

УДК 534

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/2.5>

Віктор ГРИНЧЕНКО, д-р фіз.-мат. наук, акад. НАН України  
ORCID ID: 0000-0003-3229-1810  
e-mail: grinchenko@nas.gov.ua  
Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

Ірина ЛЕБЕДЄВА, канд. фіз.-мат. наук, доц.  
ORCID ID: 0000-0001-7150-1310  
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Володимир МАЦИПУРА, д-р фіз.-мат. наук, проф.  
ORCID ID: 0000-0002-0136-6659  
e-mail: mnivtt@knu.ua  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

## ВПЛИВ ЗГЛАДЖУВАННЯ ПОВЕРХНІ СКІНЧЕННОГО КЛИНОПОДІБНОГО ОБ'ЄКТА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЗСІЮВАННЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ. ЧАСТИНА I. ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ

*Метою пропонованої роботи є побудова чисельно-аналітичного розв'язку задачі розсіювання плоскої хвилі на моделі у вигляді скінченного клиноподібного об'єкта зі згладженою поверхнею. Такий об'єкт являє собою спрощену модель профілю крила літака. Отриманий розв'язок дасть змогу провести оцінку впливу радіуса згладжування і провідності поверхні згладжування на характеристики розсіювання плоскої гармонічної хвилі. Подана стаття є першою частиною зазначеної роботи. У ній розглянуто метод часткових областей, завдяки якому вдасться побудувати аналітичний розв'язок. Вказано також на особливості застосування методу часткових областей конкретно до зазначеної моделі об'єкта, проаналізовано застосування поточкового спряження полів на межах часткових областей.*

**Ключові слова:** метод часткових областей, плоска хвиля, поточкове спряження полів, рівняння Гельмгольца, граничні умови.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 62H30, 34C60.

### Вступ

Нині вимоги щодо забезпечення малої радіолокаційної помітності пред'являють до всіх літаків військового призначення (Skolnik M. I., 2008). Рівень радіолокаційної помітності визначається конструктивними елементами літака, які також обумовлюють його аеродинамічні характеристики. З огляду на це важливим є знаходження певного балансу між аеродинамічними характеристиками і параметрами радіолокаційної помітності літака (Knott, Shaeffer, & Tuley, 1993; Max Chung, Chou, & Chuang, 2016). У зв'язку із цим є доцільним проведення досліджень, що встановлюють ефективність заходів, спрямованих на забезпечення малої радіолокаційної помітності.

Передня кромка крила й інші аеродинамічні поверхні літака істотно відбивають хвилі під час їхнього падіння на поверхню літака. На світовому ринку пропонують кілька пакетів програм, придатних для моделювання таких задач розсіювання. Усі вони під час розробки використовують "фасетні" моделі об'єкта (Ufimtsev, 2007) та метод фізичної теорії дифракції (Ufimtsev, 2006; Chatzigeorgiadis, 2004), оснований на асимптотичних алгоритмах. Застосування асимптотичних і гібридних алгоритмів передбачає наявність чіткого уявлення про фізичні явища, що приводять до формування розсіяного поля в кожному конкретному випадку: дзеркальних відображеннях, дифракції на кромках, багаторазового відбиття всередині порожнин тощо. У представленій роботі запропоновано інший підхід. Ми покажемо, як на базі методу часткових областей можна побудувати чисельно-аналітичний розв'язок задачі розсіювання хвилі на об'єкті у вигляді скінченного клину зі згладженою поверхнею (коротко будемо називати "заокруглення скінченного клину"). Дослідження такої досить спрощеної моделі профілю крила дасть змогу надати оцінку впливу радіуса закруглення і провідності згладженої поверхні на характеристики радіолокаційної помітності крила літака.

### 1. Метод часткових областей у задачах розсіювання хвилі

Для побудови розв'язку поставленої задачі використовуємо метод часткових областей (Гринченко, 1996; Гринченко, Гусак, & Маципура, 2021). Відповідно до цього методу всю складну (неканонічну) область існування хвильового поля розбиваємо на прості області, у кожній з яких можна записати сукупність часткових розв'язків рівняння Гельмгольца. Зазначена сукупність часткових розв'язків дає змогу визначити загальний розв'язок граничної задачі.

Після цього виникає необхідність спряження цих розв'язків на межах часткових областей. Реалізація граничних умов приводить до рівнянь із невідомими коефіцієнтами, що є амплітудними коефіцієнтами мод у відповідних часткових областях.

Для визначення шуканих амплітудних коефіцієнтів мод варто перейти від цих рівнянь до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку далі розв'язуємо методом редукції. Варіант переходу до лінійної системи алгебраїчних рівнянь, який можна назвати класичним, спирається на побудовані розв'язки для рівняння Гельмгольца в часткових областях (Bowman, Senior, & Uslenghi, 1969). Кожен розв'язок передбачає наявність у ньому повної та ортогональної системи функцій, завдяки якій можна записати у вигляді ряду Фур'є будь-яку (розумну з позиції фізики) функцію. Використовуючи ортогональність цього набору функцій, можна отримати систему алгебраїчних рівнянь. Про цю процедуру говорять як про наближення функцій у розумінні мінімальності середньоквадратичного відхилення. Проте можуть виникнути певні складнощі, якщо, наприклад, для запису хвильових полів у часткових областях доводиться використовувати декілька систем координат. Як наслідок, під час переходу до системи алгебраїчних рівнянь виникають досить складні інтеграли. Часто їхнє аналітичне обчислення неможливе, та й чисельне обчислення може бути пов'язане з певними складнощами.

© Гринченко Віктор, Лебедєва Ірина, Маципура Володимир, 2024

Інший варіант переходу до системи алгебраїчних рівнянь полягає у прирівнюванні функцій (полів у суміжних часткових областях) у скінченному наборі точок (назвемо їх вузлові точки) на межі цих областей. Кількість вузлових точок на межі визначає порядок системи рівнянь і тим самим кількість шуканих амплітудних коефіцієнтів мод у часткових областях. Як бачимо, такий підхід не містить обчислювальних проблем.

Проте виникає питання: яка хвильова відстань між вузловими точками спряження полів забезпечить прийнятну точність обчислень? У роботі (Грінченко, Гусак, & Маципура, 2021) показано, що за однакової кількості мод у часткових областях для двох варіантів спряження полів варіант середньоквадратичного наближення є точнішим. Однак також визначено, що за величини хвильової відстані між вузловими точками  $\Delta h / \lambda < 0,2$  отримуємо цілком прийнятну точність розрахунку для методу поточкового спряження полів. У пропонуваній статті, урахувавши досить складну геометрію моделі, використовуватимемо поточкове спряження полів.

**2. Постановка задачі й побудова аналітичного розв'язку**

Розглянемо плоску задачу розсіювання плоскої хвилі на скінченному клиноподібному об'єкті (рис. 1). Щоб описати геометрію об'єкта і побудувати розв'язок задачі, уведемо дві полярні системи координат  $rO\theta$  і  $r_1O_1\theta_1$ . У системі координат  $rO\theta$  задаємо профіль згладженої поверхні, що є частиною кола радіусом  $a$  (центр кола розташований у початку координат  $O$ ), і кут падіння плоскої хвилі  $\theta_0$ . Початок координат  $O_1$  збігається з кутовою точкою клину. Клиноподібну область об'єкта задаємо довжиною сторін клину  $R$  і внутрішнім кутом розкриття клину  $2\gamma_1$ . Відстань між центрами систем координат дорівнює  $d = OO_1 = \sqrt{R^2 + a^2}$ . Плоскі поверхні об'єкта вважаємо акустично жорсткими, а поверхню згладжування характеризується нормальною провідністю  $Y$ . Клиноподібний об'єкт перебуває в ідеальній середовищі з густиною  $\rho$  і швидкістю звуку  $c$ .

Весь простір існування звукового поля ділимо на дві області:

- перша – зовнішність контура, що утворений частиною кола радіусом  $R$  ( $r_1 \geq R, \gamma_1 \leq \theta_1 \leq \pi$  і  $-\pi \leq \theta_1 \leq -\gamma_1$ ) та поверхнею згладжування ( $r \geq a, 0 \leq \theta \leq \gamma_1$  і  $-\gamma_1 \leq \theta \leq 0$ );
- друга – сектор кола радіусом  $R$ , а саме:  $r_1 \leq R, \gamma_1 \leq \theta_1 \leq \pi$  і  $-\pi \leq \theta_1 \leq -\gamma_1$ .

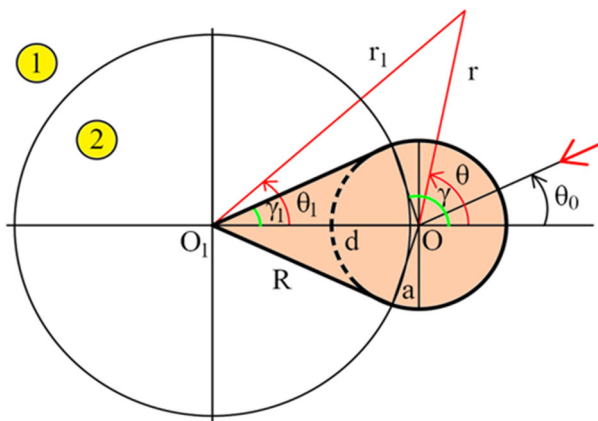


Рис. 1. Геометрія моделі

На об'єкт налігає плоска гармонічна хвиля одиничної амплітуди із частотою  $\omega$ . Хвильове число  $k = \omega / c$ , координати точки спостереження  $(r, \theta)$ , кут падіння плоскої хвилі  $\theta_0$ . Виділимо в полі хвилі, що падає, парну і непарну складові, тобто представимо у вигляді суми двох хвиль  $p_0 = p_0^+ + p_0^-$ , де

$$p_0^+ = \frac{1}{2} [\exp(-ikr \cos(\theta - \theta_0)) + \exp(-ikr \cos(\theta + \theta_0))], \tag{1}$$

$$p_0^- = \frac{1}{2} [\exp(-ikr \cos(\theta - \theta_0)) - \exp(-ikr \cos(\theta + \theta_0))]. \tag{2}$$

Верхній індекс "+" означає парну складову поля хвилі, що падає, а знак "-" – непарну складову. Тоді розв'язок задачі шукаємо як суму розв'язків парної та непарної задач.

Поле тиску в частковій області 1 запишемо у вигляді, що був запропонований у (Bowman, Senior, & Uslenghi, 1969; Felsen, & Marcuvitz, 1973):  $p_1 = p_1^+ + p_1^-$ , де

$$p_1^+ = p_1^{(1)+} + p_1^{(2)+} + p_0^+, \quad p_1^- = p_1^{(1)-} + p_1^{(2)-} + p_0^-, \tag{3}$$

$$p_1^{(1)+} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}, \quad p_1^{(1)-} = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\theta) \frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m^{(1)\prime}(ka)}, \tag{4}$$

$$p_1^{(2)+} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\theta_1) \frac{H_n^{(1)}(kr_1)}{H_n^{(1)'}(kR)}, \quad p_1^{(2)-} = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin(m\theta_1) \frac{H_m^{(1)}(kr_1)}{H_m^{(1)'}(kR)}, \quad (5)$$

Поле тиску в частковій області 2 запишемо у вигляді (Bowman, Senior, & Uslenghi, 1969; Felsen, & Marcuvitz, 1973):  
 $p_2 = p_2^+ + p_2^-$ , де

$$p_2^+ = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(\alpha_n(\pi - |\theta_1|)) \frac{J_{\alpha_n}(kr_1)}{J_{\alpha_n}'(kR)}, \quad p_2^- = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \mu(\theta_1) \sin(\beta_m(\pi - |\theta_1|)) \frac{J_{\beta_m}(kr_1)}{J_{\beta_m}'(kR)}. \quad (6)$$

Тут  $H_v^{(1)}(z)$  – функція Ганкеля першого роду,  $J_v(z)$  – функція Бесселя, "штрих" позначає похідну від функції за її повним аргументом. Згідно з граничними умовами на плоских поверхнях об'єкта (вони акустично жорсткі), знаходимо вирази для величин

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{\pi - \gamma_1} \quad \text{і} \quad \beta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2(\pi - \gamma_1)}; \quad \text{функція} \quad \mu(\theta_1) = \begin{cases} 1, & \theta_1 \geq 0, \\ -1, & \theta_1 < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Зазначимо, що у формулах (4) і (5) набори кутових функцій мають властивість повноти й ортогональності у разі зміни кутів  $\theta$  і  $\theta_1$  в діапазоні від  $-\pi$  до  $\pi$ , тобто уздовж кіл із радіусами  $a$  і  $R$  відповідно. Однак частини цих кіл, а саме ( $r = a, \gamma \leq \theta \leq \pi, -\pi \leq \theta \leq -\gamma$ ) і ( $r_1 = R, -\gamma_1 \leq \theta_1 \leq \gamma_1$ ), не є фізично визначеними межами.

У роботі (Гринченко, 1996) описано підхід, що може стати основою для розгляду спеціального класу задач, що допускають побудову загального розв'язку в межах методу часткових областей за відсутності фізично визначених граничних умов на всій координатній поверхні, до якої прив'язують повну систему функцій. Відповідно до цього підходу фізичні межі доповнюють "нефізичними" ділянками, на яких граничні умови можуть бути продовжені довільними функціями. Проте, оскільки у разі практичного використання підходу йдеться про розв'язок нескінченних систем, до яких застосовують процедуру редукції, раціональний вибір умов на "нефізичних" межах може поліпшити виконання умов спряження полів на межах часткових областей.

З урахуванням зазначеного граничну умову на заокругленні й умови спряження полів на межі часткових /областей 1 і 2 запишемо так:

$$1) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_1^{\pm}}{\partial r} &= -Y p_1^{\pm}, \quad r = a, \theta = [-\gamma, \gamma], \\ \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_1^{(1)\pm}}{\partial r} &= v_1(r, \theta), \quad r = a, \theta \neq [-\gamma, \gamma], \end{aligned} \right. \quad (8)$$

де функцію  $v_1(a, \theta)$  задано на нефізичній ділянці кола радіусом  $a$ . У виразі (8) ми продовжили граничну умову для розв'язку  $p_1^{(1)\pm}$  до повного кола радіусом  $a$ , утворивши координатну поверхню для функцій  $\cos(n\theta)$  і  $\sin(n\theta)$ . Відно-

сну нормальну провідність передньої кромки профілю визначаємо за формулою (Skudrzyk, 1971):  $\bar{Y} = \frac{Y}{1/\rho c} = \frac{1-V}{1+V}$ ,

де  $V$  – коефіцієнт відбиття поверхні заокруглення. Знак мінус у формулі (8) обумовлений тим, що напрямок зовнішньої нормалі (він збігається з напрямком радіальної координати) протилежний напрямку поширення хвилі.

$$2) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_1^{\pm}}{\partial r_1} &= \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_2^{\pm}}{\partial r_1}, \quad r_1 = R, \theta_1 \neq [-\gamma_1, \gamma_1], \\ \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p_1^{(2)\pm}}{\partial r_1} &= v_2(r_1, \theta_1), \quad r_1 = R, \theta_1 = [-\gamma_1, \gamma_1], \end{aligned} \right. \quad (9)$$

де швидкість  $v_2(R, \theta_1)$  задано на нефізичній ділянці кола радіусом  $R$ . У виразі (9) ми продовжили граничну умову для розв'язку  $p_1^{(2)\pm}$  до повного кола радіусом  $R$ , утворивши тим самим координатну поверхню для функцій  $\cos(n\theta_1)$  і  $\sin(n\theta_1)$

$$3) p_1^{\pm} = p_2^{\pm}, \quad r_1 = R, \theta_1 \neq [-\gamma_1, \gamma_1]. \quad (10)$$

Розв'язок парної задачі визначає набори коефіцієнтів  $A_n, C_n, E_n$ , а розв'язок непарної задачі – набори коефіцієнтів  $B_n, D_n, F_n$ .

### Дискусія і висновки

На основі методу часткових областей побудовано чисельно-аналітичний розв'язок задачі розсіювання хвилі на об'єкті у вигляді скінченного клину зі згладженою поверхнею. На базі побудованого розв'язку у частині II плануємо:

- дослідити точність виконання умов спряження полів на межах часткових областей,
- надати оцінку впливу радіуса заокруглення і провідності згладженої поверхні на характеристики радіолокаційної помітності крила літака.

**Внесок авторів:** Віктор Гринченко – постановка задачі й обговорення висновків; Ірина Лебедева – робота з літературними джерелами, побудова аналітичного розв'язку й обговорення висновків; Володимир Маципура – побудова аналітичного розв'язку й обговорення висновків.

**Список використаних джерел**

- Гринченко, В. Т. (1996). Развитие метода решения задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях, *Гидромеханика*, 70, 27–40.
- Гринченко, В. Т., Гусак, В. О., & Маципура, В. Т. (2021). Використання двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*, 2(136), 5–16. <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2021.2.01>
- Bowman, J. I., Senior, N. B. A., & Uslenghi, P. L. T. (1969). *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shaper*. North-Holland Publ. Co.
- Chatzigeorgiadis, F. (2004). *Development of code for a physical optics radar cross section prediction and analysis application*. Naval Postgraduate School.
- Felsen, L., & Marcuvitz, N. (1973). *Radiation and Scattering of Waves*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- Knott, E. F., Shaeffer, J. F., & Tuley, M. T. (1993). *Radar Cross Section*. Artech House.
- Max Chung, S. S., Chou, Y. H., & Chuang, Y. C. (2016). Radar Cross Section Analysis of Stealth Fighter Design: Key Factors and Limitations of Simulation. *International Journal of Electrical Engineering*, 23(6), 201–214.
- Skolnik, M. I. (2008). *Radar Handbook*. McGraw-Hill.
- Skudrzyk, E. (1971). *The Foundations of Acoustics*. Springer.
- Ufimtsev, P. Y. (2007). *Fundamentals of the Physical Theory of Diffraction*. John Wiley & Sons, Inc.
- Ufimtsev, P. Y. (2006). Improved theory of acoustic elementary edge waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 120(2), 631–635. <https://doi.org/10.1121/1.2211447>

**References**

- Bowman, J. I., Senior, N. B. A., & Uslenghi, P. L. T. (1969). *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shaper*. North-Holland Publ. Co.
- Chatzigeorgiadis, F. (2004). *Development of code for a physical optics radar cross section prediction and analysis application*. Naval Postgraduate School.
- Felsen, L., & Marcuvitz, N. (1973). *Radiation and Scattering of Waves*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- Гринченко, В. Т. (1996). Development of the method for solving problems of sound radiation and scattering in non-canonical areas, *Hydromechanics*, 70, 27–40.
- Гринченко, В. Т., & Husak, V. O., & Matsypura, V. T. (2021). The use of two variants of conjugation of wave fields in the method of partial domains. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2(136), 5–16. <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2021.2.01>
- Knott, E. F., Shaeffer, J. F., & Tuley, M. T. (1993). *Radar Cross Section*. Artech House.
- Max Chung, S. S., Chou, Y. H., & Chuang, Y. C. (2016). Radar Cross Section Analysis of Stealth Fighter Design: Key Factors and Limitations of Simulation. *International Journal of Electrical Engineering*, 23(6), 201–214.
- Skolnik, M. I. (2008). *Radar Handbook*. McGraw-Hill.
- Skudrzyk, E. (1971). *The Foundations of Acoustics*. Springer.
- Ufimtsev, P. Y. (2006). Improved theory of acoustic elementary edge waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 120(2), 631–635. <https://doi.org/10.1121/1.2211447>
- Ufimtsev, P. Y. (2007). *Fundamentals of the Physical Theory of Diffraction*. John Wiley & Sons, Inc.

Отримано редакцією журналу / Received: 01.08.24  
Прорецензовано / Revised: 12.10.24  
Схвалено до друку / Accepted: 26.11.24

Viktor GRINCHENKO, DSc (Phys. & Math.), Active Member of the National Academy of Sciences of Ukraine

ORCID ID: 0000-0003-3229-1810

e-mail: grinchenko@nas.gov.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna LEBEDYEVA, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.

ORCID ID: 0000-0001-7150-1310

e-mail: lebedevai@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Volodymyr MATSYUPURA, DSc (Phys. & Math.), Prof.

ORCID ID: 0000-0002-0136-6659

e-mail: mnivtt@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

## EFFECT OF SMOOTHING OF A FINITE WEDGE-SHAPED OBJECT ON THE SCATTERING CHARACTERISTICS OF A PLANE WAVE. PART I. SOLUTION CONSTRUCTION

*The purpose of this work is to construct a numerical analytical solution to the problem of plane wave scattering on a model in the form of a finite wedge-shaped object with a smoothed surface. Such an object is a simplified model of an airplane wing profile. The obtained solution will make it possible to evaluate the influence of the smoothing radius and the conductivity of the smoothing surface on the dispersion characteristics of a plane harmonic wave. This article is the first part of this work. It discusses the method of partial regions, thanks to which it is possible to construct an analytical solution. The peculiarities of applying the method of partial regions specifically to this model of the object are indicated, the application of point wise conjugation of fields on the boundaries of partial regions is considered.*

**К е у о р д с :** *method of partial regions, plane wave, point wise conjugation of fields, Helmholtz equation, boundary conditions.*

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.