

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Сердюк Марія Вікторівна

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ ДЛЯ РАДІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ p -АДИЧНОГО АРГУМЕНТУ

Спеціальність - 111 математика

Галузь знань - 11 математика та статистика

Подається на здобуття наукового степеня *доктора філософії*

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ *М. В. Сердюк*

Наукові керівники

Шевчук Ігор Олександрович,

доктор фізико-математичних наук,

член-кореспондент НАН України, професор

Антонюк Олександра Вікторівна,

доктор фізико-математичних наук, старший дослідник

Київ — 2025

Анотація

Сердюк М. В. Псевдодиференціальні рівняння з виродженням для радіальних функцій p -адичного аргументу. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2025.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню питань про існування та єдиність, а також певні властивості розв'язків псевдодиференціальних рівнянь з оператором дробового диференціювання на неархімедовому полі p -адичних чисел, які можуть розумітися як аналог звичайних диференціальних рівнянь, у тому числі зі слабким та регулярним виродженням. Крім того, досліджується більш загальний тип псевдодиференціального рівняння з p -адичними часовою та просторовою змінними.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами, зазначено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, наведено список конференцій, на яких робота пройшла апробацію, та короткий зміст роботи.

У першому розділі дисертаційної роботи вводяться необхідні поняття, наведено огляд літератури за тематикою роботи та результатів, отриманих іншими авторами.

У другому розділі дисертації досліджується задача Коші для псевдодиференціального рівняння зі слабким виродженням на радіальних функціях p -адичного аргументу. Розглянуто інтегральне рівняння, яке

відповідає задачі Коші, та досліджено питання існування та єдиності його локальних м'яких розв'язків та зв'язку з розв'язками початкового диференціального рівняння.

У третьому розділі вивчається випадок регулярного виродження, тобто коли порядок виродження при похідній збігається з порядком диференціювання. Для таких рівнянь отримано умови збіжності формальних розв'язків у вигляді степеневому ряду.

У четвертому розділі дисертаційного дослідження вивчається новий клас неархімедових рівнянь, який з одного боку є узагальненням рівнянь хвильового типу з p -адичними часовою та просторовою змінними, а з іншого боку має деякі властивості, характерні для параболічних рівнянь з дійсним часом та p -адичною просторовою змінною. Доведено існування та єдиність розв'язків відповідної задачі Коші. Досліджено властивості розв'язків, такі як скінченна область залежності та оцінка на фундаментальний розв'язок задачі Коші.

У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

- отримано достатні умови існування та єдиності локального м'якого розв'язку задачі Коші для нелінійного псевдодиференціального рівняння зі слабким виродженням на радіальних функціях p -адичного аргументу;
- побудовано продовження локального м'якого розв'язку рівняння зі слабким виродженням на весь простір p -адичних чисел, та визначено достатні умови на праву частину рівняння, за яких це продовження буде коректним;
- доведено, що за певних умов побудований таким чином м'який розв'язок є розв'язком початкової задачі Коші;
- знайдено достатні умови існування формального розв'язку лінійного псевдодиференціального рівняння з регулярним виродженням у вигляді степеневому ряду;

- доведено, що формальний розв’язок такого рівняння за певних умов є локально абсолютно збіжним;
- досліджено узагальнене псевдодиференціальне рівняння на радіальних за часом функціях з p -адичною часовою та просторовою змінними, у випадку, коли порядки похідних за часом та за простором не співпадають;
- отримано необхідні та достатні умови існування та єдиності фундаментального розв’язку такого рівняння та розв’язку відповідної задачі Коші у просторі Лізоркіна;
- побудовано оцінку даного фундаментального розв’язку у термінах норми від p -адичної змінної. Такі оцінки є аналогічними до відповідних відомих оцінок для параболічних рівнянь з дійсною часовою та p -адичною просторовою змінними;
- досліджено додаткові властивості розв’язку відповідної задачі Коші, зокрема доведено скінченність області залежності розв’язку від початкової умови;
- побудовано рівномірну по часу оцінку даного розв’язку у просторі L^1 за просторовою змінною в термінах початкової умови.

Дисертаційна робота має теоретичне значення. Отримані в роботі результати можуть бути використані в подальших дослідженнях, пов’язаних з розв’язністю псевдодиференціальних рівнянь із виродженням при головній похідній в просторах функцій p -адичного аргументу, а також при побудові теорії регулярних і сингулярних розв’язків таких рівнянь.

Ключові слова: диференціальні рівняння, лінійні оператори, оператор дробової похідної, параболічне рівняння, рівняння в частинних похідних, псевдодиференціальний оператор, м’який розв’язок, слабкий розв’язок, формальний степеневий ряд, задача Коші, фундаментальний розв’язок, p -адичний аналіз.

Abstract

Serdiuk M. V. Pseudo-differential equations with degeneration for radial functions of p -adic argument. — Manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Philosophy Degree in the speciality 111 Mathematics. — Taras Shevchenko National University of Kyiv, MES of Ukraine, Kyiv, 2025.

The dissertation is devoted to the study of the existence, uniqueness and also some properties of solutions of pseudo-differential equations with the fractional differentiation operator on the non-Archimedean field of p -adic numbers, which can be understood as an analog of ordinary differential equations, including those with weak and regular degeneration. In addition, we study a more general type of the pseudo-differential equation with p -adic time and space variables.

The dissertation consists of abstracts in Ukrainian and English, an introduction, four chapters of the main part, conclusions, a list of references, and an appendix.

The introduction highlights the relevance of the topic, indicates the connection of the dissertation with scientific programs, plans, topics, states the purpose and objectives, object, subject and methods of the study, presents the scientific novelty and practical significance of the results, characterizes the personal contribution of the applicant, provides a list of conferences where the work was tested, and a summary of the work.

The first chapter of the thesis introduces the necessary concepts, provides a review of the literature on the subject matter of the work and the results obtained by other authors.

In the second chapter of the dissertation, we study the Cauchy problem for a pseudo-differential equation with weak degeneracy on radial functions of a p -adic argument. The integral equation corresponding to the Cauchy problem is considered, and the existence and uniqueness of its local mild solutions

and the connection with the solutions of the initial differential equation are investigated.

In the third section, we study the case of regular degeneration, i.e., when the order of degeneration in the derivative coincides with the order of differentiation. For such equations, the conditions for the convergence of formal solutions in the form of a power series are obtained.

In the fourth chapter of the dissertation, a new class of non-Archimedean equations is studied, which, on the one hand, is a generalization of wave-type equations with p -adic time and space variables, and on the other hand, has some properties characteristic of parabolic equations with real time and p -adic space variables. We prove the existence and uniqueness of solutions to the corresponding Cauchy problem. The properties of the solutions, such as the finite domain of dependence and the estimation on the fundamental solution of the Cauchy problem, are investigated.

The following new scientific results were obtained in the dissertation:

- sufficient conditions for the existence and uniqueness of a local mild solution of the Cauchy problem for a nonlinear pseudo-differential equation with weak degeneracy on radial functions of the p -adic argument are obtained;
- a continuation of the local mild solution of the equation with weak degeneracy to the whole space of p -adic numbers is constructed, and sufficient conditions on the right-hand side of the equation are determined under which this continuation will be correct;
- it is proved that under certain conditions the mild solution constructed in this way is a solution to the original Cauchy problem;
- sufficient conditions for the existence of a formal solution of a linear pseudo-differential equation with regular degeneracy in the form of a power series are found;
- it is proved that the formal solution of such an equation is locally absolutely convergent under certain conditions;

- generalized pseudo-differential equation on radial in time functions with p -adic time and space variables is investigated in the case when the orders of derivatives in time and space do not coincide;
- necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of the fundamental solution of such an equation and the solution of the corresponding Cauchy problem in the Lizorkin space are obtained;
- an estimate of this fundamental solution in terms of the norm of a p -adic variable is constructed. Such estimates are similar to the corresponding known estimates for parabolic equations with real time and p -adic spatial variables;
- additional properties of the solution of the corresponding Cauchy problem are investigated, in particular, the finiteness of the domain of dependence of the solution on the initial condition is proved;
- a time-homogeneous estimate of this solution in space L^1 of the functions of p -adic argument in terms of the initial condition is constructed.

This dissertation is of theoretical importance. The results obtained in this work can be used in further studies related to the solvability of pseudo-differential equations with degeneracy at the main derivative in the spaces of functions of p -adic argument, as well as in the construction of the theory of regular and singular solutions of such equations.

Keywords: differential equations, linear operators, operator of fractional derivative, parabolic equations, PDE, pseudodifferential operator, mild solution, weak solution, formal power series, Cauchy problem, fundamental solution, p -adic analysis.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{Q}_p$ — простір p -адичних чисел з нормою $|\cdot|_p$.

$B_\gamma(a)$, $S_\gamma(a)$ — куля та сфера радіуса p^γ з центром $a \in \mathbb{Q}_p$; $B_\gamma := B_\gamma(0)$,
 $S_\gamma := S_\gamma(0)$.

$$d_\alpha = \frac{1 - p^\alpha}{1 - p^{-\alpha-1}}.$$

Розділ 4:

$D_{|t|_p}^\alpha$ — оператор Владімірова–Тейблсона порядку α відносно змінної $t \in \mathbb{Q}_p$.

D_x^β - оператор Владімірова–Тейблсона порядку β відносно змінної $x \in \mathbb{Q}_p^n$.

$\tilde{u}$ — перетворення Фур'є функції u відносно змінної $t \in \mathbb{Q}_p$.

$\hat{u}$ — перетворення Фур'є функції u відносно змінної $x \in \mathbb{Q}_p^n$.

$$\mathbb{Q}_p^+ := \{t \in \mathbb{Q}_p : |t|_p \geq 1\}.$$

Список опублікованих праць за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Antoniouk A. V., Kochubei A. N., Serdiuk M. V., *Pseudo-differential equations with weak degeneration for radial functions of p -adic argument*, J. Math. Anal. Appl., **523**(2), 15 pp. (2023).
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127026>
2. Сердюк М. В., *Псевдодиференціальні рівняння з регулярною особливістю для радіальних функцій p -адичного аргументу*, Укр. Мат. Журнал **76**(5) (2024), 782–788.
DOI: <https://doi.org/10.3842/umzh.v76i5.7769>;
translation in Ukrainian Mathematical Journal, **76**(3) (2024), 880–887.
DOI: doi.org/10.1007/s11253-024-02360-5
3. Сердюк М. В., *Оцінка фундаментального розв’язку нового класу неархімедових псевдодиференціальних рівнянь*, Укр. Мат. Журнал, **76**(10) (2024), 1537–1542.
DOI: <https://doi.org/10.3842/umzh.v76i10.8687>

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Сердюк М. В., *Псевдо-диференціальні рівняння зі слабким виродженням для радіальних функцій p -адичного аргументу* // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції “Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання”, — К.: УДУ імені Михайла Драгоманова, 18–20 січня 2023. С. 38–41.
2. Сердюк М. В., *Радіальні розв’язки псевдо-диференціальних рівнянь p -адичного аргументу зі слабким виродженням* // Матеріали Між-

народної наукової конференції “Сучасні проблеми механіки та математики — 2023”, Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України 2023, С. 345–346.

3. Serdiuk M., *Regular singularities of pseudo-differential equations for radial functions of p -adic argument* // The 12th International Congress of Societas Humboldtiana Polonorum, June 30 – July 02 2023, Lodz, Poland. P 56.
4. Serdiuk M., *Fundamental solution of non-Archimedean pseudo-differential equation of p -adic argument* // International Scientific Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis”, Odesa, Ukraine, 27–30 May 2024. P. 108–109.

Зміст

ВСТУП	13
1 Огляд літератури за темою дисертації	30
1.1 Означення та властивості p -адичних чисел	30
1.2 Простори основних та узагальнених функцій Брюа-Шварца	36
1.3 Перетворення Фур'є	38
1.4 Простори Лізоркіна	40
1.5 Псевдодиференціальні оператори та оператор D^α	42
1.6 Висновки до розділу 1	47
2 Псевдодиференціальні рівняння зі слабким виродженням для радіальних функцій p-адичного аргументу	48
2.1 Лінійні псевдодиференціальні рівняння на радіальних функціях	48
2.2 Постановка задачі	53
2.3 Допоміжні результати	53
2.4 Існування та єдиність локальних м'яких розв'язків	60
2.5 Продовження розв'язків	63
2.6 Перехід від інтегрального рівняння до диференціального .	65
2.7 Висновки до розділу 2	71
3 Псевдодиференціальні рівняння з регулярною особливі- стю	72
3.1 Висновки до розділу 3	80
4 Фундаментальний Розв'язок Нового Класу Нархімедових Псевдодиференціальних Рівнянь	81
4.1 Радіальні власні функції оператора D^α	82
4.2 Існування розв'язків задачі Коші	86

4.3	Явна формула та оцінка фундаментального розв'язку . . .	89
4.4	Скінченна область залежності	98
4.5	Узагальнені розв'язки та єдиність	99
4.6	L^1 -оцінка розв'язку	101
4.7	Висновки до розділу 4	104
ВИСНОВКИ		106
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		108
ДОДАТОК		116

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена вивченню нових класів псевдодиференціальних рівнянь на радіальних функціях p -адичного аргументу. Досліджено рівняння для функцій p -адичної часової змінної зі слабким та регулярним виродженням, а також певне узагальнене псевдодиференціальне рівняння для функцій двох змінних з p -адичною просторовою та часовою змінними.

У дисертаційній роботі аналізуються питання існування та єдиності розв'язків псевдо-диференціальних рівнянь з оператором дробового диференціювання на p -адичному неархімедовому полі. Особливу увагу приділено рівнянням зі слабким та сингулярним виродженням і їх м'яким розв'язкам.

Актуальність теми. Протягом останніх кількох сотень років теоретична фізика розвивалася на основі дійсних і, пізніше, комплексних чисел. Проте, з кінця минулого сторіччя поле p -адичних чисел $\mathbb{Q}_p$ (а також його алгебраїчні розширення, включаючи поле комплексних p -адичних чисел $\mathbb{C}_p$) широко використовується в теоретичній та математичній фізиці. Так, незважаючи на те, що p -адичні числа були відкриті Гензелем наприкінці 19 сторіччя, теорія p -адичних чисел вже інтенсивно проникла в декілька областей математики та їх застосування.

Головна ідея, покладена в основу p -адичної теоретичної фізики, полягає в тому, що проблеми поєднання квантової механіки та гравітації виникають через використання нескінченно подільного дійсного континуума як основної математичної моделі фізичного простору-часу. Натомість, поле p -адичних чисел надає нові можливості для математичних моделей часу-простору та структур, визначених на ньому. Велику роль в цьому відіграє той факт, що поле p -адичних чисел є неупорядкованим та неархімедовим.

Після відкриття Гензелем у 1899 р., p -адичні числа набули важливого значення у теорії чисел (див. [14, 33]) та теорії зображень [25]. Неархімедові аналоги були знайдені та досліджені для основних понять класичного аналізу [54], аналізу Фур'є [57], функціонального аналізу [48, 52], комплексного аналізу [21, 50], аналітичної теорії диференціальних рівнянь [19, 20, 51], математичної фізики [8, 37, 58], стохастики [37] та геометрії [13, 15, 26].

Одна з особливостей теорії p -адичного аналізу полягає в тому, що для функцій на неархімедовому полі не визначена операція диференціювання. В результаті, значна кількість p -адичних моделей використовує псевдодиференціальні рівняння, які в певній мірі є узагальненням звичайних диференціальних рівнянь, як основний конструкт p -адичної математичної фізики.

В теорії p -адичного аналізу та його застосувань розглядаються дві основні моделі: відображення з $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{C}$, де $\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел, або з $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{Q}_p$. Елементи аналізу, в якому розглядаються комплексозначні відображення, закладені в роботах Ф. Брюа [17] та І.М. Гельфанда і М.І. Граєва [25]. Перший етап розвитку p -адичної математичної фізики для моделей з $\mathbb{C}$ -значними відображеннями було представлено М. Тейблсоном [57], а також В.С. Владіміровим та ін. [58]. У монографії А. Н. Кочубея [37] широко викладені застосування цієї теорії, особливо ті, що охоплюють імовірнісні аспекти. Елементи аналізу, в якому розглядаються функції з $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{Q}_p$, будувались у роботах ряду математиків (див. книги Н. Кобліца [33], Ж.-П. Серра [55], Н. Бурбакі [16]). Фізичні, когнітивні та психологічні моделі, які використовують $\mathbb{Q}_p$ -значні відображення та відповідний аналіз, представлені у серії монографій А. Ю. Хреннікова [30–32].

Основним лінійним оператором, визначеним на дійсно- та комплекснозначних функціях на неархімедових локальних полях, зокрема на полі p -адичних чисел, є псевдодиференціальний оператор дробового диферен-

ціювання D^α .

Гармонічний аналіз на локальних полях та n -вимірних векторних просторах над ними було розвинено у роботах М. Тейблсона [56, 57]. Оператор дробового диференціювання D^α вперше введено в 1968 р. в [56] у зв'язку з теорією дробового інтегрування та аналізу Фур'є на локальних полях.

На можливість застосування p -адичних чисел в математичній фізиці вперше було вказано в 1984 р. в роботі В. С. Владімірова та І. В. Воловіча [59]. Гіпотеза полягала в тому, що в теорії суперструн, яка апелює до надзвичайно малих відстаней порядку сталої Планка, простір-час має неархімедову структуру. Застосуванню p -адичних чисел у теорії струн присвячені роботи [22, 64, 65].

У роботах [10–12] В. А. Аветісов та ін. ввели новий клас моделей для комплексних систем, заснованих на p -адичному аналізі. Такі моделі можуть бути застосовані, наприклад, до дослідження релаксації певних біологічних комплексних систем. З математичної точки зору, в таких моделях часова еволюція комплексної системи описується за допомогою p -адичного псевдодиференціального рівняння параболічного типу, яке описує часову еволюцію перехідної функції марковського процесу в ультраметричному просторі. Цей стохастичний процес використовується для опису динамічної системи у просторі конфігураційних станів, який апроксимується ультраметричним простором $(\mathbb{Q}_p)$.

А. Н. Кочубей розвинув теорію одновимірних псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу зі змінними коефіцієнтами, фундаментальні розв'язки яких є функціями щільності марковських процесів на p -адичному просторі [37]. У монографії В. А. Зуніги–Галіндо [68] вивчається широкий клас псевдодиференціальних рівнянь типу теплопровідності над p -адичним простором, що включає як часткові випадки окремі типи моделей, досліджених А. В. Аветісовим та А. Н. Кочубеєм та ін.

Взагалі кажучи, оператор D^α в просторі $L^2(\mathbb{Q}_p)$ має досить складну

структуру. Зокрема, він має точковий спектр нескінченної кратності, та відомо, що відповідне еволюційне рівняння для цього оператора з p -адичною просторовою змінною t не має фундаментального розв'язку (див. [63]).

Вперше А. Н. Кочубеєм у роботі [40] було помічено, що властивості оператора D^α значно спрощуються на радіальних функціях. У цьому випадку, він нагадує дробову похідну Капуто–Джрбашяна, що розглядається в дійсному аналізі. Зокрема, даний оператор має правий обернений I^α , який можна розглядати як p -адичний аналог дробового інтеграла Рімана–Ліувілля або, для $\alpha = 1$, класичну первісну.

У роботі [41] було розглянуто нелінійну задачу Коші для класу лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} D^\alpha u &= f(|t|_p, u(|t|_p)), \quad t \in \mathbb{Q}_p, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Було показано, що для звуження оператора D^α на клас радіальних функцій $u = u(|t|_p)$ дана задача зводиться до інтегрального рівняння, яке є аналогом класичного рівняння Вольтерри. Таким чином, в [40, 41] було побудовано p -адичну форму звичайного диференціального рівняння в контексті псевдодиференціального аналізу.

Другий та третій розділи дисертації присвячені наступному кроку в розвитку цієї теорії, а саме вивченню рівнянь зі слабкими та регулярними сингулярностями при старшій похідній.

Отримані в дисертації результати стали основою для розвитку цього напрямку у роботах інших авторів, зокрема, у роботі Дж. Галеано–Пеналоза та О. Ф. Каса–Санчеза [24], де було досліджено псевдодиференціальне рівняння з виродженням для p -адичного нелокального оператора ультрадифузії, який є узагальненням оператора дробового диференціювання D^α .

Інший напрямок дисертаційного дослідження пов'язаний із неархіме-

довим рівнянням, яке є узагальненням рівняння хвильового типу, яке вперше було введено А. Н. Кочубеєм в роботі [38]:

$$D_t^\alpha u - D_x^{\alpha,n} u = 0,$$

Там було доведено існування та єдиність розв'язків відповідної задачі Коші на класі радіальних функцій. Крім того, було доведено, що розв'язки задовольняють аналог принципу Гюйгенса, що вказує на поведінку таких розв'язків, подібну до поведінки плоских хвиль, які є розв'язками класичного хвильового рівняння.

Зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження виконане відповідно до індивідуального плану аспірантки кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка, затвердженого вченою радою механіко-математичного факультету, і в рамках теми науково-дослідної роботи кафедри математичного аналізу 22КФ038–01 "Оцінювання та критерій згоди у статистичних моделях, розв'язання стохастичних рівнянь і дослідження модулів гладкості функцій" Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Частина дослідження проводилась в рамках проєкту "Псевдодиференціальні рівняння над неархімедовими полями" за фінансової підтримки Національного фонду досліджень України (номер проєкту 2023.03/0002).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження існування та властивостей розв'язків псевдодиференціальних рівнянь з виродженням на радіальних функціях p -адичного аргументу.

Основними завданнями даної роботи є:

- отримати достатні умови існування та єдиності локального м'якого розв'язку задачі Коші для нелінійного псевдодиференціального рівняння зі слабким виродженням на радіальних функціях p -адичного

аргументу;

- побудувати продовження локального м'якого розв'язку рівняння зі слабким виродженням на весь простір $\mathbb{Q}_p$, та визначити достатні умови на праву частину рівняння, за яких це продовження буде коректним;
- довести, що за певних умов побудований таким чином м'який розв'язок є розв'язком початкової задачі Коші;
- знайти достатні та необхідні умови існування розв'язку лінійного псевдодиференціального рівняння з регулярним виродженням у вигляді абсолютно збіжного степеневому ряду;
- дослідити узагальнене псевдодиференціальне рівняння на радіальних за часом функціях з p -адичною часовою та просторовою змінними, у випадку, коли порядки похідним за часом та за простором не співпадають;
- отримати необхідні та достатні умови існування та єдиності фундаментального розв'язку такого рівняння та розв'язку відповідної задачі Коші у просторі Лізоркіна;
- побудувати оцінку даного фундаментального розв'язку у термінах p -адичної норми змінних, що є аналогом відповідних оцінок для параболічних рівнянь з дійсною часовою та p -адичною просторовою змінними;
- дослідити додаткові властивості розв'язку відповідної задачі Коші, такі як скінченна область залежності;
- побудувати оцінку даного розв'язку у просторі L^1 за просторовою змінною.

Об'єктом дослідження є псевдодиференціальні рівняння з оператором Владімірова-Тейблсона на радіальних функціях в просторі p -адичних чисел зі слабкими та регулярними особливостями, а також відповідні інтегральні рівняння з оберненим до псевдодиференціального оператором,

у випадку слабкого виродження; узагальнене рівняння хвильового типу з p -адичними просторовою та часовою змінними.

Предметом дослідження є радіальні розв'язки задачі Коші для псевдодиференціальних рівнянь з виродженням на полі p -адичних чисел; фундаментальний розв'язок задачі Коші для нового класу неархімедових рівнянь на радіальних функцій.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовуються конструкції та методи p -адичного аналізу, функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь та інтегральних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано наступні нові результати:

- встановлено достатні умови існування та єдиності локального м'якого розв'язку нелінійного псевдодиференціального рівняння для оператора D^α , $\alpha > 0$, зі слабким виродженням при похідній, тобто у випадку $\gamma < \min(1, \alpha)$, де γ — порядок виродження та α — порядок похідної;
- побудовано продовження даного локального м'якого розв'язку із кулі $|t|_p \leq p^N$ на весь простір p -адичних чисел;
- встановлено умови, за яких побудований таким чином м'який розв'язок є розв'язком початкової задачі Коші для диференціального рівняння;
- побудовано розв'язок лінійного псевдодиференціального рівняння у випадку сильного виродження $\gamma = \alpha$ за умови розкладу правої частини у ряд за степенями $|t|_p$;
- знайдено достатні умови абсолютної збіжності розв'язку у вигляді степеневого ряду;
- досліджено новий клас псевдодиференціальних рівнянь на функціях двох змінних, що є узагальненням p -адичного хвильового рівняння на

випадок, коли порядки похідних за часом і за простором не співпадають;

- знайдено достатні умови існування розв’язку відповідної задачі Коші на класі радіальних за часом функцій, що належать простору основних функцій Лізоркіна за обома змінними;
- побудовано оцінку на фундаментальний розв’язок задачі у термінах змінних $|t|_p$ та $|x|_p$;
- доведено, що розв’язок задачі Коші має скінченну область залежності;
- встановлено, що радіальні за часом узагальнені розв’язки рівняння належать простору $u \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p, \Phi'(\mathbb{Q}_p^n))$, де $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ — простір Лізоркіна;
- доведено єдиність розв’язку задачі Коші в класі обмежених локально сталих функцій, радіальних за змінною t ;
- побудовано рівномірну за часом оцінку розв’язку задачі Коші в просторі L^1 за просторовою змінною.

Теоретичне та практичне значення отриманих результатів.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати є внеском в p -адичний аналіз та теорію псевдодиференціальних рівнянь з виродженнями. Результати роботи можуть бути використані при подальшому дослідженні розв’язності рівнянь з псевдодиференціальними операторами на радіальних функціях.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи, що виносяться на захист, отримані автором самостійно та опубліковані в трьох роботах, з яких одна у співавторстві [1]. У роботі, опублікованій у співавторстві, внески авторів є рівними. Визначення основного напрямку дослідження та постановка задач виконані спільно з науковим керівником.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались на наступних наукових конференціях:

1. Всеукраїнська науково-практична конференція “Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання”, 18–20 січня, 2023, Київ, Україна;
2. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики”, 23–25 травня, 2023, Львів, Україна;
3. The 12th International Congress of Societas Humboldtiana Polonorum, June 30 – July 02, 2023, Lodz, Poland;
4. Workshop “Complex Dynamical Systems: theory, mathematical modelling, computing and application”, 2–4 October, 2023, Kyiv, Ukraine,
5. International Scientific Online Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis”, 27–30 May, 2024, Odesa, Ukraine.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у семи наукових працях, з яких три статті [1–3] та чотири тези у матеріалах наукових конференцій [4–7]. Статтю [1] опубліковано у міжнародному журналі, який індексується у наукометричній базі Scopus та Web of Science та входить до квартиля Q1. Статті [2] та [3] надруковано у науковому фаховому виданні України категорії “А”, що індексується у наукометричній базі Scopus та Web of Science, англomовна версія видання індексована в наукометричній базі Scopus та входить до квартиля Q3.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, вступу, висновку, списку використаних джерел і додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів.

Повний обсяг дисертації становить 117 сторінок, основний текст займає 95 сторінок. Список використаних джерел викладений на 8-ми сторінках і містить 71 найменування.

Зміст роботи. У *вступі* дисертації обґрунтовано актуальність теми дослідження, вказано зв'язок з роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету і завдання, об'єкт, предмет і методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, висвітлено особистий внесок автора, наведено список публікацій за темою дослідження та конференцій, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію, а також короткий зміст роботи.

У *першому розділі* дисертаційної роботи наведено основні поняття та конструкції p -адичного аналізу, необхідні при дослідженні. Також цей розділ містить огляд літератури за тематикою роботи та результатів, отриманих іншими авторами.

У *другому розділі* дисертації досліджуються нелінійні псевдодиференціальні рівняння зі слабким виродженням на радіальних функціях p -адичного аргументу.

А саме, розглядається задача Коші

$$|t|_p^\gamma (D^\alpha u)(|t|_p) = f(|t|_p, u(|t|_p)), \quad 0 \neq t \in \mathbb{Q}_p, \quad (0.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (0.2)$$

де $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, D^α — оператор дробового диференціювання, який, зокрема, визначається як гіперсингулярний інтеграл

$$(D^\alpha \varphi)(x) = \frac{1 - p^\alpha}{1 - p^{-\alpha-1}} \int_{\mathbb{Q}_p} |y|_p^{-\alpha-1} [\varphi(x - y) - \varphi(x)] dy.$$

Із задачею (0.1)–(0.2) пов'язується інтегральне рівняння

$$u(|t|_p) = u_0 + I^\alpha [|\cdot|_p^{-\gamma} f(|\cdot|_p, u(|\cdot|_p))] (|t|_p), \quad (0.3)$$

де оператор I^α є правим оберненим оператором до D^α і визначається формулами

$$(I^\alpha \varphi)(t) = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \int_{|y|_p \leq |t|_p} (|t - y|_p^{\alpha-1} - |y|_p^{\alpha-1}) \varphi(y) dy, \quad \alpha \neq 1, \quad (0.4)$$

$$(I^1 \varphi)(t) = \frac{1 - p}{p \log p} \int_{|y|_p \leq |t|_p} (\log |t - y|_p - \log |y|_p) \varphi(y) dy. \quad (0.5)$$

Розв'язки інтегрального рівняння (0.3) називаються м'якими розв'язками задачі (0.1)–(0.2). Основним результатом другого розділу є наступна теорема про існування та єдиність локальних м'яких розв'язків рівняння (0.3).

Теорема 2.3. Нехай виконуються умови

$$|f(|t|_p, x)| \leq M, \quad (0.6)$$

$$|f(|t|_p, x) - f(|t|_p, y)| \leq L|x - y|, \quad t \in \mathbb{Q}_p, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (0.7)$$

а також $\gamma < \min(1, \alpha)$.

Тоді задача Коші (0.1)–(0.2) має єдиний локальний м'який розв'язок, тобто інтегральне рівняння (0.3) має розв'язок $u(|t|_p)$, визначений для всіх $|t|_p \leq p^N$, де $N \in \mathbb{Z}$ достатньо від'ємне. Крім того, довільний інший розв'язок $\bar{u}(|t|_p)$, якщо він існує, збігається з u для $|t|_p \leq p^K$, де $K \leq N$.

Локальні розв'язки, отримані в теоремі 2.3 за допомогою методу послідовних наближень, допускають продовження на весь простір $\mathbb{Q}_p$, що доведено в наступній теоремі.

Теорема 2.4. Нехай $\gamma < \min(1, \alpha)$, функція f задовольняє умову (0.6), а також (0.7) у наступній формі

$$|f(p^\ell, x) - f(p^\ell, y)| \leq L_\ell |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \quad (0.8)$$

де $0 < L_\ell < p^{-\alpha\ell}$ для всіх $\ell \in \mathbb{Z}$.

Тоді локальний розв'язок рівняння (0.3), визначений при $|t|_p \leq p^N$, продовжується до глобального розв'язку, визначеного для всіх $t \in \mathbb{Q}_p$.

Більш того, у підрозділі 2.6 доводиться теорема 2.5 про достатні умови, за яких розв'язки інтегрального рівняння (0.3) є розв'язками початкової задачі Коші.

Теорема 2.5. Нехай виконуються умови (0.8) та

$$|f(p^\ell, x)| \leq Ap^{-\beta\ell}, \quad \ell \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (0.9)$$

для деякої сталої β такої, що $\beta + \gamma > \alpha$.

Тоді розв'язок рівняння (0.3), отриманий у теоремі 2.3 та продовжений на простір $\mathbb{Q}_p$, задовольняє рівняння (0.1).

Третій розділ дисертаційної роботи присвячений лінійним псевдодиференціальним рівнянням на радіальних функціях для випадку регулярного виродження, тобто коли $\gamma = \alpha$ в рівнянні (0.1).

Тобто, розглядається рівняння вигляду

$$|t|_p^\alpha (D^\alpha u)(|t|_p) = A(|t|_p)u(|t|_p). \quad (0.10)$$

Для дослідження використовується метод аналітичного розкладу у степеневий ряд. Припускається, що функція A розкладається у степеневий ряд вигляду

$$A(|t|_p) = \sum_{N=0}^{\infty} A_N |t|_p^{\beta N},$$

де $A_N \in \mathbb{C}$, $\beta > 0$, коефіцієнти якого задовольняють оцінку

$$|A_N| \leq M\mu^N, \quad N \geq 0, \quad (0.11)$$

для деяких $M, \mu > 0$.

Розв'язок рівняння (0.10) шукається у вигляді формального степеневого ряду

$$u(|t|_p) = \sum_{N=0}^{\infty} u_N |t|_p^{\beta N}, \quad u_N \in \mathbb{C}. \quad (0.12)$$

Ряд (0.12) будемо називати *формальним розв'язком* рівняння (0.10), якщо виконуються наступні співвідношення

$$0 = A_0 u_0, \quad (0.13)$$

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right] u_N = - \sum_{k=1}^N A_k u_{N-k}, \quad N \geq 1. \quad (0.14)$$

Спочатку розглядається випадок $A_0 = 0$, за якого рівняння (0.13) задовольняється для довільної функції u . У цьому випадку має місце наступний результат.

Теорема 3.1. Нехай $A_0 = 0$. Якщо ряд (3.3) є формальним розв'язком рівняння (3.1), то ряд (3.3) є локально абсолютно збіжним.

У випадку $A_0 \neq 0$ має місце наступна теорема. Ця теорема стверджує, що у випадку, коли коефіцієнт A_0 має спеціальний вигляд

$$\frac{\Gamma_p(\beta m + 1)}{\Gamma_p(\beta m - \alpha + 1)}, \quad m \geq 1,$$

та не дорівнює нулю, то формальний розв'язок рівняння (3.1) є локально абсолютно збіжним рядом. Крім того, знайдено співвідношення для коефіцієнтів цього ряду. В інших випадках рівняння (3.1) має лише нульовий розв'язок.

Теорема 3.2.

1. Нехай $A_0 = \frac{\Gamma_p(\beta m + 1)}{\Gamma_p(\beta m - \alpha + 1)}$ для деякого цілого $m \geq 1$. Якщо ряд (3.3) є формальним розв'язком рівняння (3.1), то ряд (3.3) є локально абсолютно збіжним, та його коефіцієнти u_N , $N \geq 0$, задовольняють співвідношення

$$u_0 = \dots = u_{m-1} = 0, \quad (0.15)$$

$$u_N = - \left[\frac{\Gamma_p(\beta m + 1)}{\Gamma_p(\beta m - \alpha + 1)} - \frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right]^{-1} \sum_{k=1}^{N-m} A_k u_{N-k}, \quad (0.16)$$

$N \geq m + 1$, для деякого $u_m \in \mathbb{C}$.

2. Якщо $A_0 \neq 0$ та $A_0 \neq \frac{\Gamma_p(\beta m + 1)}{\Gamma_p(\beta m - \alpha + 1)}$ для жодного цілого $m \geq 1$, то рівняння (3.1) має лише нульовий розв'язок $u \equiv 0$.

Четвертий розділ дисертації присвячено дослідженню нового класу псевдодиференціальних рівнянь для функцій двох p -адичних змінних, які при цьому є радіальними за часовою змінною. Таке рівняння є певним узагальненням рівняння хвильового типу, розглянутого в роботі [39], яке може розглядатися як більш широкий клас псевдодиференціальних операторів в просторі функцій багатьох p -адичних змінних.

Нехай $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n \geq 1$. Розглядається наступна задача Коші

$$D_{|t|_p}^\alpha u(|t|_p, x) - D_x^{\beta, n} u(|t|_p, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n, \quad (0.17)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (0.18)$$

де $u : \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$ — радіальна функція відносно змінної $t \in \mathbb{Q}_p$.

Розв'язки задачі (0.17)–(0.18) шукаються у просторі Лізоркіна $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$. За допомогою перетворення Фур'є рівняння (0.17) зводиться до задачі на власні значення та власні функції оператора D^α :

$$D^\alpha u = \lambda u, \quad \lambda = p^{\beta N}, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad (0.19)$$

У твердженні 4.1 дисертаційної роботи знайдено множину розв'язків рівняння (0.19) у просторі $\Phi(\mathbb{Q}_p)$. Також показано, що узагальнені розв'язки рівняння (0.19) у просторі $\Phi'(\mathbb{Q}_p)$ співпадають з класичними у сенсі регулярних узагальнених функцій (твердження 4.2).

Основний результат даного розділу полягає в теоремі 4.1 про необхідні та достатні умови існування розв'язків задачі (0.17)–(0.18).

Теорема 4.1. Нехай $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такі, що виконується умова

$$\beta = K\alpha \text{ для деякого } K \in \mathbb{N}. \quad (0.20)$$

Припустимо, що функція $u_0 \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$.

Тоді задача Коші (0.17)–(0.18) має розв’язок $u = u(|t|_p, x)$, радіальний за t . Більш того, цей розв’язок належить простору $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ для всіх фіксованих $x \in \mathbb{Q}_p^n$, та належить простору $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ для кожного $t \in \mathbb{Q}_p$.

Якщо умова (0.20) не виконується, то рівняння (0.17) має лише тотожно нульовий розв’язок $u(t, x) \equiv 0$, $(t, x) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n$.

Розв’язок задачі (0.17)–(0.18) будується у вигляді

$$\begin{aligned} u(|t|_p, x) &= (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \hat{u})(|t|_p, x) \\ &= ((\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} b) * u_0)(|t|_p, x), \quad (t, x) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n, \end{aligned} \quad (0.21)$$

де функція

$$Z_t(x) := (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \hat{u})(|t|_p, |x|_p), \quad t \in \mathbb{Q}_p, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n,$$

є фундаментальним розв’язком задачі Коші.

Підрозділ 4.3 присвячений обчисленню явної формули для фундаментального розв’язку та знаходженню оцінки на нього у термінах змінних $|t|_p$, $|x|_p$. Результат представлений у наступній теоремі.

Теорема 4.2. Нехай виконуються умови теореми 4.1, $Z_t(x)$, $(t, x) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n$, – фундаментальний розв’язок задачі (0.17)–(0.18), $K \geq 2$.

Якщо $|t|_p > |x|_p^K$, то

$$|Z_t(x)| \leq 2^{K+n} C |t|_p \left(|x|_p + |t|_p^{\frac{1}{K}} \right)^{-K-n}. \quad (0.22)$$

Якщо $p^{-K+1} |x|_p^K \leq |t|_p \leq |x|_p^K$, то

$$|Z_t(x)| \leq C_1 |x|_p^{-n}. \quad (0.23)$$

Якщо $|t|_p \leq p^{-K} |x|_p^K$, то

$$|Z_t(x)| = 0. \quad (0.24)$$

Ще одним результатом дисертації є доведення властивості скінченної області залежності для розв’язку задачі (0.17)–(0.18).

Теорема 4.3. Припустимо, що початкова функція u_0 така, що $u_0(t, x) = 0$ зовні деякої кулі B_N^n , $N \in \mathbb{Z}$.

Тоді розв'язок u задачі (0.17)–(0.18) задовольняє рівність $u(|t|_p, x) = 0$ для $x \in \mathbb{Q}_p^n \setminus B_N^n$, та для всіх $|t|_p < p^L$ для деякого $L \in \mathbb{Z}$.

Підрозділ 4.5 присвячено узагальненим розв'язкам рівняння (0.17). Зокрема, доведено наступну теорему.

Теорема 4.4. Нехай $u \in \Phi'(\mathbb{Q}_p, \Phi'(\mathbb{Q}_p^n))$ — узагальнений розв'язок рівняння (0.17), тобто

$$\langle \langle u, D_t^\alpha \varphi_1 \rangle, \varphi_2 \rangle = \langle \langle u, \varphi_1 \rangle, D_x^{\beta, n} \varphi_2 \rangle,$$

для всіх $\varphi_1 \in \Phi(\mathbb{Q}_p)$, $\varphi_2 \in \Phi(\mathbb{Q}_p')$.

Якщо u — радіальна функція за змінною t , то $u \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p, \Phi'(\mathbb{Q}_p^n))$.

Якщо, додатково, $u(0, x) = 0$, то $u(t, x) \equiv 0$.

З теореми 4.2 випливає єдиність розв'язків задачі Коші (0.17)–(0.18), побудованих в теоремі 4.10, в класі обмежених локально сталих функцій, радіальних за змінною t .

У підрозділі 4.6 доведено рівномірну за часом оцінку розв'язку задачі Коші (0.17)–(0.18) у просторі $L^1(\mathbb{Q}_p^n)$ за просторовою змінною в термінах початкової умови.

Теорема 4.5. Припустимо, що умови теореми 4.1 виконані.

Тоді розв'язок задачі (0.17)–(0.18), визначений формулою (0.21), задовольняє оцінку в $L^1(\mathbb{Q}_p^n)$ за змінною x для кожного $t \in \mathbb{Q}_p^+$

$$\|u(|t|_p, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{Q}_p^n)} \leq p^{2n\gamma} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{Q}_p^n)}, \quad (0.25)$$

де $\gamma \geq \frac{2}{K}$ — деяка додатна стала.

Подяка. Автор дисертації висловлює щиру подяку своїм науковим керівникам — доктору фізико-математичних наук, члену-кореспонденту

НАН України, професору Шевчуку Ігорю Олександровичу за керування роботою та постійну увагу, та доктору фізико-математичних наук, старшому досліднику Антонюк Олександрі Вікторівні за відкриття можливостей р-адичного аналізу, постановку задач дисертації, та неоссяжну підтримку, а також доктору фізико-математичних наук, члену-кореспонденту НАН України, професору Кочубею Анатолію Наумовичу, за наукову співпрацю та допомогу.

1 Огляд літератури за темою дисертації

1.1 Означення та властивості p -адичних чисел

Поняття числа є базовим не тільки в математиці, але і в фізиці та багатьох інших науках. Більша частина сучасної науки заснована на p -адичному аналізі над дійсними та комплексними числами. Однак виявилось, що для досліджень складних ієрархічних систем іноді більш доречно використовувати аналіз над p -адичними числами та ультраметричними просторами. Вперше p -адичні числа були введені К. Гензелем в роботі [29] та отримали широкі використання в математиці: в математичній фізиці, теорії чисел, алгебраїчній геометрії, теорії зображень груп, алгебраїчній та арифметичній динаміці, та криптографії (див. [27, 33]).

Означення 1.1. Нехай p — просте число. Визначимо норму на полі $\mathbb{Q}$ раціональних чисел за правилом

$$|0|_p = 0, \quad |x|_p = p^{-\gamma(x)}, \quad x \neq 0,$$

де число $\gamma(x)$ отримане із розкладу

$$x = p^\gamma \frac{m}{n}, \quad m, n, \gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z},$$

та цілі числа m, n взаємно прості з p . Норма $|\cdot|_p$ називається p -адичною нормою.

Норма $|\cdot|_p$ задовольняє аксіоми норми

- 1) $\forall x \in \mathbb{Q}: |x|_p \geq 0$, при чому $|x|_p = 0 \iff x = 0$;
- 2) $\forall x, y \in \mathbb{Q}: |xy|_p = |x|_p |y|_p$;
- 3) $\forall x, y \in \mathbb{Q}: |x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$ (нерівність трикутника),

а також сильну нерівність трикутника:

$$3') \quad |x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p).$$

Будь-яка норма, яка задовольняє властивість $3')$, називається *неархімедовою*.

У випадку, коли $|x|_p \neq |y|_p$, має місце рівність

$$3'') \quad |x + y|_p = \max(|x|_p, |y|_p).$$

Означення 1.2. Дві норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ на полі $\mathbb{Q}$ називаються *еквівалентними*, якщо вони породжують еквівалентні метрики.

Будемо позначати через $|\cdot|$ звичайну норму (абсолютне значення) на $\mathbb{Q}$. Під тривіальною нормою маємо на увазі таку норму $\|\cdot\|$, що $\|0\| = 0$ та $\|x\| = 1$ для всіх $x \neq 0$. Має місце наступна теорема, яка стверджує, що на $\mathbb{Q}$ немає інших норм, окрім $|\cdot|_p$ та $|\cdot|$.

Теорема 1.1 (Островський, Теорема 1 [33]). *Довільна нетривіальна норма $\|\cdot\|$ на полі $\mathbb{Q}$ еквівалентна або абсолютному значенню $|\cdot|$, або p -адичній нормі $|\cdot|_p$ для деякого простого p .*

Означення 1.3. Поповнення поля $\mathbb{Q}$ відносно p -адичної норми $|\cdot|_p$ називається полем p -адичних чисел $\mathbb{Q}_p$.

Елементами $\mathbb{Q}_p$ є класи еквівалентності фундаментальних послідовностей в $\mathbb{Q}$ відносно p -адичної норми. При цьому із означення 1.1 та сильної нерівності трикутника випливає, що норма $|\cdot|_p$ може приймати лише зліченну кількість значень

$$\{|x|_p : x \in \mathbb{Q}\} = \{|x|_p : x \in \mathbb{Q}\} = \{p^{-\gamma} : \gamma \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

Довільне p -адичне число $x \neq 0$ має єдине канонічне зображення

$$x = p^\gamma(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots), \quad (1.1)$$

де $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$, x_j цілі числа такі, що $0 \leq x_j \leq p-1$, $x_0 > 0$, $j = 0, 1, \dots$. При цьому $|x|_p = p^{-\gamma}$.

Зображення (1.1) означає, що довільне p -адичне число x є границею в p -адичній нормі послідовності раціональних чисел

$$\{p^\gamma(x_0 + x_1 + \cdots + x_n p^n) : n \geq 0\}.$$

Зображення (1.1) задає раціональне число тоді й лише тоді, коли починаючи з деякого номера, числа x_j , $j = 0, 1, \dots$, утворюють періодичну послідовність.

Означення 1.4. *Дробова частина* p -адичного числа $x \in \mathbb{Q}_p$ з канонічним зображенням (1.1) визначається як

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \gamma(x) \geq 0 \text{ або } x = 0; \\ p^\gamma(x_0 + x_1 p + \cdots + x_{|\gamma|-1} p^{|\gamma-1|}), & \text{якщо } \gamma(x) < 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Поле $\mathbb{Q}_p$ є комутативною та асоціативною групою за додаванням. Множина $\mathbb{Q}_p^\times = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ є комутативною та асоціативною групою за множенням, яка називається мультиплікативною групою поля $\mathbb{Q}_p$.

У просторі $\mathbb{Q}_p$ можна ввести метрику за правилом $\rho_p(x, y) = |x - y|_p$, $x, y \in \mathbb{Q}_p$. Таким чином, $\mathbb{Q}_p$ є повним метричним простором. Оскільки норма $|\cdot|_p$ є неархімедовою, відповідна метрика ρ_p задовольняє сильну нерівність трикутника. Така метрика називається *ультраметрикою*. Із зображення (1.1) випливає сепарабельність $\mathbb{Q}_p$.

Позначимо через $B_\gamma(a)$ кулю радіуса p^γ з центром в точці $a \in \mathbb{Q}_p$, а через $S_\gamma(a)$ — його межу (сферу)

$$B_\gamma(a) = \{x : |x - a|_p \leq p^\gamma\}, \quad S_\gamma(a) = \{x : |x - a|_p = p^\gamma\}.$$

Покладемо $B_\gamma(0) = B_\gamma$, $S_\gamma(0) = S_\gamma$.

Тоді $B_\gamma(a)$ є абелевою групою за додаванням та мають місце рівності

$$\bigcup_{\gamma} B_\gamma(a) = \bigcup_{\gamma} S_\gamma(a) = \mathbb{Q}_p.$$

Довільна куля та сфера є відкрито-замкненими множинами в $\mathbb{Q}_p$. Простір $\mathbb{Q}_p$ є цілком незв'язним. Множина $K \subset \mathbb{Q}_p$ є компактом тоді й лише тоді, коли вона замкнена і обмежена (див. [58], I.1).

Означення 1.5. Нехай $n \geq 2$. Простір $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \cdots \times \mathbb{Q}_p$ складається з точок $x = (x_1, \dots, x_n)$, де $x_j \in \mathbb{Q}_p$. Визначимо p -адичну норму в $\mathbb{Q}_p^n$ наступним чином

$$|x|_p = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|_p, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Ця норма є неархімедовою. Простір $\mathbb{Q}_p^n$ є повним метричним локально компактним і цілком незв'язним простором.

Для векторів $x, y \in \mathbb{Q}_p^n$ скалярний добуток визначається як

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

Має місце нерівність

$$|x \cdot y|_p \leq |x|_p |y|_p, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Нехай $\gamma \in \mathbb{Z}$. Позначимо $B_\gamma^n(a) := \{x \in \mathbb{Q}_p^n : |x - a|_p \leq p^\gamma\}$ — куля радіуса p^γ з центром в точці $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}_p^n$, $S_\gamma^n := \{x \in \mathbb{Q}_p^n : |x - a|_p = p^\gamma\}$ — відповідна сфера. Зауважимо, що $S_\gamma^n(a) = B_\gamma^n(a) \setminus B_{\gamma-1}^n(a)$. При $a = 0$ будемо позначати $B_\gamma^n(0) = B_\gamma^n$, $S_\gamma^n(0) = S_\gamma^n$. Має місце рівність

$$B_\gamma^n(a) = B_\gamma(a_1) \times \cdots \times B_\gamma(a_n).$$

Багато одновимірних результатів мають місце в одновимірному випадку, зокрема, теорема Островського 1.1.

Означення 1.6. Адитивним характером поля $\mathbb{Q}_p$ називається характер адитивної групи $\mathbb{Q}_p$, тобто неперервна функція $\chi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ така, що

$$|\chi(x)| = 1, \quad \chi(x + y) = \chi(x)\chi(y), \quad x, y \in \mathbb{Q}_p.$$

Нехай $\xi \in \mathbb{Q}_p$ фіксоване. Функція

$$\chi_p(\xi x) = \exp(2\pi i \{\xi x\}_p) \quad (1.3)$$

є адитивним характером поля $\mathbb{Q}_p$ та абелевої групи B_γ , де $\{x\}_p$ — дробова частина числа $x \in \mathbb{Q}_p$, визначена формулою (1.2).

Лема 1.1 ([8], Лема 2.3.4). *Довільний адитивний характер поля $\mathbb{Q}_p$ має вигляд (1.3) для деякого $\xi \in \mathbb{Q}_p$.*

Оскільки поле $\mathbb{Q}_p$ утворює локально компактну комутативну групу за додаванням, то в $\mathbb{Q}_p$ існує міра Хаара — додатна міра dx , інваріантна відносно зсувів, тобто $d(x+a) = dx$. Нормуємо цю міру так, щоб

$$\int_{|x|_p \leq 1} dx = 1.$$

Тоді така міра dx буде єдиною.

Нехай A — вимірна множина в $\mathbb{Q}_p^n$, $\rho \geq 1$. Позначимо через $L^\rho(A)$ множину всіх вимірних функцій $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{Q}_p^n$, таких, що

$$\int_A |f(x)|^\rho d^n x < \infty,$$

ототожнюючи при цьому функції, рівні майже скрізь. Для функції $f \in L^\rho(A)$ норма визначається як

$$\|f\|_\rho = \left(\int_A |f(x)|^\rho d^n x \right)^{1/\rho}.$$

Нехай $O \subset \mathbb{Q}_p^n$ — відкрита множина. Позначимо через $L_{loc}^\rho(O)$ множину функцій $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ таких, що $f \in L^\rho(K)$ для будь-якого компакта $K \subset O$. Очевидно, що $L^\rho(O) \subset L_{loc}^\rho$. Якщо O — відкритий компакт, то $L^\rho(O) = L_{loc}^\rho(O)$.

Означення 1.7. Функція $f \in L^1_{loc}(\mathbb{Q}_p^n)$ називається *інтегровною* на $\mathbb{Q}_p^n$ в невластному сенсі, якщо існує

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{B_N^n} f(x) d^n x.$$

Цю границю будемо називати (невласним) *інтегралом* і позначати $\int_{\mathbb{Q}_p^n} d^n x$.

Зокрема, при $n = 1$ має місце рівність

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\gamma=-\infty}^N \int_{S_\gamma} f(x) dx.$$

Сформулюємо теорему Фубіні для p -адичного випадку.

Теорема 1.2 (Теорема 3.2.3 [8]). *Якщо функція $f : \mathbb{Q}_p^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}$ така, що повторний інтеграл*

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} \left(\int_{\mathbb{Q}_p^m} f(x, y) d^m y \right) d^n x$$

існує, то $f \in L^1(\mathbb{Q}_p^{n+m})$ та виконуються наступні рівності:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \left(\int_{\mathbb{Q}_p^m} f(x, y) d^m y \right) d^n x &= \int_{\mathbb{Q}_p^{n+m}} f(x, y) d^m y d^n x = \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p^m} \left(\int_{\mathbb{Q}_p^n} f(x, y) d^n x \right) d^m y. \end{aligned}$$

Надалі будемо використовувати наступні прості інтегральні формули,

доведені в [58]:

$$\int_{B_\gamma^n} d^n x = p^{n\gamma}, \quad (1.4)$$

$$\int_{S_\gamma^n} dx = (1 - p^{-n}) p^{n\gamma}, \quad (1.5)$$

$$\int_{B_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-1} dx = \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-\alpha}} p^{\alpha\gamma}, \quad \alpha > 0, \quad (1.6)$$

$$\int_{B_\gamma^n} \chi_p(\xi x) dx = \begin{cases} p^{n\gamma}, & |\xi|_p \leq p^{-\gamma}; \\ 0, & |\xi|_p \geq p^{-\gamma+1}. \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\int_{S_\gamma^n} \chi_p(\xi x) dx = \begin{cases} p^{n\gamma}(1 - p^{-n}), & |\xi|_p \leq p^{-\gamma}; \\ -p^{n(\gamma-1)}, & |\xi|_p = p^{-\gamma+1}; \\ 0, & |\xi|_p \geq p^{-\gamma+2}, \end{cases} \quad (1.8)$$

1.2 Простори основних та узагальнених функцій Брюа-Шварца

Комплекснозначна функція ψ , визначена на відкритій множині $\mathcal{O} \subset \mathbb{Q}_p^n$ називається *локально сталою* на $\mathcal{O}$, якщо для будь-якого $x \in \mathcal{O}$ існує таке ціле число $\ell(x) \in \mathbb{Z}$, що

$$\psi(x + x') = \psi(x), \quad x' \in B_{\ell(x)}^n, \quad x \in \mathcal{O}.$$

Позначимо через $\mathcal{E}(\mathcal{O})$ лінійний простір всіх локально сталих комплекснозначних функцій на $\mathcal{O}(\mathbb{Q}_p^n)$. Будь-яка функція з $\mathcal{E}(\mathcal{O})$ є неперервною на множині $\mathcal{O}$.

Лема 1.2 ([58], VI.1, Лема 1). *Нехай $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n)$ і нехай K — компакт в $\mathbb{Q}_p^n$. Тоді існує таке число $\ell \in \mathbb{Z}$, що*

$$\psi(x + x') = \psi(x), \quad x' \in B_\ell^n, \quad x \in K.$$

Позначимо через $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ простір основних функцій Брюа-Шварца в $\mathbb{Q}_p^n$, який складається з усіх функцій $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n)$ з компактними носіями

(див. [8]). Якщо $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, то згідно з лемою 1.2, існує $\ell \in \mathbb{Z}$ таке, що

$$\varphi(x + x') = \varphi(x), \quad x' \in B_\ell^n, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n. \quad (1.9)$$

Найбільше з таких чисел $\ell = \ell(\varphi)$ називається *показником локальної сталості* функції φ .

Позначимо через $\mathcal{D}_N^\ell(\mathbb{Q}_p^n)$ скінченно-вимірний простір основних функцій з $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ з носіями в кулі B_N^n та з показниками локальної сталості $\geq \ell$. Має місце наступне вкладення:

$$\mathcal{D}_N^\ell(\mathbb{Q}_p^n) \subset \mathcal{D}_{N'}^{\ell'}(\mathbb{Q}_p^n), \quad N \leq N', \quad \ell \geq \ell'.$$

Збіжність в $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ визначається наступним чином: $\varphi_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, в $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ тоді й лише тоді, коли

1. $\varphi_k \in \mathcal{D}_N^\ell(\mathbb{Q}_p^n)$, де N та ℓ не залежать від k ;
2. $\varphi_k \xrightarrow{x \in \mathbb{Q}_p^n} 0, k \rightarrow \infty$, де символ $\xrightarrow{x \in \mathbb{Q}_p^n}$ позначає рівномірну збіжність.

Тут

$$\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{ind } \mathcal{D}_N(\mathbb{Q}_p^n), \quad \mathcal{D}_N(\mathbb{Q}_p^n) = \lim_{\ell \rightarrow -\infty} \text{ind } \mathcal{D}_N^\ell(\mathbb{Q}_p^n).$$

Простір $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ є повним топологічним векторним простором.

Означення 1.8. Позначимо через $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ простір всіх лінійних функціоналів на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, який називається *простором узагальнених функцій Бруа–Шварца* на $\mathbb{Q}_p^n$.

Збіжність в $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ визначається як слабка збіжність: $f_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, в $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$, якщо

$$\langle f_k, \varphi \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{для всіх } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n),$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначає дію функціонала.

Лема 1.3 ([58], VI.3, Лема). Якщо A — лінійний оператор з $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ в лінійний топологічний простір M , то A — неперервний з $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ в M .

Наслідок 1.1 ([8], Наслідок 4.4.2). *Простір $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ є простором лінійних неперервних функціоналів на просторі основних функцій $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, тобто простір $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ є сильно спряженим до простору $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$.*

Простір $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ є повним (див. [8], Тв. 4.4.3).

Кожна функція $f \in L^1_{loc}(\mathbb{Q}_p^n)$ визначає узагальнену функцію $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ за правилом

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{Q}_p^n} f(x) \varphi(x) d^n x, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n).$$

Такі узагальнені функції називаються *регулярними узагальненими функціями*.

δ -функція Дірака визначається за правилом

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n). \quad (1.10)$$

Тоді $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ та $\text{supp } \delta = \{0\}$.

1.3 Перетворення Фур'є

Нехай $\chi_p(\xi x) = \exp(2\pi i \{\xi x\}_p)$, де $\xi \in \mathbb{Q}_p$ — адитивний характер $\mathbb{Q}_p$. Перетворення Фур'є функції $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ визначається як

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x) \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p,$$

де інтегрування відбувається відносно стандартної міри Хаара dx на $\mathbb{Q}_p$, тобто інваріантної відносно зсувів додатньої міри dx такої, що

$$\int_{|x|_p \leq 1} dx = 1.$$

Для $n \geq 1$, перетворення Фур'є основної функції $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ визначається як

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(\xi \cdot x) \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p^n,$$

де $\chi_p(\xi \cdot x) = \chi_p(\xi_1 x_1) \cdots \chi_p(\xi_n x_n) = \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^n \{\xi_j x_j\}_p \right)$, $\xi \cdot x$ — скалярний добуток векторів $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ та $x = (x_1, \dots, x_n)$, та функція $\chi_p(\xi_j x_j) = \exp(2\pi i \{\xi_j x_j\}_p)$ для кожного фіксованого $\xi_j \in \mathbb{Q}_p$ є адитивним характером поля $\mathbb{Q}_p$, $\{\xi_j x_j\}_p$ — дробова частина числа $\xi_j x_j$, визначена в (1.2), $j = 1, \dots, n$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1.3 ([58] §7.2). *Перетворення Фур'є $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ є лінійним ізоморфізмом $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, причому справедлива формула обернення*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(-x\xi) \tilde{\varphi}(\xi) d\xi = \mathcal{F}[\tilde{\varphi}(-x)], \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p), \quad (1.11)$$

та рівність Парсеваля

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \int_{\mathbb{Q}_p} \tilde{\varphi}(\xi) \overline{\tilde{\psi}(\xi)} d\xi, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p), \quad (1.12)$$

а також еквівалентна їй рівність

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \varphi(x) \tilde{\psi}(x) dx = \int_{\mathbb{Q}_p} \tilde{\phi}(\xi) \psi(\xi) d\xi, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p). \quad (1.13)$$

Для узагальненої функції $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ її перетворення Фур'є визначається формулою

$$(\tilde{f}, \varphi) = (f, \tilde{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p), \quad (1.14)$$

Оскільки оператор $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ лінійний із $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ в $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, то функціонал у правій частині (1.14) лінійний на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, тому $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ та оператор $f \mapsto \tilde{f}$ є неперервним з $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$.

Має місце формула обернення

$$f = \mathcal{F}[\tilde{f}(-\xi)], \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p), \quad (1.15)$$

так що перетворення Фур'є $f \mapsto \tilde{f}$ є лінійним ізоморфізмом з $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ на $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$.

Аналогічно, для $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$, $n > 1$,

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n),$$

та має місце формула обернення.

1.4 Простори Лізоркіна

Відомо, що дробові оператори відіграють ключову роль в застосуваннях p -адичного аналізу. Однак простір узагальнених функцій Брюа–Шварца $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ не є інваріантним відносно дробових операторів. Тому під час операцій з дробовими операторами необхідно ввести природні для них області визначення. Подібні проблеми виникають також при застосуванні дробових операторів на функціях з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{C}$: в загальному випадку, простір Шварца основних функцій $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ не є інваріантним відносно дробових операторів. Рішення цієї проблеми (в дійсному випадку) було запропоновано Лізоркіним у роботах [45–47], де було введено новий тип просторів, інваріантних відносно дробових операторів.

У p -адичному випадку класичні ідеї Лізоркіна були узагальнені Альберверіо та ін. у роботі [9].

Розглянемо простір

$$\Psi(\mathbb{Q}_p^n) = \{\psi(\xi) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n) : \psi(0) = 0\}.$$

Він є непорожнім: $\Psi(\mathbb{Q}_p^n) \neq \emptyset$.

Простір

$$\Phi(\mathbb{Q}_p^n) = \{\varphi : \varphi = \mathcal{F}[\psi], \psi \in \Psi(\mathbb{Q}_p^n)\}$$

називається простором Лізоркіна основних функцій другого роду.

Він також є непорожнім: $\Phi(\mathbb{Q}_p^n) \neq \emptyset$, крім того, $\Phi(\mathbb{Q}_p^n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$. Простір $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ можна наділити топологією простору $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, що робить $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ повним простором, як замкнена підмножина повного простору.

Оскільки перетворення Фур'є є автоморфізмом лінійного простору $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, простір Φ допускає наступну характеристику.

Лема 1.4 (Лема 7.3.3 [8]). 1. $\varphi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ тоді й лише тоді, коли $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ та

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} \varphi(x) d^n x = 0. \quad (1.16)$$

2. $\varphi \in \mathcal{D}_N^\ell(\mathbb{Q}_p^n)$, тобто

$$\int_{B_N^n} \varphi(x) d^n x = 0$$

тоді й лише тоді, коли

$$\psi = \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \in \mathcal{D}_{-\ell}^{-N}(\mathbb{Q}_p^n) \cap \Psi(\mathbb{Q}_p^n),$$

тобто $\psi(\xi) = 0$ для $\xi \notin B_{-\ell}^n \setminus B_{-N}^n$.

Позначимо через $\Phi' = \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ топологічно спряжений простір до $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$. Будемо називати його p -адичним простором Лізоркіна узагальнених функцій другого типу.

Через $\Psi^\perp(\mathbb{Q}_p^n)$ та $\Phi^\perp(\mathbb{Q}_p^n)$ позначимо підпростори функціоналів в $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$, ортогональні до $\Psi(\mathbb{Q}_p^n)$ та $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ відповідно. Отже,

$$\Psi^\perp(\mathbb{Q}_p^n) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n) : f = C\delta, C \in \mathbb{C}\}$$

та

$$\Phi^\perp(\mathbb{Q}_p^n) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n) : f = C, C \in \mathbb{C}\}.$$

Теорема 1.4 (Теорема 7.3.4 [8]).

$$\Phi'(\mathbb{Q}_p^n) = \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)/\Phi^\perp(\mathbb{Q}_p^n), \quad \Psi'(\mathbb{Q}_p^n) = \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)/\Psi^\perp(\mathbb{Q}_p^n).$$

Отже, дві узагальнених функції в $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$, які відрізняються на сталу, є одним і тим самим елементом в $\Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$.

Перетворення Фур'є узагальнених функцій $f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ та $g \in \Psi'(\mathbb{Q}_p^n)$ вводиться аналогічно до формули (1.14):

$$\langle \mathcal{F}[f], \psi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\psi] \rangle, \quad \psi \in \Psi(\mathbb{Q}_p^n),$$

$$\langle \mathcal{F}[g], \phi \rangle = \langle g, \mathcal{F}[\phi] \rangle, \quad \phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n).$$

Очевидно, що

$$\mathcal{F}[\Phi'(\mathbb{Q}_p^n)] = \Psi'(\mathbb{Q}_p^n), \quad \mathcal{F}[\Psi'(\mathbb{Q}_p^n)] = \Phi'(\mathbb{Q}_p^n).$$

Таким чином, перетворення Фур'є $\mathcal{F}$ є лінійним ізоморфізмом з $\Psi(\mathbb{Q}_p^n)$ на $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$, а також із $\Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ на $\Psi'(\mathbb{Q}_p^n)$. В той же час, $\mathcal{F}$ можна розглядати як лінійний ізоморфізм з $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ на $\Psi(\mathbb{Q}_p^n)$.

1.5 Псевдодиференціальні оператори та оператор D^α

Відомо, що операція диференціювання є невизначеною у p -адичному аналізі комплекснозначних функцій, визначених на $\mathbb{Q}_p$. В результаті, значна кількість p -адичних моделей використовують псевдодиференціальні рівняння замість диференціальних рівнянь. Таким чином, псевдодиференціальні оператори (зокрема, дробові оператори) відіграють важливу роль у p -адичній математичній фізиці.

Багатовимірний p -адичний дробовий оператор D^α був введений М. Тейблсоном [56] (див. також [57]) у просторі узагальнених функцій $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$. Спектральна теорія одновимірного варіанта цього дробового оператора була розвинена у роботі [61], зокрема, було знайдено явні формули для власних функцій цього оператора. Поняття псевдодиференціальних операторів над полем $\mathbb{Q}_p^n$ було введено у роботі [62]. Спектральна теорія одновимірного варіанта цього дробового оператора була розвинена у роботі [61], зокрема, було побудовано явні формули для власних функцій цього оператора (див. також [58]). Владіміров В. С. побудував спектральну теорію оператора типу Шредінгера $D^\alpha + V(x)$, яка була далі розвинена у роботах [34] та [35]. У монографії [37] та статті [36], А. Н. Кочубей вивчав псевдодиференціальні оператори з символами вигляду $A\xi = |f(\xi_1, \dots, \xi_n)|_p^\alpha$, $\alpha > 0$, де $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — квадратична форма така, що $f(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$ при $|\xi_1|_p + \dots + |\xi_n|_p \neq 0$. В роботах [66] та [67],

В. Зуніга-Галіндо розглядав псевдодиференціальні оператори з символами вигляду $A(\xi) = |f(\xi_1, \dots, \xi_n)|_p^\alpha$, $\alpha > 0$, де $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — не тотожно сталий многочлен.

Означення 1.9. Псевдодиференціальним оператором над простором p -адичних чисел у відкритій множині $\mathcal{O} \subset \mathbb{Q}_p^n$ називається оператор A вигляду

$$(A\psi)(x) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} a(\xi, x) \tilde{\psi}(\xi) \chi_p(-(\xi, x)) d\xi, \quad x \in \mathcal{O},$$

який діє на комплекснозначні функції $\psi(x)$ p -адичних аргументів $x \in \mathcal{O}$. Тут функція ψ припускається заданою на всьому просторі $\mathbb{Q}_p^n$ та продовженою нулем за $\mathcal{O}$, $\tilde{\psi}$ — її перетворення Фур'є.

Функція $a(\xi, x)$, $\xi \in \mathbb{Q}_p^n$, $x \in \mathbb{C}$, називається *символом* оператора A . p -адична Γ -функція задається наступним інтегралом [58]

$$\Gamma_p(\alpha) = \Gamma_p(|x|_p^{\alpha-1}) = \int_{\mathbb{Q}_p} |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(x) dx = \frac{1 - p^{\alpha-1}}{1 - p^{-\alpha}}. \quad (1.17)$$

В n -вимірному випадку перетворення Фур'є узагальненої функції $|x|_p^{\alpha-n}$ задається формулою (див. [56] Теорема 2, [57] III, Теорема (4.5), [58], VIII, (4.3))

$$\mathcal{F}[|x|_p^{\alpha-n}] = \Gamma_p^{(n)}(\alpha) |\xi|_p^{-\alpha}, \quad \alpha \neq 0, n, \quad (1.18)$$

де $\Gamma_p^{(n)}(\alpha)$ — n -вимірна Γ -функція, задана формулою (див. [56] Теорема 1, [57] III, Теорема (4.2), [58], VIII, (4.4))

$$\begin{aligned} \Gamma_p^{(n)}(\alpha) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{p^{-k} \leq |x|_p \leq p^k} |x|_p^{\alpha-n} \chi_p(u \cdot x) d^n x = \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p^n} |x|_p^{\alpha-n} \chi_p(x) d^n x = \frac{1 - p^{\alpha-n}}{1 - p^{-\alpha}}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

в сенсі головного значення інтеграла, де $|u|_p = 1$. Тут $\Gamma_p^{(1)}(\alpha) = \Gamma_p(\alpha)$.

Введемо узагальнену функцію з простору $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ за правилом

$$f_\alpha(z) = \frac{|z|_p^{\alpha-1}}{\Gamma_p(\alpha)}, \quad \alpha \neq 0, 1, \alpha \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{Q}_p, \quad (1.20)$$

яка називається *ядром Пісса* [58], де $|z|_p^{\alpha-1}$ — однорідна узагальнена функція степеня $\pi_\alpha(z) = |z|_p^{\alpha-1}$. Узагальнена функція $f_\alpha(z)$ є мероморфною на всіх комплексній площині α , і має прості полюси в точках $\alpha = 0, 1$. Визначимо $f_0(\cdot)$ як узагальнену функцію з $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ (див. [58], VIII, (2.20))

$$f_0(z) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha(z) = \delta(z), \quad z \in \mathbb{Q}_p, \quad (1.21)$$

де границя розуміється в слабкому сенсі.

Означення 1.10. Одновимірний дробовий оператор $D^\alpha : \varphi \rightarrow D^\alpha \varphi$ визначається на $\mathbb{Q}_p$ як оператор згортки

$$(D^\alpha \varphi)(x) = f_{-\alpha}(x) * \varphi(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p, \operatorname{Re} \alpha \neq -1. \quad (1.22)$$

Оператор D^α називається *оператором (дробового) диференціювання* порядку α для $\operatorname{Re} \alpha > 0$; *оператором (дробового) інтегрування* порядку α для $\operatorname{Re} \alpha < 0$, $\operatorname{Re} \alpha \neq -1$.

Для $\alpha = 0$,

$$D^0 \varphi(x) = \delta(x) * \varphi(x) = \varphi(x)$$

є одиничним оператором.

У випадку $\operatorname{Re} \alpha > 0$, співвідношення (1.22) можна переписати еквівалентним чином (див. [58], IX, (1.1)), як

$$\begin{aligned} (D^\alpha \varphi)(x) &= \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{|x - \xi|_p^{\alpha+1}} d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi) \chi_p(-\xi x) d\xi, \quad x \in \mathbb{Q}_p. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Якщо $\operatorname{Re} \alpha < 0$, $\operatorname{Re} \alpha \neq -1$, то із співвідношення (1.22) випливає, що (див. [58], IX, (1.3), (1.4))

$$(D^\alpha \varphi)(x) = \frac{1 - p^\alpha}{1 - p^{-\alpha-1}} \int_{\mathbb{Q}_p} |x - \xi|_p^{-\alpha} \varphi(\xi) d\xi = \begin{cases} \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^{\alpha_j} \mathcal{F}[\varphi](\xi) \chi_p(-\xi x) d\xi, & \operatorname{Re} \alpha > -1; \\ \int_{\mathbb{Q}_p} |\xi|_p^\alpha (\mathcal{F}[\varphi](\xi) \chi_p(-\xi x) \mathcal{F}[\varphi](0)) d\xi, & \operatorname{Re} \alpha < -1. \end{cases} \quad (1.24)$$

Визначимо $f_1(\cdot)$ як узагальнену функцію з $\Phi'(\mathbb{Q}_p)$:

$$f_1(z) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} f_\alpha(z) = -\frac{p-1}{\log p} \log |z|_p, \quad z \in \mathbb{Q}_p, \quad (1.25)$$

де границя розуміється в слабкому сенсі.

Відомо, що ([58], VIII, (2.20), (3.8), (3.9))

$$f_\alpha(z) * f_\beta(z) = f_{\alpha+\beta}(z), \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq 1, \quad (1.26)$$

в сенсі простору $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$. Із формул (1.26), (1.25) випливає, що

$$f_\alpha(z) * f_\beta(z) = f_{\alpha+\beta}(z), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad (1.27)$$

в сенсі узагальнених функцій з $\Phi'(\mathbb{Q}_p)$.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots$, та $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Позначимо через

$$f_\alpha(x) = f_{\alpha_1}(x_1) \times \dots \times f_{\alpha_n}(x_n), \quad (1.28)$$

багатовимірне ядро Рісса, де одновимірні ядра Рісса $f_{\alpha_j}(x_j)$, $j = 1, \dots, n$, визначені формулами (1.20), (1.21) та (1.25).

Лема 1.5 (Лема 9.2.1 [8]). *Сім'я ядер Рісса $\{f_\alpha(x) : \alpha \in \mathbb{C}^n\}$ утворює абелеву групу з операцією згортки (в сенсі простору узагальнених функцій $\Phi'_\times(\mathbb{Q}_p^n)$), яка є ізоморфною адитивній групі $\mathbb{C}^n$:*

$$f_\alpha(x) * f_{\alpha+\beta}(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}^n, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n. \quad (1.29)$$

Оператор D^α можна також розглядати як гіперсингулярний інтегральний оператор. Для функції $u \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, визначимо

$$(D^\alpha \varphi)(x) = \frac{1 - p^\alpha}{1 - p^{-\alpha-1}} \int_{\mathbb{Q}_p} |y|_p^{-\alpha-1} [\varphi(x-y) - \varphi(x)] dy. \quad (1.30)$$

Аналогічно, якщо $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, то

$$(D^{\alpha,n} \varphi)(x) = \frac{1 - p^\alpha}{1 - p^{-\alpha-n}} \int_{\mathbb{Q}_p^n} |y|_p^{-\alpha-n} [\varphi(x-y) - \varphi(x)] dy.$$

Вираз в (1.30) є згорткою $f_{-\alpha} * \varphi$, де $f_s, s \in \mathbb{C}, s \not\equiv 1 \pmod{\frac{2\pi i}{\log p}}$, — ядро Рісса, визначене спочатку для $\operatorname{Re} s > 0, s \neq 1$, як

$$f_s(x) = \frac{|x|_p^{s-1}}{\Gamma_p(s)}, \quad \Gamma_p(s) = \frac{1 - p^{s-1}}{1 - p^{-s}},$$

а потім продовжене мероморфно, як узагальнена функція в $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$, задана виразом

$$(f_s, \varphi) = \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{s-1}} \varphi(0) + \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{s-1}} \left[\int_{|x|_p > 1} \varphi(x) \frac{dx}{|x|_p^{1-s}} + \int_{|x|_p \leq 1} (\varphi(x) - \varphi(0)) \frac{dx}{|x|_p^{1-s}} \right],$$

$s \neq 0, s \not\equiv 1 \pmod{\frac{2\pi i}{\log p}}$. Для $s = 0, f_0(x) = \delta(x)$. Для $s \equiv 1 \pmod{\frac{2\pi i}{\log p}}$, визначимо

$$f_s(x) = \frac{1 - p}{\log p} \log |x|_p.$$

Відомо, що $f_s * f_t = f_{s+t}$ в сенсі узагальнених функцій з $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$, якщо $s, t, s+t \not\equiv 1 \pmod{\frac{2\pi i}{\log p}}$. Якщо ці ядра розглядати як узагальнені функції з $\Phi'(\mathbb{Q}_p)$, то $f_s * f_t = f_{s+t}$ для всіх $s, t \in \mathbb{C}$ ([8]). Дивлячись на цю тотожність, природно визначити оператор $D^{-\alpha}, \alpha > 0$, покладаючи

$$(D^{-\alpha} \varphi)(x) = (f_\alpha * \varphi)(x) = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{-\alpha-1}} \int_{\mathbb{Q}_p} |x-y|_p^{\alpha-1} \varphi(y) dy, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p), \alpha \neq 1, \quad (1.31)$$

та

$$(D^{-1}\varphi)(x) = \frac{1-p}{p \log p} \int_{\mathbb{Q}_p} \log |x-y|_p \varphi(y) dy. \quad (1.32)$$

Тоді $D^\alpha D^{-\alpha} = I$ на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, якщо $\alpha \neq 1$. Ця властивість залишається справедливою на $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ і для $\alpha = 1$.

Відомо ([43]), що

$$D^\alpha(|\cdot|_p^\beta) = \frac{\Gamma_p(\beta+1)}{\Gamma_p(\beta-\alpha+1)} |\cdot|_p^{\beta-\alpha}, \quad \beta \neq \alpha, \quad (1.33)$$

де

$$\Gamma_p(z) = \frac{1-p^{z-1}}{1-p^{-z}} \quad (1.34)$$

p -адичний аналог гамма-функції.

1.6 Висновки до розділу 1

Цей розділ є допоміжним і не містить нових результатів.

У ньому викладено основні означення та поняття і сформульовано відомі результати, які стосуються тематики дисертації та використовуються при дослідженні.

2 Псевдодиференціальні рівняння зі слабким виродженням для радіальних функцій p -адичного аргументу

У цьому розділі досліджується питання існування та єдиності розв’язку задачі Коші для псевдодиференціального рівняння з оператором D^α , $\alpha > 0$, в просторі радіальних функцій на полі $\mathbb{Q}_p$, у випадку слабого виродження.

2.1 Лінійні псевдодиференціальні рівняння на радіальних функціях

Оператор D^α , $\alpha > 0$, на полі $\mathbb{Q}_p$, є найпростішим прикладом оператора дробового диференціювання. При цьому, як вперше було показано Владіміровим (див. [58]), властивості p -адичного псевдодиференціального оператора є набагато складнішими, ніж у його класичного аналога. Наприклад, як оператор в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, він має точковий спектр нескінченної кратності. Розглядаючи просте “формальне” еволюційне рівняння з оператором D^α у випадку p -адичної часової змінної t , В. С. Владіміров (див. [63]) помітив, що таке рівняння не має фундаментального розв’язку.

В той же час, А. Н. Кочубей в [38] вперше помітив, що деякі еволюційні рівняння зазначеного типу поведуться прийнятно, якщо розглядати лише розв’язки, які залежать від $|t|_p$. Це спостереження привело до поняття неархімедового хвильового рівняння, яке має різноманітні властивості, що нагадують класичні гіперболічні рівняння. (Детальніше p -адичне хвильове рівняння розглянемо у розділі 4).

У роботі [40] було розглянуто задачу Коші для класу лінійних рівнянь типу

$$D^\alpha u + a(|t|_p)u = g(|t|_p), \quad t \in \mathbb{Q}_p, \quad (2.1)$$

припускаючи, що розв’язок шукається у класі радіальних функцій, $u =$

$u(|t|_p)$. Задача Коші зводиться до інтегрального рівняння, яке нагадує класичні рівняння Вольтерри. Виявляється, що рівняння (2.1) та його узагальнення на радіальних функціях являють собою p -адичні аналоги звичайних диференціальних рівнянь.

Наступна лема надає достатні умови, за яких оператор D^α на радіальній функції $u = u(|t|_p)$ є визначеним, а також надає явний вираз його дії на цю функцію. Позначимо $d_\alpha = \frac{1 - p^\alpha}{1 - p^{-\alpha-1}}$.

Лема 2.1 (Лема 1, [40]). *Якщо функція $u = u(|t|_p)$ така, що*

$$\sum_{k=-\infty}^m p^k |u(p^k)| < \infty, \quad (2.2)$$

$$\sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} |u(p^\ell)| < \infty, \quad (2.3)$$

для деякого $m \in \mathbb{Z}$, то для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$ оператор $(D^\alpha u)(|t|_p)$ визначений в (1.30) існує для $|t|_p = p^n$, залежить тільки від $|t|_p$, та

$$\begin{aligned} (D^\alpha u)(p^n) &= d_\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^{-(\alpha+1)n} \sum_{k=-\infty}^{n-1} p^k u(p^k) + p^{-\alpha n-1} \frac{p^\alpha + p - 2}{1 - p^{-\alpha-1}} u(p^n) + \\ &+ d_\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\ell=n+1}^{\infty} p^{-\alpha\ell} u(p^\ell). \end{aligned}$$

В [40] було введено аналог інтеграла зі змінною верхньою межею, що дозволило розглядати рівняння (2.1) як p -адичний аналог звичайного диференціального рівняння.

Із означення оператора D^α (1.30) очевидно, що D^α дорівнює нулю на сталих функціях. Отже, $D^{-\alpha}$ є не єдиним можливим вибором для правого оберненого оператора до D^α . Зокрема,

Означення 2.1 ([40]). p -адичний дробовий інтеграл I^α , $\alpha > 0$, визначається для довільної функції $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ наступним чином:

$$(I^\alpha \varphi)(t) = (D^{-\alpha} \varphi)(t) - (D^{-\alpha} \varphi)(0). \quad (2.4)$$

Спочатку цей вираз є визначеним для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$. Із (1.31), (1.32) та ультратриметричної властивості норми випливає, що

$$(I^\alpha \varphi)(t) = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \int_{|y|_p \leq |t|_p} (|t - y|_p^{\alpha-1} - |y|_p^{\alpha-1}) \varphi(y) dy, \quad \alpha \neq 1, \quad (2.5)$$

$$(I^1 \varphi)(t) = \frac{1 - p}{p \log p} \int_{|y|_p \leq |t|_p} (\log |t - y|_p - \log |y|_p) \varphi(y) dy. \quad (2.6)$$

Навідміну від (1.31), (1.32), інтеграли в (2.5) та (2.6) беруться, для довільного фіксованого $x \in \mathbb{Q}_p$, по фіксованих множинах.

Наступна лема надає явну формулу для I^α на радіальній функції $u = u(|t|_p)$. Очевидно, $(I^\alpha u)(0) = 0$ усюди, де I^α визначений.

Лема 2.2 (Lemma 2, [40]). *Припустимо, що*

$$\sum_{k=-\infty}^m \max(p^k, p^{\alpha k}) |u(p^k)| < \infty, \quad \text{якщо } \alpha \neq 1, \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=-\infty}^m |k| p^k |u(p^k)| < \infty, \quad \text{якщо } \alpha = 1, \quad (2.8)$$

для деякого $m \in \mathbb{Z}$. Тоді $I^\alpha u$ існує, є радіальною функцією, та для довільного $t \neq 0$:

$$(I^\alpha u)(|t|_p) = p^{-\alpha} |t|_p^\alpha u(|t|_p) + \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \int_{|y|_p < |t|_p} (|t|_p^{\alpha-1} - |y|_p^{\alpha-1}) u(|y|_p) dy, \quad \alpha \neq 1,$$

$$(I^1 u)(|t|_p) = p^{-1} |t|_p u(|t|_p) + \frac{1 - p}{p \log p} \int_{|y|_p < |t|_p} (\log |t|_p - \log |y|_p) u(|y|_p) dy.$$

Із леми 2.2 випливає, що функція $I^\alpha u$ буде неперервною, якщо, наприклад, u обмежена навколо нуля. Якщо $|u(|t|_p)| \leq C |t|_p^{-\varepsilon}$ при $|t|_p \geq 1$, то $(I^\alpha u)(|t|_p) \leq C |t|_p^{\alpha-\varepsilon}$ при $|t|_p \geq 1$, де C — деяка додатна стала.

Очевидно, $D^\alpha I^\alpha = I$ на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$, якщо $\alpha \neq 1$, та на $\Phi(\mathbb{Q}_p)$, якщо $\alpha = 1$ (тут I — одиничний оператор). Оскільки за лемою 2.1 та лемою 2.2, ці

оператори визначені явно на ширшому класі радіальних функцій, природно визначити достатні умови, коли оператор I^α діє як правий обернений до оператора D^α .

Лема 2.3 (Lemma 3, [41]). *Припустимо, що $m \in \mathbb{Z}$,*

$$\sum_{k=-\infty}^m \max(p^k, p^{\alpha k}) |v(p^k)| < \infty, \quad \sum_{\ell=m}^{\infty} |v(p^\ell)| < \infty, \quad (2.9)$$

якщо $\alpha \neq 1$, та

$$\sum_{k=-\infty}^m |k| p^k |v(p^k)| < \infty, \quad \sum_{\ell=m}^{\infty} \ell |v(p^\ell)| < \infty, \quad (2.10)$$

якщо $\alpha = 1$. Тоді існує $(D^\alpha I^\alpha v)(|t|_p) = v(|t|_p)$ для довільного $t \neq 0$.

Розглянемо задачу Коші

$$D^\alpha u + a(|t|_p)u = g(|t|_p), \quad t \in \mathbb{Q}_p, \quad (2.11)$$

$$u(0) = 0. \quad (2.12)$$

Розв'язок задачі Коші (2.11)–(2.12) шукається у вигляді $u = I^\alpha v$, де $v = v(|t|_p)$ — радіальна функція. Тоді дана задачі Коші еквівалентна формальному інтегральному рівнянню

$$v(|t|_p) + a(|t|_p)(I^\alpha v)(|t|_p) = g(|t|_p), \quad t \in \mathbb{Q}_p, \quad (2.13)$$

Теорема 2.1 (Kochubei 2014 [40]). *Нехай $\alpha > 0$, $a, g : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервні радіальні функції, $N \in \mathbb{Z}$ таке, що*

$$p^{-\alpha} a(|t|_p) |t|_p^\alpha < 1 \quad \text{для } |t|_p \leq p^N.$$

Припустимо, що

$$a(|t|_p) \neq -p^{\alpha m} \quad \text{для всіх } t \in \mathbb{Q}_p, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Тоді інтегральне рівняння (2.13) має єдиний неперервний розв'язок на кулі $B_N = \{t \in \mathbb{Q}_p : |t|_p \leq p^N\}$.

Нехай додатково

$$\begin{aligned} |a(|t|_p)| &\leq C|t|_p^{-\alpha-\varepsilon}, \\ |g(|t|_p)| &\leq C|t|_p^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad C > 0, \end{aligned}$$

при $|t|_p > 1$.

Тоді $u = I^\alpha v$ є сильним розв'язком задачі Коші (2.11)–(2.12).

В роботі [41] Кочубей розглядав нелінійну задачу Коші

$$(D^\alpha u)(|t|_p) = f(|t|_p, u(|t|_p)), \quad 0 \neq t \in \mathbb{Q}_p, \quad (2.14)$$

з початковою умовою

$$u(0) = u_0. \quad (2.15)$$

Із задачею (2.14)–(2.15) пов'язане інтегральне рівняння

$$u(|t|_p) = u_0 + I^\alpha f(| \cdot |_p, u(| \cdot |_p))(|t|_p). \quad (2.16)$$

Теорема 2.2 (Кочубей 2020, [41]). *Нехай функція $f : p^\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умови*

$$\begin{aligned} |f(|t|_p, x)| &\leq M, \quad t \in \mathbb{Q}_p, \quad x \in \mathbb{R}, \\ |f(|t|_p, x) - f(|t|_p, y)| &\leq F|x - y|, \quad t \in \mathbb{Q}_p, \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Тоді задача (2.14)–(2.15) має єдиний локальний м'який розв'язок, тобто інтегральне рівняння (2.16) має розв'язок $u(|t|_p)$, визначений для $|t|_p \leq p^N$, де $N \in \mathbb{Z}$ достатньо мале, та будь-який інший розв'язок $\bar{u}(|t|_p)$, якщо він існує, збігається з u для $|t|_p \leq p^{\bar{N}}$, де $\bar{N} \leq N$.

Нехай додатково виконується наступна умова Ліпшиця:

$$|f(p^\ell, x) - f(p^\ell, y)| \leq F_\ell |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \ell \in \mathbb{Z},$$

де $0 < F_\ell < p^{-\alpha\ell}$ для кожного $\ell \in \mathbb{Z}$.

Тоді локальний розв'язок рівняння (2.16) допускає продовження до глобального розв'язку, визначеного для всіх $t \in \mathbb{Q}_p$.

Якщо додатково припустити, що

$$|f(p^\ell, x)| \leq Cp^{-\beta\ell}, \quad \ell \geq 1, \text{ для всіх } x \in \mathbb{R},$$

де $\beta > \alpha$, то даний м'який розв'язок задовольняє рівняння (2.14).

2.2 Постановка задачі

Нехай $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Розглянемо задачу Коші

$$|t|_p^\gamma (D^\alpha u)(|t|_p) = f(|t|_p, u(|t|_p)), \quad 0 \neq t \in \mathbb{Q}_p, \quad (2.17)$$

з початковою умовою

$$u(0) = u_0. \quad (2.18)$$

Припустимо, що функція $f : p^\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умови

$$|f(|t|_p, x)| \leq M, \quad (2.19)$$

$$|f(|t|_p, x) - f(|t|_p, y)| \leq L|x - y|, \quad (2.20)$$

для всіх $t \in \mathbb{Q}_p$, $x, y \in \mathbb{R}$ та деяких сталих M, L , незалежних від t, x, y .

Пов'яжемо із задачею (2.17)–(2.18) інтегральне рівняння

$$u(|t|_p) = u_0 + I^\alpha [|\cdot|_p^{-\gamma} f(|\cdot|_p, u(|\cdot|_p))] (|t|_p), \quad (2.21)$$

де оператор I^α визначений в 2.1.

Означення 2.2. Будемо називати розв'язок u інтегрального рівняння (2.21), якщо він існує, м'яким розв'язком задачі Коші (2.17)–(2.18).

2.3 Допоміжні результати

Наступна лема надає оцінки величин, які будуть використовуватись для доведення основної теореми.

Лема 2.4. Позначимо

$$I_{\alpha,\sigma} = \int_{|y|_p < |t|_p} \left| |t|_p^{\alpha-1} - |y|_p^{\alpha-1} \right| |y|_p^{\alpha\sigma} dy, \quad \alpha \neq 1,$$

$$I_{1,\sigma} = \int_{|y|_p < |t|_p} \left| \log |t|_p - \log |y|_p \right| |y|_p^{\sigma} dy.$$

Тоді для довільного числа $\sigma > \max(-\frac{1}{\alpha}, -1)$ (не обов'язково цілого):

$$I_{\alpha,\sigma} = d_{\alpha,\sigma} |t|_p^{\alpha(\sigma+1)},$$

де сталі $d_{\alpha,\sigma}$ не залежить від t . Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує стала $A > 0$, незалежна від σ , така, що

$$0 < d_{\alpha,\sigma} \leq A q^{-\alpha\sigma}, \quad (2.22)$$

для довільного $\sigma \geq \max(-\frac{1}{\alpha}, -1) + \varepsilon$.

Доведення. Розглянемо випадок $\alpha > 1$. Для $|t|_p = p^n$ з урахуванням формули (1.6) маємо

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\sigma} &= |t|_p^{\alpha-1} \int_{|y|_p \leq p^{n-1}} |y|_p^{\alpha\sigma} dy - \int_{|y|_p \leq p^{n-1}} |y|_p^{\alpha(\sigma+1)-1} dy = \\ &= p^{n(\alpha-1)} \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha\sigma-1}} p^{(\alpha\sigma+1)(n-1)} - \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha(\sigma+1)}} p^{\alpha(\sigma+1)(n-1)} = \\ &= d_{\alpha,\sigma} p^{n\alpha(\sigma+1)}, \end{aligned}$$

де перший інтеграл збігається за умови $\alpha\sigma + 1 > 0$, тобто $\sigma > -\frac{1}{\alpha}$, а другий — за умови $\alpha(\sigma + 1) > 0$, тобто $\sigma > -1$, та

$$\begin{aligned} d_{\alpha,\sigma} &= \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha\sigma-1}} p^{-\alpha\sigma-1} - \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha\sigma-\alpha}} p^{-\alpha\sigma-\alpha} = \\ &= (1-p^{-1}) \frac{p^{\alpha-1} - 1}{(1-p^{-\alpha\sigma-1})(p^\alpha - p^{-\alpha\sigma})} p^{-\alpha\sigma}. \end{aligned}$$

Якщо для деякого $\varepsilon > 0$ виконується $\sigma \geq \max(-\frac{1}{\alpha}, -1) + \varepsilon =: \theta$, то

$$d_{\alpha, \sigma} \leq (1 - p^{-1}) \frac{p^{\alpha-1} - 1}{(1 - p^{-\alpha\theta-1})(p^\alpha - p^{-\alpha\theta})} p^{-\alpha\sigma} =: Ap^{-\alpha\sigma}.$$

Аналогічно, для $0 < \alpha < 1$ маємо

$$I_{\alpha, \sigma} = \int_{|y|_p \leq p^{n-1}} |y|_p^{\alpha(\sigma+1)-1} dy - |t|_p^{\alpha-1} \int_{|y|_p \leq p^{n-1}} |y|_p^{\alpha\sigma} dy = d_{\alpha, \sigma} |t|_p^{\alpha(\sigma+1)},$$

де

$$d_{\alpha, \sigma} = (1 - p^{-1}) \frac{1 - p^{\alpha-1}}{(1 - p^{-\alpha\sigma-1})(p^\alpha - p^{-\alpha\sigma})} p^{-\alpha\sigma} \leq Ap^{-\alpha\sigma},$$

причому

$$\sigma \geq \max(-\frac{1}{\alpha}, -1) + \varepsilon.$$

У випадку $\alpha = 1$ маємо

$$\begin{aligned} I_{1, \sigma} &= \sum_{k=-\infty}^{n-1} \int_{|y|_p = p^k} (\log |t|_p - \log |y|_p) |y|_p^\sigma dy = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left\{ n \log p \int_{|y|_p = p^k} q^{k\sigma} dy - \int_{|y|_p = p^k} k(\log p) p^{k\sigma} dy \right\} = \\ &= (1 - p^{-1}) \log p \sum_{k=-\infty}^{n-1} (n - k) p^{k(\sigma+1)} = \\ &= (1 - p^{-1}) \log p \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu p^{(n-\nu)(\sigma+1)} = d_{1, \sigma} p^{n\alpha(\sigma+1)}, \end{aligned}$$

де $\sigma > -1$,

$$d_{1, \sigma} = (1 - p^{-1}) \log p \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu p^{-\nu(\sigma+1)} = (1 - p^{-1}) \log p \frac{p^{-\sigma-1}}{(1 - p^{-\sigma-1})^2},$$

і для $\sigma \geq -1 + \varepsilon =: \theta$ має місце оцінка

$$d_{1, \sigma} \leq (1 - p^{-1}) \log p \frac{p^{-1}}{(1 - p^{-\theta-1})^2} p^{-\sigma} =: Ap^{-\sigma}.$$

□

Наступні три Твердження містять оцінки на $I^\alpha \varphi$ для радіальної функції φ .

Твердження 2.1. *Нехай $\gamma < \min(1, \alpha)$ і $\varphi = \varphi(|t|_p)$ — радіальна функція така, що для всіх $0 \neq t \in \mathbb{Q}_p$:*

$$|\varphi(|t|_p)| \leq \mu |t|_p^{-\gamma}. \quad (2.23)$$

де $\mu > 0$ — деяка стала.

Тоді функція φ задовольняє умови (2.7)–(2.8), існує інтеграл $I^\alpha \varphi$, який є радіальною функцією. Крім того, існує стала C_0 така, що

$$|(I^\alpha \varphi)(|t|_p)| \leq C_0 \mu |t|_p^{\alpha-\gamma}. \quad (2.24)$$

Доведення. Перевіримо умови леми 2.2 для функції φ . Нехай $\alpha > 1$. Для будь-якого $m \leq 0$ маємо

$$\sum_{k=-\infty}^m \max(p^k, p^{\alpha k}) |\varphi(p^k)| = \sum_{k=-\infty}^m p^k |\varphi(p^k)| \leq \mu \sum_{k=-\infty}^m p^{(1-\gamma)k} < +\infty,$$

оскільки $\gamma < 1$.

У випадку $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\sum_{k=-\infty}^m \max(p^k, p^{\alpha k}) |\varphi(p^k)| = \sum_{k=-\infty}^m p^{\alpha k} |\varphi(p^k)| \leq \mu \sum_{k=-\infty}^m p^{(\alpha-\gamma)k} < +\infty,$$

оскільки $\gamma < \alpha$.

Якщо ж $\alpha = 1$, то

$$\sum_{k=-\infty}^m |k| p^k |\varphi(p^k)| \leq \mu \sum_{k=-\infty}^m |k| p^{(1-\gamma)k} < +\infty.$$

Тому із леми 2.2 випливає, що $I^\alpha \varphi$ існує.

Крім того, для $\alpha \neq 1$ маємо

$$\begin{aligned}
& |(I^\alpha \varphi)(|t|_p)| = \\
& = \left| p^{-\alpha} |t|_p^\alpha \varphi(|t|_p) + \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \int_{|y|_p < |t|_p} (|t|_p^{\alpha-1} - |y|_p^{\alpha-1}) \varphi(|y|_p) dy \right| \leq \\
& \leq p^{-\alpha} \mu |t|_p^{\alpha-\gamma} + \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \mu \int_{|y|_p < |t|_p} ||t|_p^{\alpha-1} - |y|_p^{\alpha-1}| |y|_p^{-\gamma} dy = \\
& = p^{-\alpha} \mu |t|_p^{\alpha-\gamma} + \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \mu I_{\alpha, -\frac{\gamma}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Тепер застосуємо лему 2.4 з $\sigma = -\frac{\gamma}{\alpha}$, тоді для $\gamma < \min(1, \alpha)$ отримаємо $\sigma > \max(-\frac{1}{\alpha}, -1)$. Тому

$$|(I^\alpha \varphi)(|t|_p)| \leq C_0 \mu |t|_p^{\alpha-\gamma},$$

де

$$C_0 = p^{-\alpha} + \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} d_{\alpha, -\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

У випадку $\alpha = 1$ маємо

$$\begin{aligned}
& |(I^1 \varphi)(|t|_p)| = \\
& = \left| p^{-1} |t|_p \varphi(|t|_p) + \frac{1 - p}{p \log p} \int_{|y|_p < |t|_p} (\log |t|_p - \log |y|_p) \varphi(|y|_p) dy \right| \leq \\
& \leq p^{-1} \mu |t|_p^{1-\gamma} + \frac{1 - p}{p \log p} \mu I_{1, -\gamma}.
\end{aligned}$$

Для $\gamma < 1$ застосуємо лему 2.4 з $\sigma = -\gamma$ і отримаємо

$$|(I^1 \varphi)(|t|_p)| \leq C_0 \mu |t|_p^{1-\gamma},$$

де

$$C_0 = p^{-1} + \frac{1 - p}{p \log p} d_{1, -\gamma},$$

що завершує доведення. □

Твердження 2.2. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\gamma < \min(1, \alpha)$ і $\varphi = \varphi(|t|_p)$ — радіальна функція така, що для всіх $0 \neq t \in \mathbb{Q}_p$ виконується

$$|\varphi(|t|_p)| \leq \mu |t|_p^{n\alpha - (n+1)\gamma}. \quad (2.25)$$

Тоді існує інтеграл $I^\alpha \varphi$, який є радіальною функцією. Крім того, існує стала C_n така, що

$$|(I^\alpha \varphi)(|t|_p)| \leq C_n \mu |t|_p^{(n+1)(\alpha - \gamma)}. \quad (2.26)$$

Доведення. У випадку $\alpha > 1$ маємо

$$\sum_{k=-\infty}^m \max(p^k, p^{\alpha k}) |\varphi(p^k)| \leq \mu \sum_{k=-\infty}^m p^k p^{[n\alpha - (n+1)\gamma]k} < +\infty,$$

оскільки $\gamma < 1 = \frac{n+1}{n+1} < \frac{n\alpha + 1}{n+1}$, і тому $1 + n\alpha - (n+1)\gamma > 0$. Якщо $0 < \alpha < 1$, то маємо

$$\sum_{k=-\infty}^m \max(p^k, p^{\alpha k}) |\varphi(p^k)| \leq \mu \sum_{k=-\infty}^m p^{\alpha k} p^{[n\alpha - (n+1)\gamma]k} < +\infty,$$

оскільки $\alpha > \gamma$, і отже $(n+1)\alpha - (n+1)\gamma > 0$.

Якщо $\alpha = 1$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^m |k| p^k |\varphi(p^k)| &\leq \mu \sum_{k=-\infty}^m |k| p^k p^{[n\alpha - (n+1)\gamma]k} = \\ &= \mu \sum_{k=-\infty}^m |k| p^{[1+n-(n+1)\gamma]k} < +\infty, \end{aligned}$$

оскільки $\gamma < 1$.

Отже, умови (2.7)–(2.8) виконуються та із леми 2.2 випливає, що інтеграл $I^\alpha \varphi$ існує.

Для $\alpha \neq 1$ маємо

$$\begin{aligned}
& |(I^\alpha \varphi)(|t|_p)| = \\
& = \left| p^{-\alpha} |t|_p^\alpha \varphi(|t|_p) + \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \int_{|y|_p < |t|_p} (|t|_p^{\alpha-1} - |y|_p^{\alpha-1}) \varphi(|y|_p) dy \right| \leq \\
& \leq p^{-\alpha} \mu |t|_p^\alpha |t|_p^{n\alpha - (n+1)\gamma} + \\
& + \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \mu \int_{|y|_p < |t|_p} ||t|_p^{\alpha-1} - |y|_p^{\alpha-1}| |y|_p^{n\alpha - (n+1)\gamma} dy = \\
& = p^{-\alpha} \mu |t|_p^{(n+1)(\alpha-\gamma)} + \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \mu I_{\alpha, \frac{n\alpha - (n+1)\gamma}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Щоб застосувати лему 2.4 з $\sigma = \frac{n\alpha - (n+1)\gamma}{\alpha}$, спочатку перевіримо, що $\sigma > \max(-\frac{1}{\alpha}, -1)$. Дійсно, $(n+1)(\alpha - \gamma) > 0$, тому $n\alpha - (n+1)\gamma > -1$, тобто $\frac{n\alpha - (n+1)\gamma}{\alpha} > -1$. Якщо $\alpha > 1$, маємо $\gamma < 1 = \frac{n+1}{n+1} < \frac{n\alpha + 1}{n+1}$, а якщо $0 < \alpha < 1$, то $\gamma < \alpha = \frac{n\alpha + \alpha}{n+1} < \frac{n\alpha + 1}{n+1}$, тому в обох випадках $\frac{n\alpha - (n+1)\gamma}{\alpha} > -\frac{1}{\alpha}$. Звідси

$$|(I^\alpha \varphi)(|t|_p)| \leq C_n \mu |t|_p^{(n+1)(\alpha-\gamma)},$$

де $C_n = p^{-\alpha} + \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} d_{\alpha, \frac{n\alpha - (n+1)\gamma}{\alpha}}$.

У випадку $\alpha = 1$ маємо $(n+1)(1 - \gamma) > 0$, тому $n - (n+1)\gamma > -1$, і для $\sigma = n - (n+1)\gamma$ із леми 2.4 випливає наступна оцінка

$$\begin{aligned}
& |(I^1 \varphi)(|t|_p)| = \\
& = \left| p^{-1} |t|_p \varphi(|t|_p) + \frac{1 - p}{p \log p} \int_{|y|_p < |t|_p} (\log |t|_p - \log |y|_p) \varphi(|y|_p) dy \right| \leq \\
& \leq p^{-1} \mu |t|_p^{(n+1)(1-\gamma)} + \frac{1 - p}{p \log p} \mu I_{1, n - (n+1)\gamma} = C_n \mu |t|_p^{1-\gamma},
\end{aligned}$$

де

$$C_n = p^{-1} + \frac{1-p}{p \log p} d_{1, n-(n+1)\gamma}.$$

□

Твердження 2.3. *Нехай $\gamma < \min(1, \alpha)$.*

Тоді послідовність сталих $\{C_n : n \geq 1\}$, визначених в (2.26), є обмеженою деякою сталою $C > 0$, при чому C не залежить від вибору функції φ .

Доведення. Оскільки для всіх $n \geq 0$ виконується

$$\frac{n\alpha - (n+1)\gamma}{\alpha} = \frac{n(\alpha - \gamma) - \gamma}{\alpha} \geq -\frac{\gamma}{\alpha} > \max(-\frac{1}{\alpha}, -1),$$

то для всіх $\alpha \neq 1$ можна застосувати лему 2.4. Тоді з оцінки (2.22) для $\sigma = \frac{n\alpha - (n+1)\gamma}{\alpha}$ отримаємо для будь-якого $n \geq 0$

$$\begin{aligned} C_n &= p^{-\alpha} + \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} d_{\alpha, \frac{n\alpha - (n+1)\gamma}{\alpha}} \leq p^{-\alpha} + \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} A p^{n(\gamma-\alpha)+\gamma} \leq \\ &\leq p^{-\alpha} + \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} A p^{\gamma} =: C. \end{aligned}$$

У випадку $\alpha = 1$ маємо

$$\begin{aligned} C_n &= p^{-1} + \frac{1-p}{p \log p} d_{1, n-(n+1)\gamma} \leq p^{-1} + \frac{1-p}{p \log p} A p^{n(\gamma-1)+\gamma} \leq \\ &\leq p^{-1} + \frac{1-p}{p \log p} A p^{\gamma} =: C. \end{aligned}$$

□

2.4 Існування та єдиність локальних м'яких розв'язків

У даному розділі досліджується існування та єдиність локальних м'яких розв'язків задачі Коші (2.17)–(2.18).

Для зручності введемо позначення

$$h(|t|_p, u(|t|_p)) = |t|_p^{-\gamma} f(|t|_p, u(|t|_p)), \quad 0 \neq t \in \mathbb{Q}_p. \quad (2.27)$$

Тоді функція h задовольняє оцінки

$$|h(|t|_p, x)| \leq M|t|_p^{-\gamma}, \text{ для всіх } t \in \mathbb{Q}_p, x \in \mathbb{R}, \quad (2.28)$$

$$|h(|t|_p, x) - h(|t|_p, y)| \leq L|x - y||t|_p^{-\gamma}, \text{ для всіх } t \in \mathbb{Q}_p, x, y \in \mathbb{R}, \quad (2.29)$$

і рівняння (2.17) еквівалентне наступному рівнянню

$$(D^\alpha u)(|t|_p) = h(|t|_p, u(|t|_p)), \quad 0 \neq t \in \mathbb{Q}_p, \quad (2.30)$$

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови (2.19), (2.20), а також $\gamma < \min(1, \alpha)$.*

Тоді задача Коші (2.17)–(2.18) має єдиний локальний м'який розв'язок, тобто інтегральне рівняння (2.21) має розв'язок $u(|t|_p)$, визначений для всіх $|t|_p \leq p^N$, де $N \in \mathbb{Z}$ достатньо від'ємне. Крім того, довільний інший розв'язок $\bar{u}(|t|_p)$, якщо він існує, збігається з u для $|t|_p \leq p^K$, де $K \leq N$.

Доведення. Будемо шукати розв'язок рівняння (2.21) як границю послідовності $\{u_k : k \geq 0\}$, де початкове значення u_0 визначене в (2.21):

$$u_k(|t|_p) = u_0 + I^\alpha h(| \cdot |_p, u_{k-1}(| \cdot |_p))(|t|_p), \quad k \geq 1. \quad (2.31)$$

Доведемо за індукцією, що для всіх $k \geq 0$:

$$|u_{k+1}(|t|_p) - u_k(|t|_p)| \leq C^{k+1} M L^k |t|_p^{(k+1)(\alpha-\gamma)}, \quad (2.32)$$

де $C > 0$ — стала із доведення Твердження 2.3.

Дійсно, для $k = 0$ із умови (2.28), Твердження 2.1 з $\varphi = h$, $\mu = M$ та Твердження 2.3 випливає, що

$$|u_1(|t|_p) - u_0| = |I^\alpha h(| \cdot |_p, u_0)(|t|_p)| \leq C_0 M |t|_p^{\alpha-\gamma} \leq C M |t|_p^{\alpha-\gamma}. \quad (2.33)$$

Для $k = 1$ із лінійності оператора I^α маємо

$$\begin{aligned} |u_2(|t|_p) - u_1(|t|_p)| &= |u_0 + I^\alpha h(| \cdot |_p, u_1(| \cdot |_p)) - u_0 - I^\alpha h(| \cdot |_p, u_0)| = \\ &= |I^\alpha [h(| \cdot |_p, u_1(| \cdot |_p)) - h(| \cdot |_p, u_0)](|t|_p)|. \end{aligned}$$

Із умови (2.29) та оцінки (2.33) випливає, що

$$|h(|t|_p, u_1(|t|_p)) - h(|t|_p, u_0)| \leq L|t|_p^{-\gamma}|u_1(|t|_p) - u_0| \leq CML|t|_p^{\alpha-2\gamma}.$$

Далі із Твердження 2.2 для $n = 1$, $\varphi = h(|\cdot|_p, u_1(|\cdot|_p)) - h(|\cdot|_p, u_0)$, $\mu = CMF$ випливає, що

$$|u_2(|t|_p) - u_1(|t|_p)| \leq C_1CML|t|_p^{2(\alpha-\gamma)} \leq C^2ML|t|_p^{2(\alpha-\gamma)}.$$

Припустимо, що (2.32) виконується для $|u_{k+1}(|t|_p) - u_k(|t|_p)|$. Тоді $|u_{k+2}(|t|_p) - u_{k+1}(|t|_p)| = |I^\alpha [h(|\cdot|_p, u_{k+1}(|\cdot|_p)) - h(|\cdot|_p, u_k(|\cdot|_p))](|t|_p)|$, та із (2.29) та гіпотези індукції випливає, що

$$\begin{aligned} |h(|t|_p, u_{k+1}(|t|_p)) - h(|t|_p, u_k(|t|_p))| &\leq F|t|_p^{-\gamma}|u_{k+1}(|t|_p) - u_k(|t|_p)| \leq \\ &\leq C^{k+1}MF^{k+1}|t|_p^{(k+1)(\alpha-\gamma)}|t|_p^{-\gamma} = C^{k+1}ML^{k+1}|t|_p^{(k+1)\alpha-(k+2)\gamma}. \end{aligned}$$

Отже, за Твердженням 2.2, застосованим до функції

$$\varphi = h(|\cdot|_p, u_{k+1}(|\cdot|_p)) - h(|\cdot|_p, u_k(|\cdot|_p)),$$

маємо

$$|u_{k+2}(|t|_p) - u_{k+1}(|t|_p)| \leq C^{k+2}ML^{k+1}|t|_p^{(k+2)(\alpha-\gamma)}.$$

Таким чином, оцінка (2.32) виконується для будь-якого $k \geq 0$.

Звідси випливає, що послідовність функцій $\{u_k : k \geq 0\}$ збігається рівномірно у кулі $\{t \in \mathbb{Q}_p : |t|_p \leq p^N\}$, для деякого $N \in \mathbb{Z}$ такого, що $p^N < (CL)^{-\frac{1}{\alpha-\gamma}}$, до границі, яку позначимо $u(|t|_p)$, $|t|_p \leq p^N$.

Із умов (2.7), (2.8) випливає, що

$$I^\alpha h(|\cdot|_p, u_k(|\cdot|_p))(|t|_p) \rightarrow I^\alpha h(|\cdot|_p, u(|\cdot|_p))(|t|_p), \quad |t|_p \leq p^N,$$

тому u є локальним розв'язком рівняння (2.21).

Доведемо єдиність цього розв'язку. Припустимо, що існує інший локальний розв'язок $\bar{u}(|t|_p)$, $|t|_p \leq p^K$, рівняння (2.21), де $K \leq N$. Тоді за Твердженням 2.1 маємо

$$|u(|t|_p) - \bar{u}(|t|_p)| \leq 2MC|t|_p^{\alpha-\gamma}, \quad |t|_p \leq p^K.$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} u(|t|_p) - \bar{u}(|t|_p) &= I^\alpha h(|\cdot|_p, u(|\cdot|_p))(|t|_p) - I^\alpha h(|\cdot|_p, \bar{u}(|\cdot|_p))(|t|_p) = \\ &= I^\alpha [h(|\cdot|_p, u(|\cdot|_p)) - h(|\cdot|_p, \bar{u}(|\cdot|_p))] (|t|_p), \end{aligned}$$

і з умови (2.29) та твердження 2.2 слідує, що

$$|u(|t|_p) - \bar{u}(|t|_p)| \leq 2MC^2 L |t|_p I^{2(\alpha-\gamma)}, \quad |t|_p \leq p^K.$$

Покажемо за допомогою індукції, що

$$|u(|t|_p) - \bar{u}(|t|_p)| \leq 2MC^m L^{m-1} |t|_p^{m(\alpha-\gamma)}, \quad |t|_p \leq p^K.$$

Припустимо, що твердження виконується для деякого натурального m .

Із умови (2.29) маємо

$$\begin{aligned} |h(|t|_p, u(|t|_p)) - h(|t|_p, \bar{u}(|t|_p))| &\leq \\ &\leq |t|_p^{-\gamma} L |u(|t|_p) - \bar{u}(|t|_p)| \leq 2L^m MC^m |t|_p^{m\alpha-(m+1)\gamma}, \quad |t|_p \leq p^K, \end{aligned}$$

і тому з твердження 2.2 випливає, що

$$|u(|t|_p) - \bar{u}(|t|_p)| \leq 2MC^{m+1} L^m |t|_p^{(m+1)(\alpha-\gamma)}, \quad |t|_p \leq p^K.$$

Оскільки $p^K \leq p^N < (CL)^{-\frac{1}{\alpha-\gamma}}$, то спрямовуючи $m \rightarrow \infty$, отримаємо, що $u(|t|_p) = \bar{u}(|t|_p)$, тобто розв'язки u та $\bar{u}$ співпадають при $|t|_p \leq p^K$. $\square$

2.5 Продовження розв'язків

Припустимо, що $\gamma < \min(1, \alpha)$, функція f задовольняє умови (2.19), (2.20), та функція h визначена в (2.27). Тоді за теоремою 2.3 ми можемо побудувати локальний розв'язок $u(|t|_p)$, $|t|_p \leq p^N$, $N \in \mathbb{Z}$, інтегрального рівняння (2.21).

Нехай $\alpha \neq 1$. Застосуємо лему 2.2 до функції h та підставимо явний вираз для $I^\alpha h$ у рівняння (2.21). Таким чином, щоб знайти розв'язок для $|t|_p = p^{N+1}$, достатньо розв'язати рівняння

$$u(p^{N+1}) = u_0 + v_0^{(N)} + p^{\alpha N} h(p^{N+1}, u(p^{N+1})), \quad (2.34)$$

де число

$$v_0^{(N)} = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \int_{|y|_p \leq p^N} \left(p^{(N+1)(\alpha-1)} - |y|_p^{\alpha-1} \right) h(|y|_p, u(|y|_p)) dy \quad (2.35)$$

є відомою сталою.

Аналогічно, у випадку $\alpha = 1$ отримаємо рівняння

$$u(p^{N+1}) = u_0 + v_0^{(N)} + p^N h(p^{N+1}, u(p^{N+1})), \quad (2.36)$$

$$v_0^{(N)} = \frac{1 - p}{p \log p} \int_{|y|_p \leq p^N} (\log p^{N+1} - \log |y|_p) h(|y|_p, u(|y|_p)) dy. \quad (2.37)$$

Наступна теорема стверджує, що побудоване таким чином продовження локального розв'язку рівняння (2.21) є коректним.

Теорема 2.4. *Нехай $\gamma < \min(1, \alpha)$, функція f задовольняє умову (2.19), а також (2.20) у наступній формі*

$$|f(p^\ell, x) - f(p^\ell, y)| \leq L_\ell |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \quad (2.38)$$

де $0 < L_\ell < p^{-\alpha\ell}$ для всіх $\ell \in \mathbb{Z}$.

Тоді локальний розв'язок рівняння (2.21), визначений при $|t|_p \leq p^N$, можна продовжити до глобального розв'язку, визначеного для кожного $t \in \mathbb{Q}_p$.

Доведення. Для всіх $\ell \in \mathbb{Z}$ маємо

$$p^{\alpha\ell} |h(p^{\ell+1}, x) - h(p^{\ell+1}, y)| \leq p^{\alpha\ell} p^{-\alpha(\ell+1)} p^\gamma |x - y| = p^{\gamma-\alpha} |x - y|,$$

де $p^{\gamma-\alpha} < 1$, оскільки $\gamma < \alpha$, і тому оператор $u_0 + v_0^{(\ell)} + p^{\alpha\ell} h(p^{\ell+1}, \cdot)$ є стискаючим відображенням на банаховому просторі всіх неперервних функцій на кулі $\{|t|_p \leq p^{\ell+1}\}$, і з теореми Банаха про нерухому точку випливає, що існує єдина нерухома точка цього оператора $u(p^{\ell+1})$:

$$u(p^{\ell+1}) = u_0 + v_0^{(\ell)} + p^{\alpha\ell} h(p^{\ell+1}, u(p^{\ell+1})).$$

Таким чином, рівняння (2.34) у випадку $\alpha \neq 1$ та (2.36) у випадку $\alpha = 1$ мають єдиний розв'язок для кожного $\ell \geq N$, тобто функцію u можна визначити для всіх $t \in \mathbb{Q}_p$. $\square$

2.6 Перехід від інтегрального рівняння до диференціального

Тепер можемо повернемося до диференціальної форми початкового рівняння (2.17).

Припустимо, що функція f задовольняє умови (2.19) та (2.38). Нехай $u(|t|_p)$ — розв'язок рівняння (2.21), отриманий за допомогою послідовних наближень в доведенні теореми 2.3 у кулі $|t|_p \leq p^N$ і продовжений на $\mathbb{Q}_p$ згідно зі співвідношенням (2.34) або (2.36). Тоді для всіх $\ell \geq N$ маємо

$$u(p^{\ell+1}) = u_0 + v_0^{(\ell)} + p^{\alpha\ell} h(p^{\ell+1}, u(p^{\ell+1})), \quad (2.39)$$

де стала $v_0^{(\ell)}$ визначена у (2.35) (у випадку $\alpha \neq 1$), (2.37) (у випадку $\alpha = 1$).

Твердження 2.4. *Нехай функція f задовольняє умови (2.38) та*

$$|f(p^\ell, x)| \leq Ap^{-\beta\ell}, \quad \ell \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.40)$$

для деякої сталої β такої, що $\beta + \gamma > \alpha$.

Тоді функція $u(|t|_p)$, $|t|_p \leq p^{\ell+1}$, яка є розв'язком рівняння (2.21), задовольняє умову (2.2), а для функції h виконуються умови (2.9)–(2.10).

Доведення. Розглянемо випадок $\alpha \neq 1$. Для $\ell \geq 1$ позначимо

$$v_0^{(\ell)} = v_{0,1}^{(\ell)} + v_{0,2}^{(\ell)},$$

де

$$v_{0,1}^{(\ell)} = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \int_{|y|_p \leq 1} \left(p^{(\ell+1)(\alpha-1)} - |y|_p^{\alpha-1} \right) h(|y|_p, u(|y|_p)) dy,$$

$$v_{0,2}^{(\ell)} = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \int_{p \leq |y|_p \leq p^\ell} \left(p^{(\ell+1)(\alpha-1)} - |y|_p^{\alpha-1} \right) h(|y|_p, u(|y|_p)) dy.$$

Тоді із умови (2.19) випливає, що

$$\begin{aligned}
|v_{0,1}^{(\ell)}| &\leq \left| \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \right| M \int_{|y|_p \leq 1} \left| p^{(\ell+1)(\alpha-1)} - |y|_p^{\alpha-1} \right| |y|_p^{-\gamma} dy \leq \\
&\leq \left| \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \right| M \left\{ p^{(\ell+1)(\alpha-1)} \int_{|y|_p \leq 1} |y|_p^{-\gamma} dy + \int_{|y|_p \leq 1} |y|_p^{\alpha-1-\gamma} dy \right\} = \\
&= \left| \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \right| M \left\{ p^{(\ell+1)(\alpha-1)} p \frac{1-p^{-1}}{1-p^{\gamma-1}} + \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha+\gamma}} \right\} \leq \\
&\leq C_1 \left\{ p^{(\ell+1)(\alpha-1)} + 1 \right\},
\end{aligned} \tag{2.41}$$

де

$$C_1 = \left| \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \right| M \max \left(\frac{1-p^{-1}}{1-p^{\gamma-1}}, \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha+\gamma}} \right).$$

Із оцінки (2.40) маємо

$$\begin{aligned}
|v_{0,2}^{(\ell)}| &\leq \\
&\leq \left| \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \right| A \left\{ p^{(\ell+1)(\alpha-1)} \int_{p \leq |y|_p \leq p^\ell} |y|_p^{-(\beta+\gamma)} dy + \int_{p \leq |y|_p \leq p^\ell} |y|_p^{\alpha-1-(\beta+\gamma)} dy \right\} = \\
&= \left| \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \right| A \left\{ p^{(\ell+1)(\alpha-1)} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{|y|_p=p^j} |y|_p^{-(\beta+\gamma)} dy + \sum_{j=1}^{\ell} \int_{|y|_p=p^j} |y|_p^{\alpha-1-(\beta+\gamma)} dy \right\} = \\
&= \left| \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \right| A \left\{ p^{(\ell+1)(\alpha-1)} \sum_{j=1}^{\ell} p^{-j(\beta+\gamma)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^j + \sum_{j=1}^{\ell} p^{j(\alpha-1-\beta-\gamma)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^j \right\} = \\
&= C_2 p^{(\ell+1)(\alpha-1)} \sum_{j=1}^{\ell} p^{(1-\beta-\gamma)j} + C_2 \sum_{j=1}^{\ell} p^{(\alpha-\beta-\gamma)j},
\end{aligned}$$

де

$$C_2 = \left| \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{\alpha-1}} \right| A \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Припустимо додатково, що $\alpha > 1$. Тоді, за припущенням Твердження, $\beta + \gamma > \alpha > 1$, і звідси

$$p^{(\ell+1)(\alpha-1)} \sum_{j=1}^{\ell} p^{(1-\beta-\gamma)j} = \frac{p^{(\ell+1)(\alpha-1)} p^{1-\beta-\gamma} (1 - p^{\ell(1-\beta-\gamma)})}{1 - p^{1-\beta-\gamma}} \leq \quad (2.42)$$

$$\leq C_3 p^{(\ell+1)(\alpha-1)},$$

де

$$C_3 = \frac{p^{1-\beta-\gamma}}{1 - p^{1-\beta-\gamma}}.$$

Нехай тепер $0 < \alpha < 1$. Якщо при цьому $\beta + \gamma > 1$, то подібно до (2.42) отримаємо

$$p^{(\ell+1)(\alpha-1)} \sum_{j=1}^{\ell} p^{(1-\beta-\gamma)j} \leq C_3 p^{(\ell+1)(\alpha-1)},$$

а якщо $\beta + \gamma \leq 1$, то оцінка отримується наступним чином

$$p^{(\ell+1)(\alpha-1)} \sum_{j=1}^{\ell} p^{(1-\beta-\gamma)j} = p^{(\ell+1)(\alpha-1)} \frac{p^{1-\beta-\gamma} (p^{\ell(1-\beta-\gamma)} - 1)}{p^{1-\beta-\gamma} - 1} =$$

$$= C_4 \left[p^{(\ell+1)(\alpha-\beta-\gamma)} - p^{(\ell+1)(\alpha-1)+1-\beta-\gamma} \right] \leq C_4 p^{(\ell+1)(\alpha-\beta-\gamma)},$$

де

$$C_4 = \frac{1}{p^{1-\beta-\gamma} - 1}.$$

Крім того, для всіх $\alpha \neq 1$ маємо

$$\sum_{j=1}^{\ell} p^{(\alpha-\beta-\gamma)j} = \frac{p^{\alpha-\beta-\gamma} (1 - p^{\ell(\alpha-\beta-\gamma)})}{1 - p^{\alpha-\beta-\gamma}} \leq \frac{p^{\alpha-\beta-\gamma}}{1 - p^{\alpha-\beta-\gamma}} = C_5.$$

У випадку $\alpha = 1$, для всіх $\ell \geq 1$ маємо

$$u(p^{\ell+1}) = u_0 + v_0^{(\ell)} + p^{\ell} h(p^{\ell+1}, u(p^{\ell+1})),$$

і з (2.19) випливає, що

$$\begin{aligned}
|v_{0,1}^{(\ell)}| &= \left| \frac{1-p}{p \log p} \int_{|y|_p \leq 1} (\log p^{\ell+1} - \log |y|_p) h(|y|_p, u(|y|_p)) dy \right| \leq \\
&\leq \frac{p-1}{p \log p} M \int_{|y|_p \leq 1} |y|_p^{-\gamma} |\log p^{\ell+1} - \log |y|_p| dy \leq \\
&\leq \frac{p-1}{p \log p} M \left\{ \log p^{\ell+1} \int_{|y|_p \leq 1} |y|_p^{-\gamma} dy - \sum_{n=-\infty}^0 \int_{|y|_p=p^n} |y|_p^{-\gamma} \log |y|_p dy \right\} = \\
&= \frac{p-1}{p \log p} M \left\{ \log p^{\ell+1} \frac{1-p^{-1}}{1-p^{\gamma-1}} - \sum_{n=-\infty}^0 p^{-\gamma n} (1-p^{-1}) p^n \log p^n \right\} = \\
&= \frac{p-1}{p \log p} (1-p^{-1}) M \log p \left\{ (\ell+1) \frac{1}{1-p^{\gamma-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} n p^{-(1-\gamma)n} \right\} = \\
&= \frac{p-1}{p} (1-p^{-1}) M \left\{ \frac{\ell+1}{1-p^{\gamma-1}} + \frac{p^{\gamma-1}}{(1-p^{\gamma-1})^2} \right\} \leq C_7(\ell+1),
\end{aligned}$$

де для обчислення суми використана формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} n p^{-(1-\gamma)n} = \frac{p^{-(1-\gamma)}}{(1-p^{-(1-\gamma)})^2}$$

(див. тотожність 0.231.2 в [69]).

Далі,

$$\begin{aligned}
|v_{0,2}^{(\ell)}| &= \left| \frac{1-p}{p \log p} \int_{p \leq |y|_p \leq p^\ell} (\log p^{\ell+1} - \log |y|_p) h(|y|_p, u(|y|_p)) dy \right| \leq \\
&\leq \frac{p-1}{p \log p} M \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} \int_{|y|_p=p^j} |y|_p^{-\gamma} \log p^{\ell+1} dy + \sum_{j=1}^{\ell} |y|_p^{-\gamma} \log |y|_p \right\} \\
&\leq \frac{p-1}{p \log p} M \log p \left\{ (\ell+1)(1-p^{-1}) \sum_{j=1}^{\ell} p^{(1-\gamma)j} + \sum_{j=1}^{\ell} j p^{(1-\gamma)j} \right\} \leq \\
&\leq C_8(\ell+1) p^{l(1-\gamma)}.
\end{aligned}$$

Припустимо, що розв'язок u отриманий в кулі B_N за допомогою послідовних наближень з теореми 2.3. Тоді для всіх $m \geq N$ маємо

$$\sum_{k=-\infty}^m p^k |u(p^k)| \leq \max_{t \in B_N} |u(t|_p)| \sum_{k=-\infty}^N p^k + \sum_{k=N+1}^m p^k |u(p^k)| < \infty,$$

оскільки функція u неперервна на B_N як рівномірна границя неперервних функцій u_k , $k \geq 0$. Перевіримо умову (2.3) для кожного доданку в (2.39) окремо.

Нехай спочатку $\alpha \neq 1$. Тоді для всіх $m \geq 1$ маємо

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} |u_0(p^\ell)| &= |u_0| \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} < \infty, \\ \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} |v_{0,1}^{(\ell)}| &\leq C_1 \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell + (\ell+1)(\alpha-1)} + C_1 \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} = \\ &= C_1 p^{\alpha-1} \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\ell} + C_1 \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} < \infty. \end{aligned}$$

Нехай тепер $\alpha > 1$. Тоді

$$\sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} |v_{0,2}^{(\ell)}| \leq C_2 C_3 \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} p^{(\ell+1)(\alpha-1)} + C_2 C_5 \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} < \infty.$$

Якщо $0 < \alpha < 1$ та додатково $\beta + \gamma > 1$, то виконується подібна оцінка, а якщо $\beta + \gamma \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} |v_{0,2}^{(\ell)}| &\leq C_2 C_4 \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} p^{(\ell+1)(\alpha-\beta-\gamma)} + C_2 C_5 \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} = \\ &= C_2 C_4 p^{\alpha-\beta-\gamma} \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-(\beta+\gamma)\ell} + C_2 C_5 \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} < \infty. \end{aligned}$$

У випадку $\alpha = 1$ маємо

$$\sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} |v_{0,1}^{(\ell)}| \leq C_7 \sum_{\ell=m}^{\infty} (\ell+1) p^{-\ell} < \infty,$$

$$\sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} |v_{0,2}^{(\ell)}| \leq C_8 \sum_{\ell=m}^{\infty} (\ell+1) p^{-\alpha\ell} p^{(1-\gamma)\ell} = C_8 \sum_{\ell=m}^{\infty} (\ell+1) p^{-\gamma\ell} < \infty.$$

Далі із умови (2.40) випливає, що

$$\sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-\alpha\ell} |f(p^{\ell+1}, u(p^{\ell+1}))| \leq A \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{(\alpha-(\beta+\gamma))(\ell+1)} < \infty.$$

Отже, функція u задовольняє умову (2.2).

Розглянемо тепер функцію h . За Твердженням 2.1, враховуючи умови (2.28), (2.29), отримаємо, що функція h задовольняє першу умову в (2.9)–(2.10). Якщо $\alpha \neq 1$, для $m > 0$ маємо

$$\sum_{\ell=m}^{\infty} |h(p^\ell, u(p^\ell))| \leq A \sum_{\ell=m}^{\infty} p^{-(\beta+\gamma)\ell} < \infty,$$

а для $\alpha = 1$:

$$\sum_{\ell=m}^{\infty} \ell |h(p^\ell, u(p^\ell))| \leq A \sum_{\ell=m}^{\infty} \ell p^{-(\beta+\gamma)\ell} < \infty.$$

□

Теорема 2.5. *За виконання умов (2.38), (2.40), розв'язок рівняння (2.21), отриманий за допомогою послідовних наближень з подальшим продовженням, задовольняє рівняння (2.17).*

Доведення. Із твердження 2.4, леми 2.1, та леми 2.3 випливає, що $D^\alpha u$ існує, $D^\alpha I^\alpha h$ існує та $D^\alpha I^\alpha h = h$. Тому можемо подіяти оператором D^α на рівняння (2.21) і отримати

$$(D^\alpha u)(|t|_p) = D^\alpha u_0 + D^\alpha I^\alpha h(|\cdot|_p, u(|\cdot|_p))(|t|_p),$$

що еквівалентно рівнянню

$$(D^\alpha u)(|t|_p) = h(|\cdot|_p, u(|\cdot|_p))(|t|_p),$$

оскільки D^α дорівнює нулю на сталих функціях.

□

2.7 Висновки до розділу 2

У цьому розділі було досліджено питання розв’язності задачі Коші (2.17)–(2.18) у випадку слабкого виродження, тобто за умови $\gamma < \min(1, \alpha)$. Для цього було досліджено відповідне інтегральне рівняння з оберненим до псевдодиференціального оператора D^α оператором I^α та доведено існування та єдиність його локального розв’язку за допомогою методу послідовних наближень. Також було доведено, що за відповідних умов на нелінійну частину f рівняння (2.17), даний локальний м’який розв’язок можна продовжити на весь простір $\mathbb{Q}_p$. Врешті було встановлено, що за певних умов розв’язок інтегрального рівняння (2.21) розв’язує початкове псевдодиференціальне рівняння (2.17), а також задовольняє початкову умову (2.18).

За результатами цього розділу було опубліковано статтю [1] та тези міжнародних конференцій [4, 5].

3 Псевдодиференціальні рівняння з регулярною особливістю

В теорії звичайних диференціальних рівнянь для розв’язання рівнянь з виродженням часто застосовують метод розкладу аналітичних функцій в степеневий ряд в деякому околі нуля (див., наприклад, монографії [18, 28]). Такий підхід було започатковано Б. Ріманом (див. [49]) та незалежно від нього Л. Фуксом в роботі [23]. При цьому окремо виділяють випадок регулярної особливості, коли порядок виродження збігається з порядком диференціювання. Класичний результат про існування аналітичних розв’язків системи лінійних рівнянь у кратному випадку, коли точка $t = 0$ є особливою, але не обов’язково простою, належить Ф. Леттенмейєру [44].

З іншого боку, оператор D^α є певним p -адичним аналогом дробової похідної Рімана–Ліувілля та Капуто–Джрбашяна (див. [53]). Аналітичні розв’язки дробово-диференціальних рівнянь з регулярною сингулярністю були досліджені у роботі А. Н. Кочубея [39].

Таким чином, природним наступним кроком дослідження є вивчення псевдодиференціальних рівнянь з регулярним виродженням за припущення розкладу функцій в степеневі ряди, чому і присвячений даний розділ дисертації.

У даному розділі розглядаються лінійні рівняння вигляду

$$|t|_p^\alpha (D^\alpha u)(|t|_p) = A(|t|_p)u(|t|_p), \quad (3.1)$$

де функція A розкладається у ряд вигляду

$$A(|t|_p) = \sum_{N=0}^{\infty} A_N |t|_p^{\beta N},$$

$A_N \in \mathbb{C}$, $\beta > 0$, і для деяких $M, \mu > 0$ має місце оцінка:

$$|A_N| \leq M\mu^N, \quad N \geq 0. \quad (3.2)$$

Припустимо, що функція u розкладається у формальний ряд вигляду

$$u(|t|_p) = \sum_{N=0}^{\infty} u_N |t|_p^{\beta N}, \quad u_N \in \mathbb{C}. \quad (3.3)$$

Підставляючи ряд (3.3) формально у рівняння (3.1), з урахуванням формули (1.33), у випадку $\alpha \neq \beta N$, $N \geq 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} |t|_p^\alpha \sum_{N=0}^{\infty} u_N D^\alpha(|t|_p^{\beta N}) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k |t|_p^{\beta k} \right) \left(\sum_{N=0}^{\infty} u_N |t|_p^{\beta N} \right), \\ \sum_{N=0}^{\infty} u_N \frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} |t|_p^{\beta N} &= \sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^N A_k u_{N-k} \right) |t|_p^{\beta N}. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $|t|_p^N$, маємо

$$\frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} u_N = \sum_{k=0}^N A_k u_{N-k}, \quad N \geq 0,$$

або еквівалентно, оскільки при $N = 0$ маємо $\Gamma_p(1) = \frac{1 - p^0}{1 - p^{-1}} = 0$,

$$0 = A_0 u_0, \quad (3.4)$$

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right] u_N = - \sum_{k=1}^N A_k u_{N-k}, \quad N \geq 1. \quad (3.5)$$

Означення 3.1. Будемо називати ряд (3.3) *формальним розв'язком* рівняння (3.1), якщо виконуються співвідношення (3.4), (3.5).

Розглянемо спочатку випадок, коли у розкладі правої частини рівняння (3.1) виконується $A_0 = 0$.

Теорема 3.1. *Нехай $A_0 = 0$. Якщо ряд (3.3) є формальним розв'язком рівняння (3.1), то ряд (3.3) є локально абсолютно збіжним.*

Доведення. Нехай $A_0 = 0$. Тоді рівняння (3.4) виконується для будь-якого $u_0 \in \mathbb{C}$.

Із рівняння (1.34) маємо

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} &= \frac{1 - p^{\beta N}}{1 - p^{-(\beta N + 1)}} \cdot \frac{1 - p^{-(\beta N - \alpha + 1)}}{1 - p^{\beta N - \alpha}} = \\ &= \frac{p^{\beta N}(p^{-\beta N} - 1)}{1 - p^{-(\beta N + 1)}} \cdot \frac{1 - p^{-(\beta N - \alpha + 1)}}{p^{\beta N}(p^{-\beta N} - p^{-\alpha})} = \\ &= \frac{p^{-\beta N} - 1}{1 - p^{-(\beta N + 1)}} \cdot \frac{1 - p^{-(\beta N - \alpha + 1)}}{p^{-\beta N} - p^{-\alpha}} \sim \frac{-1}{-p^{-\alpha}} = p^{\alpha},\end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$.

Тому існує $N_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для деякого $C > 0$ виконується

$$\left| \left[\frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right]^{-1} \right| \leq Cp^{-\alpha}, \quad N \geq N_0. \quad (3.6)$$

Розглядаючи, якщо необхідно, $\lambda u(|t|_p)$ замість $u(|t|_p)$, при достатньо малому $|\lambda|$, можна припустити, що $|u_0| \leq 1$.

Виберемо $r > 0$ настільки великим, щоб виконувалось $|u_N| \leq r^N$ для $N \leq N_0$ та

$$CMp^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{r}\right)^k \leq 1. \quad (3.7)$$

Тоді за індукцією маємо

$$|u_N| \leq r^N, \quad N \geq 0. \quad (3.8)$$

Дійсно, припустимо, що (3.8) виконується для деякого $N \geq N_0$. Із рівняння (3.5) для $N + 1$ маємо співвідношення

$$u_{N+1} = - \left[\frac{\Gamma_p(\beta(N + 1) + 1)}{\Gamma_p(\beta(N + 1) - \alpha + 1)} \right]^{-1} \sum_{k=1}^{N+1} A_k u_{N+1-k}.$$

Тоді із (3.2), (3.6) та (3.7) випливає оцінка

$$\begin{aligned}|u_{N+1}| &\leq \left| \left[\frac{\Gamma_p(\beta(N + 1) + 1)}{\Gamma_p(\beta(N + 1) - \alpha + 1)} \right]^{-1} \right| \left| \sum_{k=1}^{N+1} A_k u_{N+1-k} \right| \leq \\ &\leq CMp^{-\alpha} \sum_{k=1}^{N+1} \mu^k r^{N+1-k} = CMp^{-\alpha} r^{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} \left(\frac{\mu}{r}\right)^k \leq r^{N+1}.\end{aligned}$$

Оскільки радіус збіжності R степеневого ряду (3.3) дорівнює (див. [50], твердження 6.1)

$$R^{-1} = \limsup_{N \rightarrow \infty} |u_N|^{1/N},$$

то із (3.8) випливає, що ряд (3.3) збігається абсолютно при $|t|_p \leq r^{-1}$. $\square$

Припустимо, що ряд (3.3) є формальним розв'язком рівняння (3.1). Проаналізуємо систему (3.4)–(3.5).

Із рівняння (3.4) випливає, що або $A_0 = 0$, або $u_0 = 0$, тому потрібно розглянути два випадки.

Випадок (1). Якщо $A_0 = A_0^{(1)} = 0$, то u_0 можемо вибрати довільне. Тоді із рівняння (3.5) випливає, що коефіцієнти u_N , $N \geq 1$, задовольняють співвідношення

$$u_N = u_N^{(1)} = - \left[\frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right]^{-1} \sum_{k=1}^N A_k u_{N-k}, \quad N \geq 1,$$

і за Теоремою 3.1 ряд (3.3) є локально абсолютно збіжним.

Випадок (2). Якщо $u_0 = 0$, то $A_0 \neq 0$ можемо вибрати довільне. Тоді із рівняння (3.5) для $N = 1$ маємо

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(\beta + 1)}{\Gamma_p(\beta - \alpha + 1)} \right] u_1 = -A_1 u_0 = 0.$$

Отже, випадок (2) розпадається на два варіанти: або

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(\beta + 1)}{\Gamma_p(\beta - \alpha + 1)} \right] = 0,$$

або

$$u_1 = 0.$$

Варіант (21). Якщо $A_0 = A_0^{(21)} = \frac{\Gamma_p(\beta + 1)}{\Gamma_p(\beta - \alpha + 1)}$, та $u_0 = 0$ (що випливає з попередніх умов), тоді u_1 довільне. У цьому випадку рівняння (3.5) при $N = 1$ має вигляд тотожності, а рівняння (3.5) для $N \geq 2$

записуються у вигляді

$$\left[\frac{\Gamma_p(\beta + 1)}{\Gamma_p(\beta - \alpha + 1)} - \frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right] u_N = \sum_{k=1}^{N-1} A_k u_{N-k}.$$

Звідси коефіцієнти u_N ряду (3.3) задовольняють співвідношення

$$u_N^{(21)} = - \left[\frac{\Gamma_p(\beta + 1)}{\Gamma_p(\beta - \alpha + 1)} - \frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right]^{-1} \sum_{k=1}^{N-1} A_k u_{N-k}, \quad N \geq 2.$$

Оскільки $\frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \sim p^\alpha$, $N \rightarrow \infty$ (див. (3.6)), то існує $N_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для деякого $C > 0$ виконується оцінка

$$\left| \left[\frac{\Gamma_p(\beta + 1)}{\Gamma_p(\beta - \alpha + 1)} - \frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right]^{-1} \right| \leq C \left| \frac{\Gamma_p(\beta + 1)}{\Gamma_p(\beta - \alpha + 1)} - p^\alpha \right|^{-1},$$

при $N \geq N_0$.

Тоді, аналогічно до доведення теореми 3.1, можна обрати $r > 0$ таке, що $|u_N| \leq r^N$ для $N \leq N_0$ та

$$CM \left| \frac{\Gamma_p(\beta + 1)}{\Gamma_p(\beta - \alpha + 1)} - p^\alpha \right|^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{r} \right)^k \leq 1.$$

Тоді за індукцією доводиться, що

$$|u_N| \leq r^N, \quad N \geq 0,$$

і звідси випливає, що формальний ряд (3.3) є абсолютно збіжним для

$$|t|_p \leq r^{-1}.$$

Варіант (22). Якщо $A_0 \notin \{A_0^{(1)}, A_0^{(21)}\}$ довільне, то $u_0 = u_1 = 0$. Тоді із рівняння (3.5) для $N = 2$ маємо

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(2\beta + 1)}{\Gamma_p(2\beta - \alpha + 1)} \right] u_2 = -A_1 u_0 - A_2 u_0 = 0.$$

Отже, цей варіант розбивається ще на два варіанти: або

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(2\beta + 1)}{\Gamma_p(2\beta - \alpha + 1)} \right] = 0,$$

або

$$u_2 = 0.$$

Випадок (221). Якщо $A_0 = A_0^{(221)} = \frac{\Gamma_p(2\beta + 1)}{\Gamma_p(2\beta - \alpha + 1)}$, та з попередніх умов $u_0 = u_1 = 0$, тоді u_2 довільне. У цьому випадку із рівнянь (3.5) отримаємо, що коефіцієнти u_N задовольняють співвідношення

$$u_N = u_N^{(221)} = - \left[\frac{\Gamma_p(2\beta + 1)}{\Gamma_p(2\beta - \alpha + 1)} - \frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right]^{-1} \sum_{k=1}^{N-2} A_k u_{N-k},$$

$$N \geq 3.$$

Випадок (222). $A_0 \notin \{A_0^{(1)}, A_0^{(21)}, A_0^{(221)}\}$ довільне, $u_0 = u_1 = u_2 = 0$. Тоді із рівняння (3.5) для $N = 3$ випливає співвідношення

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(3\beta + 1)}{\Gamma_p(3\beta - \alpha + 1)} \right] u_3 = -A_1 u_2 - A_2 u_1 - A_3 u_0 = 0.$$

Тоді або

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(3\beta + 1)}{\Gamma_p(3\beta - \alpha + 1)} \right] = 0,$$

або

$$u_3 = 0.$$

Продовжуючи цю процедуру, на m -му кроці отримаємо наступні два варіанти.

Варіант (2...21). (Тут в індексі стоять m двійок, та одиниця на $m+1$ -му місці).

$A_0^{(2\cdots 21)} = \frac{\Gamma_p(\beta m + 1)}{\Gamma_p(\beta m - \alpha + 1)}$, $u_0 = \cdots = u_{m-1} = 0$, u_m довільне. Тоді із (3.5) маємо

$$u_N = u_N^{(2\cdots 21)} = - \left[\frac{\Gamma_p(\beta m + 1)}{\Gamma_p(\beta m - \alpha + 1)} - \frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right]^{-1} \sum_{k=1}^{N-m} A_k u_{N-k},$$

$$N \geq m + 1.$$

Варіант (2...22). (Тут в індексі стоять $m+1$ двійка).

$A_0 \notin \{A_0^{(1)}, A_0^{(21)}, \dots, A_0^{(2\dots 21)}\}$ довільне, $u_0 = \dots = u_m = 0$. Із рівняння (3.5) для $N = m + 1$ маємо

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(\beta m + 1)}{\Gamma_p(\beta m - \alpha + 1)} \right] u_{m+1} = 0.$$

Продовжуючи цю процедуру, отримаємо наступний результат.

Теорема 3.2. 1. Нехай $A_0 = \frac{\Gamma_p(\beta m + 1)}{\Gamma_p(\beta m - \alpha + 1)}$ для деякого цілого $m \geq 1$. Якщо ряд (3.3) є формальним розв'язком рівняння (3.1), то ряд (3.3) є локально абсолютно збіжним, та його коефіцієнти u_N , $N \geq 0$, задовольняють співвідношення

$$u_0 = \dots = u_{m-1} = 0, \quad (3.9)$$

$$u_N = - \left[\frac{\Gamma_p(\beta m + 1)}{\Gamma_p(\beta m - \alpha + 1)} - \frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right]^{-1} \sum_{k=1}^{N-m} A_k u_{N-k}, \quad (3.10)$$

$N \geq m + 1$, для деякого $u_m \in \mathbb{C}$.

2. Якщо $A_0 \neq 0$ та $A_0 \neq \frac{\Gamma_p(\beta m + 1)}{\Gamma_p(\beta m - \alpha + 1)}$ для жодного цілого $m \geq 1$, то рівняння (3.1) має лише нульовий розв'язок $u \equiv 0$.

Доведення. 1. Із рівняння (3.4) випливає, що $u_0 = 0$. Виписуючи по-слідовно рівняння (3.5) для $N \geq 1$, отримаємо

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(\beta + 1)}{\Gamma_p(\beta - \alpha + 1)} \right] u_1 = -A_1 u_0 = 0,$$

...

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(\beta(m-1) + 1)}{\Gamma_p(\beta(m-1) - \alpha + 1)} \right] u_{m-1} =$$

$$= -A_1 u_{m-2} - A_2 u_{m-3} - \dots - A_{m-1} u_0 = 0,$$

$$0 \cdot u_m = -A_1 u_{m-1} - A_2 u_{m-2} - \dots - A_m u_0 = 0,$$

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right] u_N = - \sum_{k=1}^{N-m} A_k u_{N-k}, \quad n \geq m + 1.$$

Звідси випливають співвідношення (3.9), (3.10).

Оскільки $\frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \sim p^\alpha$, $N \rightarrow \infty$ (див. (3.6)), то існує $N_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для деякого $C > 0$ виконується оцінка

$$\left| \left[\frac{\Gamma_p(\beta m + 1)}{\Gamma_p(\beta m - \alpha + 1)} - \frac{\Gamma_p(\beta N + 1)}{\Gamma_p(\beta N - \alpha + 1)} \right]^{-1} \right| \leq CC_1(m),$$

при $N \geq N_0$, де

$$C_1(m) = \left| \frac{\Gamma_p(\beta m + 1)}{\Gamma_p(\beta m - \alpha + 1)} - p^\alpha \right|^{-1}.$$

Припустимо, що $|u_0| \leq 1$.

Виберемо $r > 0$ настільки великим, щоб виконувалось $|u_N| \leq r^N$ для $N \leq N_0$ та

$$C_1(m)M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{r}\right)^k \leq 1.$$

Тоді за індукцією маємо

$$|u_N| \leq r^N, \quad N \geq m + 1.$$

Звідси випливає, що ряд (3.3) збігається абсолютно при $|t|_p \leq r^{-1}$.

2. Доведемо за індукцією, що $u_N = 0$ для будь-якого $N \geq 0$.

При $N = 0$ рівність випливає із рівняння (3.4), оскільки $A_0 \neq 0$.

Припустимо, що $u_0 = u_1 = \dots = u_i = 0$ для деякого $i \geq 1$. Запишемо рівняння (3.5) для $N = i + 1$.

$$\left[A_0 - \frac{\Gamma_p(\beta(i+1) + 1)}{\Gamma_p(\beta(i+1) - \alpha + 1)} \right] u_{i+1} = - \sum_{k=1}^{i+1} A_k u_{i+1-k}.$$

Оскільки сума в правій частині дорівнює нулю, та

$$A_0 \neq \frac{\Gamma_p(\beta(i+1) + 1)}{\Gamma_p(\beta(i+1) - \alpha + 1)},$$

звідси випливає, що $u_{i+1} = 0$.

□

3.1 Висновки до розділу 3

У даному розділі було розглянуто випадок псевдодиференціального лінійного рівняння з сильнішою особливістю, ніж у розділі 2, а саме у випадку $\gamma = \alpha$. За припущень, що права частина A рівняння (3.1) допускає розклад у ряд за степенями $|t|_p$, було знайдено розв'язок у вигляді формального степеневого ряду та доведено його локальну абсолютну збіжність за певних умов на коефіцієнти ряду (3.2).

Даний результат було опубліковано у роботі [2] та тезах конференції [6].

4 Фундаментальний Розв'язок Нового Класу Нархімедових Псевдодиференціальних Рівнянь

Важливим напрямком p -адичної математичної фізики є побудова аналогу теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних в p -адичному випадку.

Перший крок було зроблено в роботі А. Н. Кочубея [38], де було розглянуто p -адичний аналог рівняння хвильового типу із p -адичними як просторовою, так і часовою змінними

$$D_t^\alpha u - D_x^{\alpha,n} u = 0, \quad (4.1)$$

де було доведено існування та єдиність розв'язку, скінченність області залежності від просторової змінної, а також принцип Гюйгенса.

З іншого боку, для параболічної задачі Коші з оператором $D^{\alpha,n}$ у випадку дійсного часу вперше А. Н. Кочубеєм (див., наприклад [37, лема 4.1]), а пізніше й іншими авторами [68, теорема 32] було доведено оцінку на фундаментальний розв'язок параболічного рівняння вигляду:

$$|Z(x, t)| \leq Ct \left(|x|_p + t^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{-\alpha-n}, \quad (4.2)$$

що має степеневу поведінку.

У даному розділі розглянуто більш загальне рівняння із p -адичним часом

$$D_{|t|_p}^\alpha u(t, x) - D_x^{\beta,n} u(t, x) = 0, \quad \beta = K\alpha \text{ для деякого } K \in \mathbb{N}.$$

Використовуючи деякі методи [38, 40], зокрема ідею радіальної залежності часової змінної, а також простори Лізоркіна основних та узагальнених функцій, доведено існування та єдиність розв'язків відповідної задачі Коші, а також знайдено оцінку на фундаментальний розв'язок відповідного рівняння (теорема 4.2), яка є аналогом оцінки (4.2), але при цьому часова змінна є p -адичною. Крім того, доведено властивість скінченної залежності та L^1 -оцінку розв'язку задачі Коші.

4.1 Радіальні власні функції оператора D^α

Нехай $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Розглянемо задачу на власні значення та власні функції

$$D^\alpha u = \lambda u, \quad \lambda = p^{\beta N}, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad (4.3)$$

де $u : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ не тотожно нульова.

Будемо також припускати, що

$$\beta = K\alpha \text{ для деякого } K \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Твердження 4.1. *Якщо умова (4.4) виконується, то рівняння (4.3) має множину розв'язків в просторі $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ наступного вигляду для кожного $N \in \mathbb{Z}$:*

$$u_N(t) = \begin{cases} C_N p^{KN} (1 - \frac{1}{p}), & |t|_p \leq p^{-KN}; \\ -C_N p^{KN-1}, & |t|_p = p^{-KN+1}; \\ 0, & |t|_p \geq p^{-KN+2}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Доведення. Застосуємо перетворення Фур'є до обох сторін рівняння (4.3) і отримаємо

$$(|\eta|_p^\alpha - p^{\beta N})(\mathcal{F}_{t \rightarrow \eta} u)(\eta) = 0, \quad \text{для всіх } \eta \in \mathbb{Q}_p. \quad (4.6)$$

Введемо позначення

$$\tilde{u}(\eta) = (\mathcal{F}_{t \rightarrow \eta} u)(\eta), \quad \eta \in \mathbb{Q}_p.$$

Із співвідношення (4.6) випливає, що рівність $\tilde{u}(\eta) \equiv 0$ не буде виконуватись лише у тому випадку, коли умова $|\eta|_p^\alpha = p^{\beta N}$ виконується. Оскільки p -адична норма $|\eta|_p$ може приймати лише зліченну кількість значень p^K , то ця умова еквівалентна $|\eta|_p = p^{KN}$, де $K \in \mathbb{N}$ таке, що $\beta = K\alpha$. Ця умова виконується за припущенням (4.4).

Зауважимо, що якщо умова (4.4) не виконується, то рівняння (4.3) має лише тотожно нульовий розв'язок.

Оскільки u є радіальною функцією відносно змінної t , то $\tilde{u}$ теж є радіальною функцією відносно η (див. [37] формула (1.28), ст.15). Звідси маємо

$$\tilde{u}_N(|\eta|_p) = \begin{cases} C_N, & |\eta| = p^{KN}; \\ 0, & |\eta| \neq p^{KN}, \end{cases} \quad C_N \neq 0. \quad (4.7)$$

За формулою обернення для перетворення Фур'є (1.11), а також відомою формулою інтегрування (3.2), маємо

$$\begin{aligned} u_N(|t|_p) &= (\mathcal{F}_{\eta \rightarrow t}^{-1} \tilde{u}_N)(t) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(-t\eta) \tilde{u}_N(\eta) d\eta = \int_{S_{KN}} \chi_p(-t\eta) C_N d\eta = \\ &= \begin{cases} C_N p^{KN} (1 - \frac{1}{p}), & |t|_p \leq p^{-KN}; \\ -C_N p^{KN-1}, & |t|_p = p^{-KN+1}; \\ 0, & |t|_p \geq p^{-KN+2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Із (4.8) випливає, що функція u_N належить простору $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ для всіх $N \in \mathbb{Z}$. Дійсно, для будь-якого N функція u_N є локально сталою з показником локальної сталості $\ell = -KN$. Крім того, носій $\text{supp } u_N = B_{-KN+1}$ є компактною множиною. Отже, $u \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$.

Використовуючи формули інтегрування (1.4), (1.5), маємо

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}_p} u_N(|t|_p) dt &= \int_{B_{-KN}} C_N p^{KN} (1 - \frac{1}{p}) dt - \int_{S_{-KN+1}} C_N p^{KN-1} dt = \\ &= C_N p^{KN} (1 - \frac{1}{p}) p^{-KN} - C_N p^{KN-1} (1 - \frac{1}{p}) p^{-KN-1} = 0. \end{aligned}$$

Тому із леми 1.4 випливає, що $u_N \in \Phi(\mathbb{Q}_p)$. □

Зауваження 4.1. Якщо $\lambda \neq p^{\beta N}$ для жодного $N \in \mathbb{Z}$, то із співвідношення (4.8) випливає, що функція u є тотожно нульовою. Звідси випливає, що всі власні числа оператора D^α мають вигляд $\lambda \neq p^{\beta N}$.

Означення 4.1. Узагальненим розв'язком рівняння (4.3) будемо називати таку узагальнену функцію $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$, що для будь-якої основної

функції $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ виконується

$$\langle u, D^\alpha \varphi \rangle = \lambda \langle u, \varphi \rangle,$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ розуміється в сенсі означення 1.8. (Загальне означення та властивості узагальнених розв'язків див. в [60], III.11.1).

Твердження 4.2. *Якщо радіальна функція $u \in \Phi'(\mathbb{Q}_p)$ задовольняє рівняння (4.3), то вона співпадає, для деякого $C_N \in \mathbb{C}$, із функцією (4.40).*

Доведення. Доведення проводиться аналогічно доведенню твердження 1 із [38].

За означенням узагальненого розв'язку, маємо

$$\langle u, D^\alpha \varphi \rangle = \lambda \langle u, \varphi \rangle \text{ для всіх } \varphi \in \Phi(\mathbb{Q}_p).$$

За означенням простору Лізоркіна, функція φ має зображення $\varphi = \mathcal{F}^{-1}\psi$ для деякої основної функції $\psi \in \Psi(\mathbb{Q}_p)$. Звідси маємо

$$(D^\alpha \varphi)(t) = \mathcal{F}_{\eta \rightarrow t}^{-1}(|\eta|_p^\alpha \psi(\eta)).$$

Функція $\eta \rightarrow |\eta|_p^\alpha \psi(\eta)$ належить простору $\Psi(\mathbb{Q}_p)$. Отже, розглядаючи перетворення Фур'є $\mathcal{F}$ як оператор з $\Phi'(\mathbb{Q}_p)$ в $\Psi'(\mathbb{Q}_p)$, отримаємо

$$\langle u, D^\alpha \varphi \rangle = \langle (\mathcal{F}u)(\eta), |\eta|_p^\alpha \psi(\eta) \rangle = \langle |\eta|_p^\alpha (\mathcal{F}u)(\eta), \psi(\eta) \rangle,$$

тому маємо рівність (4.6), у якій $\tilde{u} = \mathcal{F}_{t \rightarrow \eta}(u) \in \Psi'(\mathbb{Q}_p)$, та множення на $|\eta|_p^\alpha - p^{\beta N}$ розуміються у сенсі узагальнених функцій. Отже, для будь-якої функції $\psi \in \Psi(\mathbb{Q}_p)$,

$$\langle (\tilde{u})(\eta), (|\eta|_p^\alpha - p^{\beta N})\psi(\eta) \rangle = 0.$$

На сфері $S_L = \{t \in \mathbb{Q}_p : |t|_p = p^L\}$, $L \neq KN$, множина функцій $\eta \mapsto (|\eta|_p^\alpha - p^{\beta N})\psi(\eta)$ проходить множину звужень всіх функцій $\Psi(\mathbb{Q}_p)$. Отже, звуження узагальненої функції $\tilde{u}$ на таку сферу дорівнює нулю, так що $\tilde{u}$ сконцентрована на сфері S_{KN} .

Множина звужень на сфері S_{KN} функцій з $\Psi(K)$ збігається з

$$\mathcal{D}(S_{KN}) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathcal{D}_\ell(S_{KN}),$$

де простір $\mathcal{D}_\ell(S_{KN})$ скінченно-вимірний; його базис можна побудувати з функцій $\delta_{\sigma_0, \dots, \sigma_{KN+\ell-1}}(t)$ ($\sigma_0, \dots, \sigma_{KN+\ell-1} \in S$, $\sigma_0 \notin P$, які дорівнюють 1 на елементах $t \in S_{KN}$ з канонічними зображеннями

$$t = p^{-KN}(\sigma_0 + \sigma_1 p + \dots + \sigma_{KN+\ell-1}) + O(p^\ell),$$

та дорівнюють 0 на всіх інших $t \in S_{KN}$.

Позначимо

$$C_{\sigma_0, \dots, \sigma_{KN+\ell-1}} = \langle \tilde{u}, \delta_{\sigma_0, \dots, \sigma_{KN+\ell-1}} \rangle.$$

Відношення довільних двох елементів

$$p^{-KN}(\sigma_0 + \sigma_1 p + \dots + \sigma_{KN+\ell-1})$$

належить групі одиниць $U = \{t \in \mathbb{Q}_p : |t|_p = 1\}$. Перетворення однієї з функцій $\delta_{\sigma_0, \dots, \sigma_{KN+\ell-1}}$ в іншу (з таким самим показником сталості ℓ) реалізовується за допомогою множення аргументу на відповідне відношення. Оскільки $\tilde{u}$ є радіальною узагальненою функцією, отримаємо, що $C_{\sigma_0, \dots, \sigma_{KN+\ell-1}}$ залежить тільки від ℓ , тобто

$$C_{\sigma_0, \dots, \sigma_{KN+\ell-1}} = C'_{\ell-1}.$$

В той же час,

$$\sum_{\sigma_{KN+\ell}} \delta_{\sigma_0, \dots, \sigma_{KN+\ell-1}} = \delta_{\sigma_0, \dots, \sigma_{KN+\ell-1}},$$

звідки $C'_{\ell-1} = p C'_\ell$ та $C'_\ell = C'_0 p^{-\ell}$, $C_0 \in \mathbb{C}$. Отже,

$$\langle \tilde{u}, \delta_{\sigma_0, \dots, \sigma_{KN+\ell}} \rangle = C'_0 p^{-\ell} \quad (4.9)$$

для всіх ℓ .

Водночас, інтеграл

$$\int_{S_{KN}} \delta_{\sigma_0, \dots, \sigma_{KN+\ell}}(t) dt$$

дорівнює $p^{KN-(KN+1)-1} = p^{-\ell-1}$. Враховуючи рівність (4.9), звідси випливає, що звуження узагальненої функції $\tilde{u}$ на сферу S_{KN} є сталою функцією, а за межами сфери S_{KN} , $\tilde{u}$ дорівнює нулю. Отже, функція $\tilde{u}$ має вигляд (4.7), тому u збігається з функцією (4.40). $\square$

4.2 Існування розв'язків задачі Коші

Нехай $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n \geq 1$. Будемо розглядати задачу Коші

$$D_{|t|_p}^\alpha u(|t|_p, x) - D_x^{\beta, n} u(|t|_p, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n, \quad (4.10)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (4.11)$$

де $u : \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n \rightarrow \mathbb{C}$ — радіальна функція відносно $t \in \mathbb{Q}_p$.

Теорема 4.1. *Нехай $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такі, що умова (4.4) виконується. Припустимо, що функція $u_0 \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$.*

Тоді задача Коші (4.10)–(4.11) має розв'язок $u = u(|t|_p, x)$, радіальний за t . Більш того, цей розв'язок належить простору $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ для всіх фіксованих $x \in \mathbb{Q}_p^n$, та належить простору $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ для кожного $t \in \mathbb{Q}_p$.

Якщо умова (4.4) не виконується, то рівняння (4.10) має лише тривіально нульовий розв'язок $u(t, x) \equiv 0$, $(t, x) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n$.

Доведення. Припустимо, що $u_0 \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$. Будемо шукати розв'язок задачі, який належить $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ і є радіальним по t , для кожного фіксованого $x \in \mathbb{Q}_p^n$, і належить $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ по x , для кожного фіксованого $t \in \mathbb{Q}_p$.

Розглянемо задачу Коші (4.10)–(4.11). Застосуємо перетворення Фур'є відносно змінної x до обох сторін (4.10) і отримаємо

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} D_{|t|_p}^\alpha u(|t|_p, \xi) - |\xi|_p^\beta \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u(|t|_p, \xi) = 0, \quad (t, \xi) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n. \quad (4.12)$$

Припустимо, що функція $v(|t|_p, \xi)$, $(t, \xi) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n$ є розв'язком рівняння (4.12). Тоді функція $u = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} v$ розв'язує (4.10). Отже, ми будемо шукати розв'язок рівняння (4.12).

Введемо позначення

$$\widehat{u}(|t|_p, \xi) := \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u(|t|_p, \xi), \quad (t, \xi) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p.$$

Тоді рівняння (4.12) можна переписати у вигляді

$$D_{|t|_p}^\alpha \widehat{u}(|t|_p, \xi) = |\xi|_p^\beta \widehat{u}(|t|_p, \xi), \quad (t, \xi) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n. \quad (4.13)$$

Задача (4.13) є задачею на радіальні власні функції оператора $D_{|t|_p}^\alpha$. Позначимо $|\xi|_p = p^N$, $N \in \mathbb{Z}$. Із твердження 4.1 випливає, що всі розв'язки рівняння (4.13) мають вигляд

$$\widehat{u}_N(|t|_p, \xi) = \begin{cases} C_N(\xi) p^{KN} (1 - \frac{1}{p}), & |t|_p \leq p^{-KN}; \\ -C_N(\xi) p^{KN-1}, & |t|_p = p^{-KN+1}; \\ 0, & |t|_p \geq p^{-KN+2}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Із початкової умови (4.11) випливає, що

$$\widehat{u}_N(0, \xi) = \widehat{u}_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (4.15)$$

де

$$\widehat{u}_0(|t|_p, \xi) := \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u_0(|t|_p, \xi), \quad (t, \xi) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p.$$

Підставляючи (4.14) в (4.15), отримаємо

$$\widehat{u}_N(0, \xi) = C_N(\xi) p^{KN} (1 - \frac{1}{p}) = \widehat{u}_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Отже,

$$C_N(\xi) = p^{-KN} (1 - \frac{1}{p})^{-1} \widehat{u}_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Врешті отримаємо наступний розв'язок рівняння (4.13)

$$\widehat{u}_N(|t|_p, \xi) = \begin{cases} \widehat{u}_0(\xi), & |t|_p \leq p^{-KN}; \\ -\frac{1}{p-1} \widehat{u}_0(\xi), & |t|_p = p^{-KN+1}; \\ 0, & |t|_p \geq p^{-KN+2}, \end{cases} \quad (t, \xi) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n, \quad |\xi|_p = p^N. \quad (4.16)$$

Позначимо

$$b_N(|t|_p, |\xi|_p) = \begin{cases} 1, & |t|_p \leq p^{-KN}; \\ -\frac{1}{p-1}, & |t|_p = p^{-KN+1}; \\ 0, & |t|_p \geq p^{-KN+2}, \end{cases} \quad (t, \xi) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n, \quad |\xi|_p = p^N. \quad (4.17)$$

або, еквівалентно,

$$b_N(|t|_p, |\xi|_p) = \begin{cases} 1, & |t|_p \leq |\xi|_p^{-K}; \\ -\frac{1}{p-1}, & |t|_p = p|\xi|_p^{-K}; \\ 0, & |t|_p \geq p^2|\xi|_p^{-K}, \end{cases} \quad (t, \xi) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n, \quad |\xi|_p = p^N. \quad (4.18)$$

Оскільки ми визначили функції $\hat{u}_N$ та b_N на кожній зі сфер S_N^n , $N \in \mathbb{Z}$, та вони є радіальними за обома аргументами, то ми можемо визначити $\hat{u}$ та b всьому простору $\mathbb{Q}_p^n$ наступним чином:

$$\hat{u}(|t|_p, \xi) \upharpoonright_{S_N^n} = b_N(|t|_p, |\xi|_p) \hat{u}_0(\xi), \quad t \in \mathbb{Q}_p, \quad \xi \in S_N^n, \quad (4.19)$$

$$b(|t|_p, |\xi|_p) \upharpoonright_{S_N^n} = b_N(|t|_p, |\xi|_p), \quad t \in \mathbb{Q}_p, \quad \xi \in S_N^n. \quad (4.20)$$

Оскільки $u_0 \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$, то $\hat{u}_0 \in \Psi(\mathbb{Q}_p^n)$ за означенням просторів Лізоркіна. Тому $\hat{u}(0) = 0$, і з локальної сталості функції $\hat{u}_0$ випливає, що вона дорівнює нулю на деякому околі початку координат. Тоді із (4.19) випливає, що

$$\hat{u}(\xi) = 0$$

на деякому околі нуля, а також функція $\hat{u}$ є локально сталою. Отже, $\hat{u} \in \Psi(\mathbb{Q}_p^n)$ за змінною ξ , і звідси $u \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ за змінною x . Крім того, функції $u, \hat{u}$ належать простору $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ рівномірно в сенсі носія та локальної сталості відносно x . Тому зміна порядку операцій є коректною (зокрема, операції застосування перетворення Фур'є $\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}$ та оператора $D_{|t|_p}^\alpha$ у рівнянні (4.12) можна робити у зворотному порядку. Це випливає з p -адичного аналогу теореми Фубіні 1.2).

Використовуючи зворотне перетворення Фур'є та враховуючи, що перетворення Фур'є від добутку двох функцій дорівнює згортці відповідних перетворень Фур'є (див. [58], I.7.5, Теорема), отримаємо наступний розв'язок рівняння (4.10)

$$\begin{aligned} u(|t|_p, x) &= (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \widehat{u})(|t|_p, x) = \\ &= \left((\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} b) * u_0 \right) (|t|_p, x), \quad (t, x) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n, \end{aligned} \quad (4.21)$$

який належить простору $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ відносно змінної x для кожного $t \in \mathbb{Q}_p$, і задовольняє початкову умову (4.11).

Із твердження 4.1 та твердження 4.2 випливає, що якщо умова (4.4) не виконується, то рівняння (4.10) має тільки нульовий розв'язок, тому якщо початкова функція u_0 в (4.11) не тотожно нульова, то задача Коші (4.10)-(4.11) не має розв'язків. $\square$

4.3 Явна формула та оцінка фундаментального розв'язку

Даний підрозділ присвячений побудові явного виразу для фундаментального розв'язку задачі (4.10)-(4.11)

$$Z_t(x) := (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} b)(|t|_p, |x|_p), \quad t \in \mathbb{Q}_p, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n,$$

знайденого в доведенні теореми 4.1, та знаходження його оцінки в термінах змінних $|t|_p, x$.

За означенням оберненого перетворення Фур'є маємо

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} b)(|t|_p, |x|_p) &= \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(-\xi \cdot x) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} b(|t|_p, p^j) \int_{S_j^n} \chi_p(-\xi \cdot x) d\xi. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Позначимо $|x|_p = p^{m_0}$ для деякого $m_0 \in \mathbb{Z}$ і застосуємо формулу (1.8),

тоді

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}b)(|t|_p, |x|_p) &= (1 - p^{-n}) \sum_{j=-\infty}^{-m_0} b(|t|_p, p^j) p^{jn} - b(|t|_p, p^{-m_0+1}) p^{-m_0n} = \\
&= (1 - p^{-n}) \sum_{j=0}^{\infty} b(|t|_p, p^{-j-m_0}) p^{(-j-m_0)n} - b(|t|_p, p^{-m_0+1}) p^{-m_0n} = \\
&= (1 - p^{-n}) |x|_p^{-n} \sum_{j=0}^{+\infty} p^{-jn} b(|t|_p, p^{-j} |x|_p^{-1}) - |x|_p^{-n} b(|t|_p, p |x|_p^{-1}).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови теореми 4.1, $Z_t(x)$, $(t, x) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p^n$, — фундаментальний розв'язок задачі (4.10)–(4.11), $K \geq 2$.*

Якщо $|t|_p > |x|_p^K$, то

$$|Z_t(x)| \leq 2^{K+n} C |t|_p \left(|x|_p + |t|_p^{\frac{1}{K}} \right)^{-K-n}. \tag{4.24}$$

Якщо $p^{-K+1} |x|_p^K \leq |t|_p \leq |x|_p^K$, то

$$|Z_t(x)| \leq C_1 |x|_p^{-n}. \tag{4.25}$$

Якщо $|t|_p \leq p^{-K} |x|_p^K$, то

$$Z_t(x) = 0. \tag{4.26}$$

Доведення. Із (4.23) маємо

$$\begin{aligned}
Z_t(x) &= (1 - p^{-n}) |x|_p^{-n} \sum_{j=0}^{+\infty} p^{-jn} b(|t|_p, p^{-j} |x|_p^{-1}) - \\
&\quad - |x|_p^{-n} b(|t|_p, p |x|_p^{-1}) =: I_1 - I_2.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Із вигляду (4.18) для функції b випливає, що

$$b(|t|_p, p^{-j} |x|_p^{-1}) = b(|t|_p, |p^j x^{-1}|_p) = \begin{cases} 1, & |t|_p \leq p^{jK} |x|_p^K, \\ -\frac{1}{p-1}, & |t|_p = p^{jK+1} |x|_p^K, \\ 0, & |t|_p \geq p^{jK+2} |x|_p^K. \end{cases} \tag{4.28}$$

Тобто, ми маємо декілька різних випадків, для яких будемо шукати оцінку на фундаментальний розв'язок $Z_t(x)$ в термінах змінних $|x|_p$ та $|t|_p$ та відповідних співвідношень між ними.

Позначимо

$$|t|_p = p^{n_0}, \quad |x|_p = p^{m_0},$$

для деяких $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}$. Тоді подальші випадки будуть формулюватися в термінах співвідношень між n_0 та m_0 .

Спочатку знайдемо вираз для доданку I_1 .

Умова (4.28) відповідає нерівності

$$p^{n_0} \leq p^{jK} p^{m_0 K},$$

з якої випливає

$$\frac{n_0}{K} - m_0 \leq j. \quad (4.31)$$

Умова (4.29) переписується наступним чином

$$p^{n_0} = p^{jK+1} p^{km_0},$$

що відповідає

$$\frac{n_0 - 1}{K} - m_0 = j. \quad (4.32)$$

Таке співвідношення можливе лише у випадку виконання умови

$$\frac{n_0 - 1}{K} \text{ ціле.} \quad (4.33)$$

Із умови (4.30) випливає, що кожен доданок в сумі I_1 буде дорівнювати нулю, якщо

$$|t|_p \geq p^{jK+2} |x|_p^K,$$

тобто виконується умова

$$\frac{n_0 - 2}{K} - m_0 \geq j. \quad (4.34)$$

Позначимо $\gamma = \left\lceil \frac{n_0}{K} \right\rceil$ — ціла частина числа.

Розглянемо всі можливі випадки, враховуючи умову $j \geq 0$.

1 вип. Нехай $\frac{n_0}{K} - m_0 < 0$.

Тоді для всіх $j \geq 0$ буде виконуватись умова (4.31), тобто кожне значення $b_j := b(|t|_p, p^{-j}|x|_p^{-1})$ буде дорівнювати 1. Також, оскільки умова (4.32) в цьому випадку не має місця, то в сумі (4.27) будуть відсутні доданки, що відповідають цій умові. Отже, маємо

$$\begin{aligned} I_1 &= (1 - p^{-n})|x|_p^{-n} \sum_{j=0}^{+\infty} p^{-jn} b(|t|_p, p^{-j}|x|_p^{-1}) = (1 - p^{-n})|x|_p^{-n} \sum_{j=0}^{+\infty} p^{-jn} = \\ &= (1 - p^{-n})|x|_p^{-n} \frac{1}{1 - p^{-n}} = |x|_p^{-n}. \end{aligned}$$

2 вип. Нехай $\frac{n_0}{K} - m_0 = 0$.

Тоді в сумі (4.27) будуть тільки ті члени, в яких $j \geq \frac{n_0}{K} - m_0 \geq 0$, тобто

$$I_1 = |x|_p^{-n}.$$

3 вип. Нехай $\frac{n_0 - 1}{K} - m_0 < 0 < \frac{n_0}{K} - m_0$.

Тоді умова (4.31) буде виконуватись для $j \geq \frac{n_0}{K} - m_0$, але оскільки j розглядаються цілі, то конкретніше для $j \geq \left\lceil \frac{n_0}{K} \right\rceil + 1 - m_0 = \gamma + 1 - m_0$. Тоді для всіх таких значень j буде $b_j = 1$ і маємо

$$\begin{aligned} I_1 &= (1 - p^{-n})|x|_p^{-n} \sum_{j=\gamma+1-m_0}^{+\infty} p^{-jn} b(|t|_p, p^{-j}|x|_p^{-1}) \\ &= (1 - p^{-n})|x|_p^{-n} \sum_{j=\gamma+1-m_0}^{+\infty} p^{-jn} = (1 - p^{-n})|x|_p^{-n} \frac{p^{-(\gamma+1-m_0)n}}{1 - p^{-n}} = \\ &= |x|_p^{-n} p^{-(\gamma+1)n} p^{m_0 n} = |x|_p^{-n} p^{-(\gamma+1)n} |x|_p^n = p^{-(\gamma+1)n}. \end{aligned}$$

4 вип. Нехай $\frac{n_0 - 1}{K} - m_0 = 0$.

Тоді $j \geq \frac{n_0 - 1}{K} \geq 0$, і буде виконуватись умова (4.32) (оскільки в цьому випадку виконується умова (4.33)), тобто $b_0 = b_{\frac{n_0-1}{K}} = -\frac{1}{p-1}$ та

$b_j = 1, j \geq 1$. Маємо

$$\begin{aligned}
I_1 &= (1 - p^{-n})|x|_p^{-n} \sum_{j=1}^{\infty} p^{-jn} - (1 - p^{-n})|x|_p^{-n} \frac{1}{p-1} p^0 = \\
&= (1 - p^{-n})|x|_p^{-n} \frac{p^{-n}}{1 - p^{-n}} - \frac{1 - p^{-n}}{p-1} |x|_p^{-n} = \\
&= p^{-n} |x|_p^{-n} - \frac{1 - p^{-n}}{p-1} |x|_p^{-n} = \frac{p^{-n+1} - p^{-n} - 1 + p^{-n}}{p-1} |x|_p^{-n} \\
&= \frac{p^{-n+1} - 1}{p-1} |x|_p^{-n}. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

5 вип. Нехай $0 < \frac{n_0 - 1}{K} - m_0$.

Тоді або всі ненульові b_j будуть одиницями (що випливає із умови (4.36)), або перше з них буде $-\frac{1}{p-1}$ (із умови (4.37)), а далі одиниці, і це залежить від виконання умови (4.33). Тому доречно цей випадок поділити на два.

5.а) вип. Нехай $0 < \frac{n_0 - 1}{K} - m_0$, умова (4.33) виконується.

Зауважимо, що оскільки $\frac{n_0 - 1}{K}$ ціле, то

$$\gamma = \left[\frac{n_0}{K} \right] = \left[\frac{n_0 - 1}{K} + \frac{1}{K} \right] = \frac{n_0 - 1}{K}.$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned}
I_1 &= (1 - p^{-n})|x|_p^{-n} \sum_{j=\gamma+1-m_0}^{+\infty} p^{-jn} - (1 - p^{-n})|x|_p^{-n} \frac{1}{p-1} p^{-(\frac{n_0-1}{K}-m_0)n} = \\
&= p^{-(\gamma+1)n} - \frac{1 - p^{-n}}{p-1} |x|_p^{-n} p^{-(\gamma-m_0)n} = p^{-(\gamma+1)n} - \frac{1 - p^{-n}}{p-1} |x|_p^{-n} p^{-\gamma n} |x|_p^n = \\
&= p^{-(\gamma+1)n} - \frac{1 - p^{-n}}{p-1} p^{-\gamma n} = \left(p^{-n} - \frac{1 - p^{-n}}{p-1} \right) p^{-\gamma n} = \frac{p^{-n+1} - 1}{p-1} p^{-\gamma n}.
\end{aligned}$$

5.б) вип. Нехай $0 < \frac{n_0 - 1}{K} - m_0$, умова (4.33) не виконується. Тоді

$$I_1 = (1 - p^{-n})|x|_p^{-n} \sum_{j=\gamma+1-m_0}^{+\infty} p^{-jn} = p^{-(\gamma+1)n}.$$

Остаточно маємо три різні можливі значення для суми I_1 , які можна об'єднати у наступні випадки.

Випадок 1. Якщо $\frac{n_0}{K} - m_0 > 0$ та умова (4.33) виконується, то

$$I_1 = \frac{p^{-n+1} - 1}{p - 1} p^{-\gamma n}.$$

Випадок 2. Якщо $\frac{n_0}{K} - m_0 \leq 0$, то

$$I_1 = |x|_p^{-n}.$$

Випадок 3. Якщо $\frac{n_0}{K} - m_0 > 0$ та умова (4.33) не виконується, то

$$I_1 = p^{-(\gamma+1)n}.$$

Далі знайдемо явний вираз для доданку I_2 .

Із вигляду (4.18) функції b маємо

$$b(|t|_p, p|x|_p^{-1}) = b(|t|_p, |p^{-1}x^{-1}|_p) = \begin{cases} 1, & |t|_p \leq p^{-K}|x|_p^K, \\ -\frac{1}{p-1}, & |t|_p = p^{-K+1}|x|_p^K, \\ 0, & |t|_p \geq p^{-K+2}|x|_p^K. \end{cases} \quad \begin{matrix} (4.36) \\ (4.37) \\ (4.38) \end{matrix}$$

Умова (4.36) відповідає нерівності

$$p^{n_0} \leq p^{-K} p^{m_0 K},$$

з якої випливає

$$\frac{n_0}{K} + 1 \leq m_0.$$

Умова (4.37) записується у вигляді

$$p^{n_0} = p^{-K+1} p^{m_0 K},$$

тобто

$$\frac{n_0 - 1}{K} + 1 = m_0.$$

Ця умова можлива лише якщо $\frac{n_0 - 1}{K}$, тобто за виконання умови (4.33).

Умова (4.38) еквівалентна нерівності

$$p^{n_0} \geq p^{-K+2} p^{m_0 K},$$

тобто

$$\frac{n_0 - 2}{K} + 1 \geq m_0.$$

Звідси випливає, що для доданку I_2 можливі наступні випадки.

Випадок I. Нехай $\frac{n_0}{K} + 1 \leq m_0$. Тоді

$$I_2 = |x|_p^{-n}.$$

Випадок II. Нехай $\frac{n_0 - 1}{K} + 1 = m_0$ та виконується умова (4.33) (що випливає з попередніх міркувань). Тоді

$$I_2 = -\frac{1}{p-1} |x|_p^{-n}.$$

Випадок III. Нехай $\frac{n_0 - 2}{K} + 1 \geq m_0$. Тоді

$$I_2 = 0.$$

Далі поєднаємо випадки 1-3 для доданку I_1 та випадки I-III для доданку I_2 та знайдемо вираз для фундаментального розв'язку $Z_t(x)$ у кожному випадку.

Випадок 1.I. означає, що $\frac{n_0}{K} > 0$ та виконуються умови (4.33), (4.36). Тоді

$$|t|_p > |x|_p^K \text{ та } |t|_p \leq p^{-K} |x|_p^K,$$

тобто

$$|x|_p^K < |t|_p \leq p^{-K} |x|_p^K,$$

що неможливо, оскільки $K \in \mathbb{N}$. Тобто, такі співвідношення між x та t неможливі, і цей випадок не дає виразу для (4.27) в представленні фундаментального розв'язку.

Випадок 1.II означає, що $\frac{n_0}{K} > 0$ та виконуються умови (4.33), (4.37).
Тоді

$$|t|_p > |x|_p^K \text{ та } |t|_p = p^{-K+1}|x|_p^K,$$

тобто

$$|t|_p = p^{-K+1}|x|_p^K < |x|_p^K,$$

що неможливо, оскільки $K \in \mathbb{N}$. Тобто, цей випадок також не входить у вираз (4.27) для фундаментального розв'язку.

Випадок 1.III означає, що $\frac{n_0}{K} > 0$ та виконуються умови (4.33), (4.38).
Тоді

$$|t|_p > |x|_p^K \text{ та } |t|_p \geq p^{-K+2}|x|_p^K,$$

тобто

$$|t|_p > |x|_p^K.$$

У цьому випадку

$$Z_t(x) = \frac{p^{-n+1} - 1}{p - 1} p^{-\gamma n}.$$

Зауважимо, що $\gamma = \left\lceil \frac{n_0}{K} \right\rceil \geq \frac{n_0}{K} - 1$, тому $-\gamma \leq -\frac{n_0}{K} + 1$, а також $-(\gamma+1) \leq \frac{n_0}{K}$. Звідси випливає наступна оцінка.

$$\begin{aligned} |Z_t(x)| &\leq \left| \frac{p^{-n+1} - 1}{p - 1} \right| p^{(-\frac{n_0}{K}+1)n} = \left| \frac{p^{-n+1} - 1}{p - 1} \right| p^n |t|_p^{-\frac{n}{K}} = \\ &= \frac{p^n - p}{p - 1} |t|_p^{-\frac{n}{K}} = C |t|_p^{-\frac{n}{K}}. \end{aligned}$$

Маємо $|t|_p > |x|_p^K$, тому $|x|_p < |t|_p^{\frac{1}{K}}$. Звідси

$$\begin{aligned} |x|_p + |t|_p^{\frac{1}{K}} &< 2|t|_p^{\frac{1}{K}}, \\ \left(|x|_p + |t|_p^{\frac{1}{K}} \right)^{-K-n} &> \left(2|t|_p^{\frac{1}{K}} \right)^{-K-n}, \end{aligned}$$

Далі отримаємо

$$\begin{aligned} \left(|x|_p + |t|_p^{\frac{1}{K}} \right)^{-K-n} &> 2^{-K-n} |t|_p^{-1-\frac{n}{K}}, \\ 2^{K+n} |t|_p \left(|x|_p + |t|_p^{\frac{1}{K}} \right)^{-K-n} &> |t|_p^{\frac{n}{K}}. \end{aligned}$$

Отже,

$$|Z_t(x)| \leq C|t|_p^{-\frac{n}{K}} \leq 2^{K+n}C|t|_p \left(|x|_p + |t|_p^{\frac{1}{K}}\right)^{-K-n},$$

тобто виконується оцінка (4.24).

Випадок 2.I означає, що $\frac{n_0}{K} - m_0 \leq 0$ та виконуються умови (4.33), (4.36). Тоді

$$|t|_p \leq |x|_p^K \text{ та } |t|_p \leq p^{-K}|x|_p^K,$$

тобто

$$|t|_p \leq p^{-K}|x|_p^K.$$

У цьому випадку

$$Z_t(x) = 0,$$

що доводить рівність (4.26).

Випадок 2.II означає, що $\frac{n_0}{K} - m_0 \leq 0$ та виконуються умови (4.33), (4.37). Тоді

$$|t|_p \leq |x|_p^K \text{ та } |t|_p = p^{-K+1}|x|_p^K,$$

тобто

$$|t|_p = p^{-K+1}|x|_p^K \leq |x|_p^K.$$

У цьому випадку

$$Z_t(x) = |x|_p^{-n} + \frac{1}{p-1}|x|_p^{-n} = \frac{p}{p-1}|x|_p^{-n} \leq C_1|x|_p^{-n}.$$

Випадок 2.III означає, що $\frac{n_0}{K} - m_0 \leq 0$ та виконуються умови (4.33), (4.38), тобто

$$|t|_p \leq |x|_p^K \text{ та } |t|_p \geq p^{-K+2}|x|_p^K,$$

що еквівалентно умові

$$p^{-K+2}|x|_p^K \leq |t|_p \leq |x|_p^K.$$

У цьому випадку

$$Z_t(x) = |x|_p^{-n} = C_1|x|_p^{-n}.$$

Отже, оцінка (4.25) доведена.

Випадок 3.I. означає, що $\frac{n_0}{K} - m_0 > 0$, не виконується умова (4.33), та виконується умова (4.36). Тоді

$$|t|_p > |x|_p^K \text{ та } |t|_p \leq p^{-K} |x|_p^K,$$

тобто

$$|x|_p^K < |t|_p \leq p^{-K} |x|_p^K,$$

що неможливо, оскільки $K \in \mathbb{N}$.

Випадок 3.II. означає, що $\frac{n_0}{K} - m_0 > 0$, не виконується умова (4.33), та виконується умова (4.37). Але оскільки умова (4.33) впливає із умови (4.37), цей випадок неможливий.

Випадок 3.III. означає, що $\frac{n_0}{K} - m_0 > 0$, не виконується умова (4.33), та виконується умова (4.38). Тоді

$$|t|_p > |x|_p^K \text{ та } |t|_p \geq p^{-K+2} |x|_p^K,$$

тобто

$$|t|_p > p^{-K} |x|_p^K.$$

У цьому випадку

$$Z_t(x) = p^{-(\gamma+1)n} \leq |t|_p^{-\frac{n}{k}}.$$

Аналогічно до випадку 1.III, виконується оцінка (4.24). □

4.4 Скінченна область залежності

Наступна теорема доводить властивість обмеженості області залежності розв'язку задачі Коші (4.10)–(4.11) відносно просторової змінної. Така поведінка є характерною для p -адичного хвильового рівняння (див. [38], твердження 3).

Теорема 4.3. *Припустимо, що початкова функція u_0 така, що $u_0(t, x) = 0$ зовні деякої кулі B_N^n , $N \in \mathbb{Z}$.*

Тоді розв'язок u задачі (4.10)–(4.11) задовольняє рівність $u(|t|_p, x) = 0$ для $x \in \mathbb{Q}_p^n \setminus B_N^n$, та для всіх $|t|_p < p^L$ для деякого $L \in \mathbb{Z}$.

Доведення. Із формули розв'язку (4.21) маємо

$$\begin{aligned} u(|t|_p, x) &= \left((\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} b) * u_0 \right) (|t|_p, x) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} b)(|t|_p, |x - y|_p) u_0(y) dy = \\ &= \int_{B_N^n} (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} b)(|t|_p, |x - y|_p) u_0(y) dy. \end{aligned}$$

Розглянемо $|x|_p > p^N$. Тоді для $y \in B_N^n$ за нерівністю трикутника (яка є рівністю в цьому випадку, оскільки $|x|_p \neq |y|_p$) маємо

$$|x - y|_p = \max(|x|_p, |y|_p) = |x|_p.$$

Тоді

$$p^{-K} |x|_p^K > p^{-K} p^{NK}.$$

Якщо вибрати $L = p^{NK-K}$, то для всіх t , $|t|_p \leq p^L$ отримаємо

$$|t|_p \leq p^L \leq p^{NK-K} = p^{-K} |x|_p^K.$$

Тоді із рівності (4.24) випливає, що для таких x і t

$$(\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} b)(|t|_p, |x - y|_p) = 0,$$

при $y \in B_N^n$. Отже, $u(|t|_p, x) = 0$. □

4.5 Узагальнені розв'язки та єдиність

Надалі будемо використовувати наступну властивість оператора $D^{\alpha, n}$ від узагальненої функції, яка відповідає обмеженій локально сталій функції (в сенсі регулярних узагальнених функцій), доведену в [38].

Лема 4.1 (Lemma 1, [38]). *Якщо u — обмежена локально стала функція на $\mathbb{Q}_p^n$ зі значеннями в $\mathbb{C}$, то узагальнена функція $D^{\alpha, n} u \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ збігається з функцією*

$$(D^{\alpha, n} u)(x) = \frac{1 - p^\alpha}{1 - p^{-\alpha-n}} \int_{\mathbb{Q}_p} |y|_p^{-\alpha-n} [u(x - y) - u(x)] dy. \quad (4.39)$$

Будемо розглядати задачу (4.10)–(4.11) на класі узагальнених функцій, радіальних за t .

Позначимо через $\Phi'(\mathbb{Q}_p, \Phi'(\mathbb{Q}_p^n))$ множину всіх узагальнених функцій на просторі основних функцій $\Phi(\mathbb{Q}_p)$, зі значеннями в $\Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$.

Теорема 4.4. *Нехай $u \in \Phi'(\mathbb{Q}_p, \Phi'(\mathbb{Q}_p^n))$ — узагальнений розв’язок рівняння (4.10), тобто*

$$\langle \langle u, D_t^\alpha \varphi_1 \rangle, \varphi_2 \rangle = \langle \langle u, \varphi_1 \rangle, D_x^{\beta, n} \varphi_2 \rangle,$$

для всіх $\varphi_1 \in \Phi(\mathbb{Q}_p)$, $\varphi_2 \in \Phi(\mathbb{Q}_p')$.

Якщо u — радіальна функція за змінною t , то $u \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p, \Phi'(\mathbb{Q}_p^n))$.

Якщо, додатково, $u(0, x) = 0$, то $u(t, x) \equiv 0$.

Доведення. Позначимо через $\widehat{u}(t, \cdot)$ перетворення Фур’є функції u за змінною x . Для будь-якої основної функції $\psi \in \Psi(\mathbb{Q}_p^n)$ маємо

$$D_{|t|_p}^\alpha \langle \widehat{u}(t, \cdot), \psi \rangle = \langle |\xi|_p^\beta \widehat{u}(t, \xi), \psi(\xi) \rangle.$$

Якщо $\text{supp } \psi \subset S_N$, $N \in \mathbb{N}$, то

$$D_{|t|_p}^\alpha \langle \widehat{u}(t, \cdot), \psi \rangle = p^{\beta N} \langle \widehat{u}(t, \cdot), \psi(\cdot) \rangle.$$

За твердженням 4.2, функція $\langle \widehat{u}(t, \cdot), \psi \rangle$ має вигляд

$$\langle \widehat{u}(t, \cdot), \psi \rangle = \begin{cases} C_N p^{KN} (1 - \frac{1}{p}), & |t|_p \leq p^{-KN}; \\ -C_N p^{KN-1}, & |t|_p = p^{-KN+1}; \\ 0, & |t|_p \geq p^{-KN+2}. \end{cases} \quad (4.40)$$

для деяких $C_N \in \mathbb{C}$ та $N \in \mathbb{N}$.

Якщо $\psi \in \Psi(\mathbb{Q}_p^n)$, то ψ є сумою скінченної кількості функцій, носії яких лежать в сферах S_N^n . Зокрема, якщо взяти $\psi = \widehat{\varphi}$, $\varphi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$, то отримаємо, що функція $\langle u(t, \cdot), \varphi \rangle$ належить простору $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ за змінною t , для всіх $\varphi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$.

Якщо $u(0, \cdot) = 0$, то також $\widehat{u}(0, \cdot) = 0$. Якщо $\psi \in \Psi(\mathbb{Q}_p^n)$, $\text{supp } \psi \subset S_N^n$, то функція $\langle \widehat{u}(t, \cdot), \psi \rangle$ має вигляд (4.40), та із припущення $\widehat{u}(0, \cdot) = 0$ випливає рівність $C_N = 0$, а отже

$$\langle \widehat{u}(t, \cdot), \psi \rangle = 0,$$

для будь-якої $\psi \in \Psi(\mathbb{Q}_p^n)$.

Оскільки радіус сфери N довільний, то звідси випливає, що $\widehat{u}(t, \cdot) = 0$, та $u(t, \cdot) = 0$. $\square$

Зауваження 4.2. Із леми 4.1 випливає, що обмежені локально сталі розв'язки рівняння (4.10) є узагальненими розв'язками із класу функцій, що розглядався в теоремі 4.4. Отже, розв'язки задачі Коші (4.10)–(4.11), побудовані в теоремі 4.1, є єдиними в класі обмежених локально сталих функцій, радіальних за змінною t .

4.6 L^1 -оцінка розв'язку

Позначимо

$$\mathbb{Q}_p^+ := \{t \in \mathbb{Q}_p : |t|_p \geq 1\}.$$

Наступна теорема доводить рівномірну за часом оцінку на розв'язок задачі (4.10)–(4.11) у просторі $L^1(\mathbb{Q}_p^n)$ у термінах початкової умови.

Теорема 4.5. *Припустимо, що умови теореми 4.1 виконані.*

Тоді розв'язок задачі (4.10)–(4.11), визначений формулою (4.21), задовольняє оцінку в $L^1(\mathbb{Q}_p^n)$ за змінною x для кожного $t \in \mathbb{Q}_p^+$

$$\|u(|t|_p, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{Q}_p^n)} \leq p^{2n\gamma} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{Q}_p^n)}, \quad (4.41)$$

де $\gamma \geq \frac{2}{K}$ — деяка додатна стала.

Доведення. Нагадаємо, що розв'язок задачі (4.10)–(4.11), знайдений в теоремі 4.1, визначається формулою

$$\begin{aligned} u(|t|_p, x) &= (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \widehat{u})(|t|_p, x) = \\ &= \left((\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} b) * u_0 \right)(|t|_p, x), \quad (t, x) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Для будь-якого $t \in \mathbb{Q}_p^+$ маємо

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}[b(|t|_p, |\xi|_p)](|t|_p, \cdot) \right\|_{L_1(\mathbb{Q}_p^n)} = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \left| \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}[b(|t|_p, |\xi|_p)](|t|_p, \cdot) \right| dx = \\
& = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \left| \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi \right| dx = \\
& = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \left| \int_{B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi + \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi \right| dx \leq \\
& \leq \int_{\mathbb{Q}_p^n} \left| \int_{B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi \right| dx + \int_{\mathbb{Q}_p^n} \left| \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi \right| dx,
\end{aligned} \tag{4.42}$$

де стала $\gamma \in \mathbb{Z}$ буде вибрана пізніше.

Для інтеграла $\int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi$ маємо

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi = \sum_{N=\gamma+1}^{+\infty} \int_{S_N^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi.$$

Із формули (4.18) випливає, що $b(|t|_p, |\xi|_p) = 0$, якщо $|\xi|_p^K \geq \frac{p^2}{|t|_p}$.

Нехай $|t|_p = p^L$, $L \geq 0$, тоді $|t|_p \geq 1$. Тому якщо $\gamma \geq \frac{2}{K}$, то для $\xi \in S_N^n$, $N \geq \gamma + 1$, одержимо $|\xi|_p \geq p^{\gamma+1} = p^{\frac{2}{K}+1} \geq p^{\frac{2}{K}}$, тоді

$$|\xi|_p^K \geq p^2 \geq \frac{p^2}{|t|_p},$$

і отже

$$\int_{S_N^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi = 0.$$

Врешті, для вибраного γ отримаємо

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} \left| \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi \right| dx = 0.$$

Тепер оцінимо перший інтеграл в (4.42). Маємо

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \left| \int_{B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi \right| dx &= \int_{B_\gamma^n} \left| \int_{B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi \right| dx + \\ &+ \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus B_\gamma^n} \left| \int_{B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi \right| dx, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \int_{B_\gamma^n} \left| \int_{B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi \right| dx &\leq \int_{B_\gamma^n} \int_{B_\gamma^n} |\chi_p(-x \cdot \xi)| \cdot |b(|t|_p, |\xi|_p)| d\xi dx \leq \\ &\leq \int_{B_\gamma^n} \int_{B_\gamma^n} d\xi dx = p^{2n\gamma}, \end{aligned}$$

оскільки $|\chi_p(-x \cdot \xi)| = 1$ для будь-яких $x, \xi \in \mathbb{Q}_p^n$ за означенням характеру χ_p , та $|b(|t|_p, |\xi|_p)| \leq 1$ для всіх $(t, \xi) \in \mathbb{Q}_p^+ \times \mathbb{Q}_p^n$ за визначенням функції b в (4.18).

Далі із формули (1.7) маємо

$$\int_{B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi \leq \int_{B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) d\xi = \begin{cases} p^{n\gamma}, & |x|_p \leq p^{-\gamma}; \\ 0, & |x|_p \geq p^{-\gamma+1}, \end{cases}$$

та

$$\begin{aligned} \int_{B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi &\geq -\frac{1}{p-1} \int_{B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) d\xi = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{p-1} p^{n\gamma}, & |x|_p \leq p^{-\gamma}; \\ 0, & |x|_p \geq p^{-\gamma+1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Оскільки стала $\gamma \geq \frac{2}{K}$ додатна, то в зовнішньому інтегралі справедлива нерівність $|x|_p \geq p^{\gamma+1} \geq p^{-\gamma+1}$, тому отримаємо

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus B_\gamma^n} \left| \int_{B_\gamma^n} \chi_p(-x \cdot \xi) b(|t|_p, |\xi|_p) d\xi \right| dx = 0.$$

Зрештою, об'єднуючи оцінки для всіх інтегралів в (4.42), одержимо

$$\left\| \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} [b(|t|_p, |\xi|_p)] (|t|_p, \cdot) \right\|_{L_1(\mathbb{Q}_p^n)} \leq p^{2n\gamma}. \quad (4.43)$$

Із нерівності Юнга для згорток (див. [71]) отримаємо оцінку для норми розв'язку

$$\|u(|t|_p, \cdot)\|_{L_1(\mathbb{Q}_p^n)} \leq p^{2n\gamma} \|u_0\|_{L_1(\mathbb{Q}_p^n)}. \quad (4.44)$$

□

4.7 Висновки до розділу 4

Даний розділ присвячений вивченню узагальнення псевдодиференціального рівняння хвильового типу із p -адичними часовою та просторовою змінними на випадок, коли порядки похідних за часом та за простором не співпадають.

Доведено існування розв'язків відповідної задачі Коші (4.10)–(4.11) на класі функцій, радіальних за часовою змінною. Більш того, доведено, що за певних умов цей розв'язок належить простору Лізоркіна $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ для всіх фіксованих $x \in \mathbb{Q}_p^n$, а також належить простору $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ для кожного $t \in \mathbb{Q}_p$.

Знайдено оцінку на фундаментальний розв'язок рівняння (4.10) у термінах змінних $|t|_p$, $|x|_p$, яка є аналогом подібних оцінок для параболічних рівнянь з дійсним часом та p -адичною просторовою змінною. Крім того, доведено властивість скінченної області залежності розв'язку задачі (4.10)–(4.11), яка є характерною для p -адичного хвильового рівняння.

Досліджено узагальнені розв'язки рівняння (4.10) та доведено єдиність розв'язків відповідної задачі Коші в класі обмежених локально сталих функцій, радіальних за змінною t . Крім того, доведено оцінку розв'язку задачі у просторі $L^1(\mathbb{Q}_p^n)$ за просторовою змінною в термінах початкової умови, рівномірну за часом.

Основні результати даного розділу було опубліковано в статті [3], а також в тезах конференції [7].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню питань про існування та єдиність розв'язків псевдодиференціальних рівнянь з оператором дробового диференціювання D^α на неархімедовому полі p -адичних чисел, які можуть розглядатися як узагальнення звичайних диференціальних рівнянь, у тому числі зі слабким та регулярним виродженням.

Крім того, досліджується узагальнене псевдодиференціальне рівняння з p -адичними часовою та просторовою змінними на функціях, радіальних за часом. Таке рівняння з одного боку є узагальненням p -адичного рівняння хвильового типу на випадок, коли порядки похідних за простором і часом не співпадають, а з іншого боку має властивості, подібні до параболічних псевдодиференціальних рівнянь (зокрема, оцінку на фундаментальний розв'язок).

Основними результатами дисертаційної роботи є:

- отримано достатні умови існування та єдиності локального м'якого розв'язку задачі Коші для нелінійного псевдодиференціального рівняння зі слабким виродженням на радіальних функціях p -адичного аргументу;
- побудовано продовження локального м'якого розв'язку рівняння зі слабким виродженням на весь простір p -адичних чисел, та визначено достатні умови на праву частину рівняння, за яких це продовження буде коректним;
- доведено, що за певних умов побудований таким чином м'який розв'язок є розв'язком початкової задачі Коші;
- знайдено достатні умови існування формального розв'язку лінійного псевдодиференціального рівняння з регулярним виродженням у вигляді степеневого ряду;
- доведено, що формальний розв'язок такого рівняння за певних умов є

локально абсолютно збіжним;

- досліджено узагальнене псевдодиференціальне рівняння на радіальних за часом функціях з p -адичною часовою та просторовою змінними, у випадку, коли порядки похідних за часом та за простором не співпадають;
- отримано необхідні та достатні умови існування та єдиності фундаментального розв'язку такого рівняння та розв'язку відповідної задачі Коші у просторі Лізоркіна;
- побудовано оцінку даного фундаментального розв'язку у термінах норми від p -адичної змінної. Такі оцінки є аналогічними до відповідних відомих оцінок для параболічних рівнянь з дійсною часовою та p -адичною просторовою змінними;
- досліджено додаткові властивості розв'язку відповідної задачі Коші, зокрема доведено скінченність області залежності розв'язку від початкової умови;
- побудовано рівномірну по часу оцінку даного розв'язку у просторі L^1 за просторовою змінною в термінах початкової умови.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Література

- [1] A. V. Antoniouk, A. N. Kochubei, M. V. Serdiuk, *Pseudo-differential equations with weak degeneration for radial functions of p -adic argument*, J. Math. Anal. Appl. **523**(2) (2023), 15 pp. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127026>
- [2] М. В. Сердюк, *Псевдодиференціальні рівняння з регулярною особливістю для радіальних функцій p -адичного аргументу*, Укр. Мат. Журнал **76**(5) (2024), 782–788. DOI: <https://doi.org/10.3842/umzh.v76i5.7769>
Translation in Ukrainian Mathematical Journal, **76**(3) (2024), 880–887.
DOI: doi.org/10.1007/s11253-024-02360-5
- [3] М. В. Сердюк, *Оцінка фундаментального розв’язку нового класу неархімедових псевдодиференціальних рівнянь*, Укр. Мат. Журнал **76**(10) (2024), 1537–1542. DOI: <https://doi.org/10.3842/umzh.v76i10.8687>
- [4] М. В. Сердюк, *Псевдо-диференціальні рівняння зі слабким виродженням для радіальних функцій p -адичного аргументу* // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції “Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання”, — К.: УДУ імені Михайла Драгоманова, 18-20 січня 2023. С. 38–41.
- [5] М. В. Сердюк, *Радіальні розв’язки псевдо-диференціальних рівнянь p -адичного аргументу зі слабким виродженням* // Матеріали Міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми механіки та математики — 2023”, Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України 2023, С. 345–346.

- [6] M. Serdiuk, *Regular singularities of pseudo-differential equations for radial functions of p -adic argument* // The 12th International Congress of Societas Humboldtiana Polonorum, June 30 – July 02 2023, Lodz, Poland. P 56.
- [7] M. Serdiuk, *Fundamental solution of non-Archimedean pseudo-differential equation of p -adic argument* // International Scientific Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis”, Odesa, Ukraine, 27–30 May 2024. P. 108–109.
- [8] S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, and V. M. Shelkovich, *Theory of p -Adic Distributions*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 370, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [9] S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, and V. M. Shelkovich, *Harmonic analysis in the p -adic Lizorkin spaces: fractional operators, pseudo-differential equations, p -adic wavelets, Tauberian theorems*, J. Fourier Anal. Appl. **12**(4) (2006), 393–425.
- [10] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, V. A. Osipov, *p -adic models of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes*, J. Phys. A. **35**(2) (2002), 177–189.
- [11] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, V. A. Osipov, *p -adic description of characteristic relaxation in complex systems*, J. Phys. A. **36**(15) (2003), 4239–4246.
- [12] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, V. A. Osipov, *p -adic models of ultrametric diffusion in the coformational dynamics of macromolecules*, Proc. Steklov Inst. Math. **245**(2) (2004), 48–57.
- [13] V. G. Berkovich, *Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields*, Math. Surveys Monogr., 33, AMS, Providence, 1990.

- [14] Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich, *Number Theory*, Pure Appl. Math., Vol. 20, Academic Press, New York and London, 1966.
- [15] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmet, *Non-Archimedean Analysis*, Grundlehren Math. Wiss., 261, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [16] N. Bourbaki, *Variétés Différentielles et analytiques*, Hermann, Paris, 1967.
- [17] F. Bruhat, *Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p -adiques*, Bull. Soc. Math. France **89** (1961), 43–75.
- [18] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1955.
- [19] B. Dwork, *Lectures on p -Adic Differential Equations*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [20] B. Dwork, G. Gerotto, and F. J. Sullivan, *An Introduction to G -Functions*, Ann. of Math. Stud., 133, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
- [21] A. Escassut, *Analytic Elements in p -Adic Analysis*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995.
- [22] P. G. Freud, M. Olson, *Non-Archimedean strings*, Phys. Lett. B **199**(2) (1987), 186–190.
- [23] L. Fuchs, *Gesammelte mathematische Werke*, Mayer & Müller, Berlin, 1904.
- [24] J. Galeano-Peñaloza, O. F. Casas-Sánchez, *Radial solutions of a pseudo-differential equation associated with a p -adic non-local ultradiffusion operator*, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. **15**(2) (2024), 27 pp.

- [25] I. M. Gelfand, M. I. Graev, I. I. Pyatetskii-Shapiro, *Representation Theory and Automorphic Functions*, W. B. Saunders Co., Philadelphia, Pa.-London-Toronto, Ont., 1969.
- [26] L. Gerritzen, M. van der Put, *Schottky Groups and Mumford Curves*, Lect. Notes Math., 817, Springer, Berlin, 1980.
- [27] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, *Euclidean Quantum Gravity*, World Scientific Publishing, Singapore, 1993.
- [28] Ph. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
- [29] K. Hensel, *Über eine neue begründung der theorie der algebraischen Zahlen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **6**(3) (1897), 83–88.
- [30] A. Yu. Khrennikov, *p -adic valued distributions in mathematical physics*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1994.
- [31] A. Yu. Khrennikov, *Non-archimedean analysis: quantum paradoxes, dynamical sustems and biological models*, Math. Appl., 427, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [32] A. Yu. Khrennikov, *Information dynamics in cognitive, psychological, social and anomalous phenomena*, Fund. Theories Phys., 138, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2004.
- [33] N. Koblitz, *p -adic numbers, p -adic analysis, and zeta-functions*. Second edition. Grad. Texts in Math., 58 Springer-Verlag, New York, 1984.
- [34] A. N. Kochubei, *Parabolic equations over the field of p -adic numbers*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **55**(6) (1991), 1312-1330; translation in Math. USSR-Izv. **39**(3) (1992), 1263–1280.

- [35] A. N. Kochubei, *Schrödinger-type operator over the p -adic number field*, Teoret. Mat. Fiz. **86**(3) (1991), 323–333; translation in Theoret. and Math. Phys. **86**(3) (1991), 221–228.
- [36] A. N. Kochubei, *Fundamental solutions of pseudo-differential equations associated with p -adic quadratic norms*, Russ. Acad. Sci. Izv. Math. **62** (1998), 1169–1188; translation in Izv. Math. **62**(6) (1998), 1169–1188.
- [37] A. N. Kochubei, *Pseudo-Differential Equations and Stochastics over Non-Archimedean Fields*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 244, Marcel Dekker, New York, 2001.
- [38] A.N. Kochubei, *A non-Archimedean wave equation*, Pacif. J. Math. **235**(2) (2008), 245–261.
- [39] A. N. Kochubei, *Fractional differential equations: α -entire solutions, regular and irregular singularities*, Fract. Calc. Appl. Anal. **12**(2) (2009), 135–158.
- [40] A.N. Kochubei, *Radial solutions of non-Archimedean pseudo-differential equations*, Pacif. J. Math. **269** (2014), 355–369.
- [41] A.N. Kochubei, *Nonlinear pseudo-differential equations for radial real functions on a non-Archimedean field*, J. Math. Anal. Appl. **483** (2020), 11 pp.
- [42] A.N. Kochubei, *The Vladimirov-Taibleson operator: inequalities, Dirichlet problem, boundary Hölder regularity*, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. **14**(2) (2023), 27 pp.
- [43] A. Yu. Khrennikov and A. N. Kochubei, *p -adic analogue of the porous medium equation*, J. Fourier Anal. Appl. **24**(5) (2018), 1401–1424.
- [44] F. Lettenmeyer, *Über die an einer Unbestimmtheitsstelle regulären Lösungen eines Systemes homogener linearen Differentialgleichungen*, Akad. Wiss. Munchen Math.-nat. Abt. (1926), 287–307.

- [45] P. I. Lizorkin, *Generalized Liouville differentiation and the functional spaces $L_p^r(E_n)$* , Imbedding theorems, Mat. Sb. (N.S.) **60**(102) (1963), 325-353.
- [46] P. I. Lizorkin, *Generalized Liouville differentiation and the multiplier method in the theory of imbeddings of classes of differentiable functions*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **105** (1969), 89–167.
- [47] P. I. Lizorkin, *Operators connected with fractional differentiation, and classes of differentiable functions*, Studies in the theory of differentiable functions of several variables and its applications, IV. Trudy Mat. Inst. Steklov. **117** (1972), 212–243.
- [48] A. Monna, *Analyse Non-Archimédienne*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [49] B. Riemann, *Collected works (2. Aufl.)*, Teubner, Leipzig, 1892; Dover, New York, 1953.
- [50] A. M. Robert, *A course in p-adic analysis*, Grad. Texts in Math., 198, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [51] P. Robba, G. Christol, *Équations Différentielles p-Adiques*, Hermann, Paris, 1994.
- [52] A. van Rooij, *Non-Archimedean Functional Analysis*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 51, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.
- [53] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.
- [54] W. H. Schikhof, *Ultrametric Calculus*, Cambridge Stud. Adv. Math., 4, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

- [55] J.-P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups*, W. A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam, 1965.
- [56] M. H. Taibleson, *Harmonic analysis on n -dimensional vector spaces over local fields. I. Basic results on fractional integration*, Math. Ann. **176** (1968), 191–207.
- [57] M. H. Taibleson, *Fourier Analysis on Local Fields*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1975.
- [58] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich and E. I. Zelenov, *p -Adic Analysis and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore, 1994.
- [59] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, *Superanalysis. II. Integral Calculus*, Theoretical and Mathematical Physics **60** (1984), 743–765.
- [60] V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 1981.
- [61] V. S. Vladimirov, *p -adic analysis and p -adic quantum mechanics*, Ann. of the NY Ac. Sci.: Symposium in Frontiers of Math., 1988.
- [62] V. S. Vladimirov, *On the spectrum of some pseudo-differential operators over p -adic number field*, Algebra and analysis, **2**(6) (1990), 107–124.
- [63] V. S. Vladimirov, *Tables of integral of Complex-Valued Functions of p -Adic Arguments*, Steklov Mathematical Institute, Moscow, 2003.
- [64] I. V. Volovich, *p -adic string*, Class. Quantum Grav. **4**(4) (1987), 83–87.
- [65] I. V. Volovich, *Harmonic analysis and p -adic strings*, Letters. Math. Phys. **16**(1) (1988), 61–67.
- [66] W. A. Zuniga-Galindo, *Pseudo-differential equations connected with p -adic forms and local zeta functions*, Bull. Austral. Math. Soc. **70**(1) (2004), 73–86.

- [67] W. A. Zuniga-Galindo, *Fundamental solutions of pseudo-differential operators over p -adic fields*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **109** (2003), 241–245.
- [68] W.A. Zúñiga-Galindo, *Pseudodifferential equations over non-Archimedean spaces*, Lecture Notes in Math., 2174, Springer, Cham, 2016.
- [69] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press, San Diego, 1996.
- [70] S. V. Kozyrev, *Methods and applications of ultrametric and p -adic analysis: from wavelet theory to biophysics*, Proc. Steklov Inst. Math. **274** (2011), 1–84.
- [71] W. H. Young, *On the multiplication of successions of Fourier constants*, Proc. of the Royal Society A. **87**(596) (1912), 331–339.

ДОДАТОК

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. Antoniouk A. V., Kochubei A. N., Serdiuk M. V., *Pseudo-differential equations with weak degeneration for radial functions of p -adic argument*, J. Math. Anal. Appl. **523**(2) (2023), 15 pp.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127026>
2. Сердюк М. В., *Псевдодиференціальні рівняння з регулярною особливістю для радіальних функцій p -адичного аргументу*, Укр. Мат. Журнал **76**(5) (2024), 782-788.
DOI: <https://doi.org/10.3842/umzh.v76i5.7769>;
translation in Ukrainian Mathematical Journal **76**, (3) (2024), 880-887.
DOI: doi.org/10.1007/s11253-024-02360-5
3. Сердюк М. В., *Оцінка фундаментального розв'язку нового класу неархімедових псевдодиференціальних рівнянь*, Укр. Мат. Журнал **76**(10) (2024), 1537-1542. DOI: <https://doi.org/10.3842/umzh.v76i10.8687>

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Сердюк М. В., *Псевдо-диференціальні рівняння зі слабким виродженням для радіальних функцій p -адичного аргументу* // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції “Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання”, — К.: УДУ імені Михайла Драгоманова, 18-20 січня 2023. С. 38-41.
2. Сердюк М. В., *Радіальні розв'язки псевдо-диференціальних рівнянь p -адичного аргументу зі слабким виродженням* // Матеріали Між-

народної наукової конференції “Сучасні проблеми механіки та математики — 2023”, Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України 2023, С. 345–346.

3. Serdiuk M., *Regular singularities of pseudo-differential equations for radial functions of p -adic argument* // The 12th International Congress of Societas Humboldtiana Polonorum, June 30 – July 02 2023, Lodz, Poland. P. 56.
4. Serdiuk M., *Fundamental solution of non-Archimedean pseudo-differential equation of p -adic argument* // International Scientific Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis”, Odesa, Ukraine, 27–30 May 2024. P. 108-109.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції

1. Всеукраїнська науково-практична конференція “Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання”, 18–20 січня, 2023, Київ, Україна;
2. Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики”, 23–25 травня, 2023, Львів, Україна;
3. The 12th International Congress of Societas Humboldtiana Polonorum, June 30 – July 02, 2023, Lodz, Poland;
4. Workshop “Complex Dynamical Systems: theory, mathematical modelling, computing and application”, 2–4 October, 2023, Kyiv, Ukraine;
5. International Scientific Online Conference “Algebraic and Geometric Methods of Analysis”, 27–30 May, 2024, Odesa, Ukraine.