

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
за спеціальністю 113 Прикладна математика

**Чисельне моделювання процесу розповсюдження
випромінювання в деформуючому середовищі**

Студента 4 курсу

кафедри обчислювальної математики

Григоровича Олександра Сергійовича

Науковий керівник

кандидат фізико-математичних наук, асистент

Оноцький В'ячеслав Валерійович

“ _____ ” _____ 2021р.

Робота заслухана на засіданні кафедри обчислювальної математики та
рекомендована до захисту в ДЕК, протокол

Завідувач кафедри обчислювальної математики

проф. Ляшко С.І.

Київ - 2021

Зміст

Зміст	0
Вступ.....	2
Літературний огляд	3
Математична модель.....	11
Дискретна модель.....	14
Висновки	20
Перелік літератури	21

Вступ

Адаптивна оптика - розділ оптики, що вивчає методи усунення нерегулярних спотворень, що виникають при поширенні світла в неоднорідному середовищі, за допомогою керованих оптичних елементів. Основні завдання адаптивної оптики - це підвищення межі дозволу наглядових приладів, концентрація оптичного випромінювання на приймачі або мішені і тому подібне.

Адаптивна оптика застосовується в конструюванні наземних астрономічних телескопів, в системах оптичної комунікації, в промисловій лазерної техніки та в офтальмології, де дозволяє компенсувати, відповідно, атмосферні спотворення, аберації оптичних систем, в тому числі оптичних елементів очей людини.

Завдяки чисельному моделюванню процесів розповсюдження високоенергетичного оптичного випромінювання в середовищі, властивості якого змінюються під дією енергетичного поля самого пучка випромінювання і тим самим деформують початковий напрям розповсюдження пучка, є можливість дослідження енергетичних полів, можливість викривлень таких оптичних випромінювань та можливість їх компенсації.

У даній роботі розглядається функціонування системи, робота якої вивчається в умовах самозбурення. В моделі системи враховуються амплітудні та фазові ефекти, що приводить до дослідження комплексно-значних енергетичних полів.

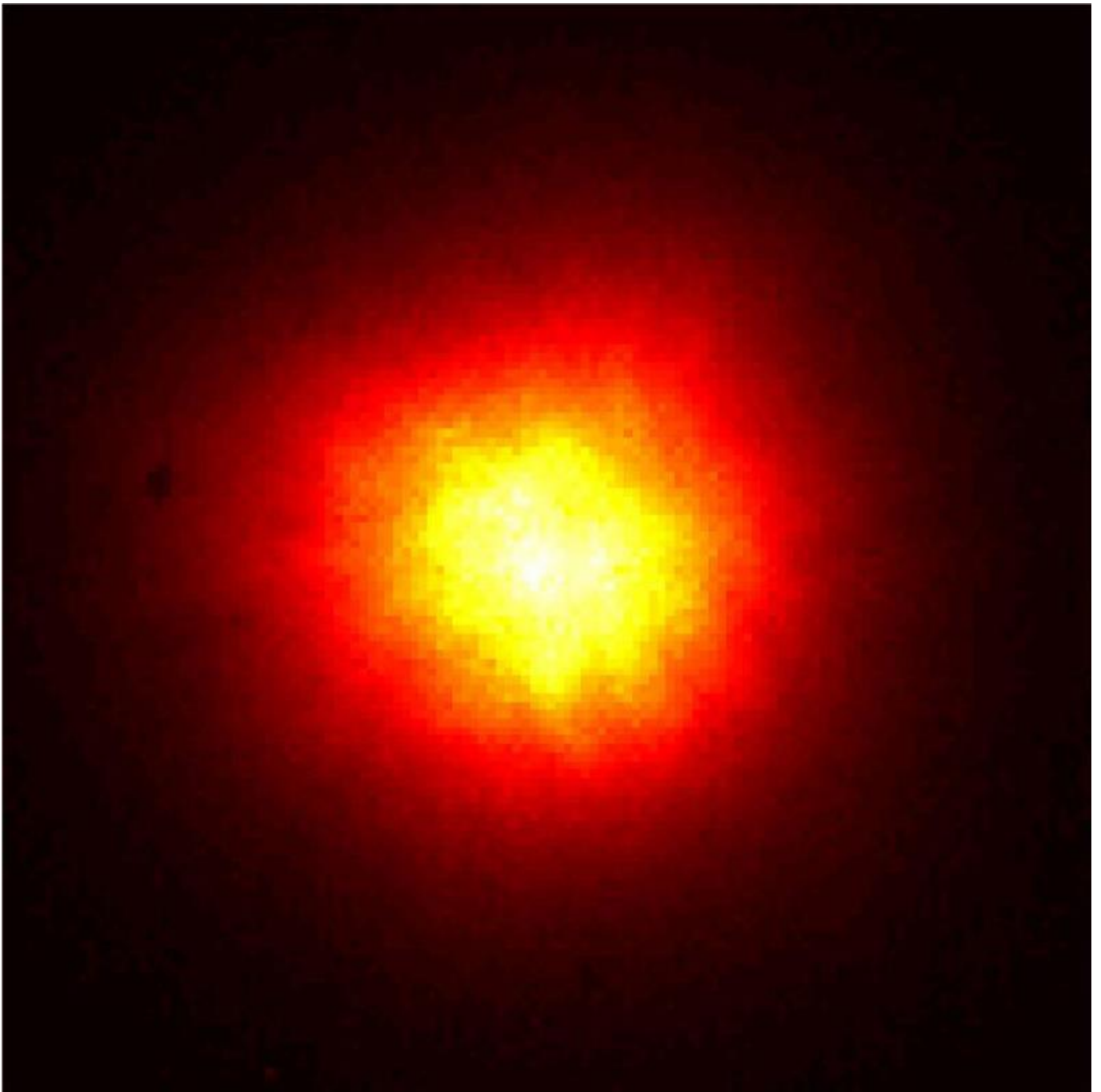
Літературний огляд

1.1. Области застосування методів адаптивної оптики.

У промислових установках лазерного різання і зварювання, в системах обробки матеріалів відстань від джерела лазерного випромінювання до об'єкту може складати 10 і більше метрів. Нагрівання середовища і оптичних елементів, потоки повітря в каналі поширення і інші фактори призводять до зменшення якості виконуваної операції. Введення адаптивної корекції у даних умовах дозволяє майже повністю компенсувати спотворення випромінювання.

Адаптивна корекція спотворень також використовується у конфокальних скануючих мікроскопах, що працюють завдяки сфокусованому лазерному пучку, що падає на зразок та віддзеркалюється від зразка або проходить через зразок після чого попадає на точкову апертуру. У результаті введення випадкових нахилів пучок відхиляється й інколи не попадає у точкову апертуру.

Адаптивна оптика усуває спотворення хвильового фронту, внесені земною атмосферою, за допомогою оптичного компонента, який вводиться в світловий промінь і який може вводити керовані зустрічні спотворення хвильового фронту, як просторові, так і часові. Завдяки оптичному компоненту, що вводить керовані зустрічні спотворення, астрономічні телескопи здатні мінімізувати спотворення, внесені земною атмосферою. На малюнках нижче можна побачити якість зображення без корекції хвильового фронту(верхній малюнок) та із корекцією хвильового фронту(нижчий малюнок).

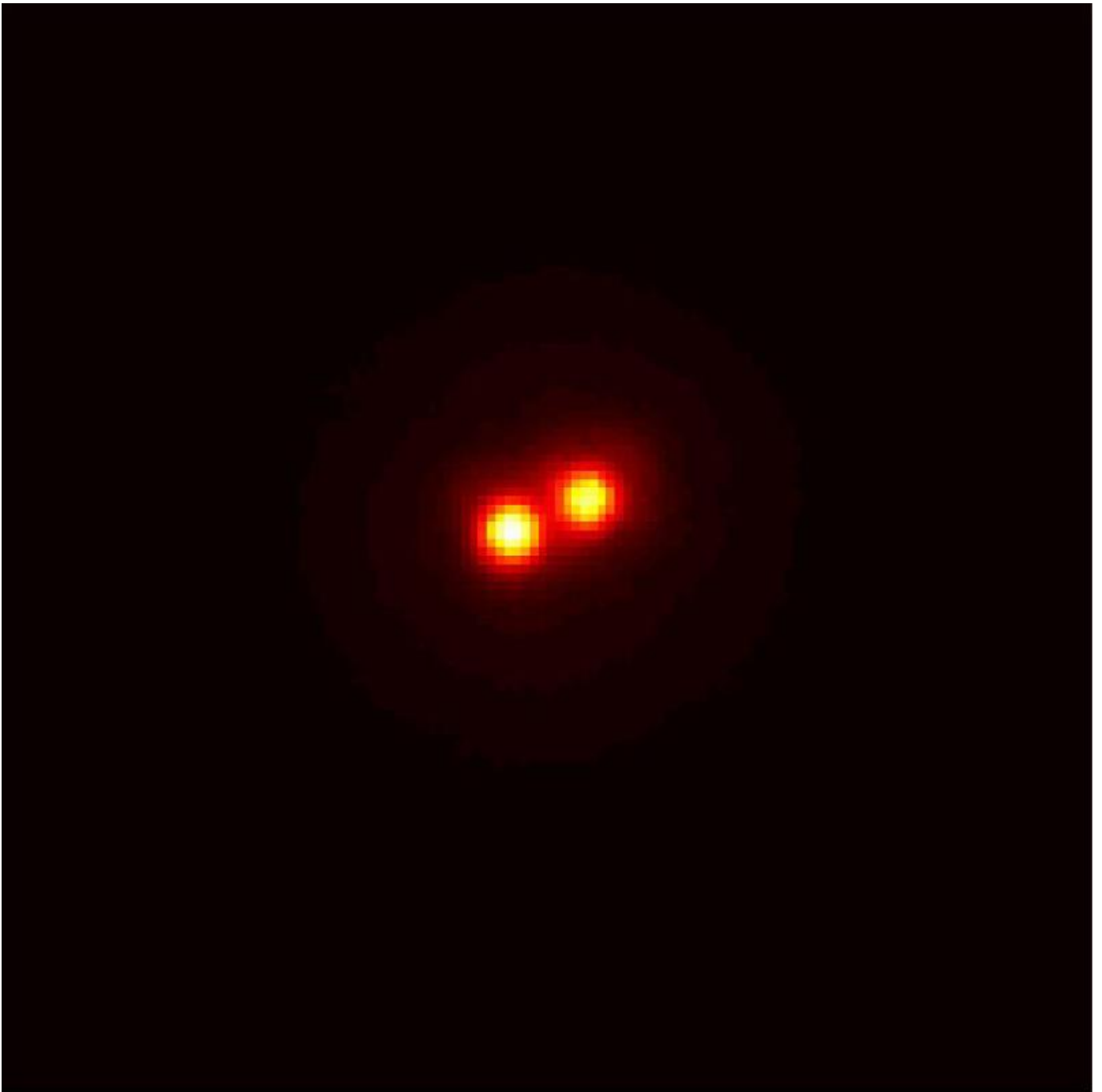


The Star HIC 59206 (uncorrected image)
(VLT KUEYEN + MACAO-VLTI)

ESO PR Photo 12b/03 (13 May 2003)

©European Southern Observatory





The Star HIC 59206 (AO corrected image)
(VLT KUEYEN + MACAO-VLTI)

ESO PR Photo 12c/03 (13 May 2003)

©European Southern Observatory



Адаптивна оптика використовується в мікроскопічних програмах для корекції аберацій, що виникають при дослідженні зразку, а також для корекції аберацій, спричинених невідповідністю індексу в мікроскопі. Корекція цих аберацій дозволяє роздільну здатність мікроскопа бути високою і широко використовується в

багатофотонній мікроскопії, конфокальній мікроскопії та флуоресцентній мікроскопії.

Зображення сітківки із допомогою адаптивної оптики забезпечило вчених революційними інструментами для вивчення будови та функції сітківки в живому оці. Від моделей тварин до клінічних пацієнтів, візуалізація адаптивної оптики змінює підхід вчених до дослідження сітківки. Надаючи клітинні та субклітинні деталі без необхідності гістології, тепер можна проводити широкомасштабні дослідження, а також зрозуміти, як змінюється окрема сітківка з часом. Оскільки візуалізація сітківки із допомогою адаптивної оптики не залежить від безпосереднього контакту вона має перспективу для включення в клінічні випробування, що забезпечують клітинні підходи до моніторингу захворювань та терапевтичних втручань. Включаючи візуалізацію, чутливу до відмінностей у розсіюючих властивостях тканин сітківки, вона особливо чутлива до хвороб, які можуть різко вплинути на властивості тканин сітківки.

1.2. Адаптивні дзеркала.

Адаптивне дзеркало є найбільш популярним інструментом для управління хвильовим фронтом і корекції оптичних аберацій. Зазвичай для формування фазового профілю випромінювання використовують гнучкі дзеркала, керовані системою актуаторів. Можна виявити 3 основні групи коректорів:

1. Дзеркала з локальної функцією відгуку актуаторів (пластини, деформуються сервоприводами, закріплені в дискретних точках).
2. Дзеркала, для яких функції відгуку приводів не є локальними. Це біморфні коректори, форма дзеркала задається пластинами електродів.
3. Мембранні дзеркала - це тонкі пластини, підвішені між електродами, функції відгуку актуаторів в цьому випадку не є локальними.

Різні проблеми, що вирішує адаптивна оптика, вимагають різної елементної бази. Цим можна пояснити велику кількість і різноманітність типів адаптивних

дзеркал, що розробляються в теперішній час. Неможливо виготовити універсальне дзеркало, але існують загальні вимоги до коректора:

- широкий динамічний діапазон,
- мале число актуаторів,
- ефективність відтворення аберацій,
- температурна стабільність,
- сумісність з датчиком хвильового фронту,
- простота виготовлення і застосування.

Коректор такого типу може бути використаний в установках, призначених для компенсації спотворень пучків, але, звичайно, деякі його характеристики (розміри, число приводів, точність відтворення фази) повинні підбиратися з урахуванням особливостей конкретної адаптивної системи.

1.3. Актуатори та їх взаємодія із системою.

Актуатор - це компонент машини, який відповідає за переміщення та управління механізмом або системою, наприклад, за допомогою відкриття клапана. Говорячи простою мовою, це "рушій".

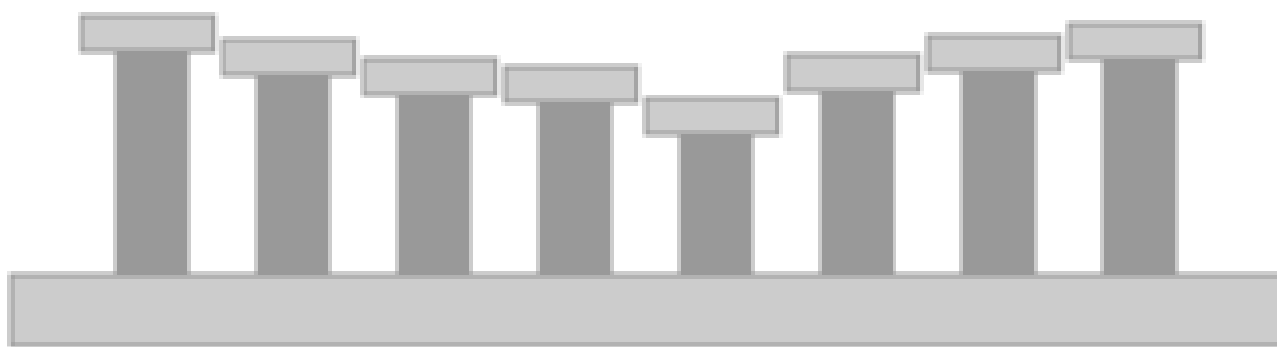
Для виконавчого механізму необхідний сигнал управління та джерело енергії. Сигнал управління має відносно низьку енергію і може бути електричною напругою або струмом, пневматичним тиском або тиском гідравлічної рідини або навіть людською потужністю. Основним джерелом енергії може бути електричний струм, гідравлічний тиск або пневматичний тиск. Коли він отримує сигнал управління, виконавчий механізм реагує, перетворюючи енергію джерела в механічний рух. В електричному, гідравлічному та пневматичному розумінні це форма автоматики або автоматичного управління.

Деформуючі дзеркала - це дзеркала, поверхня яких може деформуватися, щоб досягти контролю хвильового фронту та корекції оптичних аберацій. Деформуючі дзеркала використовуються в поєднанні з датчиками хвильового фронту та

системами управління в режимі реального часу в адаптивній оптиці. Завдяки різновидам адаптивних дзеркал та їх роботою із актуаторами є можливість підібрати необхідне обладнання для будь-якої задачі. Прикладами є такі дзеркала як: сегментовані дзеркала та суцільні поверхневі дзеркала.

У фізиці ступенями свободи механічної системи є кількість незалежних параметрів, що визначають її конфігурацію або стан. Відбивна поверхня сегментованого дзеркала складається з невеликих жорстких (не деформуючих) сегментів, які можна окремо переміщати (з одним або декількома ступенями свободи). Рух одного дзеркального сегмента, як правило, має незначний вплив на інші сегменти.

Між дзеркальними сегментами обов'язково існують проміжки, які спричиняють певні втрати світла, а також дифракційні втрати, але необхідні для вільного переміщення сегментів. Додаткові дифракційні втрати можуть виникнути, коли сусідні дзеркальні сегменти встановлені таким чином, що на поверхні виникає ступінь. Цього не уникнути, коли дзеркала можна переміщати лише вгору і вниз, як показано на малюнку (а), але існують також варіанти з трьома приводами на дзеркало, де кожне дзеркало можна нахилити так, щоб уникнути будь-яких кроків або принаймні звести до мінімуму.



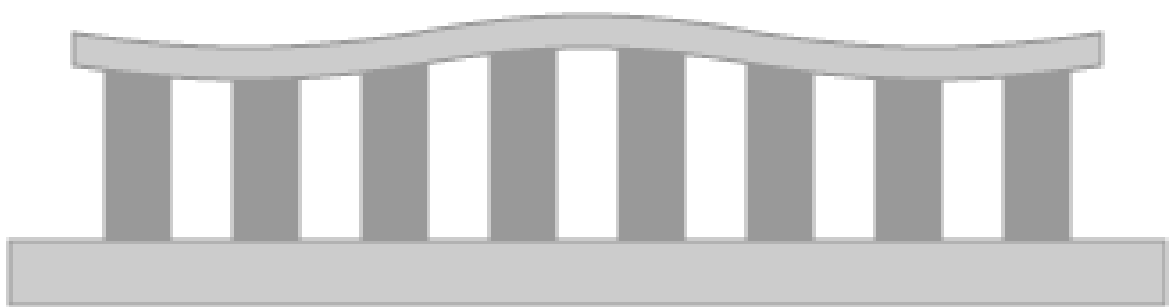
(a) segmented mirror

Сегментовані дзеркальні пристрої часто реалізуються як мікроелектромеханічні системи на кремнієвій платформі. Ця масштабована технологічна платформа дозволяє виробляти дзеркала з великою кількістю

сегментів. Виробничі витрати в принципі можуть бути досить низькими, але значно зростають із збільшенням кількості сегментів, оскільки тоді потрібна більша площа стружки, і вихід продукції може бути зменшений із збільшенням ймовірності локалізованих несправностей у великому пристрої. Таким чином, ця технологія найкраще підходить для дзеркал з відносно невеликим розміром, які, тим не менше, можуть мати велику кількість сегментів. Можлива проблема полягає в тому, що зазвичай потрібно оптичне вікно для захисту пристрою від окислення; що може турбувати через паразитні відбиття, незважаючи на антивідбивні покриття на вікні.

Сегментовані дзеркала зазвичай не використовуються для програм, що вимагають найвищої якості зображення, наприклад, в астрономічних візуалізаціях, але може бути доцільним особливо там, де важливий невеликий розмір і багато ступенів свободи, також відносно низька вартість.

Деформовані дзеркала також можуть бути виготовлені із суцільною деформуючою дзеркальною поверхнею (дивиться рисунок(b)), нижче якого встановлені відповідні виконавчі механізми. Наприклад, деформованою поверхнею може бути тонкий скляний лист, на який нанесено металеве або діелектричне покриття. Пускачі можуть надавати зусилля на тильну сторону скляного листа, щоб досягти бажаної деформації.



(b) continuous surface deformable mirror

При цьому типі деформуючого дзеркала неможливо уникнути деяких ефектів зчеплення: кожен привід впливає не тільки на геометричну форму в його безпосередній близькості, але і на дещо більшій площі, перекриваючись із сусідніми актуаторами. Це не обов'язково проблема, однак, наприклад, при подачі напруги на

виконавчі механізми правильно розраховують за допомогою комп'ютерного програмного забезпечення, яке може враховувати зв'язок. У деяких інших випадках системи зворотного зв'язку вирішують цю проблему.

Завдяки безперервній поверхні оптична якість такого дзеркала може бути дуже високою, а втрати оптичної сили можуть бути дуже малими, особливо при використанні діелектричного покриття.

Існують електростатичні актуатори, які можуть надавати досить незначні сили. Їх може бути недостатньо для згинання скляної пластини, але вони можуть бути придатними для переміщення крихтих сегментів дзеркал у сегментованих дзеркалах. Також є дзеркальні мембрани з електропровідним покриттям, які можна приводити в дію електростатично. Відстань ходу пропорційна квадрату прикладеної напруги; ця нелінійність може бути виправлена за допомогою додаткової вбудованої електроніки. Необхідні напруги частоти складають кілька сотень вольт, але необхідні струми дуже малі.

Існують двигуни з голосовою котушкою, подібні до тих, що використовуються в динаміках, де електричний струм через котушку контролює притягання або відштовхування постійного магніту, закріпленого на задній стороні деформуючої дзеркальної поверхні. Такі електромагнітні приводи особливо використовуються для великих деформуючих дзеркал, де відстань виконавчих механізмів може становити кілька сантиметрів. Вони можуть створювати значні сили згинання, але також вимагають значних електричних потужностей, що може зробити необхідним активне охолодження.

Математична модель

У наближенні квазіоптики поширення пучка гаусівського випромінювання з комплексною амплітудою $E(x, y, z, t)$ в випадково-неоднорідному слабо-поглинаючому середовищі може бути описано диференціальним рівнянням виду:

$$2ik \left[\frac{\partial E}{\partial z} + a \frac{\partial E}{\partial t} \right] = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + bE + \nu_0 E + \nu_1 E,$$

$$\rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (V \nabla) T \right] - k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \alpha |E|.$$

Де E – комплексно – значна функція енергії пучка; T – теплота, що виділяється при випромінюванні пучка; x, y – координати в площині, що перпендикулярна напрямку поширенню пучка; z – координата в напрямку поширення пучка; ν_0, ν_1 – параметри керування системою; $k, \rho, C_p, V, a, b, \alpha$ – фізичні коефіцієнти. Потрібно за допомогою чисельного моделювання обрати параметри керування ν_0, ν_1 таким чином, щоб одержати найбільш сприятливий стан функціонування системи, тобто створити ефективні теплове та енергетичне поля.

Поставлена задача може бути розбита на два етапи: на першому, промінь рухається всередині прилади доки не увійде в атмосферу, випромінювання проходить зону застою без зовнішніх впливів і потік випромінювання формується лише за рахунок власної конвекції; на другому, після входження в атмосфера на промінь впливає зовнішнє середовище, що збурюється.

Використаємо як модель початково-крайову задачу для лінійного нестационарного рівняння, що описує процес розповсюдження гаусівського пучка у випадково-неоднорідному слабкопоглинаючому середовищі з комплексною функцією розподілу енергії $E(x, y, z, t)$:

$$2i \left(k_1 \frac{\partial E}{\partial x} + k_2 \frac{\partial E}{\partial y} + k_3 \frac{\partial E}{\partial z} + \gamma \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \alpha E + H$$

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, 0 < z < l_z\}, 0 < t < t_1$$

$$E|_{t=0} = f,$$

$$E|_{\partial\Omega} = g$$

Де x, y – координати в площині, що перпендикулярна напрямку поширенню пучка; z – координата в напрямку поширення пучка; k_i – дійсні хвильові функції, що залежать від відповідної просторової координати; γ – обернена групова швидкість хвилі; α – коефіцієнт, що враховує заломлення пучка; g – експериментально визначена функція; $E(x, y, z, t)$ – шукана функція для якої: $E = u + iv$, $H = \varphi + i\psi$.

Тоді:

$$\begin{aligned} 2i \left(k_1 \frac{\partial(u + iv)}{\partial x} + k_2 \frac{\partial(u + iv)}{\partial y} + k_3 \frac{\partial(u + iv)}{\partial z} + \gamma \frac{\partial(u + iv)}{\partial t} \right) \\ = \frac{\partial^2(u + iv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u + iv)}{\partial y^2} + \alpha(u + iv) + \varphi + i\psi \end{aligned}$$

Розкриємо дужки врахувавши, що $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} 2k_1 \frac{\partial iu}{\partial x} + 2k_2 \frac{\partial iu}{\partial y} + 2k_3 \frac{\partial iu}{\partial z} + 2\gamma \frac{\partial iu}{\partial t} - 2k_1 \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_2 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_3 \frac{\partial v}{\partial z} - 2\gamma \frac{\partial v}{\partial t} = \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 iv}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 iv}{\partial y^2} + \alpha u + \alpha iv + \varphi + i\psi \end{aligned}$$

Тепер розділимо рівняння на дійсну та уявну частини та отримаємо систему:

$$\begin{aligned} 2k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + 2k_2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2k_3 \frac{\partial u}{\partial z} + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha v + \psi \\ -2k_1 \frac{\partial v}{\partial x} - 2k_2 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_3 \frac{\partial v}{\partial z} - 2\gamma \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha u + \varphi \end{aligned}$$

при початкових умовах:

$$u|_{t=0} = Ref, \quad u|_{\partial\Omega} = Reg, \quad v|_{t=0} = Imf, \quad v|_{\partial\Omega} = Img$$

Далі перепишемо систему рівнянь у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L^{(1)}(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = L^{(2)}(u, v),$$

де

$$L^{(1)}(u, v) = -\left(\frac{k_1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k_2}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k_3}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{\alpha v}{2\gamma} + \frac{\psi}{2\gamma}$$

$$L^{(2)}(u, v) = -\left(\frac{k_1}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k_2}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{k_3}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\alpha u}{2\gamma} - \frac{\varphi}{2\gamma}$$

Дискретна модель

Неявні схеми використовують рівняння, які виражають дані через кілька сусідніх точок результату. Як правило такі схеми є більш стійкими ніж явні, але вони приводять до великих систем алгебраїчних рівнянь, що треба розв'язувати на кожному часовому кроці.

Спочатку введемо на області $\Omega \times [0, t_1]$ рівномірну сітку

$$\Omega_{h\tau} = \{(x_i, y_j, z_k, t_n), i \in I_1, j \in I_2, z \in I_3, n \in I_4\}$$

$L_h^{(1)}, L_h^{(2)}$ – різницеві оператори, що апроксимують $L^{(1)}$ та $L^{(2)}$ відповідно.

$$\begin{aligned} L_h^{(1)}(u^n, v^n) = & - \left(\frac{k_1}{\gamma} \frac{u_{i+1jk}^n - u_{i-1jk}^n}{2h_x} + \frac{k_2}{\gamma} \frac{u_{ij+1k}^n - u_{ij-1k}^n}{2h_y} + \frac{k_3}{\gamma} \frac{u_{ijk+1}^n - u_{ijk-1}^n}{2h_z} \right) \\ & + \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{v_{i+1jk}^n - 2v_{ijk}^n + v_{i-1jk}^n}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1k}^n - 2v_{ijk}^n + v_{ij-1k}^n}{h_y^2} \right) + \frac{\alpha v_{ijk}^n}{2\gamma} + \frac{\psi}{2\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_h^{(2)}(u^n, v^n) = & - \left(\frac{k_1}{\gamma} \frac{v_{i+1jk}^n - v_{i-1jk}^n}{2h_x} + \frac{k_2}{\gamma} \frac{v_{ij+1k}^n - v_{ij-1k}^n}{2h_y} + \frac{k_3}{\gamma} \frac{v_{ijk+1}^n - v_{ijk-1}^n}{2h_z} \right) \\ & - \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{u_{i+1jk}^n - 2u_{ijk}^n + u_{i-1jk}^n}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1k}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ij-1k}^n}{h_y^2} \right) - \frac{\alpha u_{ijk}^n}{2\gamma} - \frac{\psi}{2\gamma} \end{aligned}$$

Значення $v_{ijk}^{n+1}, u_{ijk}^{n+1}$ в точках множини $\Omega_{h\tau}$ знаходяться за допомогою системи неявних схем:

$$u^{n+1} = u^n + \tau L_h^{(1)}(u^{n+1}, v^{n+1}),$$

$$v^{n+1} = v^n + \tau L_h^{(2)}(u^{n+1}, v^{n+1})$$

Перепишемо систему у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned}
u^{n+1} + \tau \left(\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{\alpha}{2\gamma} \right) v_{ijk}^{n+1} &= \\
&= u_{ijk}^n - \tau \left(\frac{k_1 u_{i+1jk}^{n+1} - u_{i-1jk}^{n+1}}{\gamma 2h_x} + \frac{k_2 u_{ij+1k}^{n+1} - u_{ij-1k}^{n+1}}{\gamma 2h_y} + \frac{k_3 u_{ijk+1}^{n+1} - u_{ijk-1}^{n+1}}{\gamma 2h_z} \right) \\
&\quad + \frac{\tau}{2\gamma} \left(\frac{v_{i+1jk}^{n+1} + v_{i-1jk}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1k}^{n+1} + v_{ij-1k}^{n+1}}{h_y^2} \right) + \frac{\psi\tau}{2\gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^{n+1} + \tau \left(\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{\alpha}{2\gamma} \right) u_{ijk}^{n+1} &= \\
&= v_{ijk}^n - \tau \left(\frac{k_1 v_{i+1jk}^{n+1} - v_{i-1jk}^{n+1}}{\gamma 2h_x} + \frac{k_2 v_{ij+1k}^{n+1} - v_{ij-1k}^{n+1}}{\gamma 2h_y} + \frac{k_3 v_{ijk+1}^{n+1} - v_{ijk-1}^{n+1}}{\gamma 2h_z} \right) \\
&\quad + \frac{\tau}{2\gamma} \left(\frac{u_{i+1jk}^{n+1} + u_{i-1jk}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1k}^{n+1} + u_{ij-1k}^{n+1}}{h_y^2} \right) - \frac{\varphi\tau}{2\gamma}
\end{aligned}$$

Позначимо

$$A = \frac{1}{\tau}, \quad E = \frac{1}{\tau},$$

$$B = \left(\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{\alpha}{2\gamma} \right),$$

$$D = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) + \frac{\alpha}{2\gamma}$$

$$\begin{aligned}
C_{ijk} &= \frac{u_{ijk}^n}{\tau} - \left(\frac{k_1 u_{i+1jk}^{n+1} - u_{i-1jk}^{n+1}}{\gamma 2h_x} + \frac{k_2 u_{ij+1k}^{n+1} - u_{ij-1k}^{n+1}}{\gamma 2h_y} + \frac{k_3 u_{ijk+1}^{n+1} - u_{ijk-1}^{n+1}}{\gamma 2h_z} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{v_{i+1jk}^{n+1} + v_{i-1jk}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1k}^{n+1} + v_{ij-1k}^{n+1}}{h_y^2} \right) + \frac{\psi}{2\gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{ijk} &= \frac{v_{ijk}^n}{\tau} - \left(\frac{k_1 v_{i+1jk}^{n+1} - v_{i-1jk}^{n+1}}{\gamma 2h_x} + \frac{k_2 v_{ij+1k}^{n+1} - v_{ij-1k}^{n+1}}{\gamma 2h_y} + \frac{k_3 v_{ijk+1}^{n+1} - v_{ijk-1}^{n+1}}{\gamma 2h_z} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{u_{i+1jk}^{n+1} + u_{i-1jk}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1k}^{n+1} + u_{ij-1k}^{n+1}}{h_y^2} \right) - \frac{\varphi}{2\gamma}
\end{aligned}$$

Тоді систему можна подати у вигляді:

$$Au_{ijk}^{n+1} + Bv_{ijk}^{n+1} = C_{ijk}$$

$$Du_{ijk}^{n+1} + Ev_{ijk}^{n+1} = F_{ijk}$$

Знаходимо розв'язок за явними формулами:

$$u_{ijk}^{n+1} = \frac{\begin{vmatrix} C_{ijk} & B \\ F_{ijk} & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}},$$

$$v_{ijk}^{n+1} = \frac{\begin{vmatrix} A & C_{ijk} \\ D & F_{ijk} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}}$$

На кожному часовому кроці система має єдиний розв'язок. Для того, щоб це довести достатньо показати, що головний визначник системи не рівний 0.

$$\begin{aligned} \Delta = AE - BD &= \frac{1}{\tau^2} - \left(\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{\alpha}{2\gamma} \right) \left(-\frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) + \frac{\alpha}{2\gamma} \right) = \\ &= \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\varphi^2} \left(\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) - \frac{\alpha}{2} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

Отже система має єдиний розв'язок.

Розглянемо перше рівняння системи:

$$2k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + 2k_2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2k_3 \frac{\partial u}{\partial z} + 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \alpha v + \psi$$

У довільній точці в момент часу $n+1$ записано апроксимацію рівняння:

$$\begin{aligned}
 & 2k_1 \frac{u_{i+1jk}^{n+1} - u_{i-1jk}^{n+1}}{2h_x} + 2k_2 \frac{u_{ij+1k}^{n+1} - u_{ij-1k}^{n+1}}{2h_x} + 2k_3 \frac{u_{ijk+1}^{n+1} - u_{ijk-1}^{n+1}}{2h_x} + 2\gamma \frac{u_{ijk}^{n+1} - u_{ijk}^n}{\tau} \\
 & = \frac{v_{i+1jk}^{n+1} - 2v_{ijk}^{n+1} + v_{i-1jk}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{v_{ij+1k}^{n+1} - 2v_{ijk}^{n+1} + v_{ij-1k}^{n+1}}{h_y^2} + \alpha v_{ijk}^{n+1} + \psi_{ijk}^{n+1}
 \end{aligned}$$

Тепер розкладемо кожен доданок у ряд Тейлора:

$$u_{i\pm 1} = u_i \pm hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' \pm \frac{h^3}{6}u_i''' + O(h^4)$$

Тоді

$$\frac{u_{i+1jk}^{n+1} - u_{i-1jk}^{n+1}}{2h_x} = \left(u_x' + \frac{h_x^2}{3}u_x''' \right)^{n+1} + O(h_x^3)$$

$$\frac{u_{ij+1k}^{n+1} - u_{ij-1k}^{n+1}}{2h_y} = \left(u_y' + \frac{h_y^2}{3}u_y''' \right)^{n+1} + O(h_y^3)$$

$$\frac{u_{ijk+1}^{n+1} - u_{ijk-1}^{n+1}}{2h_z} = \left(u_z' + \frac{h_z^2}{3}u_z''' \right)^{n+1} + O(h_z^3)$$

$$\frac{u_{ijk}^{n+1} - u_{ijk}^n}{\tau} = \left(2u_t' + \frac{\tau^2}{3}u_t''' \right)^{n+1} + O(\tau^3)$$

$$\frac{v_{i+1jk}^{n+1} - 2v_{ijk}^{n+1} + v_{i-1jk}^{n+1}}{h_x^2} = (v_x'')^{n+1} + O(h_x^3)$$

$$\frac{v_{ij+1k}^{n+1} - 2v_{ijk}^{n+1} + v_{ij-1k}^{n+1}}{h_y^2} = (v_y'')^{n+1} + O(h_y^3)$$

Тепер підставимо все це у рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned}
& 2k_1 \left(\dot{u}_x + \frac{h_x^2}{3} u_x^{\dots} \right)^{n+1} + O(h_x^3) + 2k_2 \left(\dot{u}_y + \frac{h_y^2}{3} u_y^{\dots} \right)^{n+1} + O(h_y^3) \\
& + 2k_3 \left(\dot{u}_z + \frac{h_z^2}{3} u_z^{\dots} \right)^{n+1} + O(h_z^3) + 2\gamma \left(2\dot{u}_t + \frac{\tau^2}{3} u_t^{\dots} \right)^{n+1} + O(\tau^3) = \\
& = (v_x^{\dots})^{n+1} + O(h_x^3) + (v_y^{\dots})^{n+1} + O(h_y^3) + \alpha v_{ijk}^{n+1} + \psi_{ijk}^{n+1}
\end{aligned}$$

Перепишемо початкове рівняння у вигляді

$$2k_1 \dot{u}_x + 2k_2 \dot{u}_y + 2k_3 \dot{u}_z + 2\gamma 2\dot{u}_t = v_x^{\dots} + v_y^{\dots} + \alpha v + \psi$$

та віднімемо його від попереднього:

$$\begin{aligned}
& 2k_1 \left(\dot{u}_x + \frac{h_x^2}{3} u_x^{\dots} \right)^{n+1} + 2k_2 \left(\dot{u}_y + \frac{h_y^2}{3} u_y^{\dots} \right)^{n+1} + 2k_3 \left(\dot{u}_z + \frac{h_z^2}{3} u_z^{\dots} \right)^{n+1} + \\
& + 2\gamma \left(2\dot{u}_t + \frac{\tau^2}{3} u_t^{\dots} \right)^{n+1} + O(h_z^3) + O(h_y^3) + O(h_x^3) + O(\tau^3) - 2k_1 \dot{u}_x - 2k_2 \dot{u}_y - 2k_3 \dot{u}_z \\
& - 2\gamma 2\dot{u}_t = \\
& = (v_x^{\dots})^{n+1} + (v_y^{\dots})^{n+1} + \alpha v_{ijk}^{n+1} + \psi_{ijk}^{n+1} + (-v_x^{\dots} - v_y^{\dots} - \alpha v - \psi)^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2k_1 \left(\frac{h_x^2}{3} u_x^{\dots} \right)^{n+1} + 2k_2 \left(\frac{h_y^2}{3} u_y^{\dots} \right)^{n+1} + 2k_3 \left(\frac{h_z^2}{3} u_z^{\dots} \right)^{n+1} + 2\gamma \left(\dot{u}_t + \frac{\tau^2}{3} u_t^{\dots} \right)^{n+1} + \\
& + O(h_z^3) + O(h_y^3) + O(h_x^3) + O(\tau^3) = 0
\end{aligned}$$

Звідси отримаємо залишковий член похибки апроксимації:

$$\begin{aligned}
\xi = & 2k_1 \left(\frac{h_x^2}{3} u_x^{\dots} \right)^{n+1} + 2k_2 \left(\frac{h_y^2}{3} u_y^{\dots} \right)^{n+1} + 2k_3 \left(\frac{h_z^2}{3} u_z^{\dots} \right)^{n+1} + 2\gamma \left(\dot{u}_t + \frac{\tau^2}{3} u_t^{\dots} \right)^{n+1} + \\
& + O(h_z^3) + O(h_y^3) + O(h_x^3) + O(\tau^3)
\end{aligned}$$

В силу довільності точок x, y, z можна стверджувати, що похибка дорівнює $O(h_z^2 + h_y^2 + h_x^2 + \tau^2)$

За аналогічним міркуванням можливо дослідити похибку за другим початковим рівнянням.

Висновки

Адаптивна оптика допомагає усувати нерегулярні спотворення, що викликані апаратними самозбуреннями або атмосферною турбулентністю, в оптичних приладах

Досліджено неявна різницева схема другого порядку апроксимації $O(h_z^2 + h_y^2 + h_x^2 + \tau^2)$ для чисельного моделювання системи, що описує розповсюдження гаусівського пучка у випадково-неоднорідному середовищі з комплексною функцією розподілу енергії $E(x, y, z, t)$.

Перелік літератури

1. Двокроковий симетризований алгоритм для чисельного моделювання процесу розповсюдження випромінювання в деформуючому середовищі.
О.Ю.Грищенко, Г.О.Загородня, В.В.Оноцький, 2015
2. Адаптивная оптика. Численные и экспериментальные исследования.
Ф.Ю.Канев, В.П.Лукин, 2005
3. Принципы адаптивной оптики. М.А.Воронцов, В.И.Штальгаузен, 1985
4. Adaptive optics for astronomy, principles, performance, and applications.
Jacques M.Beckers, 1993