

УДК 539.376

Павлюк Я.В., к.т.н., науковий співробітник,

Y.V. Pavlyuk, Ph. D.,

**До задачі розрахунку релаксації
напружень у тонкостінних трубчастих
елементах із лінійно-в'язкопружних
матеріалів**

**Creep of isotropic homogeneous and non-
aging of linear-viscoelastic materials under
the complex stress state**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail:¹ creep@inmech.kiev.ua,

National Academy of Sciences of Ukraine
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057,
Kyiv-57, P. Nesterov str., 3,
e-mail:¹ creep@inmech.kiev.ua,

Розглядається релаксація ізотропних однорідних і нестаріючих лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Розв'язок будується шляхом узагальнення вихідної одновимірної моделі в'язкопружності на складний напружений стан, що побудований на використанні гіпотези пропорційності девіаторів. Ядра спадковості задаються дробово-експоненційною функцією Работнова. Встановлюється залежність між ядрами інтенсивності та об'ємної повзучості, що задають скалярні властивості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану у визначальних рівняннях типу рівнянь малих пружно-пластичних деформацій, і ядрами повздожньої і поперечної повзучості, що задають спадкові властивості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу. Розв'язано та експериментально апробовано задачі розрахунку релаксації напружень тонкостінних труб за умов комбінованого навантаження розтягом із скрученням.

Ключові слова: релаксація, лінійно-в'язкопружність, ядро спадковості.

The relaxation of isotropic homogeneous and non-aging linear-viscoelastic materials under conditions of complex stress state is considered. Thin-walled tubular specimens of High Density Polyethylene (HDPE) for creep under a single-axial stretching, with a pure twist and combined load tension and torsion are considered as base experiments, tests. The solution is obtained by generalizing the initial one-dimensional viscoelasticity model to a complex stressed state, constructed using the hypothesis of the proportionality of deviators. The heredity kernels are given by the Rabotnov's fractional-exponential function. The dependence between the kernels of intensity and volumetric creep is established, which determine the scalar properties of linear viscoelastic materials in the conditions of a complex stressed state in the defining equations of the type of equations of small elastic-plastic deformations, and the kernels of longitudinal and transverse creep defining the hereditary properties of linear-viscoelastic materials under the conditions of the uniaxial tension. The problems of stress relaxation calculation of thin walled tubes under combined tension with torsion have been solved and experimentally approved.

Key Words: relaxation, linear-viscoelastic, heredity kernel.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ. У процесі експлуатації в'язкопружні матеріали у відповідальних елементах багатьох сучасних конструкцій деформуються і руйнуються при складному напруженому стані і складних режимах навантаження. Особливо актуальними є задачі із прогнозування релаксації напружень, що викликає перерозподіл напружень в елементах конструкцій у часі і порушення функціональних можливостей конструкції в

цілому. Дослідження процесів повзучості і релаксації лінійно-в'язкопружних матеріалів, особливо при складному напруженому стані і змінних режимах навантаження, все ще перебувають на стадії розвитку. Основні труднощі і нерозв'язані задачі в цій галузі пов'язані з вибором форми узагальнення одновимірних визначальних рівнянь теорії на складний напружений стан, з розробкою методів ідентифікації ядер

спадковості і методів визначення параметрів ядер, з вибором і обґрунтуванням системи базових експериментів, необхідних для визначення функцій і констант теорії.

1. Постановка задачі

Розглядається релаксація ізотропних однорідних і нестаріючих лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Визначальні рівняння повзучості, що задають залежність між компонентами тензорів напружень σ_{ij} , деформацій ε_{ij} і часом t , записуються у вигляді:

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij}(t) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = \frac{1}{2G} \left[s_{ij}(t) + \lambda_s \int_0^t K_s(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau \right] + \frac{1}{3B} \delta_{ij} \left[\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right]; \quad (i, j = \overline{1,3}),$$

розв'язком якого є рівняння релаксації напружень

$$\sigma_{ij}(t) = 2G e_{ij}(t) - 2G \lambda_s \int_0^t R_s(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau + \delta_{ij} \left[3B \varepsilon_v(t) - 3B \lambda_v \int_0^t R_v(t-\tau) \varepsilon_v(\tau) d\tau \right]; \quad (i, j = \overline{1,3}),$$

де $\varepsilon_{ij}(t)$, $\sigma_{ij}(t)$ – компоненти тензорів деформацій і напружень; $e_{ij}(t)$, $s_{ij}(t)$ – компоненти девіатора деформацій і девіатора напружень; $\varepsilon_v(t)$ – об'ємна деформація; $K_s(t-\tau)$, $K_v(t-\tau)$ – ядра зсувної і об'ємної повзучості; $R_s(t-\tau)$, $R_v(t-\tau)$ – ядра зсувної і об'ємної релаксації; G – модуль зсуву; B – об'ємний модуль; λ_s, λ_v – реологічні параметри; δ_{ij} – дельта-функція одинична функція Кронекера.

В якості ядер повзучості $K(t-\tau)$ та релаксації $R(t-\tau)$ в (1) і (2) вибираються дробово-експоненційні функції [1]

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (3)$$

$$R(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda + \beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]},$$

де α і β – параметри ядер ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція Ейлера.

Між ядрами повзучості і релаксації існує інтегральний зв'язок:

$$R(t) - K(t) = \lambda \int_0^t K(t-\tau) R(\tau) d\tau, \quad (4)$$

який дозволяє знаходити значення параметрів одного ядра за значеннями параметрів другого ядра.

Як базові експерименти для визначення параметрів ядер релаксації напружень використовуються результати випробувань зразків на повзучість матеріалу при одновісному розтягу і чистому скрученні.

Ідентифікація ядер релаксації $R_s(t)$ і $R_v(t)$ в (2) здійснюється на основі групи базових дослідів на повзучість при постійних напруженнях. Група базових дослідів включає випробування суцільних циліндричних зразків на повзучість за умов одновісного розтягу із заміром повздовжніх і поперечних деформацій. Одновимірні моделі повзучості, що встановлюють залежність між напруженнями, деформаціями і часом, задаються у цьому випадку рівняннями

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}(t)}{E} + \frac{\lambda_{11}}{E} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau;$$

$$\gamma_{21}(t) = \frac{\tau_{21}(t)}{G} + \frac{\tau_{21}}{G} \int_0^t K_{21}(t-\tau) \tau_{21}(\tau) d\tau,$$

які при $\sigma_{11} = const$ та $\tau_{21} = const$ зводяться до рівнянь

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right);$$

$$\gamma_{21}(t) = \frac{\tau_{21}}{G} \left(1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) d\tau \right).$$

тут $\sigma_{11}(t)$ – повздовжнє напруження; $\tau_{21}(t)$ – дотичне напруження кручення; $\varepsilon_{11}(t)$ і $\gamma_{21}(t)$ – повздовжня і кутова деформація, що включає пружну деформацію і деформацію повзучості; $K_{11}(t)$ – ядро повздовжньої повзучості; $K_{21}(t)$ – ядро зсувної повзучості; E – модуль пружності; G – модуль зсуву; λ_{11} і λ_{21} – реологічні параметри.

Задача полягає у визначенні параметрів ядер спадковості лінійно-в'язкопружних матеріалів при складному напруженому стані і вирішенні задач розрахунку релаксації напружень в тонкостінних трубчастих елементах при комбінованому навантаженні розтягом і крученням.

2. Ідентифікація ядер інтенсивності та об'ємної повзучості

Залежність між ядрами інтенсивності повзучості $K_i(t)$ і ядрами повздовжньої і зсувної

повзучості $K_{11}(t)$ і $K_{21}(t)$ встановлюється, виходячи з сумісного розв'язку рівнянь (1) і (6).

З другого рівняння в (1) з урахуванням (6), виходячи з умови зв'язку компонентів тензорів напружень і деформацій за умов одновісного розтягу при $\sigma_{11}(t) = const$ і $\sigma_i(t) = const$ отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{21}(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \tau_{21}(\tau) d\tau \right) = \\ & = \frac{1+\nu}{E} \left(\tau_{21}(t) + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) \sigma_{21}(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (7)$$

з якого випливає співвідношення

$$\lambda_i K_i(t) = \lambda_{21} K_{21}(t), \quad (8)$$

і відповідно можна вважати

$$\lambda_i = \lambda_{21} \text{ і } K_i(t) = K_{21}(t). \quad (9)$$

У (7) прийнято, що $\gamma_{21}(t) = 2\varepsilon_{21}(t)$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. (10)

Із співвідношень (8) і (9) випливає, що параметри ядер інтенсивності повзучості збігаються з параметрами ядер зсувної повзучості, що визначаються в експерименті на чисте кручення.

Залежність між ядрами об'ємної повзучості $K_v(t)$ і ядрами поздовжньої і зсувної повзучості $K_{11}(t)$ і $K_{21}(t)$ встановлюється, виходячи з сумісного розв'язку рівнянь (1) і (6).

З першого рівняння в (1) з урахуванням (6), виходячи з умови зв'язку компонентів тензорів напружень і деформацій за умов одновісного розтягу при $\sigma_{11}(t) = const$ отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) = & \frac{2(1+\nu)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) d\tau \right) + \\ & + \frac{(1-2\nu)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (11)$$

з урахуванням першого рівняння в (1) і (8) впливає залежність між операторами

$$\begin{aligned} & \frac{1-2\nu}{3} \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right) = \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right) - \\ & - \frac{2(1+\nu)}{3} \left(1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Диференціюючи обидві частини рівняння (12) по t і використовуючи теорему Ньютона-Лейбніца, отримуємо рівняння

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{3\lambda_{11}K_{11}(t) - 2(1+\nu)\lambda_{21}K_{21}(t)}{1-2\nu}. \quad (13)$$

Рівняння (13) встановлює залежність між ядром об'ємної повзучості і ядрами поздовжньої і зсувної повзучості при одновісному розтягу та чистому крученні. Дозволяє розрахувати дискретні значення ядер об'ємної повзучості $K_v(t)$ за умов складного напруженого стану в функції часу t . Параметри ядер визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер вибраним для ядра аналітичним виразом.

3. Розрахунок релаксації нормальних і дотичних напружень

Розв'язується задача розрахунку релаксації нормальних та дотичних напружень у тонкостінних трубчастих елементах за умов навантаження одновісним розтягом та скрученням.

Об'єктом дослідження обрані тонкостінні трубчаті зразки з поліетилену високої щільності ПЕВП. Експериментальні дані запозичені з роботи [2]. В якості базових експериментів розглядаються випробування тонкостінних трубчастих зразків на повзучість при одновісному розтягу, при чистому крученні і при комбінованому навантаженні з розтягом і крученням. За даними випробувань на одновісний розтяг визначаються параметри ядер поздовжньої та зсувної повзучості.

У таблиці 1 наведені значення параметрів ядер спадковості поліетилену ПЕВП. Значення пружних сталей запозичені з [1].

Таблиця 1

Значення параметрів ядер спадковості для ПЕВП

$K_{11}(t), \text{ год}^{-1}$			$K_{21}(t), \text{ год}^{-1}$		
α_{11}	β_{11}	λ_{11}	α_{21}	β_{21}	λ_{21}
-0,6460	0,1398	1,9439	-0,4700	-1,2467	2,0197
$K_i(t), R_i(t), \text{ год}^{-1}$			$K_v(t), R_v(t), \text{ год}^{-1}$		
α_i	β_i	λ_i	α_v	β_v	λ_v
-0,4706	1,2402	2,0155	-0,6334	0,2971	9,1396

Значення параметрів ядер спадковості визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер повзучості дробово-експоненційною функцією (3) за методикою викладеною в [1]. Розмірність коефіцієнтів β і λ – $\text{год}^{-(1+\alpha)}$, а коефіцієнт α – безрозмірний.

Розв'язок будується на основі тривимірної моделі в'язкопружності (1) з використанням

значень параметрів ядер спадковості, наведених в таблиці 1.

Для розрахунку релаксації нормальних напружень $\sigma_{11}(t)$ із (1) при $\varepsilon_{11} = const$; $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = 0$ і при $\varepsilon_{11} = const$; $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = const$, у випадку заміру в базовому експерименті поздовжніх і поперечних деформацій повзучості отримуємо з урахуванням (3) рівняння

$$\sigma_{11}(t) = \frac{4}{3} G(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \left\{ 1 - \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_s + \beta_s)^n t^{(1+n)(1+\alpha_s)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_s)]} \right\} + (14)$$

$$+ 3B(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}) \left\{ 1 - \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_v + \beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_v)]} \right\},$$

де прийнято

$$e_{ij} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{3} \varepsilon_v; \quad \varepsilon_v = \varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}; \quad \varepsilon_v = (1 - 2\nu)\varepsilon_{11}.$$

Для розрахунку релаксації дотичних напружень $\tau_{21}(t)$ із (1) при $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = const$; $\varepsilon_{11} = 0$ і при $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = const$; $\varepsilon_{11} = const$ з урахуванням (3) рівняння

$$\tau_{21}(t) = 2G\varepsilon_{21} \left\{ 1 - \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_s + \beta_s)^n t^{(1+n)(1+\alpha_s)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_s)]} \right\}, (15)$$

де прийнято $\sigma_{ij} = \tau_{21}(t)$ і $e_{ij} = \varepsilon_{21}$.

Результати розрахунків релаксації нормальних $\sigma_{11}(t)$ та дотичних $\tau_{21}(t)$ напружень

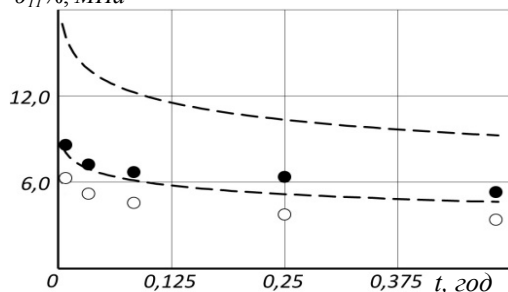


Рис.1 Релаксація нормальних напружень

Список використаних джерел

1. Голуб В.П. Идентификация ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. 1. Суперпозиция сдвиговой и объемной ползучести / В. П. Голуб, Б. П. Маслов, П. В. Фернати // Прикл. механика. – 2016. – 52. – № 2. – С. 78-90.

2. Крегерс А.Ф. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений / А.Ф. Крегерс, М.Р. Килевич // Механика композитных материалов. – 1985. – №2. – С. 195-201.

напружень у тонкостінних трубчастих елементах з поліетилену високої щільності ПЕВП, виконаних за рівняннями (14) і (15) з використанням наведених в таблиці 1 значень параметрів ядер спадковості, співставлені на рис. 1 і 2 з експериментальними даними. Результати розрахунків нанесені штриховими лініями, а експериментальні дані – точками.

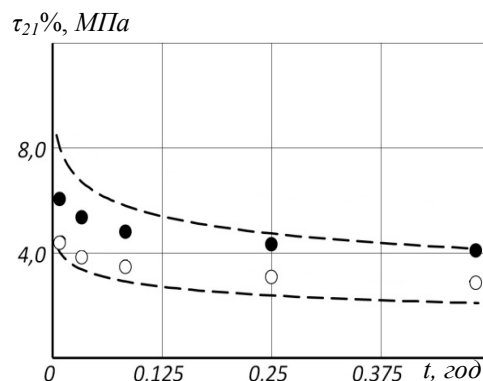


Рис. 2 Релаксація дотичних напружень

Для поліетилену ПЕВП релаксація нормальних (рис. 1) та дотичних (рис.2) напружень розраховувались при деформуванні видовженнями і зсувами при $\varepsilon_{11} = 1,0$ і $\varepsilon_{21} = 0,87$ (криві 1,○)% та при $\varepsilon_{11} = 2,0$ і $\varepsilon_{21} = 1,73$ (криві 2,●) %.

Висновки

Як видно із результатів розрахунків релаксації нормальних та дотичних напружень, наведених на рис. 1-2, отримано задовільне узгодження результатів розрахунку з експериментами. Максимальна похибка, при розрахунку релаксації напружень не перевищувала 20%.

References

1. GOLUB, V.P., MASLOV, B.P. and FERNATI, P.V. (2016) Identifikatsiya yader nasledstvennosti izotropnykh lineyno-vyazkoupругih materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii. 1. Superpozitsiya sdvigovoy i ob'emnoy polzuchesti. *Prikladnaya mehanika*. 52(2). p. 78-90.

2. KREGERS A.F. and KILEVICH M.R. (1985) Kompleksnoe issledovanie polietilena vyysokoy plotnosti v usloviyah nelineynoy polzuchesti i relaksatsii napryazheniy. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 2. p. 195-201.

Надійшла до редколегії 31.05.2019