32.
2. Наконечний О.Г. Оптимальне керування в динамічних задачах інформаційного протиборства із невизначеностями / О.Г.Наконечний, П.М.Зінько//Проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності: 25 міжн. конф., 11 – 15 травня 2015: тези доп. – Східниця. – С.112 – 114.
3. Nakonechnyi O. Best-mean estimates in models of information confrontation / O.Nakonechnyi O.,P.Zinko// Problems of decision making under uncertainties: 24 Intern. Conf., 1 – 5 sept. 2014. – Cesky Rudolec. – P.114 – 115.
4. Губанов Д.А. Теоретико-игровые модели информационного противоборства в социальных сетях / Д.А.Губанов,А.О.Калашников,Д.А.Новиков // Управление большими системами. – 2010 . – №31. – С.192 – 204.
5. Наконечный А.Г. Задачи управления для дифференциальных уравнений динамики Гомперца / А.Г. Наконечный ,В.П. Марценюк//Кибернетика и системный анализ. – 2004. - №2. – С.123 – 133.
6. Marzeniuk V.P. System analysis methods of medical and biological processes /V.P. Marzeniuk ,F.G.Nakonechny. – Ternopil: Ukrmedknyha, 2003. – 241p.

7. Марценюк В.П. Моделі та методи популяційної динаміки в програмному середовищі підтримки системних медичних досліджень /В.П.Марценюк, О.Г.Наконечний. – Тернопіль: Укрмедкнига, 2009. – 407с.
8. Бублик Б.Н. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах / Б.Н.Бублик, В.Я.Данилов, А.Г.Наконечный. – К.: УМК ВО ,1988. – 191с.
9. Васильев Ф.П. Основы метода динамической регуляризации / .П.Васильев,Ю.С.Осипов,М.М.Потапов. – М.: МГУ,1998. – 236с.
10. Mikhailov A.P., Marevtseva N.A. Models of Information Warfare / A.P. Mikhailov, N.A. Marevtseva //Mathematical Models and Computer Simulations. – Vol. 4, №3. – 2012. – P. 251–259. DOI:10.1134/S2070048212030076.
11. Mikhailov A.P., Petrov A.P., Proncheva O.G., Marevtseva N.A. Mathematical Modeling of Information Warfare in a Society / A.P. Mikhailov, A.P. Petrov, O.G. Proncheva, N.A. Marevtseva // Mediterranean Journal of Social Sciences. – Vol. 6, №5. – 2015. – P. 27–35. DOI:10.5901/mjss.2015.v6n5s2p27.
12. Михайлов А.П., Петров А.П., Маревцева Н.А., Третьякова И.В. Развитие модели распространения информации в социуме / А.П. Михайло, А.П. Петров, Н.А. Маревцева, И.В. Третьякова // Математическое моделирование. – 2014. – №3 (26). – с. 65–74.
13. Задачі протиборства в системах з динамікою Гомперца / О. Г.Наконечний, П. М. Зінько // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – №3 (120). – с.50–60.

14. Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М. Математична модель розповсюдження інформації з нестаціонарними параметрами / О.Г. Наконечний, Ю.М. Шевчук // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2016. – №3. – с.98–105.
15. Nakonechnyi O.G. Best-mean estimates in models of information confrontation/ O.G. Nakonechnyi //Abstracts XXIV International Conference “Problem of decision making under uncertainties”. – Cesky Rudolec, Czech Republic. September 1–5, 2014. – P.114–115.
16. Nakonechnyi O.G. Estimates of unsteady parameters in model of information confrontation/ O.G. Nakonechnyi, P.M. Zinko // Abstracts XXVIII International Conference “Problem of decision making under uncertainties”. – Brno, Czech Republic. August 25–30, 2016. – P.82–83.
17. Губарев В.Ф., Дарьин А.Н., Лысюченко И.А. Нелинейный оцениватель состояния по данным на скользящем интервале и возможность его применения в задаче ориентации космического апарата // Проблемы управления и информатики. – 2011. – №1. – С. 118–132.
18. Gubarev V.F., Shevchenko V.N., Gummel A.V. State estimation for systems subjected to bounded uncertainty using moving horizon approach // Prep. Of the 15-th IFAC Symposium on system identification, July 6–8, 2009. – Saint-Malo, France, 2009. – P. 910–915.

19. Бакан Г.М. Эллипсоидальные алгоритмы гарантированного оценивания и рекуррентный метод наименьших квадратов в задачах фильтрации состояний динамических систем // Проблемы управления и информатики. – 1997. – №3 – С. 34–48.
20. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. – К.: Наукова думка, 2006. – 264 с.
21. Наконечний О.Г. Оцінювання параметрів в умовах невизначеності // Наукові записки Київського національного університету, факультет кібернетики. – 2004. – Т. VII. – С. 102–111.
22. Наконечний О.Г. Задачі гарантованого оцінювання параметрів в динаміці // Тези XVII Міжнародної конференції "Problem of decision making under uncertainties", травень 23–27, 2011. – Східниця, Україна, 2011. – Р. 141.
23. Наконечний О.Г., Зінько П.М., Шевчук Ю.М. Аналіз нестаціонарних математичних моделей поширення інформації в умовах невизначеності // Тези міжнародної конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій", березень 2–4, 2018. – Рівне, Україна, 2018. – С. 182–184.
24. Nakonechny O.G., Zinko P.M., Shevchuk I.M. Estimate of parameters of difference equations under uncertainty // Proceedings of "Ukrainian conference on applied mathematics", September 28–30, 2017. – Lviv, Ukraine, 2017. – P. 182–184.

25. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973. – 324 с.
26. Mikhailov A.P., Petrov A.P., Proncheva O.G., Marevtseva N.A. Mathematical Modeling of Information Warfare in a Society // *Medite*rranean Journal of Social Sciences. – 2015. – Vol. 6, №5. – P. 27–35. DOI:10.5901/mjss.2015.v6n5s2p27.
27. Михайлов А.П., Петров А.П., Маревцева Н.А., Третьякова И.В. Развитие модели распространения информации в социуме // Математическое моделирование. – 2014. – №3 (26). – С. 65–74.
28. Наконечний О.Г., Зінько П.М. Задачі протиборства в системах з динамікою Гомперца // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – №3 (120). – С. 50–60.
29. Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М. Математична модель розповсюдження інформації з нестаціонарними параметрами // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2016. – №3. – С. 98–105.