Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня магістра

за спеціальністю 113 Прикладна математика
на тему:

Мережеві агрегативні ігри

Виконала студентка 2-го курсу магістратури
Коваленко Олександра Юріївна ________________

Науковий керівник:
доктор фіз.-мат. наук, професор
Семенов Володимир Вікторович ________________

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студентка ________________

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри обчислювальної математики
«05» травня 2023 р.,
протокол № 7
Завідувач кафедри

проф. Сергій Ляшко

Київ — 2023

РЕФЕРАТ

Обсяг роботи 30 сторінок, 18 джерел посилання, 3 ілюстрації, 3 таблиці.

Ключові слова:

ВАРІАЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ, МЕРЕЖЕВІ АГРЕГАТИВНІ ІГРИ, РОЗПОДІЛЕНІ ПРОЄКЦІЙНІ АЛГОРИТМИ, МОНОТОННИЙ ОПЕРАТОР.

Об'єктом роботи є проєкційні алгоритми (такі як екстраградієнтний метод Корпелевич, алгоритм екстраполяції з минулого, відбиваючий проєкційний алгоритм та метод градієнтного спуску).

Предмет застосування проєкційних методів для розв'язання мережевих агрегативних ігор.

Мета роботи вивчення та аналіз класичних проєкційних методів для знаходження рівноваги Неша мережевої агрегативної гри.

Завдання:

1. Охарактеризувати специфіку проєкційних методів для розв'язання мережевих агрегативних ігор.

2. Розробка програмної бібліотеки для знаходження рівноваги Неша мережевої агрегативної гри.

3. Дослідження збіжності проєкційних алгоритимів для розв'язання поставленої задачі теорії ігор.

Результати роботи: розроблено набір розподілених проєкційних алгоритмів для розв'язування задачі мережевих агрегативних ігор, з використанням ексраградієнтного методу Корпелевич, методу екстраполяції з минулого, та відбиваючого градієнтного методу Маліцького, проведено тестування описаних методів на класичній задачі мережевих агрегативних ігор, з подальшою оцінкою і аналізом результатів

Апробація результатів. Результати роботи було представлено на міжнародній науковій конференції молодих вчених "Шевченківська весна – 2023"(14 квітня 2023 р.) та на міжнародній науково-практичній

конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях"(12-13 травня 2023 р.).

Зміст

ВСТУП

Агрегативна гра — це набір взаємозалежних задач оптимізації, що пов'язані із особами, що приймають рішення, або агентами, які не співпрацюють, де на кожного агента впливає певний сукупний ефект усіх агентів. Особливість агрегативних ігор у тому, що вони виникають у різних сферах, таких як управління попитом в інтелектуальній мережі, наприклад, для заряджання/розряджання електромобілів, регулювання попиту на конкурентних ринках, контролю заторів у мережах дорожнього руху та зв'язку. Спільним знаменником є наявність великої кількості "егоїстичних"агентів, чиї сукупні дії можуть порушити спільну інфраструктуру, наприклад, електромережу або транспортну мережу, якщо залишити їх без контролю. Більш широке застосування агрегативних ігор для вирішення різних задач у своїй роботі "Агрегативні ігри"описав Луіс Коршон [1].

Агрегативні ігри спочатку розглядалися в економіці, завдяки напрацюванням Курно. А першим, хто розглянув концепцію агрегатнивних ігор, був Рейнхард Зельтен, у своїй монографії він описує клас агрегативних ігор та доводить для них існування рівноваги Неша. Він показав, що у фіксованих точках задачі агрегативної гри досягається рівновага за Нешем. Він був першим, хто показав, що агрегативна структура гри спрощує обчислення рівноваги Неша.

Розробка методів для вирішення мультиагентних задач рівноваги в некооперативних іграх нещодавно привернула великий дослідницький інтерес. Зокрема, було розроблено, напівдецентралізовані та розподілені алгоритми пошуку рівноваги для ігор без обмежень зв'язку і, нещодавно, для ігор із обмеженнями зв'язку.

У цій роботі розглянемо постановку задачі знаходження рівноваги Неша мережевої агрегативної гри, як задачі варіаційної нерівності з використанням проєкційних алгоритмів. Тобто необхідно буде знайти фіксовані точки задачі варіаційної нерівності.

Під агрегативною грою розуміємо некооперативну гру Неша, де функція вартості кожного гравця залежить від його дії та сукупності дій усіх гравців. Основним застосування ігор такого виду є задачі з розподілу ресурсів, реагування на попит тощо. У даній роботі розглядаються мережеві агрегативні ігри, де гравці розподіляються по одноранговій (P2P) комунікаційній мережі без центрального координатора. Щоб досягти рівноваги Неша у мережевій агрегативниій грі, гравці спілкуються лише зі сісідніми агентами даної мережі, які визначені в мережі.

Розподілений пошук рівноваги Неша широко вивчався в останні роки. Для ігор, де функції вартості гравців залежать від дій інших у загальному порядку, було запропонували повністю розподілені алгоритми. У цих алгоритмах гравці використовують локальні комунікації для оцінки дій інших, а рівновагу Неша знаходять шляхом вирішення еквівалентних задач варіаційної нерівності [2]. Для цих алгоритмів доведено лінійну збіжність до рівноваги Неша, коли ігри мають сильно монотонні псевдоградієнтні відображення, що збігається з результатами централізованих алгоритмів [2].

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

У даному розділі розглядаються постановка задачі мережевої агрегативної гри з підходом варіаційних нерівностей.

1.1 Теорія мережевої агрегативної гри

Мережева агрегативна гра — модель теорії ігор, яка описує соціальну або мережеву структуру взаємодії між гравцями. У мережевій агрегатній грі кожен гравець пов'язаний з іншими гравцями через мережу або граф, і їх виграш залежить не лише від їх власних дій, але й від дій гравців у графі.

Мережеві агрегативні ігри використовуються для моделювання різноманітних соціальних та економічних явищ, наприклад динаміку думок, проблеми координації та поширення інформації через мережу. Структура моделі має вплив на результат гри, бо на стратегії гравців може впливати поведінка їхніх сусідів.

Формально, мережева агрегативна гра може бути представлена вектором (G, S, u), де G – граф, що відображає мережу гравців, S — набір стратегій, що доступні гравцю, і u — функція виграшу.

Розв'язком задачі є знаходження рівновагу Неша, за якої жоден гравець не може збільшити свій виграш шляхом односторонньої зміни своєї стратегії, враховуючи стратегії сусідів у мережі.

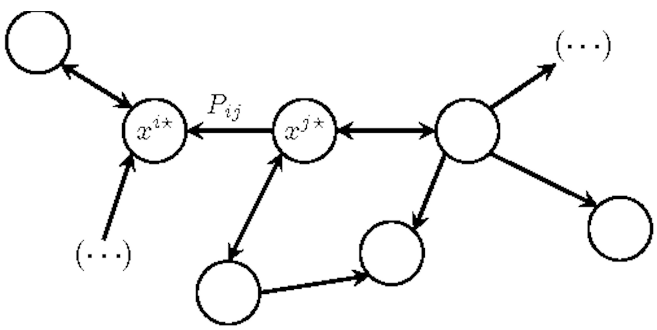

Рис. 1: Приклад мережі для агрегативної гри

Розлянемо типові приклади задач, що відносяться до мережевих агрегативних ігор.

1. Задача динаміки думок у мережі з "впертими"гравцями. Розглянемо задачу моделювання того, як ідеї, інновації чи поведінка поширюються в соціальній мережі з кількістю агентів N. Припускаємо, що кожен агент має множину думок з n тем. Щоб описати динаміку думок, ми розглянемо гру, де гравець i спілкується один раз зі своїми сусідами і оновлює свою думку. Дану функцію можна подати як суму двох доданків: перший моделює вплив сусідів на нову думку агента i, другий моделює "впертість"агента i щодо його початкової думки.

2. Ігри функції пропозиції: розглянемо гру функції пропозиції, яку вивчали Клемперер і Мейєр [5]. Припустимо, що кожна з n фірм обирає функцію пропозиції як свою стратегію, де стратегія є обмеженою функцією в області невід'ємних цін, яка відображає кількість одиниць, які фірма і зобов'язується пропонувати за ціною р. Кожна фірма обирає свою функцію пропозиції, перш ніж дізнатися про стан попиту. Після вибору функцій пропозиції та реалізації фірма оновлює ціну, щоб прирівняти пропозицію до попиту.

1.2 Постановка задачі мережевої агрегативної гри

Розглянемо мережеву агрегативну гру як мульти-агентну мережу, а також представимо мережеву агрегативну гру як варіаційну нерівність, що дозводить застосувати до неї різні проєкціні алгоритми.

Для початку розглянемо множину з n гравців з індексом $\mathcal{N} = \{1, 2, \cdots, n\}$. У агрегативних іграх функція втрат гравця i $f_i(\mathbf{x}_i, \overline{\mathbf{x}})$ залежить від його власної дії $\mathbf{x}_i \in X_i$ і сукупної дії інших гравців $\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i$.

Метою кожного гравця в агрегативній грі є мінімізація його витрат, тобто необхідно мінімізувати функцію:

$$f_i(\mathbf{x}_i, \overline{\mathbf{x}}) \to min, \text{ де } \mathbf{x}_i \in X_i, \tag{1.1}$$

де точки $\mathbf{x}_j, j \neq i, j \in \mathcal{N}$ є фіксованими, та в яких досягається рівновага Неша серед усіх гравців, тобто:

Визначення 1 (Рівновага Неша)**.** *Множину дій* $\mathbf{x}^* = [\mathbf{x}_1^*; \mathbf{x}_2^*; \cdots; \mathbf{x}_n^*]$ *називатимемо рівновагою Неша агрегативної гри (1.1), якщо для всіх* $i \in \mathcal{N}$ *і* $\mathbf{x}_i \in X_i$ *виконується,*

$$f_i(\mathbf{x}_i^*, \overline{\mathbf{x}}^*) \leq f_i\left(\mathbf{x}_i, \frac{1}{n}\mathbf{x}_i + \frac{1}{n}\sum_{j\neq i}^{n} \mathbf{x}_j^*\right).$$

Далі ми розглянемо задачу мережевої агрегативної гри, у якій гравці розподілені по одноранговій мережі (peer-to-peer) і не мають прямого доступу до сукупної дії, а можуть лише спілкуватися з сусідніми гравцями у мережі.

Модель даної P2P мережі складається з неорієнтованого графа $G(\mathcal{N}, E)$ і вагової матриці W, де $\mathcal{N}$ — набір гравців.

Введемо позначення вагової матриці $W = \{w_{ij}\}_{n\times n}$, яка задовольняє, що $w_{ij} > 0$, якщо $(i, j) \in E$ або $i = j$, і $w_{ij} = 0$ в інших випадках.

Представимо задачу у вигляді задачі варіаційної нерівності.

Рівновагу Неша для мережевої агрегативної гри можна отримати шляхом розв'язання варіаційної нерівності, яка полягає у знаходженні точки $\mathbf{x}^* \in X$ такої, що

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)^\top \phi(\mathbf{x}^*) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in X$$

де $X = \prod_{i=1}^n X_i$ і $\phi(\mathbf{x})$ — псевдо-градієнтне відображення, визначене як

$$\phi(\mathbf{x}) = [\nabla_{\mathbf{x}_1} f_1(\mathbf{x}_1, \overline{\mathbf{x}}); \nabla_{\mathbf{x}_2} f_2(\mathbf{x}_2, \overline{\mathbf{x}}); \cdots; \nabla_{\mathbf{x}_n} f_n(\mathbf{x}_n, \overline{\mathbf{x}})]$$

Щоб виділити координату псевдоградієнта, визначаємо відображення

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = [F_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{z}); F_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{z}); \cdots; F_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{z})],$$

$$\text{де } F_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}) = \nabla_{\mathbf{x}_i} f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}) + \frac{1}{n} \nabla_{\mathbf{z}} f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{z})$$

Звідси, отримаємо $\phi(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}})$.

У подальшій роботі нам знадобиться припущення щодо множини дій і функцій втрат гравців.

Припущення 1. *Для кожного гравця $i \in \mathcal{N}$ множина дій X_i є компактною і опуклою.*

Кожна локальна функція втрат $f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{z})$ неперервно диференційовною в $(\mathbf{x}_i, \mathbf{z})$ над деякою відкритою множиною, що містить $X_i \times \overline{X}$, де

$$\overline{X} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{X}_i \right\}.$$

Крім того, функція $\mathbf{x}_i \to f_i\left(\mathbf{x}_i, \frac{1}{n}\mathbf{x}_i + \overline{\mathbf{x}}_{-i}\right)$ є опуклою у X_i для будь-якої фіксованої $\overline{\mathbf{x}}_{-i}$.

Введемо ще два припущення щодо псевдо-градієнтного відображення, які необхідні для лінійної збіжності проєкційних алгоритмів:

Припущення 2 (Сильна монотонність)**.** *Псевдо-градієнт ϕ є сильно монотонним над X, тобто існує константа $\mu > 0$ така, що*

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^\top (\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}')) \geq \mu \|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^2, \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X.$$

Припущення 3 (Неперервність за Ліпшицем). *Будь-яке відображення F_i є рівномірно неперервним за Ліпшицем у $X_i \times \overline{X}$, тобто існує константа $L > 0$ така, що для $\forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i' \in X_i$ і $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in \overline{X}$, випливає:*

$$\|F_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}) - F_i(\mathbf{x}_i', \mathbf{z}')\| \leq L \|[\mathbf{x}; \mathbf{z}] - [\mathbf{x}'; \mathbf{z}']\|$$

Завдяки сформульованим припущенням, у [2] було виведено лему про існування та єдиність розв'язку:

Лема 1. *Згідно з припущеннями 1 та 2, задача 1.1 має єдину рівновагу за Нешем.*

Розглянемо наступне припущення щодо мережі зв'язку гри.

Припущення 4 (Мережа зв'язку). *Припустимо, що*

1. *Граф G є зв'язним, тобто існує послідовність послідовних ребер для з'єднання будь-якої пари вершин (гравців).*
2. *Вагова матриця W є двічі стохастичною, тобто $W\mathbf{1} = W^\top \mathbf{1} = \mathbf{1}$, де $\mathbf{1}$ позначає одиничний вектор.*

Перша частина даного припущення гарантує, що дія кожного гравця може зрештою вплинути на кожного іншого гравця, що є необхідним для задачі, що використовує розподілені методи. Друга частина посилює властивість усереднення вагової матриці і є загальною для розв'язування задач з розподіленими методами.

У [11], з використанням припущення 4, було сформулювано лему про властивості вагової матриці:

Лема 2. *Згідно з припущеннями 4, існує константа $\sigma \in (0, 1)$, що є спектральною нормою $W - \frac{1}{n}11^\top$, або другим найбільшим сингулярним значенням матриці W, таке що для будь-якого $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|W\mathbf{w} - \mathbf{1}\bar{w}\| = \left\| \left(W - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \right) (\mathbf{w} - \mathbf{1}\bar{w}) \right\| \leq \sigma \|\mathbf{w} - \mathbf{1}\bar{w}\|,$$

де $\bar{w} = \frac{1}{n}1^\top \mathbf{w}$.

Також у [4] було описано наступну властивість проєкційного оператора

Лема 3. *Нехай* $X \subset \mathbb{R}^p$ *- непорожня, замкнена, опукла множина. Тоді для будь-якого* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$*, маємо* $\|\mathcal{P}_X[\mathbf{x}] - \mathcal{P}_X[\mathbf{y}]\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

1.3 Розподілена постановка задачі

Розглянемо систему з m агентами, де агент i асоціюється з функцією компоненти $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ і відображенням $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Розглянемо наступну задачу оптимізації з розподіленими обмеженнями:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \to min, \tag{1.2}$$

$$\text{де } x \in \mathcal{S}\left(X, \sum_{i=1}^{m} F_i\right),$$

де $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — множина, а $\mathcal{S}\left(X, \sum_{i=1}^{m} F_i\right)$ — множина розв'язків варіаційної нерівності $\left(X, \sum_{i=1}^{m} F_i\right)$ визначено таким чином:

$x \in X$ є розв'язком $\left(X, \sum_{i=1}^{m} F_i\right)$, якщо $(y - x)^T \sum_{i=1}^{m} F_i(x) \geq 0$ для всіх $y \in X$.

Задача 1.2 представляє задачу розподіленої оптимізації у розумінні, що інформація про f_i і F_i локально відома гравцю i , а множина X відома всім гравцям. Модель 1.2 є можифікацією канонічного формулювання задачі розподіленої оптимізації:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \to min, \tag{1.3}$$

$$\text{де } x \in X,$$

Даний тип задачі є добре дослідженим. Насправді, якщо покласти $F_i(x) = 0$ для всіх i, задача 1.2 еквівалентна до задачі 1.3.

Зараз ми розглянемо припущення для задачі 1.2.

Позначимо $f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)$ і $F(x) = \sum_{i=1}^{m} F_i(x)$ як глобальну мету і глобальне відображення відповідно.

Припущення 5. *Задача 1.2 має наступні властивості*

1. *Функція $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дійснозначна та є опуклою у своїй області визначення для всіх i;*

2. *Відображення $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ є дійсним, неперервним і монотонним у своїй області визначення для всіх i;*

3. *Множина $X \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(F))$ є непорожньою, опуклою та компактною, де $\operatorname{dom}(\cdot)$ - область визначення відображення, а $\operatorname{int}(\cdot)$ - внутрішність.*

Зауваження 1. *З припущення 5 випливає наступне. З [2] та [10] $\mathcal{S}(X, F)$ є непорожньою, опуклою і компактною. Для всіх і непорожня множина $\partial f_i(x)$ для будь-якого $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f_i))$. Крім того, f_i має обмежені субградієнти над компактною множиною X. А також, відображення F_i є обмеженим над множиною X.*

З огляду на компактність множини X і неперервність f, введемо позитивні константи $M_X < \infty$ і $M_f < \infty$ визначати як $M_X = \sup_{x \in X} \|x\|$ та $M_f = \sup_{x \in X} |f(x)|$ відповідно.

Ми також позначаємо $f^* \in \mathbb{R}$ оптимальне цільове значення задачі 1.2.

З огляду на зауваження 1, визначаємо константи $C_F > 0$ і $C_f > 0$ визначити так, що для всіх i і для всіх $x \in X$ ми маємо $\|F_i(x)\| \le \frac{C_F}{m}$ і $\|\nabla f_i(x)\| \le \frac{C_f}{m}$ для всіх $\nabla f_i(x) \in \partial f_i(x)$.

Далі наведемо припущення для про неперервність за Ліпщицем функції f_i.

Припущення 6. *За припущення 5 і з теореми 3.61 у [10] функція* f_i *є неперервною за Ліпшицем з параметром* $\frac{C_f}{m}$ *на множині* X*, тобто для всіх* $i \in [m]$ *маємо* $|f_i(x) - f_i(y)| \leq \frac{C_f}{m}\|x - y\|$ *для всіх* $x, y \in X$*. Також маємо* $\|\nabla f(x)\| \leq C_f$ *для всіх* $x \in X$ *і всіх* $\nabla f(x) \in \partial f(x)$*.*

Це означає, що $|f(x) - f(y)| \leq C_f\|x - y\|$ *для всіх* $x, y \in X$*.*

2 АЛГОРИТМИ ДЛЯ МЕРЕЖЕВИХ АГРЕГАТИВНИХ ІГОР

У цьому розділі будуть розглянуті алгоритми знаходження рівноваги Неша для мережевих агрегатитвних ігор.

Розглянемо крок централізованого алгоритму, отриманий на ітерації фіксованої точки

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathcal{P}_{X_i}\left(\mathbf{x}_i^k - \alpha F_i\left(\mathbf{x}_i^k, \overline{\mathbf{x}}^k\right)\right), \quad \forall i \in \mathcal{N}.$$

Якщо крок α вибрано достатньо малим, тоді послідовність$\left\{\mathbf{x}^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ збігатиметься до фіксованої точки відображення

$$\mathbf{x} \mapsto \mathcal{P}_X(\mathbf{x} - \alpha\phi(\mathbf{x})), \text{ що і є } \mathbf{x}^*.$$

Оскільки, гравці у мережевій агрегативній грі не мають прямого доступу до сукупної дії $\overline{\mathbf{x}}$, тоді гравець i отримує вектор v_i для всіх $i \in \mathcal{N}$ $\mathbf{v}_i$ і обмінюється ним зі своїми сусідами, щоб оцінити сукупну дію. Потім вони використовують оцінену сукупну дію для локального оновлення своїх рішень. Позначимо $\alpha > 0$ як фіксований крок.

Наступним кроком алгоритму буде знаходження можливого напрямку градієнта $\widehat{\mathbf{x}}_i^{k+1} - \mathbf{x}_i^k$ та з фіксованим кроком $\beta \in (0, 1]$.

Подібно до інших алгоритмів на основі згоди, розподілене середнє використовується у $\widehat{\mathbf{v}}_i$, так і $\mathbf{v}_i$ до сукупної дії $\overline{\mathbf{x}}$. Для $\widehat{\mathbf{x}}_i$ виконується проєкційний крок градієнта для обчислення можливого напрямку $\widehat{\mathbf{x}}_i^{k+1} - \mathbf{x}_i^k$.

Зауважимо, що якщо $\beta = 1$ і α замінюється послідовністю кроків, що зменшуються; тоді наведений алгоритм зводиться до алгоритму в [12].

2.1 Розподілений градієнтний метод

Розподілений алгоритм з проєкційним кроком для МАГ

Вхід: $\forall i \in \mathcal{N}, \mathbf{x}_i^0 \in \mathcal{X}_i$ та $\mathbf{v}_i^0 = \mathbf{x}_i^0$

for $\forall i \in \mathcal{N}$ **do**

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{v}}_i^{k+1} &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \mathbf{v}_j^k \\
\widehat{\mathbf{x}}_i^{k+1} &= \mathcal{P}_{X_i}\left(\mathbf{x}_i^k - \alpha F_i\left(\mathbf{x}_i^k, \widehat{\mathbf{v}}_i^{k+1}\right)\right) \\
\mathbf{x}_i^{k+1} &= \mathbf{x}_i^k + \beta\left(\widehat{\mathbf{x}}_i^{k+1} - \mathbf{x}_i^k\right) \\
\mathbf{v}_i^{k+1} &= \widehat{\mathbf{v}}_i^{k+1} + \mathbf{x}_i^{k+1} - \mathbf{x}_i^k
\end{aligned}$$

end for

Проєкційний метод записаний для оператора F, що діє над допустимою множиною $\mathcal{X}_i$ для даної задачі. Тут і далі $\mathcal{P}_{X_i}$ позначимо оператор метричної проекції над множиною $\mathcal{X}_i$.

2.2 Збіжність розподіленого градієнтного метода на основі проєкції

Оцінка збіжності проєкційного методу наведена у роботі [3].

Теорема 1 (Про збіжність розподіленого градієнтного методу)**.** *Нехай* $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i^k = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^k$ *для всіх k. З припущення 3, псевдо-градієнт ϕ - неперервний за Ліпшицем над множиною $\mathcal{X}$ з коефіцієнтом $\bar{L} = \sqrt{2}L$.*

З припущень 1-4, коли α, β достатньо малі так, що матриця

$$M = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\beta\left(\mu - 2\alpha\bar{L}^2\right) & \alpha\beta L^2(1/\mu + 2\alpha) \\ \frac{8\beta^2 - 4\alpha\beta^3\left(\mu - 2\alpha\bar{L}^2\right)}{1-\sigma^2} & \frac{4\alpha\beta^3 L^2(1/\mu + 2\alpha)}{1-\sigma^2} + \frac{2\sigma^2}{1+\sigma^2} \end{bmatrix}$$

має спектральний радіус $\rho(M) < 1$

Тоді послідовність $\mathbf{x}_i^k$ *що утворена у алгоритмі 2.1 збігається до розв'язку* (1.1)*:*

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_i^{k+1} - \mathbf{x}^*\| = 0 \quad \textit{для деякого } \mathbf{x}^* \in \mathcal{X}^*$$

А також

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{v}_i^k - \mathbf{x}_i^k\| = 0$$

Розглянемо кілька класичних алгоритмів для розв'язання варіаційних нерівностей та запишемо для них розподілені аналоги.

2.3 Екстраградієнтний метод Корпелевич

Перший алгоритм – екстраградієнтний метод Корпелевич. Це алгоритм є один з найбільш використовуваних методів. Був описаний у роботі [15]. Він має наступний вигляд:

Екстраградієнтний метод Корпелевич

Вхід: $x^0 \in X, \alpha \in (0, \frac{1}{L})$

for $k = 0, .., t-1$ **do**

$$\begin{aligned} y^k &= \mathcal{P}_X(x^k - \alpha F(x^k)) \\ x^{k+1} &= \mathcal{P}_X(x^k - \alpha F(y^k)) \end{aligned}$$

end for

Основною перевагою, цього метода можна вважати, можливість застосування для монотонних операторів. Проте, необхідність знаходити двічі проєкцію на множину $\mathcal{X}_i$, можна вважати недоліком, що може знижувати швидкість обчислень методу.

Його розподілений аналог може бути записаний у вигляді

Розподілений екстраградієнтний метод

Вхід: $\forall i \in \mathcal{N}, \mathbf{x}_i^0 \in \mathcal{X}_i$ та $\mathbf{v}_i^0 = \mathbf{x}_i^0$

for $\forall i \in \mathcal{N}$ **do**

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{v}}_i^{k+1} &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \mathbf{v}_j^k \\
\overline{\mathbf{x}}_i^{k+1} &= \mathcal{P}_{X_i}\left(\mathbf{x}_i^k - \alpha F_i\left(\mathbf{x}_i^k, \widehat{\mathbf{v}}_i^k\right)\right) \\
\widehat{\mathbf{x}}_i^{k+1} &= \mathcal{P}_{X_i}\left(\mathbf{x}_i^k - \alpha F_i\left(\overline{\mathbf{x}}_i^{k+1}, \widehat{\mathbf{v}}_i^{k+1}\right)\right) \\
\mathbf{x}_i^{k+1} &= \mathbf{x}_i^k + \beta\left(\widehat{\mathbf{x}}_i^{k+1} - \mathbf{x}_i^k\right) \\
\mathbf{v}_i^{k+1} &= \widehat{\mathbf{v}}_i^{k+1} + \mathbf{x}_i^{k+1} - \mathbf{x}_i^k
\end{aligned}
$$

end for

2.4 Метод екстраполяції з минулого

Даний метод є модифікацією попереднього, екстраградієнтного методу Корпелевич.

Основною особливістю метода Попова [16] є можливість використовувати значення з попереднього кроку. Ця відмінність між методами може вплинути на динаміку алгоритму та його збіжність. Використання попереднього елемента може потенційно вплинути на швидкість збіжності.

Звичайний крок даного методу матиме вигляд:

Метод екстраполяції з минулого
Вхід: $x_0, y_0 \in X, \alpha \in (0, \frac{1}{L})$
for $k = 0, .., t-1$ **do**

$$y_i = \mathcal{P}_X(x_i - \alpha F(y_{i-1}))$$
$$x_{i+1} = \mathcal{P}_X(x_i - \alpha F(y_i))$$

end for

Запишемо розподілений метод для методу екстраполяції з минулого:

Розподілений метод екстраполяції з минулого
Вхід: $\forall i \in \mathcal{N}, \mathbf{x}_i^0, \mathbf{y}_i^0 \in \mathcal{X}_i$ та $\mathbf{v}_i^0 = \mathbf{x}_i^0$
for $\forall i \in \mathcal{N}$ **do**

$$\widehat{\mathbf{v}}_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \mathbf{v}_j^k$$
$$\mathbf{y}_i^{k+1} = \mathcal{P}_{X_i}\left(\mathbf{x}_i^k - \alpha F_i\left(\mathbf{y}_i^{k-1}, \widehat{\mathbf{v}}_i^k\right)\right)$$
$$\widehat{\mathbf{x}}_i^{k+1} = \mathcal{P}_{X_i}\left(\mathbf{x}_i^k - \alpha F_i\left(\mathbf{y}_i^k, \widehat{\mathbf{v}}_i^{k+1}\right)\right)$$
$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathbf{x}_i^k + \beta\left(\widehat{\mathbf{x}}_i^{k+1} - \mathbf{x}_i^k\right)$$
$$\mathbf{v}_i^{k+1} = \widehat{\mathbf{v}}_i^{k+1} + \mathbf{x}_i^{k+1} - \mathbf{x}_i^k$$

end for

2.5 Відбиваючий проєкційний метод

Метод Маліцького [17] є модифікацією метода Семенова-Маліцького [18], що в свою чергу є оптимізацією метода Попова. Серед основних переваг методу є необхідність знаходити проєкцію на множину X лише один раз та тільки одне значення F на кожній ітерацію. Ця ідея стає у нагоді, коли обчислення оператора F є дорогим, наприклад для масштабних задач варіаційних нерівностей.

Основний крок методу може бути представлений у вигляді:

Відбиваючий проєкційний метод
Вхід: $z^0 \in X, \alpha \in (0, \dfrac{\sqrt{2}-1}{L})$
for $k = 0, .., t-1$ **do**

$$x_{i+1} = \mathcal{P}_X(x_i - \alpha F(2x_i - x_{i-1}))$$

end for

Варіант розподіленого аналог алгоритму описаний нижче:

Розподілений алгоритм відбиваючого проєкційного метода
Вхід: $\forall i \in \mathcal{N}, \mathbf{x}_i^0 \in \mathcal{X}_i$ та $\mathbf{v}_i^0 = \mathbf{x}_i^0$
for $\forall i \in \mathcal{N}$ **do**

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{v}}_i^{k+1} &= \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\mathbf{v}_j^k \\
\widehat{\mathbf{x}}_i^{k+1} &= \mathcal{P}_{X_i}\left(\mathbf{x}_i^k - \alpha F_i\left(\mathbf{x}_i^k - \mathbf{x}_{i-1}^k, \widehat{\mathbf{v}}_i^{k+1}\right)\right) \\
\mathbf{x}_i^{k+1} &= \mathbf{x}_i^k + \beta\left(\widehat{\mathbf{x}}_i^{k+1} - \mathbf{x}_i^k\right) \\
\mathbf{v}_i^{k+1} &= \widehat{\mathbf{v}}_i^{k+1} + \mathbf{x}_i^{k+1} - \mathbf{x}_i^k
\end{aligned}$$

end for

3 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

3.1 Приклади задачі мережевої агрегативної гри

Розглянемо стандартний приклад задачі мережевої агрегативної гри з [9].

3.1.1 Багатовимірна обмежена динаміка "думок"у соціальних мережах з упертими агентами

Розглянемо задачу моделювання того, як ідеї, інновації чи поведінка поширюються в соціальній мережі з кількістю агентів $N \in \mathbb{N}$. Припускаємо, що кожен агент $i \in \mathbb{Z}[1, N]$ має вектор $x^i \in [0,1]^n$ з думок щодо $n \in \mathbb{N}$ тем.

Кожен компонент $x^i_s \in [0,1]$ представляє думку агента i щодо теми $s \in \mathbb{Z}[1, n]$, де 0 означає вкрай негативну, а 1 — надзвичайно позитивна думка. Позначимо через $x^i_{(0)} \in [0,1]^n$ початкову думку агента i. Крім того, ми визначемо соціальну мережу за допомогою зваженої матриці суміжності $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$, де елемент $P_{ij} \in [0,1]$ позначає релевантність думки агента j до рішення агента i. Далі ми без обмеження загальності припускаємо, що $\sum_j P_{ij} = 1$ для всіх $i \in \mathbb{Z}[1, N]$.

Щоб описати динаміку думок, ми розглянемо гру, де на кожній ітерації k кожен агент i спілкується один раз зі своїми сусідами $\mathcal{N}^i := \{j \in \mathbb{Z}[1, N] \mid P_{ij} > 0\}$ і оновлює свою думку, що можна описати у вигляді задачі оптимізації:

$$x^{i\star}\left(x^{\mathcal{N}^i}\right) = \underset{x^i \in \mathbb{R}^n}{\arg\min} \sum_{j \neq i}^{N} \left(P_{ij} \left\|x^i - x^j\right\|^2\right) + \theta_i \left\|x^i - x^i_{(0)}\right\|^2 \qquad (3.1)$$

де $x^i \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^i$.

Функція втрат в (3.1) складається з двох частин: перший моделює вплив сусідів на нову думку агента i, другий моделює "впертість"агента i щодо його початкової думки. Додаткові обмеження щодо думок агентів щодо n тем, як, наприклад, той факт, що думки щодо двох тем не повинні відрізнятися більше, ніж заданий поріг, і щодо їхньої впертості, можуть бути закодовані за допомогою набору обмежень $\mathcal{X}^i \subseteq [0,1]^n$.

Вважається, що агенти неоднорідні в тому сенсі, що параметр упертості $\theta_i \geq 0$, набір обмежень $\mathcal{X}^i$ і ваги $\{P_{ij}\}_{j\neq i}^N$ може відрізнятися для кожного агента. Визначимо агентів, для яких $\mathcal{X}^i = \left\{x^i_{(0)}\right\}$, тобто агентів, які не під впливом сусідів, як повністю впертих, до агентів, для яких $\theta_i = 0$ і $\mathcal{X}^i = [0,1]^n$ як послідовників, і до всіх інших агентів як частково впертих.

Для задачі (3.1) можна вважати $n = 1$ без втрати загальності. Розв'язок в цьому випадку виглядає як:

$$x^{i\star}\left(x^{\mathcal{N}^i}\right) = \frac{1}{1+\theta_i}\sum_{j\neq i} P_{ij}x^j + \frac{\theta_i}{1+\theta_i}x^i_{(0)},$$

Звідси випливає, що проблему можна розглядати як стандартну модель Фрідкін-Джонсена [13]. Для випадку, коли є принаймні один частково впертий агент, можна показати, що жоден з агентів не має наміру змінювати свою думку з огляду на думки своїх сусідів. З іншого боку, якщо всі агенти є послідовниками, тоді модель можна розглядати як модель DeGroot [14].

Як наслідок, що функцію втрат в (3.1) можна переписати з точністю до постійних членів, які не залежать від x^i, як

$$F^i = (1+\theta_i)\left\|x^i\right\|^2 - 2\left(\sigma^i + \theta_i x^i_{(0)}\right)^\top x^i, \tag{3.2}$$

де $\sigma^i = \sum_{j\neq i}^{N} P_{ij}x^j$ — середня думка сусідів агента i. Таким чином, гру в (3.1) можна розглядати як гру, де кожен агент намагається мінімізувати функцію втрат, яка залежить від його власної стратегії x^i і від опуклої комбінації стратегій його сусідів σ^i, що призводить до мережевої агрегативної гри.

3.2 Додаткові відомості для алгоритмів

Для роботи з розподіленими алгоритмами нам необхідно визначити вагову матрицю.

Можна модифікувати основний спосіб завдання вагової матриці $W = \{w_{ij}\}$ як:

1. У разі якщо неможливо здійснити перехід з вершини i до вершини j покладемо:

$$w_{ij} = 0, \quad (i,j) \notin E.$$

2. В інших випадках, значення w_{ij} можна визначити як:

$$w_{ij} = \begin{cases} \delta, & \text{якщо } (i,j) \in E \text{ та } i \neq j, \\ 1 - \delta \cdot d(i), & \text{якщо } i = j, \end{cases}$$

де $d(i)$ - число гравців, що спілкуютьтся з гравцем i, а $\delta = \dfrac{0.5}{\max_i\{d(i)\}}$.

3.3 Тестування алгоритмів та обчислювальні експерименти

Розглянемо ефективність роботи отриманих методів для мереж зі змінним вибором параметрів. Для обчислювальних експериментів оберемо змінну кількість агентів, кількість впертих агетнів та різну кількість думок. Вагову матрицу W задамо описаним вище способом.

3.3.1 Робота алгоритмів з початковими даними

Обчислювальний експеримент 1. *Для початкового експерименту візьмемо наступні параметри:*

$n = 10$ - *кількість агентів*

$s = 3$ - *кількість "впертих"агентів*

$o = 5$ - *кількість думок*

$\alpha = 0.01$ - *розмір кроку* α

$\beta = 1$ - *розмір кроку* β

$t = 500$ - *обмеження за кількістю ітерацій*

Дані про думки агентів та порядкові номери "впертих"агентів генерувалися випадковим чином, на основі заданих параметрів.

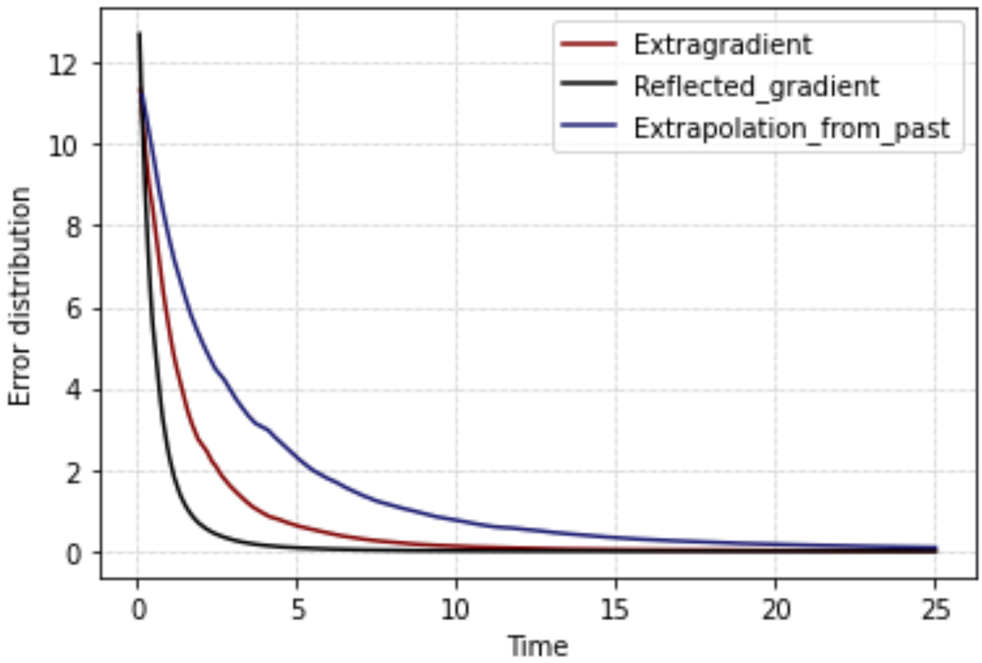

Рис. 2: Робота методів для обчислювального експерименту 1

Обчислювальний експеримент 2. *Для наступного експерименту візьмемо такі параметри:*

$n = 20$ - *кількість агентів*

$s = 10$ - *кількість "впертих"агентів*

$o = 10$ - *кількість думок*

$\alpha = 0.02$ - *розмір кроку* α

$\beta = 1$ - *розмір кроку* β

$t = 2500$ - *обмеження за кількістю ітерацій*

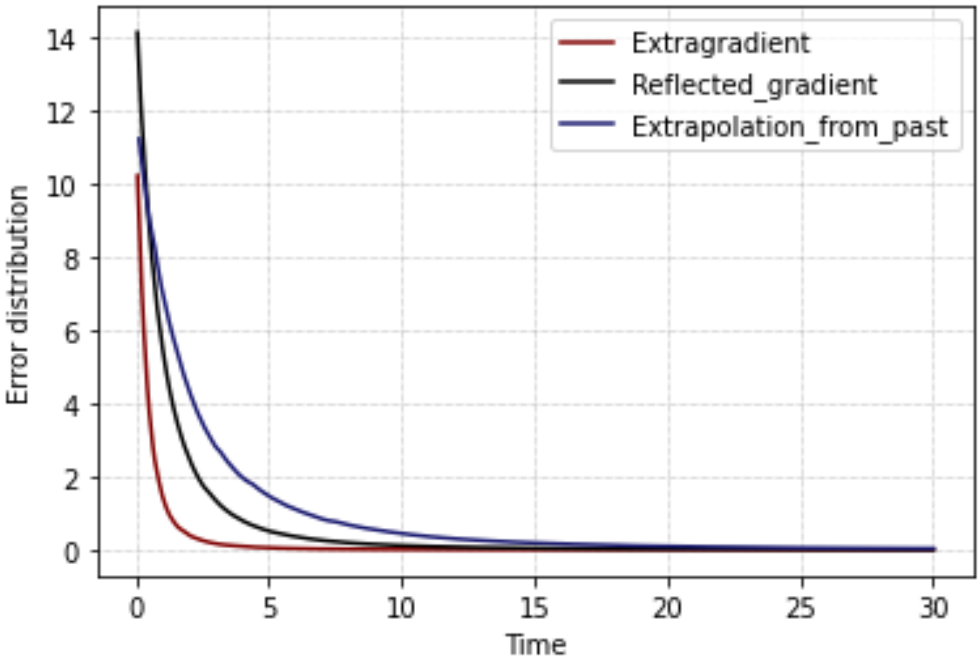

Рис. 3: Робота методів для обчислювального експерименту 2

Розглянемо роботу методів для інших даних, та спробуємо підібрати оптимальний крок для методів.

Для цих експериментів задамо обмеження за кількістю ітерацій - 10 000 ітерацій та похибку обчислень $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon = 10^{-6}$.

3.3.2 Розподілений екстраградієнтний метод

	n - к-сть агентів m - вперті агенти o - к-сть думок	$\alpha = 0.03, \beta = 0.9$	$\alpha = 0.5, \beta = 0.9$
1	$(100, 10, 50)$	2128	1053
2	$(250, 30, 100)$	3302	1540
3	$(250, 50, 200)$	3231	1741
4	$(500, 50, 200)$	4241	2179
5	$(500, 100, 200)$	5123	2691

Табл. 1: Робота методу Корпелевич, для множин з різною кількістю агентів

3.3.3 Розподілений метод екстраполяції з минулого

	n - к-сть агентів m - вперті агенти o - к-сть думок	$\alpha = 0.02, \beta = 0.95$	$\alpha = 0.5, \beta = 0.9$
1	$(100, 10, 50)$	2317	1482
2	$(250, 30, 100)$	2546	1643
3	$(250, 50, 200)$	3264	1778
4	$(500, 50, 200)$	3975	2451
5	$(500, 100, 200)$	4987	2794

Табл. 2: Результати методу екстраполяції з минулого, для множин з різною кількістю агентів

3.3.4 Розподілений метод відбиваючого градієнта

	n - к-сть агентів m - вперті агенти o - к-сть думок	$\alpha = 0.02, \beta = 0.95$	$\alpha = 0.33, \beta = 0.9$
1	$(100, 10, 50)$	2712	1768
2	$(250, 30, 100)$	2787	1745
3	$(250, 50, 200)$	4604	2891
4	$(500, 50, 200)$	5060	3205
5	$(500, 100, 200)$	5125	3413

Табл. 3: Результати методу відбиваючого градієнта, для множин з різною кількістю агентів

4 ВИСНОВКИ

У роботі було розглянуто мережеві агрегативні ігри, постановку задач для ігор цього типу. Було описано розподілені градієнтні методи, що побудовані на основі класичних проєкційних методів. Для проведення обчислювальних експериментів було розглянуто задачу динаміки "думок"у соціальних мережах з впертими агентами.

Для розв'язання описаних задач було розглянуто наступні методи: розподілений екстраградієнтний метод, розподілений метод екстраполяції з минулого та розподілений відбиваючий проєкційний метод.

Розв'язання поставленого завдання уможливило сформулювати наступні висновки.

1. Для наборів невеликих даних найкращі результати показали метод Корпелевич та відбиваючий проєкційний метод.

2. У той же час для більших даних, з підібраними параметрами кроку, краще використовувати метод Корпелевич та варіювати параметри розміру кроку.

3. Оскільки, наразі відсуні теоретичне доведення збіжності для запропонованих розподілених методів, тому вибір оптимальних параметрів для задання розміру кроку, ґрунтується суто на практичних дослідах та експериментах.

Можна зробити висновок, що продуктивність досліджених алгоритмів є досить перспективною, проте потребує подальшого теоретичного аналізу.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Luis C. Corchón. *Aggregative games.* Spain: Springer, 2021.

[2] Francisco Facchinei and Jong-Shi Pang. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems.* Springer Science and Business Media, 2007.

[3] Rongping Zhu and Jiaqi Zhang Keyou You. *Networked Aggregative Games with Linear Convergence* China, 2021.

[4] D. Bertsekas. *Nonlinear Programming.* Athena Scientific, 2016.

[5] Klemperer. P and M. Meyer. *Supply function equilibria in oligopoly under uncertainty.* Econometrica, 1989.

[6] H. D. Kaushik and F. Yousefian. *Distributed Optimization for Problems with Variational Inequality Constraints.* IEEE Transactions on Automatic Control, 2022.

[7] H. H. Bauschke and P. L. Combettes. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces.* Springer, 2017.

[8] Giuseppe Belgioioso, Angelia Nedic, Sergio Grammatico. *Distributed generalized Nash equilibrium seeking in aggregative games on time-varying networks.* The Netherlands, 2020.

[9] Francesca Parise, Sergio Grammatico, Basilio Gentile and John Lygeros. *Network Aggregative Games and Distributed Mean Field Control via Consensus Theory.* Switzerland, 2015.

[10] Beck A. *First-Order Methods in Optimization.* MOS-SIAM Series on Optimization, 2017.

[11] A. Olshevsky and J. N. Tsitsiklis. *Convergence speed in distributed consensus and averaging.* J: SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 48. 2009, pp. 33–55.

[12] J.Koshal, A.Nedic and U.V.Shanbhag. *Distributed algorithms for aggregative games on graphs.* J: Operations Research, vol. 64. 2016, pp. 680–704.

[13] N. E. Friedkin and E. C. Johnsen. *Social influence networks and opinion change.* J: Advances in group processes, vol. 16. 1999, pp. 1-29.

[14] M. H. DeGroot. *Reaching a consensus.* J: Journal of the American Statistical Association, vol. 69. 1974, pp. 118–121.

[15] Korpelevich G.M. *The extragradient method for finding saddle points and other problems.* J: Ekonomika i Matematcheskie Metody, vol. 12. 1976, pp. 747–756.

[16] N. E. Friedkin and E. C. Johnsen. *Modification of the Arrow-Hurwicz method for finding saddle points.* J: Math Notes, vol. 28. 1980, pp. 777–784.

[17] Malitsky Yu. *Projected Reflected Gradient Methods for Monotone Variational Inequalities.* J: SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 25. 2015, pp. 502–520.

[18] Malitsky Yu. and Semenov V. *An extragradient algorithm for monotone variational inequalities.* vol. 50. 2014, pp. 271—277