Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття освітнього ступення бакалавра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

Умови стійкості розв'язків диференціальних включень

студентки 4 курсу
Буханцової Ольги Анатоліївни

____

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Пічкур В.В.

____

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та рекомендована до захисту, протокол № 18 від 10 червня 2022 рік.

Завідувач кафедри МСС
доктор технічних наук, доцент Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2022

Анотація

У кваліфікаційній роботі на здобуття ступеня бакалавра висвітлені властивості розв'язків диференціальних включень та проведений аналіз умов стійкості розв'язків на основі другого методу Ляпунова. Обгрунтовані теореми про умови стійкості та теореми про умови стійкості за напрямком для розв'язків диференціальних включень. Розглянуті в роботі теореми і алгоритми можуть бути застосованими при доведенні теорем існування розв'язків задач керування, при аналізі розв'язків систем за умов детермінованої невизначеності.

Зміст

Вступ

Виникнення та розвиток теорії диференціальних рівнянь та включень має як математичне підґрунтя – прагнення до узагальнення, так і прикладне – такі рівняння та включення використовують для опису реальних фізичних систем, з метою аналізу систем автоматичного керування.

Теорія диференціальних включень була заснована в 30-х роках Зарембою С. та Маршо. Її призначенням є дослідження математичними методами властивостей розв'язків диференціальних рівнянь з розривною правою частиною, що не залежить від розміщення поверхонь розриву і досить точно описують рух для широкого класу реальних задач [1].

Новий поштовх до розвитку теорія диференціальних включень отримала після відкриття принципу максимуму Понтрягіна та пов'язаним з ним інтенсивним розвитком теорії керування системами, а саме теорії оптимального керування [4].

Диференціальні включення є узагальненням для поняття звичайних диференціальних рівнянь, тому всі питання, що виникають при роботі з диференціальними рівняннями, зокрема існування розв'язку, його неперервність, залежність від початкових умов та параметрів, присутні також і для диференціальних включень. Оскільки диференціальне включення із заданою початковою умовою, зазвичай, має багато розв'язків, виникають нові задачі, пов'язані з дослідженням множини розв'язків, вибором розв‘язків із заданими властивостями, визначенням множини досяжності, тощо [6].

Актуальність роботи: на теперішній момент теорія диференціальних включень розвинена досить добре та має перспективи для подальшого розвитку в зв'язку з великою кількістю сфер застосування диференціальних включень, наприклад економічна, соціальна, біологічна, адже для опису динаміки макросистем в даних сферах використовують багатозначні функції. Тому природньо використовувати диференціальні включення як моделі цих макросистем. Їх також використовують для опису деяких систем, що неоднозначно залежать від зміни фізичної величини, яка характеризує стан або властивість тіла, від зміни фізичної величини, що характеризує зовнішні умови. Диференціальні включення використовують для доведення існуючих теорем в теорії оптимального керування, визначення достатніх умов оптимального значення, також вони грають важливу роль в теорії керування за невизначених умов.

Мета роботи: дослідити умови стійкості розв'язку диференціального включення $\dot{x} \in F(t, x)$. Для досягнення поставленої цілі були сформульовані наступні завдання:

1. Ознайомитись з основними поняттями з багатозначного аналізу: метрика Хаусдорфа, багатозначне відображення, інтегральна лійка та опорна функція.

2. Розглянути диференціальні включення та властивості їх розв'язків.

3. Опрацювати алгоритм побудови множини досяжності для лінійних диференціальних включень.

4. Виконати обчислювальний експеримент та побудувати множину досяжності для лінійних диференціальних включень.

5. Опрацювати теореми про стійкість розв'язків, які визначають умови слабкої та сильної стійкості для автономних диференціальних включень $\dot{x} \in F(x)$.

6. Обгрунтувати теореми про стійкість розв'язків за напрямком l, які визначають умови слабкої та сильної стійкості для диференціальних включень $\dot{x} \in F(t, x)$.

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків і списку літератури.

У першому розділі розглянуті необхідні для подальшої роботи відомості з багатозначного аналізу: абсолютно непепервна фунція, її властивості, теорема Арцела, метрика Хаусдорфа, багатозначне відображення, інтегральна лійка та опорна функція.

У другому розділі були опрацьовані властивості розв'язків диференціальних включень, а саме: визначення та види розв'язку диференціального включення та теореми існування розв'язку, властивість компактності та зв'язності множини розв'язків, залежність розв'язку від початкових умов і від правої частини включення, зв'язок між множинами розв'язків включень $\dot{x} \in F(t, x)$ і $\dot{x} \in coF(t, x)$, R-розв'язки. Також окремо були розглянуті лінійні диференціальні включення та описаний алгоритм побудови множини досяжності і представлений результат його застосування.

У третьому розділі були розглянуті та доведені теореми, які визначають умови слабкої та сильної стійкості для автономних диференціальних включень $\dot{x} \in F(x)$ та теореми, які визначають умови слабкої та сильної стійкості за напрямком l для диференціальних включень $\dot{x} \in F(t, x)$.

Розділ 1

Багатозначні відображення

1.1 Абсолютно непепервна фунція, її властивості

Розглянемо визначення абсолютно неперервної функції [2].

Означення 1.1. *Функція f, задана на деякому відрізку $[a, b]$, називається абсолютно неперервною на ньому, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що, якою б не була скінчена система інтервалів, що попарно не перетинаються*

$$(a_k, b_k), k = 1, 2, \ldots, n$$

сума довжин яких менша за δ,

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Властивості абсолютно неперервних функцій [2].

1. В означенні 1.1, замість будь-якої скінченної системи інтервалів, сума довжин яких $< \delta$, можна розглядати будь-яку скінчену або злічену систему інтервалів, сума довжин яких $< \delta$. Нехай для даного $\varepsilon > 0$

вибрали $\delta > 0$ таке, що

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

для будь-якої скінченної системи інтервалів (a_k, b_k), що задовольняють

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

і нехай (α_k, β_k) – зліченна система інтервалів сума довжин яких не перевищує δ. Тоді для будь-якого маємо

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon$$

при $n \to \infty$ отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leq \varepsilon$$

.

2. Будь-яка абсолютно неперервна функція має обмежену варіацію.

3. Сума абсолютно неперервних функцій є абсолютно неперервною функцією.

4. Добуток абсолютно неперервної функції і числа є абсолютно неперервною функцією.

5. Будь-яка абсолютно неперервна функція може бути представлена як різниця двох абсолютно неперервних неспадних функцій.

1.2 Теорема Арцела

Для вирішення питання компактності метричного простору, розглянемо критерій компактності – теорему Арцела [2].

Теорема 1.1 (Арцела). *Для того щоб сім'я Φ неперервних функцій, визначена на відрізку $[a, b]$, була відносно компактною в $C[a, b]$, необхідно і достатньо, щоб ця сім'я була рівномірно обмежена і одностайно неперервна.*

1.3 Відомості з багатозначного аналізу

1.3.1 Метрика Хаусдорфа

Позначимо $comp(R^n)$– сукупність непорожніх компактів з R^n. Якщо $B \subset R^n$ – компакт, то відстань від точки $a \in R^n$ до множини B – найменша відстань від точок множини B до точки a:

$$\rho(a, B) = min_{b \in B} \|a - b\|.$$

Використовуючи відстань можна визначити функцію відхилення. Нехай $A \in comp(R^n), B \in comp(R^n)$. Відхиленням множини від множини називається [5]

$$\beta(A, B) = max_{a \in A} \rho(a, B).$$

Властивості відхилення такі [5]:

1. $\beta(A, B) \geqslant 0$;
2. $A \subseteq B \Leftrightarrow \beta(A, B) = 0$;
3. не завжди $\beta(A, B) = \beta(B, A)$.

Означення 1.2. *Метрика Хаусдорфа визначається наступним чином*

$$\alpha(A, B) = max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\},$$

$A \in comp(R^n), B \in comp(R^n)$ *[5].*

Метрика Хаусдорфа між множинами A, B та найбільше відхилення між A, B співпадають. Властивості метрики Хаусдорфа [5]:

1. $\alpha(A, B) \geqslant 0$;
2. $\alpha(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

1.3.2 Багатозначне відображення

Багатозначне відображення – це довільна функція $F : R^m \to comp(R^n)$ тобто функція аргументами якої є вектори $x \in R^m$, а значеннями – елементи простору $comp(R^n)$, тобто непорожні компактні множини з простору (R^n). Оскільки простори $R^m, comp(R^n)$ метричні можна дати визначення неперервності для багатозначного відображення [5].

Багатозначне відображення $F(x)$ неперервне в точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що нерівність $\alpha(F(x), F(x_0)) \leq \varepsilon$ виконується коли $|x - x_0| \leq \delta$, тобто $\alpha(F(x), F(x_0)) \to 0$ при $|x - x_0| \to 0$ [4].

Функція $F(x)$ напівнеперервна зверху (напівнеперервні знизу) в точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ що нерівність $\beta(F(x), F(x_0)) \leq \varepsilon$ $(\beta(F(x_0), F(x)) \leq \varepsilon)$ виконується коли $|x - x_0| \leq \delta$, тобто $\beta(F(x), F(x_0)) \to 0$ $(\beta(F(x), F(x_0)) \to 0)$ при $|x - x_0| \to 0$ [4].

Функція неперервна (напівнеперервна зверху, напівнеперервна знизу) на множині, якщо вона неперервна (напівнеперервна зверху, напівнеперервна знизу) в кожній точці цієї множини.

Багатозначне відображення $F : R^m \to comp(R^n)$ є ліпшицевим зі сталою l, якщо для будь-яких двох точок $x_1, x_2 \in R^m$ виконується

$$\alpha(F(x_1), F(x_2)) \leq l|x_1 - x_2|$$

[5].

1.3.3 Інтегральна лійка

Розглянемо визначення інтегральної лійки та множини досяжності.

Означення 1.3. *Інтегральною лійкою задачі* (2.1) *називається множина $V(t_0, x_0)$ всіх точок з $D(F)$, які належать графікам розв'язків цієї задачі [7].*

Означення 1.4. *Множиною досяжності задачі* (2.2) *в момент часу t_1 називається множина*

$$S(t_1, t_0, x_0) = \{x \in R^m : (t_1, x) \in V(K)\}.$$

Тобто це проекція перерізу інтегральної лійки гіперплощиною $t = t_1$ на фазовий простір R^n [7].

1.3.4 Опорна функція

Опорна функція непорожньої компактної множини $F \subset R^n$ – це скалярна функція $c(F, \psi)$, що визначається співвідношенням

$$c(F, \psi) = max_{f \in F} \langle f, \psi \rangle. \tag{1.1}$$

[5]

Нехай $\psi_0 \in R^n$ – деякий фіксований вектор, $f_0 \in F$ – один з векторів на якому досягається максимум в формулі(1.1) для $\psi = \psi_0$ тобто

$$c(F, \psi) = \langle f_0, \psi_0 \rangle. \tag{1.2}$$

Тоді ψ_0 – опорний вектор до множини F в точці f_0, сукупність всіх таких точок $U(F, \psi_0)$, що задовольняють рівність (1.2) називається опорною множиною до множини F в напрямку ψ_0. Гіперплощина Γ_{ψ_0} в просторі R^n задана співвідношенням

$$\Gamma_{\psi_0} = \{x \in R^n : \langle x, \psi_0 \rangle = \langle f, \psi_0 \rangle\},$$

називається опорною гіперплощиною до множини в напрямку ψ_0.

Означення 1.5. *Функція $F : [a, b] \times D \to comp(R^n)$, $(t, x) \to F(t, x)$, де $[a, b] \subset R$ – проміжок $D \subset R^n$ – область, називається відображенням типу Каратеодорі, якщо:*

- *для будь-якого $x \in D$ функція $F(\cdot, x)$ – вимірна;*
- *майже всюди $t \in [a, b]$ функція $F(t, \cdot)$ – неперервна;*
- *існує локально інтегрована функція $\lambda : [a, b] \to R$ така, що $\|F(t, x)\| \leq \lambda(t)$ для довільних $(t, x) \in [a, b] \times D$.*

[7]

Розділ 2

Диференціальні включення. Властивості розв'язків

2.1 Існування розв'язку

Диференціальне включення – це співвідношення

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x) \tag{2.1}$$

де $x = x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ – шукана вектор-функція, F – багатозначна функція, що ставить у відповідність кожній точці з області D, множину $F(x,t) \subset R^n$.

Диференціальне включення (2.1) можна розглядати як узагальнення звичайного диференціального рівняння $\dot{x} = f(t, x)$, у випадку, коли функція $f(t, x)$ неоднозначна. В теорії диференціальних включень виникають такі ж проблеми, які властиві звичайним диференціальним рівнянням. Це теореми існування та продовжуваності розв'язку, обмеженості, неперервної залежності від початкових умов та параметрів і т.п. Одночасно, в диференціального включення, з кожної початкової точки x_0 виходить ціле сімейство траєкторій. У зв'язку з цією багатозначність постають питання замкнутості, опуклості сімейства розв'язків, існування граничних розв'язків, виділення розв'язків з заданими властивостями та багато інших [1].

Теорія диференціальних включення дозволяє вивчати, математичними методами, властивості розв'язків диференціальних рівнянь, оскільки є означенням загального розв'язку диференціального рівняння з розривною правою частиною, що не залежить від розміщення поверхні розриву, і описує рух для досить широкого класу реальних задач. Наразі теорія диференціальних включень розвинена досить добре. Вона зародилась в тридцяті роки минулого століття, але застосування для неї знайшлося лише після відкриття максимуму Понтрягіна. Виявилося, що в теорії керування, припущення на керування, іноді зручно записувати через багатозначну функцію $f(x, U)$ [4].

Диференціальні включення виникають в деяких математичних і прикладних задачах. Якщо права частина рівняння $x' = f(t, x)$ відома з похибкою не більше ε, то його розв'язок задовольняє нерівність $|x' - f(t, x)| \leq \varepsilon$. Тобто $x' \in F(t, x)$, де $F(t, x)$ – замкнений ε-окіл точки $f(t, x)$ [4]. До диференціального включення (2.1) можна звести і більш загальну диференціальну нерівність $\varphi(t, x, x') \leq 0$, якщо позначити через $F(t, x)$ множину тих значень v, для яких $\varphi(t, x, v) \leq 0$. Диференціальні рівняння $\dot{x} = f(t, x)$ з розривними правими частинами зводяться до диференціальних включень (2.1), де множина $F(t, x)$ будується певним чином за заданою вектор-функцією $f(t, x)$ [5].

Означення 2.1. *Розв'язком диференціального включення* (2.1) *називається абсолютно неперервне багатозначне відображення* $X(\cdot)$, *похідна якого майже всюди задовольняє включення* (2.1) *[4].*

В залежності від властивостей багатозначного відображення $F(t, x)$, розв'язок диференціального включення має різні диференціальні властивості. Найчастіше розглядають клас таких розв'язків. Вектор-функція $x(t)$, визначена на інтервалі або відрізку J [5],

є розв'язком, якщо на J вона абсолютно неперервна і майже всюди задовольняє включення (2.1);

є правильним розв'язком, якщо вона є розв'язком, а її похідна неперервна або має розриви лише першого роду;

є класичним розв'язком, якщо на всьому J вона має неперервну похідну і задовольняє включення (2.1).

В теорії звичайних диференціальних рівнянь інтегральну криву задачі Коші можна апроксимувати на скінченному проміжку ламаною Ейлера, яка є графіком наближеного розв'язку даного диференціального рівняння. Точність наближення залежить від кроку h, при цьому, якщо $h \to 0$, то послідовність ламаних Ейлера збігається до інтегральної кривої диференціального рівняння [7].

Теорема 2.1. *Нехай $F(t,x)$ задовольняє основним умовам в G і всі розв'язки, що проходять через точку $p = (t_0, x_0) \in G$ (або через точки компакту $K \subset G \cap \{t_0 \le t \le t_1\}$) на відрізку $[t_0, t_1]$ існують і їх графіки містяться в G. Тоді відрізок $t_0 \le t \le t_1$ лунки точки p(або лунки компакту K) і його переріз $A(t,p)$ (або $A(t,K)$) будь-якою площиною $t = const$ є напівнеперервними зверху функціями точки p (або компакту K) [4].*

2.2 Теореми існування розв'язку

Насамперед розглянемо теореми, що визначають умови існування розв'язку диференціального включення (2.1) [5].

Теорема 2.2. *Нехай майже при всіх $t \in [t_0, t_0 + a]$ для $|x - x_0| < b$ множина $F(t,x) \in conv(R^n)$, багатозначне відображення F напівнеперервне зверху по x; нехай існує однозначна вектор-функція $f(t,x) \in F(t,x)$, яка при будь-якому x вимірна по t, і така сумована функція $m(t)$, що*

$$|f(t,x)| \le m(t) \qquad \int_{t_0}^{t_0+a} m(t)dt \le b. \tag{2.2}$$

Тоді на відрізку $t_0 \le t \le t_0 + a$ існує розв'язок задачі

$$\dot{x} \in F(t,x) \qquad x(t_0) = x_0. \tag{2.3}$$

Теорема 2.3. *Нехай майже при всіх $t \in [t_0, t_0 + a]$ для $|x - x_0| \le b$ множина $F(t,x) \in comp(R^n)$, відображення F вимірне і напівнеперервне зверху по x, при x, при яких множина $F(t,x)$ неопукла, відображення F неперервне по x. Нехай $|F(t,x)| \le m(t)$ і виконується $\int_{t_0}^{t_0+a} m(t)dt \le b$. Тоді на відрізку $[t_0, t_0 + a]$ існує розв'язок задачі 2.3 [5].*

Теорема 2.4. *Нехай при $|t - t_0| \le a$, $|x - x_0| \le b$, множина $F(t,x)$ непорожня, замкнена, $|F(t,x)| \le m$ і багатозначне відображення F напівне-*

перервне знизу по t, x. Тоді на відрізку $|t - t_0| \leq d$, $d > 0$ існує розв'язок 2.3 [5].

Теорема 2.5. *Нехай виконуються наступні умови:*

1. *відображення F з (2.1) задовольняє умовам Каратеодорі;*

2. *відображення $F(t, \cdot)$ є ліпшецевим зі сталою l;*

3. *абсолютно неперервна функція $y : [0, \Delta] \to D \subset R_m$ задовольняє нерівності $\rho(\dot{x}(t), F(t, y(t))) \leq \eta(t)$ майже всюди на $t \in [0, \Delta]$, де функція $\eta \in L_1([0, \Delta], R)$;*

4. *$\bar{B}(x_0, \rho_0) \subset D$, де $\rho_0 = \int_0^\Delta \lambda(s)ds$, функція λ з 1.5 для відображення F.*

Тоді на відрізку $[0, \Delta]$ існує розв'язок $x(t)$ задачі (2.1) такий, що $\|x(t) - y(t)\| \leq r(t)$, де функція r – розв'язок задачі Коші

$$\dot{r} = lr + \eta(t), \qquad r(0) = \|x(0) - y(0)\|, \tag{2.4}$$

тобто

$$r(t) = r_0 e^{lt} + \int_0^t e^{l(t-s)}\eta(s)ds, \qquad r_0 = r(0). \tag{2.5}$$

[7]

Теорема 2.6. *Нехай виконуються умови 1), 2), 4) теореми 2.5 і для відображень F, G виконується нерівність*

$$\beta(G(t, y), F(t, y)) \leq \eta(t),$$

де $\eta \in L_1([0, \Delta], R)$. Тоді для довільного розв'язку $y : [0, \Delta] \to R^m$ задачі

$$\dot{y} \in G(t, y), \qquad y(0) = y_0 \tag{2.6}$$

існує розв'язок задачі (2.1) таке, що виконується

$$\|x(t) - y(t)\| \leq r(t),$$

де функція $r(t)$ визначається співвідношенням (2.5) [7].

Нехай в деякій області D для всіх t, x виконуються наступні умови

1. множина $F(t, x)$ непорожня, замкнена;
2. $|F(t, x)| \leq m(t)$, функція $m(t)$сумована;
3. функція $F(t, x)$ напівнеперервна зверху по x;
4. функція $F(t, x)$ вимірна по t;
5. множина $F(t, x)$ опукла.

За даних умов справедливі теореми про існування та продовження розв'язкі.

2.3 Компактність та зв'язність

Розглянево властивість компактності та зв'язності множини розв'язків диференціального включення. Має місце наступна лема [5].

Лема 2.1. *Нехай в замкненій області виконуються умови 1)-3). Тоді границя збіжної послідовності розв'язків включення (2.1) є розв'язком включення*

$$\dot{x} \in coF(t, x). \tag{2.7}$$

Така границя може не бути розв'язком включення (2.1) якщо множина $F(t, x)$ неопукла

Теорема 2.7. *Нехай в обмеженій замкненій області D виконані умови 1)-5). Якщо всі розв'язки включення (2.1) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ на відрізку $[a, b]$ існують та належать D, то множина $H_F(t_0, x_0)$ таких розв'зків є компактом в метриці $C[a, b]$. Ту ж властивість має множина $H_F(K)$ всіх розв'язків з довільними початковими умовами $(t_0, x_0) \in K$, K – компакт, $K \subset D$. Якщо K – зв'язний компакт (якщо K – точка), то множина $H_F(K)$ зв'язна [5].*

У випадку виконання умов 1)-5) з теореми 2.7 слідує компактність (у випадку зв'язності K, слідує також зв'язність) відрізку $a \leq t \leq b$ лійки точки або компактної множини K і перерізу цієї лійки довільною площиною $t = t_1 \in [a, b]$ [5].

Якщо множина $F(t,x)$ неопукла, то лійка і множина досяжності можуть бути незамкнені.

Теорема 2.8. *За умов 1)-5) для будь-якої точки (t_1, x_1) границі перезізу $t = t_1$ лійки існує розв'язок $x_\Gamma(t)$, що проходять через цю точку, і що проходять при $t_0 \le t \le t_1$ по межі лійки. Якщо, крім того, $F(t,x)$ неперервна по x,то $\dot{x}_\Gamma(t) \in \partial F(t, x_\Gamma(t))$ майже при всіх $t \in [t_0, t_1]$ [5].*

2.4 Залежність від початкових умов і від правої частини включення

Наближеним розв'язком з точністю до δ (δ-розв'язком) включення(2.1) на відрізку $a \le t \le b$ називається така абсолютно неперервна функція $x(t)$, що для неї та деякої функції $y(t)$ майже всюди на $[a,b]$ маємо $|y(t) - x(t)| < \delta$,

$$\rho(\dot{x}(t), F(t, y(t))) \le \eta(t), \qquad \int_a^b \eta(t)dt \le (b-a)\delta. \tag{2.8}$$

Лема 2.2. *Нехай $F(t,x)$ задовольняє умови 1)-3) в обмеженій замкненій області D, графіки δ_k-розв'язків $x_k(t)$ включення (2.1) при $a \le t \le b$ міститься в D, $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$. Тоді з послідовності $\{x_k(t)\}$ можна виділити підпослідовність, що збігається рівномірно на $[a,b]$; границя будь-якої підпослідовності δ_k-розв'язків ($\delta_k \to 0$, $k \to \infty$) включення (2.1) є розв'язком включення (2.7) [5].*

Якщо множина F неопукла, то не завжди границя послідовності δ_k-розв'язків (квазітраєкторія включення (2.1)) є границею послідовності розв'язків включення (2.1).

Умови, при яких множина розв'язків і відрізок лійки неперервно залежать від початкових умов і правої частини включення. Припускається, що всі розв'язки, які розглядаються, проходять всередині D.

Теорема 2.9. *Нехай $F(t,x)$ в області D задовольняє умовам 1), 4), 5), і для довільного $r > 0$ при $|x-y| \le r$ для майже всіх t маємо*

$$\alpha(F(t,x), F(t,y)) \le \omega(t,r); \tag{2.9}$$

функція $\omega(t, r)$ вимірна по t, неперервна по r, $\omega(t, r) \leq m_0(t), m_0(t) \in L_1$ (тобто $m_0(t)$ сумована), $\omega(t, 0) = 0$. Нехай при $t_0 \leq t \leq t_1$ функція $y(t)$ абсолютно неперервна, її графік міститься в D, $y(t_0) = y_0$ і майже при всіх $t \in [t_0, t_1]$

$$\rho(\dot{y}(t), F(t, y(t)) \leq \eta(t), \eta(t) \in L_1. \tag{2.10}$$

Тоді при $(t_0, x_0) \in D$ знайдеться такий розв'язок $x(t)$ задачі (2.3) що

$$|x(t) - y(t)| \leq r(t), \qquad |\dot{x}(t) - \dot{y}(t)| \leq \omega(t, r(t)) + \eta(t) \tag{2.11}$$

при майже всіх $t \in [t_0, t^*]$.$r(t)$ – верхній розв'язок задачі

$$\dot{r}(t) = \omega(t, r) + \eta(t), \qquad r(t_0) = |x_0 - y_0|, \tag{2.12}$$

t^* – довільне таке, що $(t, x(t)) \in D$ при $t_0 \leq t \leq t^*$ [5].

Наслідок 2.1. *Будь-який переріз $t = t'$ ($t' \in [t_0, t^*]$) лійки точки (t_0, y_0) для включення $\dot{y} \in G(t, y)$ міститься в замкненому околі радіуса $r(t')$ перерізу $t = t'$ лійки точки (t_0, x_0) для включення (2.1), $r(t)$ визначено в теоремі 2.9 [5].*

Наслідок 2.2. *Якщо верхній розв'язок задачі $\dot{r}(t) = \omega(t, r)$, $r(t_0) = 0$ рівний нулю при $t_0 \leq t \leq t_1$, то на відрізку $[t_0, t_1]$ множина розв'язків $H_F(t_0, x_0)$ і відрізок лійки точки (t_0, x_0) для включення (2.7) неперервно залежать від x_0 і від функції F [5].*

Наслідок 2.2 справедливий коли, наприклад, функція $F(t, x)$ задовольняє умові Ліпшиця по x:

$$\alpha(F(t, x), F(t, y)) \leq k(t)|x - y|, \qquad k(t) \in L_1. \tag{2.13}$$

2.5 Зв'язок між множинами розв'язкі включень $\dot{x} \in F(t, x)$ і $\dot{x} \in coF(t, x)$

Функція $\omega(t, r) \geq 0$ $(t \geq t_0, 0 \leq r \leq b)$ є функцією Камке, якщо вона неперервна по r, вимірна по t, $\omega(t, r) \leq m_0(t)$, $m_0(t) \in L_1[0, c]$ для будь-якого

c і при $t \geq t_0$ єдиним розв'язком задачі $\dot{r} = \omega(t, r)$, $r(t_0) = 0$ є функція $r(t) \equiv 0$ [5].

Теорема 2.10. *Нехай $F(t, x)$ задовольняє умови 1), 2), 4) і (2.9), де ω – функція Камке. Тоді кожен розв'язок включення (2.7) з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ є границею для рівномірно збіжної послідовностірозв'язків включення (2.1) з тою ж початковою умовою. Ці розв'язки можна вибрати правильними або класичними, якщо виконані умови існування таких розв'язків [5].*

2.6 R-розв'язки

Нехай маємо включення (2.1) і виконуються умови 1), 2), 4), 5). Нехай функція F неперервна по x, Переріз інтегральної лійки площиною $t = const$ буде замкненою множиною $R_0(t)$, що залежжть від t. Отже лійка є графіком багатозначної функції $R_0(t)$ [5].

Багатозначна функція $R_0(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_1)$ називається R-розв'язком, що породжений диференціальним включенням (2.1), якщо для кожного t множина $R(t)$ замкнен, функція $R(t)$ абсолютно неперервна (тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для довільних інтервалів, що не пертинаються, $(a_i, b_i) \subset [t_0, t_1]$ сума довжин яких $\sum(b_i - a_i)$ маємо $\sum \alpha(R(b_i), R(a_i)) < \varepsilon$) і для майже всіх t

$$\frac{1}{h}\alpha(R(t+h), \bigcup_{x \in R(t)} (x + hF(t, x))) \to 0, (h \to +0). \tag{2.14}$$

Теорема 2.11. *Для довільного компакту $R \subset R^n$ існує R-розв'язок з початковою умовою $R(t_0) = K$. Інтегральна лійка є графіком R-розв'язку $R_0(t)$. Якщо виконана умова (2.9) з функцією Камке $\omega(t, r)$, то R-розв'язок з початковою умовою $R(t_0) = K$ єдиний, неперервно залежить від K і графік $R(t)$ є інтегральною лійкою [5].*

Теорема 2.12 (Філіппова-Кастена)**.** *Нехай $n \in N$, V – відкрита підмножина з R^n, $v_0 \in V$ і функція $f : T \times V \times R \to R^n$ вимірна по v, r,неперервна по t для всіх $(t, v, r) \in T \times V \times R$. Більш того, нехай функція $y : T \to V$ абсолютно неперервна, $y(t_0) = v_0$ і множина $R^b(t)$ замкнена майже для всіх*

$t \in T$. *Тоді*

1. $\dot{y}(t) = f(t, y(t), \rho(t))$ *майже всюди в* T *для деякого* $\rho \in R^b$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), R^b(t))$$

майже всюди в T.

2. *Більш того, якщо відображення* $\Gamma : T \to comp(X)$ *вимірне, і функція* $\varphi : T \times V \times X \to R^n$ *вимірна по* v, x*,неперервна по* t *і*

$$f(t, v, R^b(t)) = \varphi(t, v, \Gamma(t))$$

для всіх $(t, v, r) \in T \times V \times X$, *то*

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), \rho(t))$$

майже всюди в T *для деякого* $\rho \in R^b$ *(тобо для деякої однозначної вітки* ρ *з* R^b*) тоді і тільки тоді, коли*

$$\dot{y}(t) = \varphi(t, y(t), \xi(t))$$

майже всюди в T *для деякой однозначної вітки* ξ *з* Γ

[3].

2.7 Лінійні диференціальні включення

Лінійне диференціальне включення – це включення виду

$$\dot{x} \in A(t)x(t) + B(t)U(t) \tag{2.15}$$

Множина досяжності для лінійного диференціального включення (2.15) шукається за наступною формулою

$$\mathscr{X}(t, M_0) = \Theta(t, t_0)M_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)B(s)\mathscr{U}(s)ds, \tag{2.16}$$

де $\Theta(t, t_0)$ – фундаментальна матриця системи нормована за моментом t_0,

$\Theta(t,s)$ – фундаментальна матриця системи нормована за моментом s, $\mathscr{U}(t)$ – клас допустимих керувань, M_0 – множина початкових умов, t_0 – початковий момент часу.

Приклад 2.1. Знайти множину досяжності для лінійного диференціального включення

$$\dot{x} \in ax + \mathscr{U},$$

де a – довільна стала, $\mathscr{U}(t) = [-b, b]$ – клас допустимих керувань, $b > 0$, $M_0 = [-1, 1]$, $t_0 = 0$ – початковий момент часу.

Розв'язання. Знайдемо фундаментальну матрицю: $\Theta(t, 0) = \Theta(t) = e^{at}$ та матрицю нормовану за моментом s: $\Theta(t, s) = e^{a(t-s)}$. Для знаходження множини досяжності, підставимо у формулу (2.16) відомі значення, отримаємо

$$\mathscr{X}(t, [-1, 1]) = e^{at}[-1, 1] + \int_0^t e^{a(t-s)}[-b, b]ds = \left[-e^{at}, e^{at}\right] +$$
$$+ [-b, b]\left(\frac{-e^{a(t-s)}}{a}\right)\Big|_0^t = \left[-e^{at}, e^{at}\right] + \left[-\frac{b}{a}(e^{at} - 1), \frac{b}{a}(e^{at} - 1)\right] =$$
$$= \left[-e^{at}\left(\frac{b}{a} + 1\right) + \frac{b}{a}, e^{at}\left(\frac{b}{a} + 1\right) - \frac{b}{a}\right].$$

Розглянемо випадок коли $a = 0.0025$ та $b = 0.00125$, $t \in [0, 800]$. Тоді множина досяжності матиме вигляд:

$$\mathscr{X}(t, [-1, 1]) = \left[-1.5e^{0.0025t} + 0.5, 1.5e^{0.0025t} - 0.5\right].$$

На графіку 2.1 можемо бачити, множину досяжності що знаходиться між кривими $-1.5e^{0.0025t} + 0.5$ та $1.5e^{0.0025t} - 0.5$.

Приклад 2.2. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи

$$\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + \mathscr{K}_r(0),$$

де $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $t \geq 0$, $t_0 = 0$,

$$\mathscr{U}(t) = \mathscr{K}_r(0) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\},$$

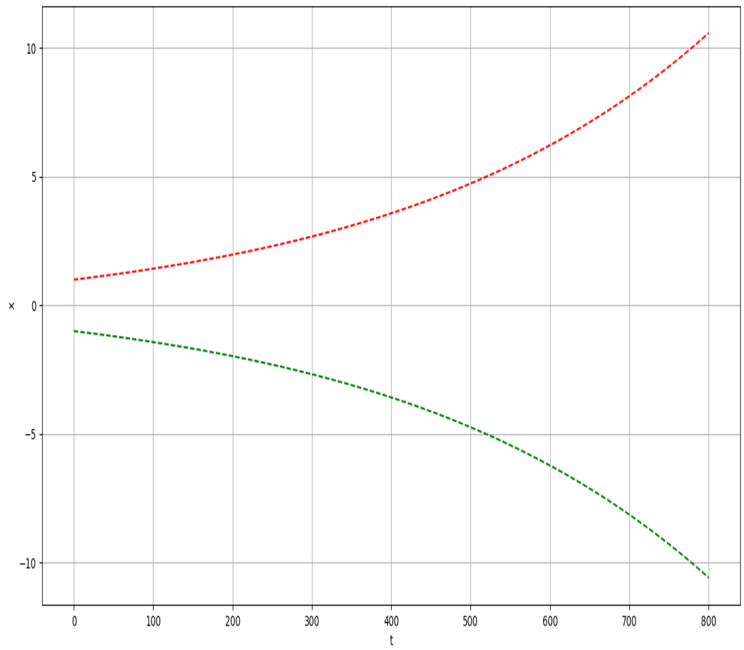

Рис. 2.1. Приклад 2.1

$x(0) \in \mathscr{M}_0$,

$$\mathscr{M}_0 = \mathscr{K}_1(0) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

Розв'яжемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t). \end{cases}$$

Тоді фундаментальна матриця, для даної системи, матиме наступний вигляд

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

І відповідно фундаментальна матриця нормована за моментом s

$$\Theta(t, s) = \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix}.$$

Запишемо загальну формулу для знаходження опорної функції множини досяжності для системи

$$c(\mathscr{X}(t,\mathscr{M}_0),\psi)=c(\mathscr{M}_0,\Theta^*(t,t_0)\psi)+\int_{t_0}^{t}c(\mathscr{U}(t),\Theta^*(t,s)\psi)ds. \tag{2.17}$$

Виконаємо деякі попередні розрахунки і знайдемо опорну функцію для $\mathscr{M}_0$

$$c\left(\mathscr{M}_0,\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\right)=\|\psi_1\|+\|\psi_2\|$$

та для $\mathscr{U}$

$$c\left(\mathscr{U}(t),\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\right)=r\|\psi_1\|+r\|\psi_2\|.$$

Підставивши всі отримані значення в формулу для знаходження опорної функції (2.17), отримаємо

$$\begin{aligned}c(\mathscr{X}(t),\psi)=\|\psi_1\cos t-\psi_2\sin t\|+\|\psi_1\sin t+\psi_2\cos t\|+\\ +r\int_0^t\|\psi_1\cos(t-s)-\psi_2\sin(t-s)\|ds+\\ +r\int_0^t\|\psi_1\sin(t-s)+\psi_2\cos(t-s)\|ds.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Розглянемо лінійне диференціальне включення де $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – вектор, тоді практично неможливо знайти аналітичну форму множини досяжності, лише в окремих випадках, наприклад коли матриця системи нульова. Нехай $x=(x_1,x_2)$, маємо формулу

$$\mathscr{X}(t)=\{x_1,x_2:\psi_1x_1+\psi_2x_2\le c(\psi_1,\psi_2),\quad \forall\psi_1,\psi_2\quad \psi_1^2+\psi_2^2=1\}, \tag{2.19}$$

зазвичай ψ_1 та ψ_2 вибирають з деякої замкненої поверхні, яка охоплює точку 0, наприклад з одиничної сфери. Якщо зафіксувати ψ_1,ψ_2, то $c(\psi_1,\psi_2)=const$ і (2.19) описує деяку множину що знаходиться між прямими

$$\psi_1x_1+\psi_2x_2=c(\psi_1,\psi_2)$$

де $\psi_1=const$, $\psi_2=const$. Щоб знайти множину $\mathscr{X}(t)$, знаходимо опорну функцію, перебираємо всі ψ_1,ψ_2, що належать одиничній сфері та будуємо прямі що задовольняють

$$\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2 = c(\psi_1, \psi_2).$$

Оскільки ψ_1, ψ_2 нескінченна кількість, отримаємо нескінченну систему лінійних нерівностей. Формула (2.19) – аналітичний вигляд множини досяжності для $x = (x_1, x_2)$. Щоб графічно зобразити множину досяжності, потрібно розбити одиничну сферу на відрізки і, для кожної точки, що розбиває сферу, побудувати опорну гіперплощину (2.19). Будуючи кожну наступну гіперплощину, шукаємо пертин даної множини з множиною, отриманою на попередньому кроці. Процес продовжується доки не перетнемо першу гіперплощину. Щоб побудувати сітку розбиття для кола скористаємось сферичними координатами

$$\begin{cases} \psi_1 = \cos p, \\ \psi_2 = \sin p, \end{cases}$$

де $p \in [0, 2\pi)$. Для рівномірної сітки $p = p_0 + kh$ де $h = \frac{2\pi}{n}, n \in N$.

Алгоритм наближеної графічної побудови множини досяжності перетину інтегральної лійки лінійного диференціального включення

1. Знаходимо опорну функцію множини досяжності.

2. Для кожного p знаходимо ψ_1, ψ_2.

3. Для кожного ψ_1, ψ_2 з (2.19) знаходимо множину $\mathscr{X}(t)$.

4. Обходячи кожен вузол сітки, розв'язуємо систему рівнянь, додаючи на кожному кроці наступне рівняння до системи.

Покладемо в прикладі 2.2 $r^2 = 1$, тобто

$$\mathscr{U}(t) = \mathscr{K}_1(0) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

тоді отримаємо наступну опорну функцію

$$c(\mathscr{X}(t), \psi) = \|\psi_1 \cos t - \psi_2 \sin t\| + \|\psi_1 \sin t + \psi_2 \cos t\| + \\ + \int_0^t \|\psi_1 \cos(t-s) - \psi_2 \sin(t-s)\| ds + \\ + \int_0^t \|\psi_1 \sin(t-s) + \psi_2 \cos(t-s)\| ds. \quad (2.20)$$

За наведеним алгоритмом побудуємо множини досяжності, з різними значеннями T, $x_1(0)$ та $x_2(0)$. Отримаємо наступні результати (Рисунки: 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6):

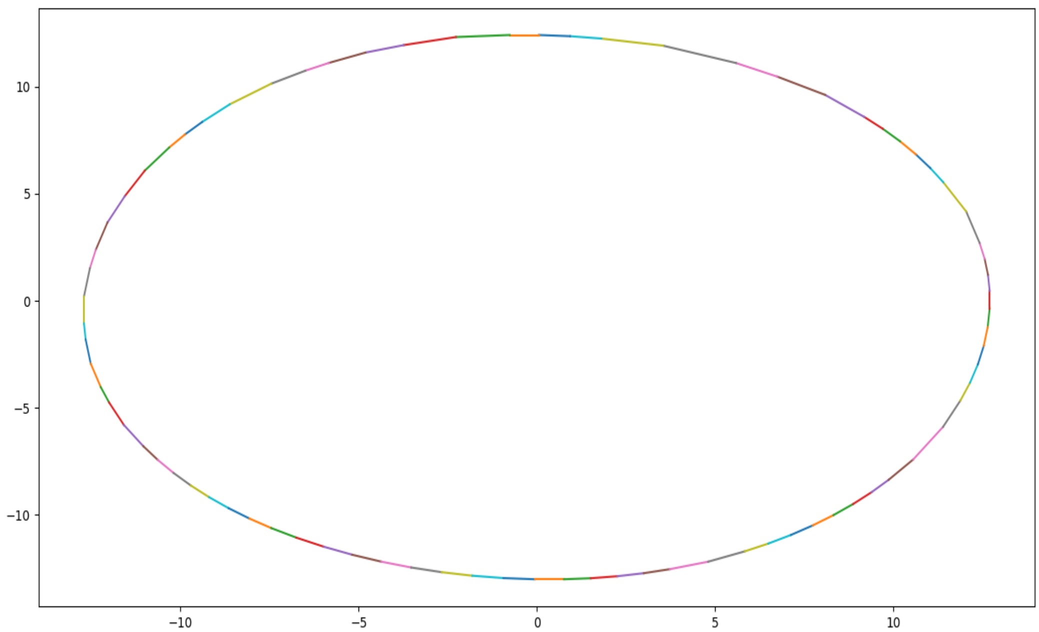

Рис. 2.2. $T = 10$ $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$

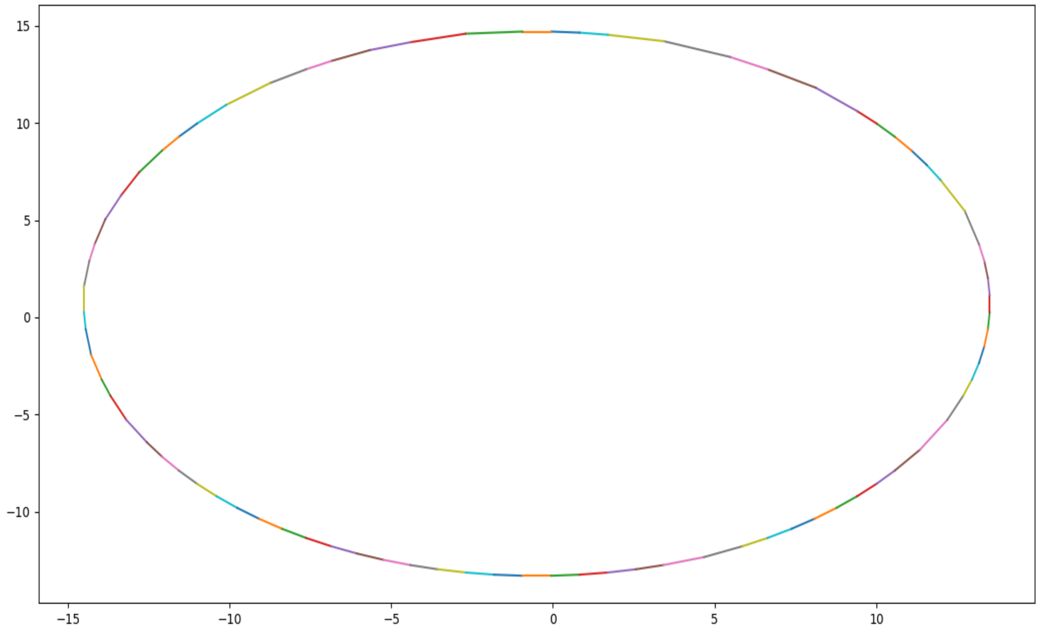

Рис. 2.3. $T = 11$ $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 0.7$

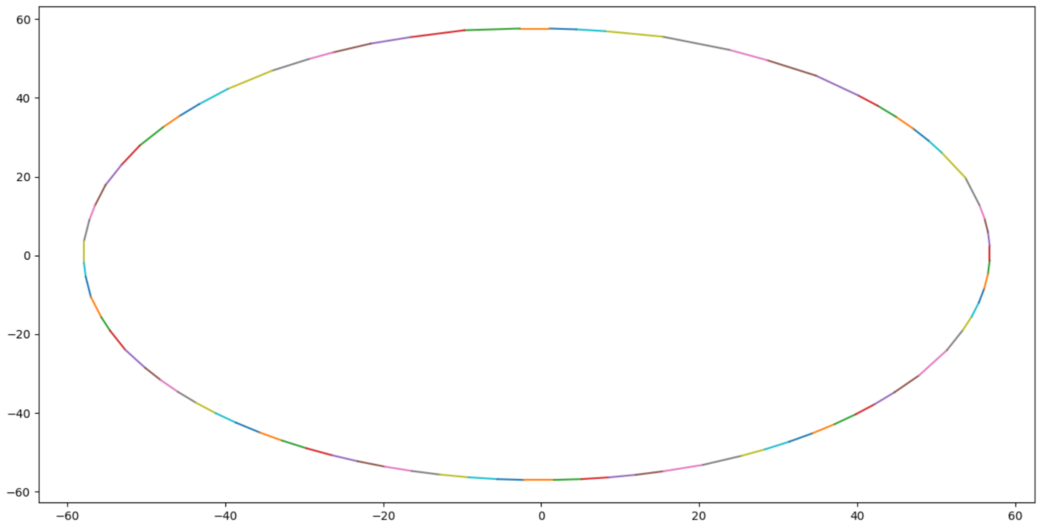

Рис. 2.4. $T = 45$ $x_1(0) = -0.4, x_2(0) = -0.9$

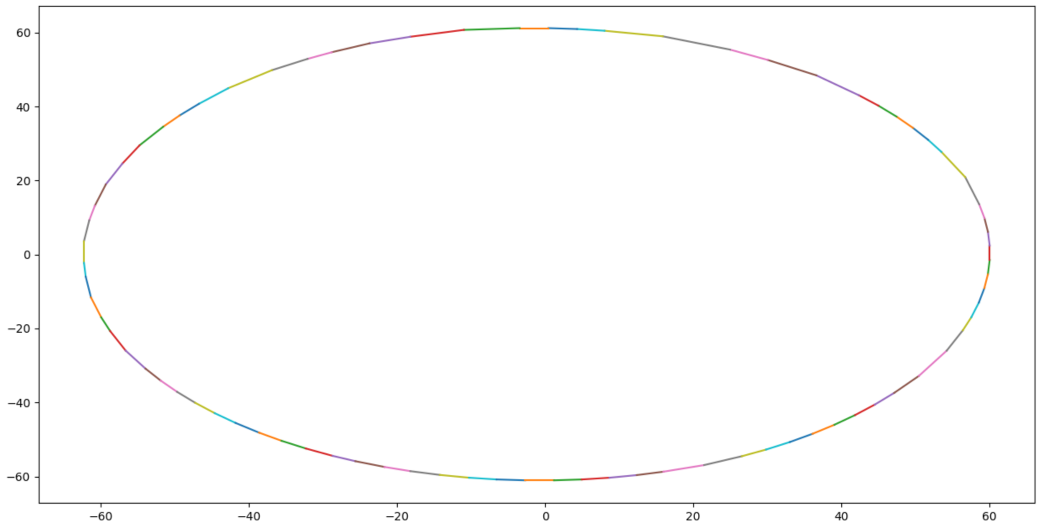

Рис. 2.5. $T = 48$ $x_1(0) = 0.8, x_2(0) = 0.6$

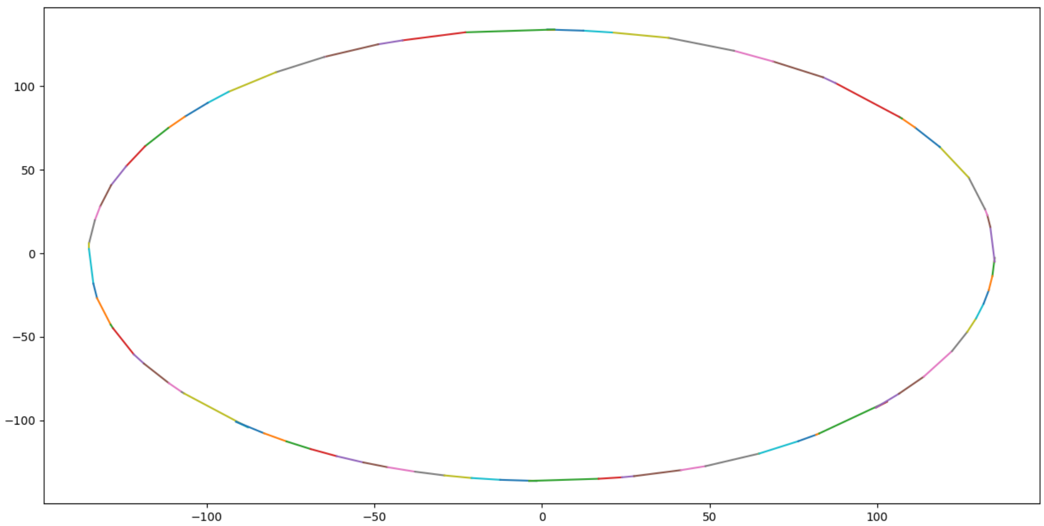

Рис. 2.6. $T = 106$ $x_1(0) = 0.4, x_2(0) = -0.8$

Розділ 3

Стійкість диференціального включення

3.1 Теореми Ляпунова про стійкість для диференціальних включень

Розглянемо автономне диференціальне включення

$$\dot{x} \in F(x). \tag{3.1}$$

Оскільки диференціальні включення не мають єдиного розв'язку, для них розглядається слабка та сильна стійкість.

Означення 3.1. *Розв'язок диференціального включення $x(t)$ є сильно стійким, якщо $\forall \varepsilon$ $\exists \delta$ таке, що всі розв'язки, що виходять з δ-околу нульового розв'язку $x(t) = 0$, лежать на відстані, що не перевищує ε, до незбуреного роз'язку.*

Означення 3.2. *Розв'язок диференціального включення є слабко стійким, якщо $\forall \varepsilon$ $\exists \delta$ і існує хоча б один розв'язок, що належить δ-околу нульового розв'язку $x(t) = 0$, лежить на відстані, що не перевищує ε до незбуреного роз'язку.*

Для функції $V(x) \in C^1$ введемо поняття верхньої та нижньої похідної в силу диференціального включення

$$\dot{V}^* = \sup_{y \in F(x)} (\nabla V) \cdot y, \qquad \dot{V}_* = \inf_{y \in F(x)} (\nabla V) \cdot y, \tag{3.2}$$

де $\nabla V \equiv grad_x V$. Для будь-якого розв'язку $x(t)$ за майже всіх t виконується

$$\dot{V} = (\nabla V) \cdot \dot{x}, \quad \dot{V}_* \leq \dot{V} \leq \dot{V}^*.$$

Теорема 3.1. *Нехай на множині $D(|x| < \rho_0)$ для правої частини диференціального включення (3.1) виконуються умови: $F(x) \in conv(R^n)$, $F(x)$ – напівнеперервна зверху за x, $0 \in F(0)$ і існують функції $V(x) \in C^1, V_0 \in C$, для яких*

$$V(0) = 0, \qquad V(x) \geq V_0(x) > 0 \qquad (0 < |x| < \varepsilon_0). \tag{3.3}$$

Тоді, якщо $\dot{V}^* \leq 0$ в D, то розв'язок $x(t) \equiv 0$ сильно стійкий [6], [4].

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \rho$. Розглянемо множину

$$\Omega = \{|x| = \varepsilon\},$$

$V(x)$ – неперервна функція тому, $\exists x_* \in \Omega$, $\min_{x \in \Omega} V(x) = V(x_*) = C$. Оскільки $V(x)$ – додатновизначена функція $C > 0$. Нехай $\delta > 0$ таке що, $V(x) < C$ для всіх $|x| < \delta$. Розглянемо розв'язок $x(\cdot)$ автономного диференціального включення (3.1) де $|x(0)| < \delta$. Розв'язок існує на деякому проміжку $[0, T]$.

Покажемо що $|x(t)| < \varepsilon$ при $t \geq 0$. Оскільки $V(x) \in C^1$ можемо записати

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \dot{V}(x(s))ds \leq \int_0^t \dot{V}^*(x(s))ds \leq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Отже $V(x(t)) \leq V(x(0))$. Оскільки $|x(0)| < \delta$ то $V(x(t)) \leq V(x(0)) < C$. Отже як тільки $|x(0)| < \delta$ виконується $|x(t)| < \varepsilon$ $\forall t \in [0, T]$. З чого слідує, що розв'язок $x(t) \equiv 0$ сильно стійкий. □

Теорема 3.2. *Нехай на множині $D(|x| < \rho_0)$ диференціальне включення (3.1) задоволяє умовам довільної теореми про існування розв'язків, $0 \in F(0)$*

і існують функції $V(x) \in C^1, V_0 \in C$, *для яких*

$$V(0) = 0, \qquad V(x) \geq V_0(x) > 0 \qquad (0 < |x| < \varepsilon_0). \tag{3.4}$$

Тоді, якщо $\dot{V}_* \leq 0$ *в* D, *то розв'язок* $x(t) \equiv 0$ *слабко стійкий [6], [4].*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \rho$. Розглянемо множину

$$\Omega = \{|x| = \varepsilon\},$$

$V(x)$ – неперервна функція тому, $\exists x_* \in \Omega$, $\min_{x \in \Omega} V(x) = V(x_*) = C$. Оскільки $V(x)$ – додатновизначена функція $C > 0$. Розглянемо множину $\xi = \{|x| \leq \varepsilon | V(x) \leq C\}$. Нехай $\delta > 0$ таке що, $V(x) < C$ для всіх $|x| < \delta$. $F(x)$ задовольняє умовам довільної теореми про існування розв'язків, тому можемо сказати, що $F(x)$ – напівнеперервна зверху функція, $F(x) \in comp(R^n)$. З умови існує функція $V_0(x)$ така, що $V_0(x) > 0$. Для довільної точки $x \in \Omega$ виконується $\dot{V}_* \leq -V_0(x)$, що, для даного випадку, еквівалентно $\forall x_0 \in \xi$ існує розв'язок $x(\cdot)$, що задовольняє

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq -\int_0^t V_0(x(s)) \leq 0.$$

З чого слідує $V(x(t)) \leq V(x(0)) < C$. Отже, як тільки $|x(0)| < \delta$ знайдеться $|x(t)| < \varepsilon \ \forall t \in [0, T]$. З чого слідує, що розв'язок $x(t) \equiv 0$ слабко стійкий. □

3.2 Стійкість за напрямком

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad t \geq t_0, \tag{3.5}$$

де: x – вектор стану розмірності n; $F(t, x)$ – вектор-функція, що задовольняєумови теореми існування та єдиності розв'язку та $F(0, t) = 0$ для довільного $t \geq t_0$. Припустимо, в n-мірному просторі заданий вектор l, норма якого рівна 1. Маємо означення стійкості за напрямком l.

Означення 3.3. *Незбурений розв'язок* $x(t) \equiv 0$ *системи* (3.5) *є стійким за напрямком* l, *якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує таке* $\delta > 0$, *що* $\|x(t)\| < \varepsilon$

для довільних початкових умов $x(t_0) = kl$, $0 < k \leq \delta$. Якщо крім умов означення 3.4 виконується умова $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи 3.4 називається асимптотично стійким за напрямком l [8].

Важливо зазначити, що зі стійкості за Ляпуновим слідує стійкість за будь-яким напрямком але не навпаки. Так система може бути стійка за певними напрямками, але нестійка за Ляпуновим.

Приклад 3.1. Наприклад для системи диференціальних рівнянь

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_2(t)
\end{aligned}
$$

маємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 1 = 0$, коренями якого є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. За таких значень система буде нестійка за Ляпуновим, але вона буде асимптотично стійка за напрямком $l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, тобто в напрямку власного вектора, що відповідає кореню $\lambda_2 = -1$ [8].

Позначимо M_{tl} множина всіх точок в момент часу t, які містять перетворення відрізку початкових умов $x(t_0) = k_1 l$, $0 \leq k_1 \leq k$, системою диференціальних рівнянь (3.5) за напрямком l [8].

Означення 3.4. *Незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (3.5) є стійким за Ляпуновим за напрямком l, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що розв'язок $\|x(t)\| < \varepsilon$, $t \geq t_0$, для всіх початкових умов $x(t_0) = kl$, $0 \leq k < \delta$. Якщо крім того $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи 3.4 називається асимптотично стійким за Ляпуновим [8].*

Виконується наступна теорема.

Теорема 3.3. *Якщо для системи (3.5) знайдеться додатновизначена на M_{tl} функція Ляпунова $V(t, x)$, повна похідна в силу системи (3.5) якої на цій множині недодатна, $\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(3.6)} \leq 0$, тоді розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (3.5) стійкий за Ляпуновим в напрямку l [8].*

Доведення. Розглянемо множину

$$
\Omega = \{x \in M_{tl} | \|x(t)\| = \varepsilon\}.
$$

Оскільки $V(t,x)$ – додатновизначена на M_{tl} то $V(t,x)$ додатновизначена також на Ω, та існує неперервна і додатновизначена функція $W(x)$ така, що

$$V(t,x) \geq W(x), \quad x \in \Omega.$$

Ω – компактна множина, тому за теоремою Вейєрштрасса знайдеться точка $x_* \in \Omega$, що

$$\min_{x \in \Omega} W(x) = W(x_*) = C,$$

отже $V(x_*, t) \geq C \geq 0$. Від супротивного. Припустимо існує момент часу $t_1 > t_0$ що $\|x(t_1)\| = \varepsilon$. Оскільки $V(0,t) = 0$ то знайдеться $\delta > 0$, що $\|x\| \leq \delta$ ($\|x_0\| \leq \delta$) тоді $V(t,x) < C$. За умовою теореми маємо

$$\left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(3.6)} \leq 0.$$

Проінтегруємо останню нерівність, отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dV(t,x)}{dt}\right)_{(3.6)} = V(x(t_1)) - V(x_0) \leq 0,$$

маємо наступне співвідношення

$$C \leq V(t, x_1) \leq V(x_0) < C.$$

Отримана нерівність не виконується. Отже припущення, що знайдеться таке $t_1 > t_0$, що $\|x(t_1)\| = \varepsilon$, невірне. Теорему доведено. $\square$

Розглянемо аналогічні означення для диференціальних включень

$$\dot{x} \in F(t,x). \tag{3.6}$$

Множина M_{tl} для диференціальних включень визначається аналогічно, як і для системи диференціальних рівнять, а саме це множина всіх точок в момент часу t, які містять перетворення відрізку початкових умов $x(t_0) = k_1 l$, $0 \leq k_1 \leq k$, системою диференціальних рівнянь (3.6) за напрямком l.

Для функції $V(t,x) \in C^1$ верхня та нижня похідна в силу диференціального включення визначаються як

$$\dot{V}^* = \sup_{y \in F(x)} (V_t + \nabla V \cdot y), \qquad \dot{V}_* = \inf_{y \in F(x)} (V_t + \nabla V \cdot y), \tag{3.7}$$

де $\nabla V \equiv grad_x V$. Для довільного розв'язку $x(t)$, за майже всіх t виконується

$$\dot{V} = V_t + \nabla V \cdot \dot{x}, \quad \dot{V}_* \leq \dot{V} \leq \dot{V}^*.$$

Означення 3.5. *Розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (3.6) сильно стійкий за напрямком l, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що всі розв'язки $\|x(t)\| < \varepsilon$, $t \geq t_0$, для всіх початкових умов $x(t_0) = kl$, $0 \leq k \leq \delta$.*

Означення 3.6. *Розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (3.6) слабко стійкий за напрямком l, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що хоча б один розв'язок $\|x(t)\| < \varepsilon$, $t \geq t_0$, для всіх початкових умов $x(t_0) = kl$, $0 < k \leq \delta$.*

Виконується наступна теорема.

Теорема 3.4. *Якщо для включення (3.6) знайдеться додатновизначена на M_{tl} функція Ляпунова $V(t,x)$, верхня похідна якої на цій множині недодатна $\dot{V}^* \leq 0$, тоді розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (3.6) сильно стійкий за Ляпуновим в напрямку l.*

Доведення. Розглянемо множину

$$\Omega = \{x \in M_{tl} | \|x(t)\| = \varepsilon\}.$$

Оскільки $V(t,x)$ – додатновизначена на M_{tl} то $V(t,x)$ додатновизначена також на Ω, та існує неперервна і додатновизначена функція $W(x)$ така, що

$$V(t,x) \geq W(x), \quad x \in \Omega.$$

Ω – компактна множина, тому за теоремою Вейєрштрасса знайдеться точка $x_* \in \Omega$, що

$$\min_{x \in \Omega} W(x) = W(x_*) = C,$$

отже $V(x_*,t) \geq C \geq 0$. Від супротивного. Припустимо існує момент часу $t_1 > t_0$ що $\|x(t_1)\| = \varepsilon$. Оскільки $V(0,t) = 0$ то знайдеться $\delta > 0$, що $\|x\| \leq \delta$

($\|x_0\| \le \delta$) тоді $V(t,x) < C$. За умовою теореми маємо

$$\dot{V}^* \le 0.$$

Оскільки $V(x) \in C^1$ можемо записати

$$V(x(t_1)) - V(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(x(s))ds \le \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}^*(x(s))ds \le 0.$$

Отримаємо наступне

$$C \le V(t,x_1) \le V(x_0) < C.$$

Отримана нерівність не виконується. Отже припущення, що знайдеться таке $t_1 > t_0$, що $\|x(t_1)\| = \varepsilon$, невірне. Тобто якщо $\|x_0\| \le \delta$ то для всіх розв'язків $\|x(t)\| < \varepsilon$, виконується означення сильної стійкості. Теорему доведено. □

Теорема 3.5. *Якщо для включення* (3.6) *знайдеться додатновизначена на* M_{tl} *функція Ляпунова* $V(t,x)$, *нижня похідна якої на цій множині недодатна* $\dot{V}_* \le 0$, *тоді розв'язок* $x(t) \equiv 0$ *системи* (3.6) *слабко стійкий за Ляпуновим в напрямку* l.

Доведення. Як і для доведення попередньої теореми розглядаємо множину

$$\Omega = \{x \in M_{tl} | \|x(t)\| = \varepsilon\}.$$

Оскільки $V(t,x)$ – додатновизначена на Ω, та існує неперервна і додатновизначена функція $W(x)$ така, що

$$V(t,x) \ge W(x), \quad x \in \Omega.$$

Оскільки Ω – компактна множина, то за теоремою Вейєрштрасса знайдеться точка $x_* \in \Omega$, що

$$\min_{x\in\Omega} W(x) = W(x_*) = C,$$

отже $V(x_*,t) \ge C \ge 0$. Від супротивного. Припустимо існує момент часу $t_1 > t_0$ що $\|x(t_1)\| = \varepsilon$. Оскільки $V(0,t) = 0$ то знайдеться $\delta > 0$, що $\|x\| \le \delta$ ($\|x_0\| \le \delta$) тоді $V(t,x) < C$. За умовою теореми маємо

$$\dot{V}_* \le 0.$$

Існує розв'язок $x(t) \in \Omega$ для якого виконується

$$V(x(t_1)) - V(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(x(s))ds \leq \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}^*(x(s))ds \leq 0.$$

Отримаємо наступне

$$C \leq V(t, x_1) \leq V(x_0) < C.$$

Отримана нерівність не виконується. Отже припущення, що знайдеться таке $t_1 > t_0$, що $\|x(t_1)\| = \varepsilon$, невірне. Тобто якщо $\|x_0\| \leq \delta$ то знайдеться хоча б один розв'язок, такий що $\|x(t)\| < \varepsilon$, виконується означення слабкої стійкості. Теорему доведено. $\square$

Висновки

У кваліфікаційній роботі на здобуття ступеня бакалавра висвітлені властивості розв'язків диференціальних включень та проведений аналіз умов стійкості розв'язків на основі другого методу Ляпунова. Основні результати такі:

1. Проаналізовано властивості розв'язків диференціальних включень.

2. Реалізовано алгоритм побудови множини досяжності лінійних диференціальних включень. Проведені обчислювальні експерименти.

3. Розглянуто теореми про умови слабкої та сильної стійкості розв'язків автономних диференціальних включень на основі другого методу Ляпунова.

4. Обгрунтовано теореми про умови слабкої і сильної стійкості розв'язків диференціальних включень за напрямком.

Розглянуті в роботі теореми і алгоритми можуть бути застосованими при доведенні теорем існування розв'язків задач керування, при аналізі розв'язків систем за умов детермінованої невизначеності.

Список використаних джерел

[1] Jean-Pierre Aubin, Arrigo Cellina *Differential Inclusions* - Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984. - 342 с.

[2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* - М.: Наука, 1976. - 543 с.

[3] Варга Дж.*Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями* - М.: Наука, 1977. - 624 с.

[4] Филиппов А. Ф.. *Дифференциальние уравнения с разрывными правыми частями и дифференциальные включеня* :Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003 С. - 265-288

[5] Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. *Дифференциальные включения и оптимальное управление.* - М.: Наука, 1985 С. - 194–252

[6] Georgi V. Smirnov *Introduction to the Theory of Differential Inclusions.* American Mathematical Soc., 2002. - 226 с.

[7] Филатов О. П. *Лекции по многозначному анализу и дифференциальным включениям.* - Самара: Самарский университет, 2000. - 115 с.

[8] Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. *Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков.* - Київ: Наукова думка, 1985. - 304 с.