

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ПЕТРИНА ГРИГОРІЙ ОЛЕКСІЙОВИЧ

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ
СТОХАСТИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

111 — Математика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання
ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на
відповідне джерело _____ Г.О. Петрина

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук, професор
Станжицький Олександр Миколайович

Київ – 2025

Анотація

Петрина Г. О. Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю «111 — математика» — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2025.

Сучасний розвиток прикладної математики та теорії ймовірностей стимулює поглиблений аналіз динамічних систем, у яких майбутня еволюція залежить від попередніх станів. Процеси, що характеризуються затримками або «пам'яттю», знаходять широке застосування в біології, фізиці, техніці та економіці. Дисертаційне дослідження зосереджене на вивченні асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь із запізненням та розробці практичних методів апроксимації таких систем моделями без запізнення.

У роботі розглядаються як скінченновимірні, так і нескінченновимірні моделі, що враховують випадкові збурення та часові затримки. Особливу увагу приділено розробці підходів, які дозволяють співставити поведінку систем із запізненням з відповідними моделями без затримок, що суттєво спрощує аналіз довгострокової динаміки процесів, де вплив попередніх станів є критичним. Завдяки цьому підходу вдалося не лише описати, але й передбачити стабільність і зміни в системах, що розглядаються.

Запропоновані методики апроксимації дозволяють редукувати складні нескінченновимірні об'єкти до скінченновимірних моделей, зберігаючи при цьому основні динамічні характеристики вихідних систем. Розроблені схеми охоплюють як випадки класичних точкових затримок, так і інтегральних запізнень, а також розглядаються ситуації, коли системи керуються необмеженими лінійними операторами. Для кожного з таких випадків встановлено умови, за яких розв'язки апроксимованих систем збігаються до розв'язків вихідних задач як у середньому квадратичному сенсі, так і з імовірністю 1.

Аналіз сучасної літератури свідчить, що більшість попередніх досліджень асимптотичної еквівалентності та апроксимації зосереджувалось на детермі-

нованих системах або на лінійних моделях, де питання впливу стохастичних збурень залишалось менш розглянутим. Представлені підходи розширюють ці результати, адже враховують як нелінійні ефекти, так і випадкові збурення, що відкриває нові можливості для застосування методів аналізу затримок у більш складних моделях. Особливо актуальним є питання чисельного моделювання, оскільки запропоновані апроксимаційні схеми сприяють розробці ефективних алгоритмів для прогнозування поведінки динамічних систем у режимах реального часу.

Важливим аспектом дослідження є комплексний підхід до аналізу як теоретичних, так і практичних проблем. На теоретичному рівні розглядаються питання існування та єдиності розв'язків, а також умови асимптотичної еквівалентності між системами із запізненням і їх апроксимуючими аналогами. Приведені приклади демонструють, як ці теоретичні результати можуть бути використані для розробки нових чисельних методів, що дозволяють підвищити точність і швидкість обчислень у складних моделях.

Окрім цього, проведено порівняльний аналіз різних підходів до моделювання процесів з затримками, що дозволяє визначити переваги застосування запропонованих методик у порівнянні з традиційними методами. Так, методи апроксимації, засновані на редукції нескінченновимірного простору до скінченновимірного, забезпечують не лише точність, а й зменшують обчислювальні витрати, що є надзвичайно важливим для застосування в реальних прикладних задачах.

Дослідження також розглядає вплив параметрів системи на її асимптотичну поведінку та визначає чутливість моделей до випадкових збурень. Отримані результати свідчать про те, що правильно підібрані апроксимаційні схеми можуть забезпечити високий рівень збіжності розв'язків, що відкриває перспективи для їх використання у розробці програмних засобів для моделювання складних динамічних процесів.

Крім того, у дослідженні ретельно проаналізовано вплив параметричних варіацій на точність апроксимації. Дослідження показало, що навіть незначні зміни вихідних умов чи характеристик моделі не порушують збіжність апроксимованих розв'язків до вихідних, що підтверджує стійкість запропонованих підходів. Це відкриває перспективи для їх подальшого використання в аналізі

та моделюванні динамічних процесів у різних галузях науки і техніки.

Подальші напрямки досліджень можуть включати розширення застосування розроблених методик до багатовимірних нелінійних систем, що враховують як часові, так і просторові затримки. Також перспективним є вивчення впливу різних типів стохастичних збурень на стабільність моделей, що дозволить більш глибоко дослідити механізми виникнення автоколивань та інших нелінійних явищ.

Отже, проведене дослідження представляє всебічний аналіз асимптотичної поведінки стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь із запізненням, охоплюючи як глибокі теоретичні аспекти, так і практичні питання апроксимації та чисельного моделювання. Запропоновані методики сприяють точному прогнозуванню довгострокової динаміки складних систем, де врахування затримок та випадкових впливів є критично важливим. Розроблені підходи створюють основу для подальших досліджень у сфері аналізу стохастичних процесів і можуть бути адаптовані для вирішення широкого спектру практичних задач у сучасній науці та техніці, розумінню впливу затримок на стабільність і динаміку стохастичних процесів.

Ключові слова: стохастичні рівняння, процес Вінера, функціонально-диференціальні рівняння, запізнення, асимптотична еквівалентність, апроксимація, асимптотична поведінка, параболічні рівняння, початкові дані, задача Коші, випадкові процеси, швидкість збіжності.

Summary

Petryna G. O. Asymptotic behavior of solutions of stochastic functional-differential equations — Manuscript.

Doctor's of Philosophy, specialty «111 — Mathematics» — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2025.

The modern development of applied mathematics and probability theory stimulates an in-depth analysis of dynamic systems whose future evolution depends on their past states. Processes characterized by delays or «memory» find wide application in biology, physics, engineering, and economics. The study is focused on investigating the asymptotic behavior of solutions of stochastic functional-differential equations

with delay and on developing practical methods for approximating such systems by delay-free models.

The research considers both finite-dimensional and infinite-dimensional models that take into account random perturbations and time delays. Special attention is given to the development of approaches that allow one to compare the behavior of delayed systems with the corresponding delay-free models, which significantly simplifies the analysis of the long-term dynamics of processes where the influence of previous states is critical. This approach has enabled not only the description but also the prediction of the stability and changes in the systems under consideration.

The proposed approximation methods allow the reduction of complex infinite-dimensional objects to finite-dimensional models while preserving the main dynamic characteristics of the original systems. The developed schemes cover both cases of classical point delays and integral delays, as well as situations in which the systems are governed by unbounded linear operators. For each such case, conditions are established under which the solutions of the approximating systems converge to the solutions of the original problems both in the mean-square sense and almost surely.

An analysis of the modern literature indicates that most previous studies on asymptotic equivalence and approximation have concentrated on deterministic systems or linear models, where the impact of stochastic perturbations has been less explored. The approaches presented here extend these results by taking into account both nonlinear effects and random perturbations, thereby opening new possibilities for applying delay analysis methods to more complex models. The issue of numerical modeling is especially relevant, as the proposed approximation schemes contribute to the development of efficient algorithms for forecasting the behavior of dynamic systems in real-time settings.

A key aspect of the study is its comprehensive approach to addressing both theoretical and practical problems. At the theoretical level, issues such as the existence and uniqueness of solutions, their stability, and the conditions for asymptotic equivalence between delayed systems and their approximating analogues are examined. The practical part of the study demonstrates how these theoretical results can be used to develop new numerical methods that enhance both the accuracy and speed of computations in complex models.

Moreover, a comparative analysis of various approaches to modeling processes

with delays is carried out, which allows for the identification of the advantages of the proposed methods over traditional techniques. In particular, approximation methods based on reducing an infinite-dimensional space to a finite-dimensional one not only ensure high accuracy but also reduce computational costs—an aspect that is extremely important for applications in real-world problems.

The study also examines the impact of system parameters on its asymptotic behavior and determines the sensitivity of the models to random perturbations. The results indicate that appropriately chosen approximation schemes can ensure a high level of convergence of the solutions, thereby opening prospects for their use in the development of software tools for modeling complex dynamic processes.

In addition, the research thoroughly analyzes the effect of parametric variations on the accuracy of the approximation. It has been shown that even slight changes in the initial conditions or model characteristics do not disturb the convergence of the approximated solutions to the original ones, which confirms the robustness of the proposed approaches. This opens up further prospects for their use in the analysis and modeling of dynamic processes across various fields of science and technology.

Future research directions may include extending the application of the developed methods to multidimensional nonlinear systems that account for both temporal and spatial delays. It is also promising to study the impact of different types of stochastic perturbations on the stability of the models, which would allow for a deeper investigation into the mechanisms behind the emergence of self-oscillations and other nonlinear phenomena.

Thus, the conducted research presents a comprehensive analysis of the asymptotic behavior of solutions of stochastic functional-differential equations with delay, covering both profound theoretical aspects and practical issues related to approximation and numerical modeling. The proposed methods contribute to the accurate long-term forecasting of the dynamics of complex systems, where accounting for delays and random influences is critically important. The developed approaches provide a basis for further research in the field of stochastic process analysis and can be adapted to solve a wide range of practical problems in modern science and technology. Understanding the impact of delays on the stability and dynamics of stochastic processes.

Keywords: stochastic equations, Wiener process, functional-differential equations, delay, asymptotic equivalence, approximation, asymptotic behavior, parabolic

equations, initial data, Cauchy problem, random processes, convergence rate.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Станжицький О. М., Петрина Г. О., Денисенко Н. Л. Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь. *Нелінійні коливання*. 2023 Випуск 26 (1), С. 155–165. Переклад англійською: Stanzhytskyi, O.M., Petryna, G.O., Denysenko, N.L. Asymptotic Behavior of the Solutions of Stochastic Functional-Differential Equations. *Journal of Mathematical Sciences* 278, 1102–1112 (2024). DOI: 10.1007/s10958-024-06980-x
2. Stanzhytskyi O., Petryna G., Hrysenko M. On the Asymptotic Equivalence of Ordinary and Functional Stochastic Differential Equations. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA)*. 2023. Vol. 31 (1). P. 125–142. DOI: 10.15421/142307
3. Петрина Г. О., Станжицький А. О. Апроксимація систем стохастичних рівнянь із запізненням стохастичною системою без запізнення. *Буковинський математичний журнал*. 2024 Випуск 12 (1), С. 120–136. DOI: 10.31861/bmj2024.01.11
4. Петрина Г. О., Станжицький О. М., Мартинюк О. В. Про апроксимацію стохастичних рівнянь із запізненням у нескінченновимірних просторах. *Буковинський математичний журнал*. 2024 Випуск 12 (2), С. 168–181. DOI: 10.31861/bmj2024.02.16

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Petryna G., Denysenko N. Asymptotic behavior of functional stochastic differential equations // The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022. Chisinau, Republic of Moldova. August 25 – 27, 2022. P. 67–68.
2. Petryna G., Stanzhytskyi A. Approximation methods for stochastic systems with delay // V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації». Запоріжжя, Україна. 29 – 31 травня, 2024. С. 49–51.

3. Петрина Г., Кравець В. Аналіз та апроксимація стохастичних диференціальних рівнянь з запізненням // V Міжнародна конференція, присвячена 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана. Чернівці, Україна. 23 – 27 вересня, 2024. С. 81.
4. Petryna G., Murzabaeva A., Khaletska Z. Approximation of Stochastic Systems with Integral-Type Delay by Stochastic Systems without Delay // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2024. Tbilisi, Georgia. December 21 – 23, 2024. P. 227–232.
5. Petryna G. Investigations into the Asymptotic Equivalence between Stochastic Functional Differential Equations and Ordinary Differential Equations // Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики. Чернівці, Україна. 28 – 30 вересня 2023. С. 110–111.
6. Петрина Г. О. Про асимптотичну відповідність розв'язків звичайних та стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь // XII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк, Україна. 2 – 4 червня 2023. С. 32.
7. Petryna G. Conditions for asymptotic equivalence of Functional Stochastic Differential Equations // Міжнародна наукова конференція «Прикладна математика та інформаційні технології», присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій. Чернівці, Україна. 22 – 24 вересня 2022. С. 286–287.
8. Petryna G. On the asymptotic equivalence of ordinary and functional stochastic differential equations // International Conference of Young Mathematicians, The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Kyiv, Ukraine. June 1 – 3, 2023. https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/DEMF/Petryna.pdf
9. Петрина Г.О., Халецька З. П. Про наближення стохастичних систем з запізненням // XIII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк – Світязь, Україна. 31 травня – 2 червня, 2024. С. 60–61.

Зміст

Вступ	10
1 Огляд літератури	25
2 Попередні відомості	37
2.1 Функціонально-диференціальні рівняння. Скінченновимірний випадок	37
2.2 Функціонально-диференціальні рівняння. Нескінченновимірний випадок	40
2.3 C_0 - напівгрупи та оператори	41
2.4 Q-ядерний процес Вінера та стохастичний інтеграл по ньому . .	44
2.5 Стохастичні функціонально-диференціальні рівняння	47
3 Асимптотична еквівалентність стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь	50
3.1 Асимптотична еквівалентність. Нелінійний випадок	51
3.1.1 Постановка задачі	51
3.1.2 Доведення основного результату	53
3.1.3 Приклад застосування	63
3.2 Асимптотична еквівалентність. Лінійний випадок	63
3.2.1 Постановка задачі	63
3.2.2 Доведення основного результату	65
3.2.3 Приклад застосування	86
3.3 Висновки до розділу 3	87
4 Апроксимація стохастичних систем із запізненням системами без запізнення	89

4.1	Апроксимація у скінченновимірному випадку	89
4.1.1	Постановка задачі	89
4.1.2	Лема про модуль неперервності	91
4.1.3	Доведення основного результату	93
4.2	Випадок інтегрального запізнення	107
4.2.1	Постановка задачі	107
4.2.2	Лема про модуль неперервності	109
4.2.3	Доведення основного результату	110
4.3	Апроксимація у нескінченновимірному випадку	117
4.3.1	Постановка задачі. Основний результат	119
4.3.2	Доведення основного результату	125
4.3.3	Приклад застосування	128
4.4	Висновки до розділу 4	130

Висновки	132
-----------------	------------

Список використаних джерел	134
-----------------------------------	------------

Додаток	146
----------------	------------

Вступ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь.

Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь є однією з ключових проблем сучасного нелінійного аналізу динамічних систем із пам'яттю. Скінченновимірний випадок є надзвичайно важливим для практичних застосувань, оскільки багато реальних процесів у біомедицині, економіці, хімії, фізиці та техніці описуються моделями з обмеженим числом фазових змінних. У таких системах врахування випадкових збурень та затримок у зміні стану призводить до появи складних функціональних залежностей, що ускладнюють як аналітичне дослідження, так і чисельне моделювання.

Практична значимість дослідження полягає у можливості визначення стабільності, довгострокової динаміки та ефективності математичних моделей. Як показали класичні роботи Keener та Sneyd [58], а також Keller і Segel [59], моделювання біофізичних процесів і хімічних реакцій неможливе без врахування випадкових впливів і затримок, що характерні для природних систем. Також дослідження, представлені Dawson [36] та Jianhong [54], дозволяють розширити методологічний апарат для аналізу стохастичних еволюційних рівнянь, що застосовуються у скінченновимірному випадку.

Надзвичайно важливим є й аналіз розв'язків стохастичних рівнянь нейтрального типу, в яких запізнення стосується не лише значень функції, але й її похідних. У цьому напрямку значний внесок зробили роботи Kolmanovskii та Nosov [61], а також Kolmanovskii та Shaikhet [62], що дослідили умови стабільності та існування інваріантних мір у системах із запізненнями. Дослідження Boufoussi, Hajji та Lakhel [24] розширюють розуміння експоненціальної стійкості

таких рівнянь, що є критично важливим для побудови надійних моделей в умовах невизначеності.

З огляду на сучасний стан досліджень, зростає потреба у розробці нових ефективних методів апроксимації складних стохастичних моделей звичайними диференціальними рівняннями. Цей підхід дозволяє не лише спростити аналіз, але й забезпечити практичну застосовність отриманих результатів для моделювання реальних процесів. Розробка умов існування, стабільності розв'язків та побудови апроксимізаційних схем у скінченновимірному та нескінченновимірному випадках відкриває нові можливості для інтеграції методів теорії диференціальних рівнянь із стохастичними збуреннями та запізненнями.

Практична значимість даної тематики підтверджується дослідженнями низки відомих вчених. Роботи Keener і Sneyd [58] продемонстрували, як моделювання електрофізіологічних процесів у серцевій діяльності базується на аналізі стохастичних моделей з запізненнями. Аналогічно, дослідження Keller та Segel [59] зосереджені на аналізі хімічних процесів, зокрема, процесів хемотаксису. Внесок Dawson [36] та Jianhong [54] у теорію стохастичних еволюційних рівнянь дозволив поглибити розуміння довгострокової динаміки систем, а роботи Kolmanovskii, Nosov [61] і Kolmanovskii, Shaikhet [62] сприяли розвитку теорії нейтральних систем із запізненнями. Дослідження Boufoussi, Hajji та Lakhel [24] відкривають нові перспективи для аналізу експоненціальної стабільності стохастичних моделей, що є важливим для їх практичного застосування.

Отже, дослідження асимптотичної поведінки та апроксимації розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь є не тільки актуальним з теоретичної точки зору, але й має значний практичний потенціал. Розробка нових методів аналізу та апроксимації таких рівнянь у скінченновимірному та нескінченновимірному випадках сприятиме підвищенню адекватності математичних моделей, що використовуються для опису динаміки складних систем. Результати даної дисертаційної роботи можуть стати базою для подальших досліджень і розробки практичних алгоритмів у різних галузях науки та техніки, забезпечуючи більш глибоке розуміння фундаментальних процесів, які відбуваються під впливом випадкових факторів та затримок.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводилися на кафедрі загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка відповідно до планів, передбачених у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, у межах держбюджетних науково-дослідних проєктів "Якісний аналіз, керування та методи апроксимації у некоректних та нелокальних детермінованих і стохастичних еволюційних задачах"(Державний реєстраційний номер: 0121U109988), "Асимптотична поведінка, стійкість та керованість у нескінченновимірних еволюційних системах із детермінованими та випадковими збуреннями"(Державний реєстраційний номер: 0124U001412) та в межах проєкту "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою" Національного фонду досліджень України (реєстраційний номер проєкту 2023.03/0074).

Мета та завдання дослідження. Основною метою дослідження є аналіз асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь та розробка ефективних методів їхньої апроксимації системами стохастичних диференціальних рівнянь без запізнення. Для досягнення поставленої мети в роботі вирішуються такі завдання:

- Дослідити асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь на нескінченності.
- Встановити зв'язок між стохастичними системами та відповідними системами звичайних диференціальних рівнянь.
- Дослідити умови асимптотичної еквівалентності стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь до систем без післядії у нелінійному та лінійному випадках.
- Розробити та обґрунтувати методи апроксимації стохастичних систем із запізненням системами без запізнення у скінченновимірному просторі.
- Встановити схеми апроксимації для системи з інтегральним запізненням.
- Розробити аналогічні схеми у нескінченновимірному випадку.
- Довести теореми про середньоквадратичну збіжність апроксимаційних схем у різних класах стохастичних рівнянь.

Об'єктом дослідження є стохастичні функціонально-диференціальні рівняння, що описують еволюційні процеси з випадковими впливами та запізненням.

Предметом дослідження є умови асимптотичної еквівалентності розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь та відповідних рівнянь без післядії, а також поведінка розв'язків при зменшенні інтервалу запізнення.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії функціонально-диференціальних рівнянь, методи асимптотичної теорії, стохастичного диференціального числення, теорії напівгруп та методи теорії узагальнених функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано наступні нові результати:

- Доведено теореми про асимптотичну еквівалентність розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь та відповідних систем звичайних диференціальних рівнянь у нелінійному випадку.
- Встановлено умови асимптотичної еквівалентності у середньому квадратичному та з імовірністю 1 у лінійному випадку.
- Запропоновано нові схеми апроксимації стохастичних систем із запізненням системами без запізнення.
- Доведено збіжність у середньому квадратичному розв'язків рівнянь із запізненням до розв'язків відповідних стохастичних рівнянь без запізнення.
- Аналогічні питання вивчено для рівнянь із інтегральним запізненням.
- Обґрунтовано схему апроксимації для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь у нескінченновимірних просторах із необмеженим головним оператором.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані в дисертації результати можуть бути використані для:

- Моделювання еволюційних процесів із випадковими впливами та пам'яттю в економіці, біології, техніці та фізиці.

- Побудови ефективних чисельних методів для аналізу стохастичних систем із запізненням, що є моделями із розподіленими папраметрами.
- Оптимізації систем керування, що описуються стохастичними функціонально-диференціальними рівняннями, шляхом їх заміни відповідними рівняннями без післядії.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи одержані здобувачем самостійно. Визначення загального плану напрямку досліджень дисертації і постановка задач належать науковому керівникові Станжицькому Олександровичу. У роботах [101, 126, 127, 134] співавторам належить обговорення можливих шляхів дослідження, перевірка та аналіз отриманих результатів.

Апробація матеріалів дисертації. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на таких міжнародних конференціях:

1. Міжнародна наукова конференція «Прикладна математика та інформаційні технології», присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, 22–24 вересня 2022, Чернівці, Україна.
2. III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації», 30 вересня 2022, Запоріжжя, Україна.
3. XII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 2–4 червня 2023, Луцьк – Світязь, Україна.
4. Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023, Чернівці, Україна.
5. The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022, August 25–27, 2022, Chisinau, Republic of Moldova.
6. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2024, December 21–23, 2024, Tbilisi, Georgia.
7. XIII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 31 травня – 2 червня 2024, Луцьк – Світязь, Україна.

8. V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації», 29–31 травня 2024, Запоріжжя, Україна.
9. International Conference of Young Mathematicians June 1–3, 2023, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online), Kyiv, Ukraine
10. Науковий семінар з диференціальних рівнянь на базі кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь (спільно з кафедрою загальної математики), 12 березня 2025, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.

Публікації. За результатами дисертації опубліковано

- 2 статті у виданнях, які індексуються в наукометричних базах Scopus [101, 134]; обидві у виданнях, що входять до квартиля Q3;
- 2 статті у фаховому науковому виданні України категорії Б [126, 127];
- 9 тез доповідей на конференціях [80–85, 124, 125, 128].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку, який містить перелік публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Повний обсяг дисертації становить 148 сторінок, основний текст займає 124 сторінки.

Зміст роботи. У першому розділі представлено огляд літератури, що стосується тематики нашого дослідження. Проаналізовано основні джерела, методи та підходи, які використовувалися в роботах попередників для розв'язання подібних проблем. У цьому розділі детально описано, як розвивалася тема з часом, розкриваються ключові напрямки досліджень та зацентровано увагу на тих аспектах, де дослідження залишаються неповними.

Звертається увага на історичний розвиток проблематики, розглядаючи внесок різних дослідників у формування сучасного стану даної тематики. В результаті цього огляду виокреслено основні наукові підходи та концепції, що стали базою для подальших досліджень, а також підкреслено існуючі прогалини, які потребують додаткового вивчення. Такий аналіз дозволяє не лише краще

зрозуміти еволюцію досліджень у цій галузі, але й обґрунтувати актуальність і новизну нашої роботи.

Крім того, детально розглянуто сучасні тренди та тенденції, що впливають на подальший розвиток тематики, проаналізовано переваги та недоліки вже запропонованих розв'язків, що дає змогу сформулювати власний підхід до розв'язання поставлених завдань. Це дозволяє чітко визначити напрямки, у яких наше дослідження може зробити внесок і сприяти розвитку науки в цій сфері.

Другий розділ містить основні означення та теоретичні твердження, що стосуються стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь, які є ключовими для нашого дослідження. Ми розглядаємо використані методи, зокрема теорію функціонально-диференціальних рівнянь, асимптотичну теорію, стохастичні диференціальні рівняння, теорію C_0 -напівгруп, породжену необмеженим лінійним оператором, також зупиняємо увагу на ядерних операторах та операторах Гільберта-Шмідта.

Третій розділ присвячено дослідженню асимптотичної еквівалентності стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь. У першій частині розділу розглядається нелінійний випадок. Ми аналізуємо дві системи, що описують еволюцію процесів з випадковими впливами.

Першою є детермінована система

$$dx(t) = f_1(t, x(t))dt, \quad (0.0.1)$$

де $f_1 : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ — неперервна функція, ліпшицева за змінною x та задовольняє умову лінійного зростання. Поряд із нею розглядається система стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь

$$dy(t) = \left(f_1(t, y(t)) + f_2(t, y_t) \right) dt + \sigma(t, y_t) dW(t), \quad (0.0.2)$$

де

$$f_2 : [0, \infty) \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \sigma : [0, \infty) \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad y_t = y(t + \theta), \quad \theta \in [-h, 0],$$

а $\{W(t), t \geq 0\}$ — одновимірний вінерівський процес, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ з відповідною фільтрацією.

Вводяться поняття асимптотичної еквівалентності між цими системами. Зокрема, якщо для кожного розв'язку $y(t)$ системи (0.0.2) існує відповідний розв'язок

$x(t)$ системи (0.0.1) та виконується

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}|x(t) - y(t)|^2 = 0,$$

то ми називаємо систему (0.0.1) асимптотично еквівалентною системі (0.0.2) у середньоквадратичному сенсі.

Аналогічно, якщо для кожного розв'язку $y(t)$ системи (0.0.2) існує розв'язок $x(t)$ системи (0.0.1), для якого

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0\right\} = 1,$$

то така еквівалентність встановлюється з імовірністю 1.

Надалі функції $f_1(t, x)$, $f_2(t, \varphi)$, $\sigma(t, \varphi)$ вважатимемо неперервними за сукупністю змінних із виконанням таких умов:

1. Функція f_1 задовольняє умови Лівшиця та лінійного зростання, тобто існує константа $L > 0$ така, що

$$|f_1(t, x_1) - f_1(t, x_2)|^2 \leq L^2|x_1 - x_2|^2, \quad |f_1(t, x)| \leq L(1 + |x|),$$

для довільних $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$.

2. Функції f_2 та σ задовольняють умову Лівшиця у формі:

$$|f_2(t, \phi) - f_2(t, \psi)| + |\sigma(t, \phi) - \sigma(t, \psi)|^2 \leq L^2 \int_{-h}^0 |\phi(\theta) - \psi(\theta)|^2 d\theta.$$

Зауважимо, що звідси випливає нерівність

$$|f_2(t, \varphi) - f_2(t, \psi)|^2 + |\sigma(t, \varphi) - \sigma(t, \psi)|^2 \leq hL^2 \|\varphi - \psi\|^2,$$

для довільних $\varphi, \psi \in C_h$, $t \geq 0$.

3. Лінійний ріст

$$|f_2(t, \phi)|^2 + |\sigma(t, \phi)|^2 \leq L^2(1 + \|\phi\|^2).$$

Нехай $\gamma > L$. Виберемо h_0 так, щоб виконувалась нерівність

$$4(5h_0L^2 + 5L^2)h_0^2 e^{(5h_0L^2 + (5h_0L^2 + 5L^2)h_0 + 2\gamma)h_0} < 1. \quad (0.0.3)$$

Оскільки функція $m(h) = 4(5h_0L^2 + 5L^2)h_0^2 e^{(5h_0L^2 + (5h_0L^2 + 5L^2)h_0 + 2\gamma)h_0}$ монотонно зростає за h і $m(0) = 0$, то існує $h_0 > 0$, що для всіх $h \leq h_0$ нерівність (0.0.3) виконується.

4. Далі вважаємо, що при $h \leq h_0$ виконаними є такі умови:

1. $|f_2(t, \phi)| \leq Ke^{-\gamma t}$, $t \geq 0$, $\phi \in C_h$, $h \leq h_0$;
2. $|\sigma(t, \phi)| \leq Ke^{-\gamma t}$, $t \geq 0$, $\phi \in C_h$, $h \leq h_0$.

Головним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 0.1. *Нехай виконуються умови 1 – 4, тоді*

1. Система (0.0.2) асимптотично еквівалентна системі (0.0.1) у середньоквадратичному сенсі.
2. Система (0.0.2) асимптотично еквівалентна системі (0.0.1) з імовірністю 1.

У наведеній теоремі суттєвим є малість інтервалу запізнення. Якщо ж обмежитися лінійним випадком, то від такої малості можна відмовитися. Для цього ми розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь у формі

$$dx(t) = Ax(t) dt \quad (0.0.4)$$

з початковими умовами

$$x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

де A — стала детермінована матриця. Поряд із цією системою розглядається система стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь вигляду

$$dy(t) = \left(Ay(t) + \int_{-h}^0 B(t, \theta)y(t + \theta)d\theta \right) dt + \left(\int_{-h}^0 D(t, \theta)y(t + \theta)d\theta \right) dW(t) \quad (0.0.5)$$

з початковими умовами

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0],$$

де $B(t, \theta)$ та $D(t, \theta)$ — неперервні за t детерміновані матриці, інтегровні за змінною $\theta \in [-h, 0]$, а $W(t)$ — вінерівський процес з відповідною фільтрацією.

Припустимо, що існують такі функції $b(t)$ та $d(t)$:

$$\left| \int_{-h}^0 B(t, \theta)\phi(\theta)d\theta \right| \leq b(t) \int_{-h}^0 |\phi(\theta)|d\theta,$$

$$\left| \int_{-h}^0 D(t, \theta)\phi(\theta)d\theta \right| \leq d(t) \int_{-h}^0 |\phi(\theta)|d\theta.$$

Основним результатом для лінійного випадку є наступна теорема, яка встановлює асимптотичну еквівалентність між досліджуваними системами.

Теорема 0.2. Нехай усі розв'язки системи (0.0.4) є обмеженими на $t \in [0, \infty)$. Якщо

$$\int_0^{\infty} t|b(t)| dt \leq K_1 < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} t|d(t)|^2 dt \leq K_1 < \infty,$$

тоді система (0.0.5) є асимптотично еквівалентною системі (0.0.4) у середньоквадратичному сенсі та з імовірністю 1.

У третьому розділі ми детально дослідили умови, за яких системи стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь (як нелінійні, так і лінійні) демонструють асимптотичну еквівалентність із відповідними детермінованими системами. Для нелінійного випадку було встановлено відповідність між розв'язками обох систем з точки зору середньоквадратичної збіжності та збіжності з імовірністю 1. Аналогічний підхід застосовано до лінійного випадку, де додаткові умови на інтегральні характеристики функцій, що визначають додаткові члени, забезпечують необхідну асимптотичну поведінку розв'язків. Таким чином, розділ 3 містить як формулювання ключових означень та теоретичних положень, так і доведення основних теорем, що засвідчують асимптотичну еквівалентність розглянутих систем.

Четвертий розділ присвячений апроксимації стохастичних систем із запізненням за допомогою систем без запізнення. Він поділений на три частини:

- апроксимація у скінченновимірному випадку;
- випадок інтегрального запізнення;
- апроксимація у нескінченновимірному випадку.

У першій частині розглядається наступна задача.

Нехай у просторі \mathbb{R}^d маємо початкову задачу для системи стохастичних диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом

$$dx(t) = f(t, x(t), x(t-h)) dt + \sigma(t, x(t), x(t-h)) dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.0.6)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0].$$

Тут функції $f, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ визначені, неперервні за сукупністю змінних.

Існує стала $L > 0$, що виконано:

1) лінійний ріст:

$$|f(t, x, y)|^2 + |\sigma(t, x, y)|^2 \leq L(1 + |x|^2 + |y|^2) \quad (0.0.7)$$

для довільних $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$;

2) умова Ліпшиця:

$$\begin{aligned} &|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)|^2 + |\sigma(t, x_1, y_1) - \sigma(t, x_2, y_2)|^2 \\ &\leq L(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2). \end{aligned} \quad (0.0.8)$$

За системою (0.0.6) побудуємо наступну систему стохастичних диференціальних рівнянь без запізнення, яку назвемо апроксимуючою. А саме: зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$ і розіб'ємо відрізок $[-h, 0]$ точками $-\frac{h}{m}j$, $j = \overline{0, m}$ на m частин. Визначимо функції $z_j(t) \in \mathbb{R}^d$ як розв'язки наступних задач Коші

$$\begin{cases} dz_0 = f(t, z_0(t), z_m(t)) dt + \sigma(t, z_0(t), z_m(t)) dW(t), \\ dz_j(t) = \frac{m}{h} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), & t \in [0, T], \\ z_j(0) = \phi\left(-\frac{hj}{m}\right), & j = \overline{0, m}. \end{cases} \quad (0.0.9)$$

Означення 0.1. Система (0.0.9) називається апроксимуючою для системи (0.0.6) у середньому квадратичному, якщо

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left| x\left(t - \frac{h}{m}j\right) - z_j(t) \right|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad j = \overline{0, m}.$$

За виконання умов 0.0.7) та 0.0.8) основним результатом є наступна теорема.

Теорема 0.3. Система (0.0.9) є апроксимуючою у середньому квадратичному для початкової задачі (0.0.6) рівномірно за $j = \overline{0, m}$, тобто

$$\sup_{j = \overline{0, m}} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left| x\left(t - \frac{h}{m}j\right) - z_j(t) \right|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (0.0.10)$$

У другому підрозділі розглядається подібна задача, але вже коли запізнення носить розмитий по відрізку $[-h, 0]$ характер у вигляді інтегрального члена.

Розглянемо задачу Коші для системи стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t), \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta)dt + \sigma(t, x(t), \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta)dW(t), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (0.0.11)$$

де функції $f, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ визначені, неперервні за всіма змінними, та існує стала $L > 0$ така, що виконані умови:

1) умова лінійного зростання:

$$|f(t, x, y)|^2 + |\sigma(t, x, y)|^2 \leq L(1 + |x|^2 + |y|^2),$$

для будь-яких $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$.

2) умова Ліпшиця:

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)|^2 + |\sigma(t, x_1, y_1) - \sigma(t, x_2, y_2)|^2 \leq L(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2).$$

Визначимо функції $z_j(t) \in \mathbb{R}^d$ на $[0, T]$ як розв'язки наступних задач Коші:

$$\begin{cases} dz_0(t) = f(t, z_0(t), \frac{h}{m} \sum_{j=1}^m z_j(t))dt + \sigma(t, z_0(t), \frac{h}{m} \sum_{j=1}^m z_j(t))dW(t), \\ dz_j(t) = \frac{m}{h} [z_{j-1}(t) - z_j(t)], \quad j = \overline{1, m}, \\ z_j(0) = \phi(-\frac{hj}{m}), \quad j = \overline{0, m}. \end{cases} \quad (0.0.12)$$

Означення 0.2. Система (0.0.12) називається апроксимуючою системою для системи (0.0.11) в середньоквадратичному сенсі на $[0, T]$, якщо

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left| x \left(t - \frac{hj}{m} \right) - z_j(t) \right|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad j = \overline{0, m}. \quad (0.0.13)$$

Основний результат цієї частини представлено у наступній теоремі.

Теорема 0.4. *За виконання умов 1) і 2), система (0.0.12) є апроксимуючою системою в середньоквадратичному сенсі для початкової задачі (0.0.11), рівномірно за $j = \overline{0, m}$, тобто,*

$$\sup_{j=\overline{0, m}} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left| x \left(t - \frac{hj}{m} \right) - z_j(t) \right|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (0.0.14)$$

В останній частині цього розділу розглядається нескінченновимірне стохастичне рівняння із запізненням у гільбертовому просторі H з нормою $\|\cdot\|$ вигляду

$$du(t) = [Au(t) + f(t, u(t), u(t-h))]dt + \sigma(t, u(t), u(t-h))dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.0.15)$$

$$u(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0].$$

Тут $A : H \rightarrow H$ — необмежений, замкнений, лінійний оператор і $D(A) \subset H$ — його область визначення. Будемо вважати, що він є генератором компактної напівгрупи $S(t), t > 0$ в H . А $W(t)$ — Q -ядерний K -значний вінерівський процес

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \beta_i(t) l_i, \quad t \geq 0,$$

K — інший гільбертів простір. Тут $\beta_i(t)$ — стандартні, одновимірні, незалежні у сукупності процеси броунівського руху, $\{l_i, i \geq 1\}$ — ортонормований базис в K , послідовність невід'ємних чисел λ_i задовольняє умови

$$Ql_i = \lambda_i l_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

та

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty,$$

$\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — нормальна фільтрація, що задовольняє умови:

1. $W(t)$ є \mathcal{F}_t -вимірним;
2. $W(t+h) - W(t)$ не залежить від σ -алгебри \mathcal{F}_t для всіх $t \geq 0$ та $h \geq 0$.

Відносно відображень f і σ будемо вважати виконаними наступні умови:

1. $f : [0, T] \times H \times H \rightarrow H, \sigma : [0, T] \times H \times H \rightarrow L_2^0$ є неперервними за сукупністю аргументів;
2. існує стала $L > 0$, що виконано умову лінійного росту

$$\|f(t, u, v)\|^2 + \|\sigma(t, u, v)\|_{L_2^0}^2 \leq L(1 + \|u\|^2 + \|v\|^2),$$

для довільних t, u, v з області визначення;

3. умова Ліпшиця

$$\begin{aligned} & \|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)\|^2 + \|\sigma(t, u_1, v_1) - \sigma(t, u_2, v_2)\|_{L_2^0}^2 \\ & \leq L(\|u_1 - u_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2), \end{aligned}$$

для $t \in [0, T]$ та довільних $u_1, u_2, v_1, v_2 \in H$;

4. початкова не випадкова функція $\phi : [-h, 0] \rightarrow H$ є неперервною. Розв'язок початкової задачі (0.0.15) будемо розуміти у м'якому сенсі.

Означення 0.3. Неперервний \mathcal{F}_t адаптований випадковий процес $u : [-h, T] \times \Omega \rightarrow H$ назвемо м'яким розв'язком початкової задачі (0.0.15) на $[0, T]$ якщо:

1. $u(t) = \phi(t), t \in [-h, 0]$;
2. на $[0, T]$ $u(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} u(t) = S(0)\phi(0) + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s), u(s-h))ds \\ + \int_0^t S(t-s)\sigma(s, u(s), u(s-h))dW(s). \end{aligned} \quad (0.0.16)$$

Тут перший інтеграл розуміється як інтеграл Бохнера, а другий як стохастичний інтеграл Іто.

За рівнянням (0.0.15) побудуємо наступну систему стохастичних еволюційних рівнянь без запізнення, яку ми назвемо апроксимуючою.

Зафіксуємо натуральне m та розіб'ємо відрізок $[-h, 0]$ точками $-\frac{h}{m}j, j = \overline{0, m}$ на m частин. Визначимо процеси $z_j(t) \in H$ як розв'язки наступних задач Коші

$$\begin{cases} dz_0(t) = [Az_0 + f(t, z_0(t), z_m(t))] dt + \sigma(t, z_0(t), z_m(t)) dW(t), \\ dz_j(t) = \frac{m}{h} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), & t \in [0, T], \\ z_j(0) = \phi\left(-\frac{hj}{m}\right), & j = \overline{0, m}. \end{cases} \quad (0.0.17)$$

Тут $z_0(t)$ розглядається у м'якому сенсі, а решта m рівнянь інтерпретуються у звичайному сенсі, де похідна $\frac{dz_j(t)}{dt}$ розуміється як сильна за нормою простору H . З [37] випливає, що задача Коші (0.0.17) має єдиний розв'язок на $[0, T]$, де процес $z_0(t)$ задовольняє умови м'якого розв'язку, а $z_j(t)$ задовольняють відповідні рівняння у звичайному сенсі.

Означення 0.4. Система (0.0.17) називається апроксимуючою для (0.0.15) у середньому квадратичному, якщо

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \|u(t - \frac{h}{m}j) - z_j(t)\|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad j = \overline{0, m}.$$

Основним результатом цієї роботи є наступна теорема.

Теорема 0.5. *За виконання умов 1.-4. система (0.0.17) є апроксимуючою у середньому квадратичному для початкової задачі (0.0.15) рівномірно за $j = \overline{0, m}$, тобто*

$$\sup_{j=\overline{0, m}} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \|u(t - \frac{h}{m}j) - z_j(t)\|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (0.0.18)$$

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Станжицькому Олександр Миколайовичу, за індивідуальний підхід у формулюванні завдань, мудрі поради, постійну підтримку та увагу, яка надихала протягом усього дослідження.

Розділ 1

Огляд літератури

Серед різноманіття процесів природознавства чільне місце займають процеси з пам'яттю, тобто такі, майбутня еволюція яких суттєво залежить від їх попередніх станів. Саме введення в розгляд цієї залежності дозволило побудувати адекватні математичні моделі.

Такими є диференціальні рівняння із запізненням (пам'яттю, затримкою), або більш широко функціонально-диференціальними рівняннями. Ці рівняння поряд із шуканою функцією містять її значення в різні моменти часу.

Зовні такі рівняння інколи здаються зовсім простими і за формою запису майже не відрізняються від аналогічних моделей, що не враховують пам'ять. Але це тільки зовнішня простота. Розв'язати їх у явному вигляді практично майже ніколи не вдається. Типовим прикладом тут є логістична модель, що описує зміну чисельності одновидової популяції із врахуванням ефекту насичення. В класичному варіанті вона має вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - \beta x^2(t),$$

тут $x = x(t)$ — чисельність популяції в момент часу t , $\alpha \geq 0$ — різниця між коефіцієнтом народжуваності та смертності, $\beta \geq 0$ відповідає за інтенсивність попарних сутичок за їжу (внутрішньо-видова боротьба). Аналогічне рівняння із запізненням набирає вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t) - \beta x(t-h)x(t).$$

Дослідження моделі без запізнення не викликає труднощів. Не важко переконатися, що всі його розв'язки із додатними початковими даними при $t \rightarrow \infty$ прямують до положення рівноваги α/β . На жаль, при $h > 0$ тільки опис якісної

поведінки його розв'язків вимагає застосування найсучасніших методів аналізу. Однак саме модель при $h > 0$ дозволила пояснити ефект періодичної зміни чисельності популяції амеб [108–110].

Виявилось, що дійсно при певних співвідношеннях між α , β та h у логістичному рівнянні із запізненням з'являється стійкий режим автоколивань.

Врахування запізнення у ланцюгу оберненого зв'язку в математичній моделі локатора (рівняння Мінорського) [74, 75] дозволили виявити коливання на частоті, що досить сильно відрізняється від частоти контура.

Введення запізнення у математичну модель роботи різця або обробки деталей дозволило пояснити небажаний ефект виникнення вібрацій у процесі його роботи. Широко відомим є ефект галонування, або "шимі" при русі літака по ґрунтовому аеродрому, пояснити який вдалося лише ввівши у відповідну модель запізнення, що рівне часу проходження відстані між задніми та передніми колесами.

При описі розповсюдження кору у міському середовищі Лондона Йорке [114] використав модель

$$\dot{S}(t) = -\beta(t)S(t)[2j + S(t - 14) - S(t - 12)] + j,$$

тут $S(t)$ — кількість сприйнятливих до інфекції індивидів у момент часу t , j — швидкість із якою такі індивиди включаються у популяцію, $\beta(t)$ — функція, що характеризує популяцію, а запізнення характеризує той ефект, що індивид, який заражається у момент часу t , буде заразним протягом часового проміжку $[t + 12, t + 14]$.

Даний перелік можна продовжувати досить довго. Зазначимо, що багато цікавих, переконливих прикладів такого роду містяться в роботах [7, 9–13, 18, 20, 21, 25, 32, 34, 35, 38, 42, 43, 51, 63, 71, 72, 93, 95] та інших.

Зазначимо також, що перші теоретичні результати, стосовно найпростішого типу таких рівнянь — рівнянь із запізненням або диференціально-різницевих рівнянь вперше з'явилися наприкінці XVIII століття у роботах L. Euler, J. Bernuolli M. de Condorcet, власне майже одночасно із звичайними диференціальними рівняннями. Однак системний підхід до таких рівнянь отримав свій розвиток лише у другій половині XX століття і був викликаний, як було сказано вище, потребами практики.

Найповнішою та найсистемнішою на даний час є монографія J.K Hale [43]. Тут викладена сучасна (на той час) строга математична теорія функціонально-диференціальних рівнянь включаючи частинні випадки та численні приклади і застосування.

Теорія таких рівнянь активно розвивається і в Україні. Серед відповідних праць варто відзначити роботи [19, 22, 117, 121, 122, 129, 131–133], де розглянуто різні аспекти як якісної так, і асимптотичної теорії таких рівнянь. Так А.М. Самойленко в [131] за системою лінійних рівнянь із запізненням побудував систему лінійних звичайних диференціальних рівнянь, всі розв'язки якої задовольняють вихідну систему із запізненням. Тим самим ним було встановлено існування глобальних розв'язків системи із запізненням. У [132] автори перенесли цей результат на рівняння нейтрального типу.

Питанням апроксимації у різних сенсах системи функціонально-диференціальних рівнянь системою звичайних диференціальних рівнянь займалося багато авторів. Так Pituk в [86] отримав аналог теореми Хармана-Вінтнера, що зводить дослідження асимптотичної поведінки лінійної системи функціонально-диференціальних рівнянь до дослідження лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь.

У роботах [14, 15] автори застосовують абстрактний підхід через напівгрупи обмежених операторів, згенерованих необмеженим лінійним оператором, що входить у головну частину вихідного лінійного абстрактного функціонально-диференціального рівняння. Застосовуючи схему Тротерра-Като, автори замінюють вихідний об'єкт його ортогональними проєкціями на скінченновимірні простори. Фактично стохастичне функціонально-диференціальне рівняння замінюється системою звичайних диференціальних рівнянь. Доведена збіжність отриманих проєкцій до розв'язку вихідної задачі.

У роботах [30, 52, 118–120, 123] Черевко І.М. та його учні, розвиваючи ідеї Красовського М.М, будують для вихідних функціонально-диференціальних рівнянь апроксимуючі системи звичайних диференціальних рівнянь, що у супремних нормах на скінченних інтервалах наближують розв'язки вихідного рівняння. Ідея даної апроксимації полягає у застосуванні формули Тейлора для виразу $x(t-h)$ і запису для відповідних коефіцієнтів розкладу системи звичайних диференціальних рівнянь із відповідними початковими даними задачі Коші.

Із ростом розмірності системи її розв'язки апроксимують розв'язки вихідного рівняння із запізненням із точністю до $\frac{1}{\sqrt{m}}$, де m - розмірність апроксимуючої системи.

Оскільки даний підхід у нашому дослідженні буде поширено на стохастичний випадок, то зупинимося на ньому детальніше. У найпростішому варіанті він має наступний вигляд.

Розглядається диференціальне рівняння із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad (1.0.1)$$

де $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, функція $f(t, x, y)$ неперервна за t та задовольняє умову Ліпшиця за $x \in \mathbb{R}^n$ та $y \in \mathbb{R}^n$. Система (1.0.1) розглядається разом із початковою умовою $x(t) = \phi(t)$, $t \in [-\tau, 0]$. Ідея апроксимації полягає у наступному. Береться довільне натуральне m , та будується m елементів запізнення, що породжені вихідною функцією $x(t)$ і між собою послідовно з'єднані.

$$y_1(t) = x\left(t - \frac{\tau}{m}\right), \quad y_2(t) = x\left(t - \frac{2\tau}{m}\right), \dots, \quad y_m(t) = x(t - \tau), \quad t \in [0, T].$$

Даній послідовності ставиться у відповідність послідовність так званих аперіодичних ланок, що зв'язані наступною системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\tau}{m} \frac{dz_1(t)}{dt} + z_1(t) = x(t), \\ \dots \\ \frac{\tau}{m} \frac{dz_j(t)}{dt} + z_j(t) = z_{j-1}(t), \quad j = \overline{2, m}, \quad t \in [0, T], \\ z_j(0) = y_j(0). \end{cases} \quad (1.0.2)$$

Якщо до системи (1.0.2) додати ще рівняння, що пов'язує її з системою (1.0.1), то система

$$\begin{cases} \frac{dz_0(t)}{dt} = f(t, z_0(t), z_m(t)), \\ \frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \\ z_j(0) = y_j(0), \quad j = \overline{0, m} \end{cases} \quad (1.0.3)$$

називається апроксимуючою для (1.0.1). Основним результатом тут є наступна теорема.

Теорема 1.1. *За виконання вказаних вище умов маємо*

$$|y_j(t) - z_j(t)| \leq C \left(\frac{K\tau}{\sqrt{m}} + \omega\left(\frac{\tau}{m}\right) \right), \quad t \in [0, T], \quad j = \overline{0, m}.$$

Тут $\omega\left(\frac{\tau}{m}\right)$ - модуль неперервності функції $x(t)$ на $[0, T]$ довжини $\frac{\tau}{m}$.

У вказаних роботах [30, 52, 115, 118–120, 123] даний результат узагальнено на більш ширші класи рівнянь. Так у [30] автори розглянули вищі наближення, тобто враховували у формулі Тейлора члени другого порядку. У [123] автори розповсюдили даний підхід на системи різницевих рівнянь та гібридні системи диференціальних рівнянь із запізненням та різницевих рівнянь. У [119] автори за допомогою апроксимаційної задачі вивчають взаємозв'язок між стійкістю вихідної та апроксимуючої системи. Основним тут результатом є наступна теорема.

Теорема 1.2. *Якщо нульовий розв'язок системи (1.0.1) рівномірно асимптотично стійкий, то для достатньо великих m нульовий розв'язок апроксимуючої системи (1.0.3) також рівномірно асимптотично стійкий. Якщо нульовий розв'язок системи (1.0.3) рівномірно асимптотично стійкий, то нульовий розв'язок системи (1.0.1) також рівномірно асимптотично стійкий при достатньо великих m .*

У роботі [120] автори розглядають апроксимаційний підхід для значно складніших об'єктів — систем нейтрального типу. Тут отримано подібні твердження до попередніх про апроксимацію. У роботі [52] автори розповсюджують апроксимаційні результати на функціонально-диференціальні системи. У роботі [118] автори демонструють застосування Теорема 1.2 до дослідження стійкості лінійних систем зі сталим запізненням. Завдяки даній теоремі вдалося оцінити корені характеристичного рівняння, які відповідають за стійкість. У [115] автори із використанням Теорема 1.2 будують області стійкості систем із запізненням.

Для систем стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь такий підхід раніше не застосовувався. Отриманню подібних результатів і присвячене дане дисертаційне дослідження.

Зазначені вище роботи [86, 131–133] розвивають асимптотичний підхід до вивчення граничної ($t \rightarrow \infty$) поведінки розв'язків систем функціонально-диференціальних рівнянь, що базується на методі асимптотичної еквівалентності, згідно з класичною теоремою Левінсона [66] та її узагальненнями.

У роботі [105] застосовано інший підхід. А саме: за системою функціонально-диференціальних рівнянь із запізненням побудовано систему звичайних диференціальних рівнянь, множина розв'язків якої є атрактором для вихідної функціонально-диференціальної системи. Таким чином, з точки зору асимптотичної поведінки, дослідження нескінченновимірного об'єкта зведено до дослідження скінченновимірного. Правда, слід зазначити, що виписати явний вигляд такої скінченновимірної системи вдається далеко не завжди, наприклад, у випадку, коли розглядається слабко збурена нелінійна задача із сильно стійкою лінійною частиною.

Для систем стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь такий підхід раніше не застосовувався. Це ще одна група результатів, отриманих у даному дисертаційному дослідженні.

Поряд із системами функціонально-диференціальних рівнянь із зосередженими параметрами велике прикладне значення мають подібні об'єкти із розподіленими параметрами та "затримками". У таких процесів еволюція параметрів залежить не тільки від часової змінної, але й від просторових координат (положення в просторі, густина, розподіл температур тощо). Їх математичними моделями є функціонально-диференціальні рівняння еволюційного типу у нескінченновимірних просторах. Частинними ж випадками таких рівнянь є функціонально-диференціальні рівняння у частинних похідних.

Функціонально-диференціальні рівняння у частинних похідних виникають у багатьох біологічних, хімічних та фізичних системах. Системні вивчення таких рівнянь почались порівняно нещодавно — в середині 70х років ХХ століття — і на даний момент інтенсивно розвиваються.

Однією із перших робіт, де суттєву роль грає запізнення була модель Gurtin та Pipkin [41], що описує процес теплопровідності і пояснює недолік класичного рівняння теплопровідності

$$y_t = \Delta y,$$

де $y(t, x)$ - температура у момент часу t в точці x , а саме: миттєве поширення тепла у теплопровідниках. Численні прості та складні досліди підтверджують, що така швидкість скінченна. Автори в [41] запропонували ввести в цю модель запізнення, що характеризує тепловий опір провідника і, як пояснюють фізики, саме це і робить швидкість поширення тепла скінченною. Сама модель Gurtin

and Pirkin досить складна, але її лінеаризація приводить до рівняння

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \int_0^{\infty} \alpha(s)y(t-s, x)ds = \beta\Delta y,$$

яке є рівнянням у частинних похідних із нескінченним запізненням.

Ще одним прикладом функціонального рівняння є модель Ruess, запропонована у [91]. Вона стосується еволюції біологічної популяції (за чисельністю) і враховує загаювання процесу народження. Знову її лінеаризована версія має наступний вигляд

$$n_t(t, x) - an_{xx}(t, x) = n(t, x) \left[1 - n(t, x) - \int_{-h}^0 u(t + \tau(s), x)ds \right],$$

де $n(t, x)$ - чисельність популяції в момент часу t в точці x , при цьому функція $\tau(s)$ характеризує родові запізнення.

Узагальненнями даної одновидової популяції є моделі багатовидових популяцій у трихвимерному просторі описані в роботах [27, 40, 55, 64, 65, 77, 94, 96, 102].

Варто також відзначити кліматичні моделі, розглянуті в роботах Hetzer та співавторів [45–50]. Їх роботи базуються на енергетичному балансі клімату, що враховує ефект запізнення. Базовою двовимірною моделлю є модель типу реакції-дифузії вигляду

$$c(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) - \operatorname{div}(k\nabla u(\cdot, t))(x) = \mu Q(x)h(x, u(x, t)) - g(u(x, t)).$$

Тут h є функціоналом наступного вигляду

$$h(x, u(x, t)) = \hat{h}\left(x, u(x, t), \int_{-T}^0 b(s)(u(x, t+s))ds\right).$$

Іншими словами, функціонально-диференціальні рівняння є адекватним інструментом моделювання різноманітних процесів природознавства, а тому їх математичне дослідження є надзвичайно важливою задачею.

Першим теоретичним питанням, що тут виникає, є питання коректної розв'язності таких задач. З цього приводу варто відзначити роботи [44, 90], де отримані теореми існування та єдиності розв'язків відповідних задач Коші. Продовженням даних досліджень є роботи [17, 26, 29, 33, 67], де встановлена

коректна розв'язність задач Коші у абстрактній постановці. Тут також розглянуто задачі із нескінченною пам'яттю. В даних роботах також проведено аналіз стійкості для слабо нелінійних систем.

Своєрідним підсумком досліджень у цьому напрямку є монографія [54], що є аналогом монографії Хейла [43] для нескінченновимірного випадку.

Однак, нагальні потреби практики вимагають у сучасних моделях врахування випадкових сил. Часто вважається, що ці сили є результируючим фактором великої кількості незалежних випадкових величин, що приводить до появи у границі процесу із незалежними значеннями, так званого білого шуму, або узагальненої похідної від процесу Вінера. Таким чином, виникають стохастичні функціонально-диференціальні рівняння зі стохастичним інтегралом Іто у правій частині. Скінченновимірна теорія таких рівнянь розвивалась у роботах [16, 28, 60, 78, 107, 111–113], де вивчались питання існування та єдиності розв'язків, їх неперервної залежності від параметрів та початкових даних, марковість, феллеровість. Якісні та асимптотичні властивості розв'язків таких рівнянь вивчались у роботах [24, 53, 106]. Фундаментальною монографією, аналогічно до книги Хейла є тут праця Є. Ф. Царькова [104]. Видана у 1989 році, вона ввбрала у себе всі відомі результати, як якісного, асимптотичного характеру поведінки розв'язків, так і їх імовірнісні характеристики.

Стосовно аспектів асимптотичної еквівалентності для систем стохастичних рівнянь, то на даний час відомими є тільки результати О.М. Станжицького та його учнів. Вони стосуються як питань асимптотичної еквівалентності з імовірністю 1 так, і у середньому квадратичному для лінійного випадку [130] та [116] для нелінійного. Основними результатами лінійного випадку є узагальнення класичної теореми Левінсона на стохастичні системи. Тут розглянуто дві системи, одна з яких є детермінованою та має вигляд

$$dx = Axdt, \quad (1.0.4)$$

а інша є її стохастичним збуренням

$$dy = (A + B(t))ydt + D(t)y dW(t). \quad (1.0.5)$$

Тут $B(t), D(t)$ — неперервні при $t \geq 0$, детерміновані матриці, $W(t)$ — процес Вінера.

Вивчаються умови асимптотичної еквівалентності систем (1.0.4) та (1.0.5) у сенсі наступних означень.

Означення 1.1. Якщо кожному розв'язку системи (1.0.5) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (1.0.4) такий, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}|x(t) - y(t)|^2 = 0,$$

то система (1.0.5) називається асимптотично еквівалентною до системи (1.0.4) у середньому квадратичному.

Якщо ж можна побудувати таку відповідність, що

$$\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0) = 1,$$

то система (1.0.5) називається асимптотично еквівалентною до системи (1.0.4) з імовірністю 1.

Відносно асимптотичної еквівалентності отримано наступний результат.

Теорема 1.3. Нехай всі розв'язки системи (1.0.4) обмежені на $[0, \infty)$.

Тоді якщо

$$\int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} \|D(t)\|^2 dt < \infty,$$

то система (1.0.5) є асимптотично еквівалентною до системи (1.0.4) у середньому квадратичному.

Якщо ж умову на матрицю $D(t)$ замінити на умову

$$\int_0^{\infty} t \|D(t)\|^2 dt < \infty,$$

то система (1.0.5) є асимптотично еквівалентною до (1.0.4) з імовірністю 1.

Для нелінійного випадку у [116] отримано наступний результат.

Розглядається нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь

$$dx = f(t, x)dt \tag{1.0.6}$$

та система стохастичних рівнянь Іто

$$dy = f(t, y)dt + \sigma(t, y)dW(t), \tag{1.0.7}$$

де $f(t, x), \sigma(t, x)$ є неперервними за сукупністю змінних, $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ n - вимірними вектор-функціями, що задовільняють наступні умови:

а) існує стала $L > 0$, що для всіх $x, y \in \mathbb{R}^n$ та $t \geq 0$ виконана умова Ліпшиця

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L|x - y|; \quad (1.0.8)$$

б) існує стала $A > 0$, що для довільних $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ виконана нерівність

$$|f(t, x)| \leq A(1 + |x|); \quad (1.0.9)$$

в) існує обмежена на $[0, \infty)$ функція $\alpha(t)$ така, що для довільних $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ виконана нерівність

$$|\sigma(t, x)| \leq \alpha(t)(1 + |x|). \quad (1.0.10)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1.4. *Нехай розв'язки системи 1 задовольняють умову дисипації: існує стала $K_1 > 0$, що для всіх $t > 0$ виконана нерівність*

$$|x(t)| \leq K_1|x(0)|$$

та виконані умови а)-в), причому

$$\alpha(t) \leq K_2 e^{-\alpha t},$$

$K_2 > 0, \alpha > 0$, та $\alpha > L$. Тоді:

1. система (1.0.7) асимптотично еквівалентна до системи (1.0.6) у середньому квадратичному;
2. система (1.0.7) асимптотично еквівалентна до системи (1.0.6) з імовірністю 1.

Для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь подібних результатів раніше не було отримано. В даному дисертаційному дослідженні подібні результати отримано. Стосовно інших аспектів асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних рівнянь відзначимо роботу [76], де отримані результати ергодичного характеру про асимптотичну поведінку розподілів розв'язків та поведінку певних функціоналів від розв'язків.

Останнім часом значно активізувалися дослідження у галузі нескінченновимірних стохастичних диференціальних рівнянь. У абстрактній постановці такі рівняння мають вигляд

$$dy(t) = (Ay(t) + f(t, y_t))dt + \sigma(t, y_t)dW(t), \quad (1.0.11)$$

де $A : H \rightarrow H$ — лінійний, взагалі кажучи, необмежений оператор, H - сепарабельний гільбертів простір. Вводиться простір $C([-h, 0]; H) = C_h$ неперервних відображень з $[-h, 0]$ в H із рівномірною нормою

$$\|y\|_C = \sup_{t \in [-h, 0]} \|y(t)\|_H.$$

Відображення f діє з простору $[0, T] \times C_h$ в H , а σ з простору $[0, T] \times C_h$ в простір операторів $L_2(Q^{\frac{1}{2}}, K, H)$ Гільберта-Шмідта. Тут $h > 0$ — інтервал запізнення, а $W(t)$ — нескінченновимірний Q -ядерний процес Вінера, заданий у сепарабельному просторі K , $y_t = y(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Якщо зокрема у загальній постановці оператор A є оператором диференціювання певного порядку, то тоді абстрактне рівняння (1.0.11) перетворюється у стохастичне функціонально-диференціальне рівняння у частинних похідних.

Стосовно коректної розв'язності рівняння (1.0.11) з початковою умовою

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0],$$

то її як і у рівняннях без запізнення розуміють у різних сенсах: м'який розв'язок (mild solution), слабкий (weak) та сильний (strong) розв'язки. Дані означення та взаємозв'язок між ними досліджено, наприклад, у монографії [70].

Для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь питання існування м'яких розв'язків при різних умовах вивчалось у роботах [16, 69]. Доведення відповідних результатів тут подібне до скінченновимірного випадку із застосуванням теорії напівгруп $S(t) = e^{tA}$ обмежених операторів, згенерованих оператором A . Подібність до скінченновимірних міркувань не випадкова, оскільки у означенні м'якого розв'язку вже не фігурує необмежений оператор, завдяки аналогу формули Лагранжа варіації довільної сталої, він замінений сім'єю обмежених операторів $S(t)$. Встановлення умов існування слабких розв'язків проводиться шляхом синтезу підходів монотонності та компактності, аналогічно детермінованому випадку [68]. Доведення існування сильних розв'язків

проводиться шляхом використання теорем типу Сірріна, теорії критичних просторів та максимальної регулярності [1–6, 87]. Дані дослідження проведені у роботах [23, 68, 69, 89] та інших. Різні аспекти асимптотичної поведінки розв’язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь (стійкість, ергодичність, інваріантні міри) вивчалися у працях [8, 24, 39, 56, 57, 88, 92, 97–100, 103, 106]. Основною рисою даних робіт є отримання певних результатів у абстрактній постановці (1.0.11), а потім їх реалізація, як правило, для стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь у частинних похідних. При цьому об’єкт реалізації має, як правило, вигляд

$$du(t, x) = A(t, u_t, D_x u, D_x^2 u)dt + B(t, u_t, D_x u, D_x^2 u)dW(t).$$

Тут D_x та D_x^2 означають першу та другу узагальнені похідні. Однак, стосовно застосування апроксимаційних схем як це описано для рівнянь типу (1.0.1) у нескінченновимірному навіть детермінованому: на даний момент нічого невідомо. В даному дисертаційному дослідженні ці питання вивчаються.

Висновки до розділу 1

У даному розділі дисертаційної роботи проводиться огляд наукових робіт стосовно тематики дослідження. Тут описано результати попередників та дано детальне порівняння із результатами дисертаційного дослідження. Із огляду результатів попередників можна зробити наступні висновки:

- 1) асимптотична поведінка на нескінченності розв’язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь вивчена недостатньо, особливо прийомами методу асимптотичної еквівалентності навіть у лінійному випадку;
- 2) застосування методу асимптотичної еквівалентності для нелінійних рівнянь є перспективним напрямком досліджень;
- 3) побудова апроксимізаційних схем для систем стохастичних рівнянь із запізненням та запізненнями інтегрального типу представляє науковий інтерес і є зовсім нерозробленою галуззю;
- 4) зовсім не вивчено даний метод для стохастичних рівнянь із запізненням у нескінченновимірних просторах, що є дуже важливим для рівнянь у частинних похідних.

Розділ 2

Попередні відомості

У даному підрозділі ми наведемо деякі попередні відомості із теорії функціонально-диференціальних рівнянь як у скінченновимірному випадку, так і у нескінченновимірних просторах, конструкцію та властивості нескінченновимірного процесу Вінера, деякі відомості про C_0 -напівгрупи та пов'язані із ними оператори. Результати, що тут висвітлені, містяться у роботах [43], [104], [54], [79], [31].

2.1 Функціонально-диференціальні рівняння. Скінченновимірний випадок

Нехай $h > 0$ — інтервал запізнення. Визначимо наступний функціональний простір

$$C_h = C([-h, 0]; \mathbb{R}^d)$$

як простір неперервних функцій $\phi : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ із рівномірною метрикою

$$\|\phi\|_C = \sup_{\theta \in [-h, 0]} |\phi(\theta)|.$$

Тут $|\cdot|$ — евклідова метрика в \mathbb{R}^d .

Оскільки ми в подальшому будемо працювати лише із функціями, визначеними на інтервалі $[-h, \infty)$, то за функцією $\phi \in C_h$ визначимо для неперервної при $t \geq 0$ функції $x(t)$ такої, що $x(0) = \phi(0)$, наступну неперервну функцію

$$x(t, \phi) = \begin{cases} \phi(t), & t \in [-h, 0], \\ x(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Для кожного $t \geq 0$ тепер введемо елемент запізнення

$$x_t = x_t(\phi) = x(t + \theta, \phi), \theta \in [-h, 0],$$

що є запараметризованою сім'єю неперервних на $[-h, 0]$ функцій.

Нехай $f : [0, T] \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^d$ є відображенням, яке за другою змінною є функціоналом над простором C_h . Якщо D – підмножина в $\mathbb{R} \times C_h$, а $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ і похідною $\dot{x}(t)$, то скажемо, що рівність

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (2.1.1)$$

є функціонально-диференціальним рівнянням, визначеним на D .

Означення 2.1. Функція $x(t)$ називається розв'язком рівняння (2.1.1) на $[-h, T]$, якщо вона на $[0, T]$ має похідну (в точці $t = 0$ це лівостороння, а в точці $t = T$ це правостороння похідні), причому $(t, x_t) \in D$ та $x(t)$ задовільняє рівняння (2.1.1) на $[0, T]$.

Якщо задана початкова функція $\phi \in C_h$, то кажуть, що $x(t)$ є розв'язком початкової задачі якщо

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad (2.1.2)$$

а при $t \in [0, T]$ задовільняє рівняння (2.1.1) у сенсі означення 2.1.

Розв'язок початкової задачі інколи розуміють у дещо ширшому сенсі, а саме:

Означення 2.2. Скажемо, що неперервна на $[-h, T]$ функція $x(t)$ є розв'язком початкової задачі на $[-h, T]$, якщо

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0],$$

а при $t \in [0, T]$ $x(t)$ задовільняє інтегральну рівність

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t f(s, x_s) ds. \quad (2.1.3)$$

Звичайно функція $x(t)$ є при цьому абсолютно неперервна та задовільняє рівняння (2.1.1) майже скрізь. При цьому, звичайно, розуміється, що інтеграл у (2.1.2) існує як інтеграл Лебега. Відзначимо ще також можливість залежності f у правій частині рівняння (2.1.1) від похідної розв'язку у попередні моменти часу.

У цьому випадку говорять про функціонально-диференціальні рівняння нейтрального типу. Але оскільки такі рівняння не є предметом нашого подальшого розгляду, то ми на них зупинятися не будемо.

Наведемо теореми існування та єдиності розв'язків початкової задачі (2.1.1)-(2.1.2). Вони будуть наведені у тих формах, які знадобляться для подальших досліджень.

Теорема 2.1 (існування). *Нехай Ω — відкрита множина в $\mathbb{R} \times C_h$, а функція f неперервна на Ω . Якщо $(0, \phi) \in \Omega$, то існує розв'язок початкової задачі (2.1.1)-(2.1.2), визначений у деякому правому околі точки $t = 0$.*

Аналогічно теорії звичайних диференціальних рівнянь існують результати про продовження такого розв'язку на максимальний інтервал аж до моменту його виходу на межі області Ω .

Означення 2.3. Скажемо, що відображення $f(t, \phi)$ задовольняє в Ω умову Ліпшиця за ϕ , якщо існує стала $L > 0$, що

$$|f(t, \phi) - f(t, \phi_1)| \leq L \|\phi - \phi_1\|_C$$

для довільних пар $(t, \phi) \in \Omega$ та $(t, \phi_1) \in \Omega$.

Теорема 2.2 (існування та єдиності). *Якщо в умовах Теорема 2.1 відображення f задовольняє за змінною ϕ умову Ліпшиця, то задача (2.1.1)-(2.1.2) має єдиний розв'язок у деякому правому околі точки $t = 0$.*

Зазначимо, що рівняння (2.1.1) — це дуже загальний тип рівнянь. Його частинними випадками є звичайні диференціальні рівняння

$$\dot{x} = F(t, x),$$

при цьому відображення $f(t, \phi)$ має вигляд $f(t, \phi(0)) = F(t, \phi(0))$ рівняння із запізненням

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad (2.1.4)$$

де відображення $f(t, \phi)$ набуває вигляду

$$f(t, \phi) = \phi(t, \phi(0), \phi(-h)) = F(t, \phi(0), \phi(-h)).$$

До цього типу відносяться також інтегрально-диференціальні рівняння або рівняння із інтегральним запізненням

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), \int_{-h}^0 x(t + \theta) d\theta). \quad (2.1.5)$$

При цьому відображення $f(t, \phi)$ має вигляд

$$f(t, \phi) = f(t, \phi(0), \int_{-h}^0 \phi(\theta) d\theta).$$

2.2 Функціонально-диференціальні рівняння. Нескінченновимірний випадок

Як було зазначено раніше, у огляді літератури, у нескінченновимірних просторах існує кілька підходів до визначення розв'язку (м'який, слабкий і сильний). У наших дослідженнях фігурує саме м'який розв'язок, тож ми зупинимось на ньому. Нехай X — сепарабельний банахів простір (польський простір), а $A : X \rightarrow X$ — лінійний необмежений оператор з областю визначення $D(A)$. Припустимо, що A є генератором напівгрупи обмежених просторів $S(t)$ класу C_0 . На таких напівгрупах ми зупинимось нижче. Через C_h знову позначимо простір неперервних функцій, що діють з $[-h, 0]$ в X із супремною нормою

$$\|x\|_C = \sup_{t \in [-h, 0]} \|x(t)\|_X.$$

Нехай відображення $f : [0, T] \times C_h \rightarrow X$ є неперервним за сукупністю змінних за нормою простору X .

Означення 2.4. Скажемо, що функція $u(t) : [-h, T] \rightarrow X$ є м'яким розв'язком початкової задачі

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u_t), \\ u(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (2.2.1)$$

на $[-h, 0]$, якщо $u(t) = \phi(t)$ на $[-h, 0]$, а при $t \in [0, T]$ задовольняє інтегральне рівняння

$$u(t) = S(t)u(0) + \int_0^t S(t-s)f(s, u_s) ds. \quad (2.2.2)$$

Відносно теорем існування та єдиності розв'язку задачі (2.2.1) наведемо лише один результат, який ми будемо використовувати.

Теорема 2.3. *Якщо відображення f є неперервним за сукупністю змінних та задовольняє за ϕ умову Ліпшиця*

$$\|f(t, \phi) - f(t, \phi_1)\|_X \leq L \|\phi - \phi_1\|_C,$$

$t \in [0, T]$, $\phi, \phi_1 \in C_h$, а напівгрупа $S(t)_{t \in [0, T]}$ є напівгрупою класу C_0 , тоді для довільної початкової функції $\phi \in C_h$ задача (2.2.1) має єдиний м'який розв'язок, визначений на $[-h, T]$.

2.3 C_0 -напівгрупи та оператори

Нехай X є сепарабельним банаховим простором.

Означення 2.5. Однопараметрична сім'я $\{S(t), t \geq 0\}$ лінійних обмежених операторів із X в X називається напівгрупою класу C_0 , або сильно неперервною, якщо:

1. $S(0) = I$ — тотожний оператор;
2. $S(t) \cdot S(s) = S(t+s)$, для всіх $t, s \geq 0$, тобто виконана напівгрупна властивість;
3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x$, при $x \in X$.

Якщо $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I\| = 0$, то напівгрупа $S(t)$ називається рівномірно неперервною. Із напівгрупової властивості тоді випливає, що

$$\lim_{t \rightarrow s} \|S(t) - S(s)\| = 0. \quad (2.3.1)$$

Лінійний оператор $A : X \rightarrow X$ з областю визначення

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \right\},$$

існує, та визначений як

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ S(t)x}{dt} \right|_{t=0}$$

для $x \in D(A)$ називається інфінітезимальним оператором напівгрупи $S(t)$ або її генератором. Якщо A є генератором напівгрупи класу C_0 , тоді область його

визначення $D(A)$ щільна в X , а сам A є замкненим в X оператором. При цьому якщо $x \in D(A)$, то $S(t)x \in D(A)$ і

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Іншими словами, функція $x(t) = S(t)x_0$ є сильним розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0 \in D(A). \end{cases}$$

Якщо $S(t)$ є напівгрупою класу C_0 , то існує стала $\gamma \geq 0$ та стала $M \geq 0$ такі, що

$$\|S(t)\| \leq Me^{\gamma t}, \quad t \geq 0.$$

Суттєву роль у наших дослідженнях відіграють компактні напівгрупи.

Означення 2.6. C_0 -напівгрупа $S(t)$ називається компактною при $t > t_0$ якщо для всіх $t > t_0$ оператор $S(t)$ є компактним в X оператором.

Напівгрупа $S(t)$ називається компактною, якщо вона компактна для $t > 0$. Зауважимо, що якщо $S(t)$ є компактною при $t \geq 0$, то простір X скінченновимірний. Із напівгрупової властивості та властивості компактних операторів випливає, що якщо для деякого $t_0 > 0$ $S(t_0)$ є компактним оператором, то $S(t)$ є компактним для всіх $t \geq t_0$.

У подальшому нам знадобиться наступний результат.

Теорема 2.4. *Нехай $S(t)$ є напівгрупою класу C_0 . Якщо $S(t)$ компактна при $t > t_0$, то вона є неперервною у рівномірній операторній топології при $t > t_0$, тобто виконано співвідношення (2.3.1).*

У конструкції нескінченновимірного процесу Вінера $W(t)$ суттєву роль відіграють ядерні оператори та оператори Гільберта-Шмідта. Оскільки у подальшому будемо працювати у гільбертових просторах, то дані поняття будемо формулювати у сепарабельних гільбертових просторах, заданих над полем дійсних чисел.

Нехай H і K — два сепарабельних простори Гільберта із скалярними добутками $(\cdot, \cdot)_H$ і $(\cdot, \cdot)_K$ відповідно, а $L(H, K)$ — простір лінійних обмежених операторів із H в K із рівномірною операторною нормою. Через $L_\infty(H, K)$ позначимо простір

всіх компактних лінійних операторів із H в K . Оператор $A \in L_\infty(H)$ назвемо невід'ємним, якщо $(Ax, x) \geq 0$, для довільного $x \in H$. Невід'ємний оператор B називається арифметичним коренем з A , якщо $B^2 = A$. Відомо, що у класі невід'ємних операторів такий B існує і єдиний.

В класі компактних операторів із H в H введемо у розгляд оператор A^*A , тут A^* — спряжений до A . Очевидно, що A^*A є цілком неперервним і невід'ємним. Модулем оператора A назвемо оператор

$$|A| = \sqrt{A^*A}.$$

Власні числа оператора $|A|$ $\rho_i(A)$ називаються сингулярними числами оператора A . Оператор A називається ядерним, якщо

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(A) < \infty.$$

Клас ядерних операторів позначається $L_1(H)$. При цьому ядерна норма має вигляд $\|A\| = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i(A)$.

Нехай $\{e_k\}_1^\infty$ — ортонормований базис в H . Для ядерних операторів вводиться поняття сліду TrA за формулою

$$TrA = \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k).$$

Добре відомо, що якщо $A \in L_1(H)$ то TrA є коректно визначеним і не залежить від вибору базису.

Для невід'ємного, неперервного оператора A сума

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k)$$

не залежить від вибору базису і скінченна тоді і тільки тоді, коли A — ядерний оператор, при цьому $TrA = \|A\|_1$.

Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(A)$ збіжний, то оператор A називають оператором Гільберта-Шмідта і позначають простір таких операторів $L_2(H)$, при цьому норма

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^2}$$

називається нормою Гільберта-Шмідта. Даний простір є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(A, B)_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(A) \rho_k(B).$$

Очевидне включення $L_1(H) \subset L_2(H)$.

Поняття оператора Гільберта-Шмідта можна ввести і для двох сепарабельних гільбертових просторів H і K наступним чином. Нехай $\{e_k\}_1^{\infty}$ — ортонормований базис в H , а $\{j_k\}_1^{\infty}$ — ортонормований базис в K . Оператор $A \in L(H, K)$ називається оператором Гільберта-Шмідта якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Ae_k\|_K^2 < \infty.$$

При цьому

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|Ae_k\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

називається нормою Гільберта-Шмідта і не залежить від вибору базису.

2.4 Q-ядерний процес Вінера та стохастичний інтеграл по ньому

У подальшому нам знадобиться конструкція стохастичного нескінченного інтеграла Іто $\int_0^T f(s) dW(s)$. Нехай K і H — два простори Гільберта, а $Q \in L(K)$ є самоспряженим невід'ємним оператором, для якого $Tr Q < \infty$. У цьому випадку говорять, що Q є оператором зі скінченним слідом. Добре відомо, що тоді існує ортонормований базис $\{e_i\}_1^{\infty}$ в K , що складається із власних векторів оператора Q . Позначимо через λ_i — послідовність його невід'ємних власних чисел. Зі скінченності сліду випливає, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ збіжний.

Означення 2.7. K -значний випадковий процес $W(t)$, $t \geq 0$ називається Q -ядерним процесом Вінера, якщо:

1. $W(0) = 0$;
2. $W(t)$ має неперервні за нормою K траєкторії;
3. $W(t)$ є процесом із незалежними приростами;

4. розподіл процесу $W(t) - W(s)$, позначений як $Law(W(t) - W(s))$, є гаусівським із середнім 0 і дисперсією $(t - s)Q$, при $t \geq s \geq 0$.

Добре відомо, що Q -ядерний процес Вінера допускає представлення

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \beta_j(t) e_j, \quad (2.4.1)$$

де $\beta_j(t)$ — скалярні, незалежні у сукупності одновимірні процеси броунівського руху. При цьому ряд (2.4.1) для кожного $t \geq 0$ збігається у середньому квадратичному.

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ задана фільтрація $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, із якою узгоджений Q -ядерний процес $W(t)$, тобто

1. $W(t) \in \mathcal{F}_t$ -вимірний для $t \in [0, T]$;
2. $W(t + s) - W(t)$ не залежить від \mathcal{F}_t для всіх $t, s \in [0, T]$.

Введемо тепер поняття стохастичного інтеграла

$$\int_0^T f(s) dW(s).$$

Дана конструкція ідейно подібна до конструкції такого інтеграла у скінченновимірному просторі з урахуванням ефектів нескінченновимірного простору. Спочатку такий інтеграл будується для елементарних процесів. Нехай $f(t) = f(t, \omega) \in L(K, H)$ значний випадковий процес, узгоджений із фільтрацією $\{\mathcal{F}_t\}$. Він називається елементарним, або ступінчастим, якщо існує скінченне розбиття відрізка $[0, T] : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ і послідовність $L(K, H)$ -значних випадкових величин f_0, f_1, \dots, f_{n-1} така, що $f_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ -вимірним та

$$f(t) = f_j, t \in [t_i, t_{i+1}], i = \overline{0, n-1}.$$

Для таких процесів стохастичний інтеграл визначається формулою

$$\int_0^T f(t) dW(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

Позначимо через $K_0 = Q^{\frac{1}{2}}K$. Для побудови стохастичного інтеграла для неступінчастих процесів потрібно ввести простір операторів Гільберта-Шмідта,

що діють з K_0 в H , тобто простір $L_2(K_0, H) = L_2^0$ як будемо його позначати у подальшому. Саме для \mathcal{F}_t -вимірних процесів $f(t)$, що приймають значення в L_2^0 і таких, що

$$\|f\|_T^2 = \mathbb{E} \int_0^T \|f(t)\|_2^2 dt \quad (2.4.2)$$

скінченна і вводиться стохастичний інтеграл. Можна показати, що множина ступінчастих процесів всюди щільна за нормою (2.4.2) у просторі таких процесів. Тоді для \mathcal{F}_t -вимірного процесу $f(t)$ зі скінченною нормою (2.4.2) стохастичний інтеграл вводиться як середньоквадратична границя стохастичних інтегралів від елементарних процесів.

Очевидно, що так побудований стохастичний інтеграл володіє властивістю лінійності та справедлива основна рівність, що називається ізоморфізмом Іто

$$\mathbb{E} \left\| \int_0^t f(t) dW(t) \right\|_H^2 = \mathbb{E} \int_0^T \|f(t)\|_2^2 dt.$$

Стохастичний інтеграл задовольняє максимальну мартингальну нерівність.

Твердження 2.1. Для довільного $r \geq 1$ та довільного L_2^0 -значного \mathcal{F}_t -підпорядкованого випадкового процесу $f(t)$ справедлива нерівність

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t f(s) dW(s) \right\|_H^{2r} \right) \leq C \mathbb{E} \left(\int_0^T \|f(t)\|_{L_2^0}^2 dt \right)^r.$$

Якщо $S(t)$ -напівгрупа C_0 при $t \in [0, T]$ в H , то можна ввести стохастичну конволюцію, яка відіграє важливу роль при побудові м'яких розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь наступною формулою

$$\int_0^t S(t-s) f(s) dW(s).$$

Для цього інтеграла також справедлива мартингальна оцінка.

Твердження 2.2. Для довільного $r > 1$ та $f \in L_2^0$ -значний \mathcal{F}_t -вимірний процес, що $\mathbb{E} \int_0^T \|f(t)\|_{L_2^0}^{2r} dt < \infty$. Тоді існує стала $C_T = C(T)$, що

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t S(t-s) \Phi(s) dW(s) \right\|_H^{2r} \leq C_T \mathbb{E} \left(\int_0^T \|f(s)\|_{L_2^0}^{2r} ds \right).$$

Суттєву роль для отримання певних оцінок та для встановлення аналітичних властивостей стохастичних інтегралів відіграє наступна факторизаційна формула. Для $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ з використанням стохастичної теореми Фубіні справедлива наступна формула

$$\int_0^t S(t-s) f(s) dW(s) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S(t-s) Y(s) ds, \quad (2.4.3)$$

де

$$Y(s) = \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} S(s-\tau) dW(\tau).$$

2.5 Стохастичні функціонально-диференціальні рівняння

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — повний ймовірнісний простір, на якому задана фільтрація $\{\mathcal{F}_t\}$, $t \in [0, T]$. Введемо поняття стохастичного функціонально-диференціального рівняння, спочатку у скінченновимірному просторі. Знову $C_h = C([-h, 0]; \mathbb{R})$ — простір неперервних функцій, $W(t)$ — \mathcal{F}_t -узгоджений процес Вінера (не втрачаючи загальності можна його вважати одновимірним). Нехай задані відображення

$$a : [0, T] \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad b : [0, T] \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

та \mathcal{F}_0 -вимірний випадковий процес $\phi(t)$, $t \in [-h, 0]$.

Означення 2.8. Випадковий \mathbb{R}^d -значний, \mathcal{F}_t -вимірний процес $x(t)$ називається сильним розв'язком стохастичного функціонально-диференціального рівняння

$$\begin{aligned} dx &= a(t, x_t) dt + b(t, x_t) dW(t), \quad t \in [0, T], \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

на $[0, T]$, якщо для $t \in [-h, T]$ з імовірністю 1 виконано:

1. $x(t) = \phi(t), t \in [-h, 0], \phi \in C_h$;
2. з імовірністю 1 при $t \in [0, T]$ маємо

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t a(s, x_s) ds + \int_0^t b(s, x_s) dW(s).$$

Відносно існування та єдиності сильного розв'язку справедлива наступна теорема.

Теорема 2.5. Нехай $a(t, \phi)$ та $b(t, \phi)$ неперервні за сукупністю змінних та задовольняють при всіх $t \in [0, T], \phi_1, \phi_2 \in C_h$ умову Ліпшиця

$$|a(t, \phi_1) - a(t, \phi_2)|^2 + |b(t, \phi_1) - b(t, \phi_2)|^2 \leq L \|\phi_1 - \phi_2\|_C^2.$$

Тоді початкова задача (2.5.1) має єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок $x(t) \in C_h$, при $t \in [0, T]$, при цьому якщо $\mathbb{E}|\phi|_C^2 < \infty$, то $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}|x(t)|^2 < \infty$.

Стосовно нескінченновимірного випадку, то як зазначалось у вступі тут можливі різні підходи до означення розв'язку. Для наших досліджень знадобиться лише означення м'якого розв'язку (mild solution) для стохастичного нескінченновимірного функціонально-диференціального рівняння на $[0, T]$

$$\begin{cases} du = (AuF(t, u_t))dt + B(t, u_t)dW(t), \\ u(t) = \phi(t), t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (2.5.2)$$

у гільбертовому просторі H , при цьому простір $C_h = C([-h, 0]; H)$, $W(t) \in Q$ -вінерівським процесом в U_T , інший гільбертів простір $U_0 = Q^{\frac{1}{2}}U$, $L_2^0 = L_2(U_0, H)$ —простір операторів Гільберта-Шмідта, що діють з U_0 в H . Необмежений лінійний оператор $A : H \rightarrow H$ є генератором напівгрупи $S(t) = e^{tA}$ класу C_0 в H , $t \in [0, T]$. Відносно відображень F та B будемо вважати виконаними умови

$$F : [0, T] \times C_h \rightarrow H, B : [0, T] \times C_h \rightarrow L_2^0 \quad (2.5.3)$$

та

1. лінійний ріст за ϕ : існує стала $C > 0$, що

$$\|F(t, \phi)\|_H^2 + \|B(t, \phi)\|_{L_2^0}^2 \leq C^2(1 + \|\phi\|_C^2), \phi \in C_h, t \in [0, T], \quad (2.5.4)$$

2. умова Ліпшиця

$$\|F(t, \phi) - F(t, \phi_1)\| + \|B(t, \phi) - B(t, \phi_1)\| \leq C\|\phi - \phi_1\|_C \quad (2.5.5)$$

для довільних $t \in [0, T]$ та $\phi, \phi_1 \in C_h$.

Знову вважатимемо, що на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ задана фільтрація $\{\mathcal{F}_t\}$, $t \in [0, T]$, із якою узгоджено процес $W(t)$.

Означення 2.9. Неперервний \mathcal{F}_t -адаптований випадковий процес $u : [-h, T] \times \Omega \rightarrow H$ називається м'яким розв'язком рівняння (2.5.2) на $[-h, T]$, якщо він задовольняє інтегральне рівняння

$$u(t) = \phi(0) + \int_0^t S(t-s)F(t, u_s)ds + \int_0^t S(t-s)B(t, u_s)dW(s), \quad t \in [0, T]$$

та

$$u(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0].$$

Відносно існування та єдиності такого розв'язку справедлива теорема.

Теорема 2.6. [73] За виконання умов (2.5.3)-(2.5.5) початкова умова (2.5.2) має на $[-h, T]$ єдиний неперервний м'який розв'язок $u(t)$. Причому, якщо $\mathbb{E}\|\phi\|_C^p < \infty$, то

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}\|u(t)\|_H^p < \infty$$

для $p \geq 2$.

Розділ 3

Асимптотична еквівалентність стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь

Цей розділ присвячений аналізу властивостей стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь, які представляють більш складний клас рівнянь порівняно з детермінованими системами. Стохастичні системи враховують випадкові впливи або шум, що робить їх більш придатними для опису реальних процесів у багатьох науках.

Асимптотична еквівалентність у контексті стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь вимагає аналізу їх розв'язків з урахуванням як часових затримок, так і впливу випадкових збурень. Якщо для детермінованих рівнянь досить вивчити асимптотичну поведінку їхніх розв'язків, то для стохастичних рівнянь важливо враховувати ймовірнісний характер процесів, які описуються рівняннями. Це означає, що розв'язки повинні бути подібними не лише в середньому, а й у контексті більш тонких статистичних характеристик.

Функціонально-диференціальні рівняння враховують залежність від попередніх станів системи, що додає ще один рівень складності до аналізу. Вивчення асимптотичної еквівалентності таких рівнянь включає дослідження зв'язків між системами з пам'яттю, що дозволяє прогнозувати їхню поведінку за умов стохастичних збурень.

Спочатку ми розглянемо нелінійний випадок, зокрема встановимо умови, за яких стохастичні нелінійні системи можуть бути асимптотично еквівалентними спрощеним моделям. Особливу увагу буде приділено впливу випадкових

збурень і специфічних властивостей систем із часовими затримками. Прикладом може слугувати динаміка популяцій, де різні екологічні фактори впливають на процес із затримкою, а випадковий шум моделює змінність середовища.

Далі ми дослідимо поведінку лінійних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь, оцінюючи їх асимптотичну подібність до детермінованих систем.

Після кожного теоретичного розділу будуть наведені приклади, що демонструють практичну цінність отриманих результатів. Розгляд цих прикладів підкреслює застосовність отриманих результатів для реальних задач і допомагає глибше зрозуміти специфіку стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь.

3.1 Асимптотична еквівалентність. Нелінійний випадок

3.1.1 Постановка задачі

Введемо необхідні для подальшого формулювання позначення. Для $h > 0$ визначимо функціональний простір

$$C_h = C([-h, 0]; \mathbb{R}^d)$$

неперервних функцій із рівномірною метрикою

$$\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-h, 0]} |\varphi(\theta)|$$

Тут $|\cdot|$ — евклідова норма в \mathbb{R}^d . Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$dx(t) = f_1(t, x(t))dt, \quad (3.1.1)$$

де $f_1 : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ неперервна за сукупністю змінних, ліпшицева за змінною x та задовольняє умову лінійного зростання.

Разом із системою (3.1.1) розглянемо систему стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь

$$dy = (f_1(t, y(t)) + f_2(t, y_t))dt + \sigma(t, y_t) dW(t), \quad (3.1.2)$$

де $f_2 : [0, \infty) \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : [0, \infty) \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^d$, $y_t = y(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, а $\{W(t), t \geq 0\}$ – одновимірний вінерівський процес, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\} \subset \mathcal{F}$.

Наведемо означення асимптотичної еквівалентності, що є узагальненням на стохастичний випадок класичного означення асимптотичної еквівалентності для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Означення 3.1. Якщо кожному розв'язку $y(t)$ системи (3.1.2) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (3.1.1) таким чином, що виконується рівність

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}|x(t) - y(t)|^2 = 0,$$

то систему (3.1.1) назвемо асимптотично еквівалентною системі (3.1.2) у середньоквадратичному сенсі.

Означення 3.2. Якщо кожному розв'язку $y(t)$ системи (3.1.2) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (3.1.1) таким чином, що виконується рівність

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0 \right\} = 1,$$

то систему (3.1.1) назвемо асимптотично еквівалентною системі (3.1.2) з імовірністю 1.

Основним результатом цього параграфа є отримання умов асимптотичної еквівалентності систем (3.1.1) і (3.1.2) як у середньоквадратичному сенсі, так і з імовірністю 1.

Надалі функції $f_1(t, x)$, $f_2(t, \varphi)$, $\sigma(t, \varphi)$ вважатимемо неперервними за сукупністю змінних із виконанням таких умов.

1. Функція f_1 задовольняє умови Ліпшиця та лінійного зростання, тобто існує константа $L > 0$ така, що

$$|f_1(t, x_1) - f_1(t, x_2)|^2 \leq L^2 |x_1 - x_2|^2, \quad |f_1(t, x)| \leq L(1 + |x|),$$

для довільних $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$.

2. Функції f_2 та σ задовольняють умову Ліпшиця у формі:

$$|f_2(t, \phi) - f_2(t, \psi)| + |\sigma(t, \phi) - \sigma(t, \psi)|^2 \leq L^2 \int_{-h}^0 |\phi(\theta) - \psi(\theta)|^2 d\theta.$$

Зауважимо, що звідси випливає нерівність

$$|f_2(t, \varphi) - f_2(t, \psi)|^2 + |\sigma(t, \varphi) - \sigma(t, \psi)|^2 \leq hL^2 \|\varphi - \psi\|^2$$

для довільних $\varphi, \psi \in C_h, t \geq 0$.

3. Лінійний ріст

$$|f_2(t, \phi)|^2 + |\sigma(t, \phi)|^2 \leq L^2(1 + \|\phi\|^2).$$

Нехай $\gamma > L$. Виберемо h_0 так, щоб виконувалась нерівність

$$4(5h_0L^2 + 5L^2)h_0^2 e^{(5h_0L^2 + (5h_0L^2 + 5L^2)h_0 + 2\gamma)h_0} < 1. \quad (3.1.3)$$

Оскільки функція $m(h) = 4(5h_0L^2 + 5L^2)h_0^2 e^{(5h_0L^2 + (5h_0L^2 + 5L^2)h_0 + 2\gamma)h_0}$ монотонно зростає за h і $m(0) = 0$, то існує $h_0 > 0$, що для всіх $h \leq h_0$ ця нерівність виконується.

4. Далі вважаємо, що при $h \leq h_0$ є виконаними такі умови:

$$4.1 \quad |f_2(t, \phi)| \leq Ke^{-\gamma t}, \quad t \geq 0, \quad \phi \in C_h, \quad h \leq h_0;$$

$$4.2 \quad |\sigma(t, \phi)| \leq Ke^{-\gamma t}, \quad t \geq 0, \quad \phi \in C_h, \quad h \leq h_0.$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються вказані вище умови 1. – 4. Тоді при всіх $h \leq h_0$ маємо, що:*

1. Система (3.1.2) асимптотично еквівалентна системі (3.1.1) у середньоквадратичному сенсі.
2. Система (3.1.2) асимптотично еквівалентна системі (3.1.1) з імовірністю 1.

3.1.2 Доведення основного результату

Доведення. З теореми [104](1.2.8) випливає, що за виконання умов 1-2 існує єдиний розв'язок $y(t)$ системи (2) для $t > 0$ для довільної початкової функції (початкового процесу) $\phi(\theta)$, що є \mathcal{F}_0 -вимірною і такою, що $\mathbb{E}\|\phi\|_C^2 < \infty$. Встановимо певні допоміжні оцінки для розв'язків системи (3.1.1). Нехай $x_1(t)$ та $x_2(t)$ — два розв'язки системи (3.1.1). Тоді, використовуючи лему Гронуолла-Беллмана

та умови теореми, виведемо наступну оцінку:

$$x_1(t) = x_1(s) + \int_s^t f_1(\tau, x_1(\tau)) d\tau,$$

$$x_2(t) = x_2(s) + \int_s^t f_1(\tau, x_2(\tau)) d\tau.$$

Розглянемо їхню різницю

$$x_1(t) - x_2(t) = x_1(s) - x_2(s) + \int_s^t [f_1(\tau, x_1(\tau)) - f_1(\tau, x_2(\tau))] d\tau.$$

Використовуючи нерівність трикутника маємо

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(s) - x_2(s)| + \int_s^t |f_1(\tau, x_1(\tau)) - f_1(\tau, x_2(\tau))| d\tau.$$

Згідно з умовою Ліпшиця

$$|f_1(\tau, x_1(\tau)) - f_1(\tau, x_2(\tau))| \leq L |x_1(\tau) - x_2(\tau)|,$$

отримуємо

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(s) - x_2(s)| + L \int_s^t |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau.$$

Позначимо

$$u(t) = |x_1(t) - x_2(t)|.$$

Тоді

$$u(t) \leq u(s) + L \int_s^t u(\tau) d\tau.$$

За лемою Гронуолла-Беллмана

$$u(t) \leq u(s) e^{L(t-s)},$$

тобто

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(s) - x_2(s)| e^{L(t-s)}.$$

У випадку $t < s$ аналогічно матимемо

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(s) - x_2(s)| e^{L(s-t)},$$

отже,

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(s) - x_2(s)| e^{L|t-s|}.$$

Розглянемо довільний фіксований розв'язок $y(t)$ системи (3.1.2). Нехай також $\{x_n(t) | n \geq 0\}$ – послідовність розв'язків системи (3.1.1) таких, що $x_n(nh) = y(nh)$. Згідно з умовами відносно системи (3.1.1) всі її розв'язки із довільними початковими даними існують і єдині при всіх $t \in \mathbb{R}$. При цьому $x_0(0) = \phi(0)$. Довизначимо $x_0(\theta) = \phi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Покладемо

$$q_n = \max_{t \in [nh-h, nh]} \mathbb{E}|x_n(t) - y(t)|^2, \quad q_0 \equiv 0. \quad (3.1.4)$$

Для $t \in [nh, nh + h]$ розглянемо наступну різницю:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|x_n(t) - y(t)|^2 &\leq 5\mathbb{E} \left| \int_{nh}^t [f_1(\tau, x_n(\tau)) - f_1(\tau, y(\tau))] d\tau \right|^2 \\ &\quad + 5\mathbb{E} \left| \int_{nh}^t [f_2(\tau, x_{n\tau}) - f_2(\tau, y_\tau)] d\tau \right|^2 \\ &\quad + 5\mathbb{E} \left| \int_{nh}^t [\sigma(\tau, x_{n\tau}) - \sigma(\tau, y_\tau)] dW(\tau) \right|^2 \\ &\quad + 5\mathbb{E} \left| \int_{nh}^t f_2(\tau, x_{n\tau}) d\tau \right|^2 + 5\mathbb{E} \left| \int_{nh}^t \sigma(\tau, x_{n\tau}) dW(\tau) \right|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|x_n(t) - y(t)|^2 &\leq 5h \int_{nh}^t \mathbb{E}|f_1(\tau, x_n(\tau)) - f_1(\tau, y(\tau))|^2 d\tau \\
&\quad + 5h \int_{nh}^t \mathbb{E}|f_2(\tau, x_{n\tau}) - f_2(\tau, y_\tau)|^2 d\tau \\
&\quad + 5 \int_{nh}^t \mathbb{E}|\sigma(\tau, x_{n\tau}) - \sigma(\tau, y_\tau)|^2 d\tau \\
&\quad + 5h \int_{nh}^t \mathbb{E}|f_2(\tau, x_{n\tau})|^2 d\tau + 5 \int_{nh}^t \mathbb{E}|\sigma(\tau, x_{n\tau})|^2 d\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|x_n(t) - y(t)|^2 &\leq 5hL^2 \int_{nh}^t \mathbb{E}|x_n(\tau) - y(\tau)|^2 d\tau \\
&\quad + 5hL^2 \int_{nh-h}^t \int_0^{\tau-h} \mathbb{E}|x_n(\tau + \theta) - y(\tau + \theta)|^2 d\theta d\tau \\
&\quad + 5L^2 \int_{nh-h}^t \int_0^{\tau-h} \mathbb{E}|x_n(\tau + \theta) - y(\tau + \theta)|^2 d\theta d\tau \\
&\quad + 5h \int_{nh}^t \mathbb{E}|f_2(\tau, x_{n\tau})|^2 d\tau \\
&\quad + 5h \int_{nh}^t \mathbb{E}|\sigma(\tau, x_{n\tau})|^2 d\tau, \tag{3.1.5}
\end{aligned}$$

Але

$$\begin{aligned}
\int_{nh-h}^t \int_0^{\tau-h} \mathbb{E}|x_n(\tau + \theta) - y(\tau + \theta)|^2 d\theta d\tau &= \int_{nh}^t \int_{\tau-h}^{\tau} \mathbb{E}|x_n(s) - y(s)|^2 ds d\tau \\
&\leq \int_{nh}^t \int_{nh-h}^{\tau} \mathbb{E}|x_n(s) - y(s)|^2 ds d\tau \\
&\leq h \int_{nh-h}^t \mathbb{E}|x_n(s) - y(s)|^2 ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h \int_{nh-h}^{nh} \mathbb{E}|x_n(s) - y(s)|^2 ds \\
&\quad + h \int_{nh}^t \mathbb{E}|x_n(s) - y(s)|^2 ds \\
&\leq h^2 q_n + h \int_{nh}^t \mathbb{E}|x_n(s) - y(s)|^2 ds. \tag{3.1.6}
\end{aligned}$$

Тоді з (3.1.5) і (3.1.6) отримуємо:

$$\mathbb{E}|x_n(t) - y(t)|^2 \leq 5hL^2 \int_{nh}^t \mathbb{E}|x_n(s) - y(s)|^2 ds \tag{3.1.7}$$

$$\begin{aligned}
&+ (5hL^2 + 5L^2) \times \left(h^2 q_n + h \int_{nh}^t \mathbb{E}|x_n(s) - y(s)|^2 ds \right) \\
&\quad + 5h \int_{nh}^t \mathbb{E}|f_2(\tau, x_{n\tau})|^2 d\tau + 5 \int_{nh}^t \mathbb{E}|\sigma(\tau, x_{n\tau})|^2 d\tau \\
&\leq (5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h) \int_{nh}^t \mathbb{E}|x_n(s) - y(s)|^2 ds \\
&\quad + (5hL^2 + 5L^2)h^2 q_n + 5h \int_{nh}^t K^2 e^{-2\gamma s} ds + 5 \int_{nh}^t K^2 e^{-2\gamma s} ds \\
&= (5hL^2 + 5L^2)h^2 q_n \tag{3.1.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ (5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h) \times \int_{nh}^t \mathbb{E}|x_n(s) - y(s)|^2 ds \\
&\quad + \frac{5h}{2\gamma} K^2 (e^{-2\gamma nh} - e^{-2\gamma(n+1)h}) + \frac{5K^2}{2\gamma} (e^{-2\gamma nh} - e^{-2\gamma(n+1)h}). \tag{3.1.9}
\end{aligned}$$

Із останньої нерівності та леми Гронуолла-Белмана маємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|x_n(t) - y(t)|^2 &\leq \left[(5hL^2 + 5L^2)h^2 q_n + \frac{5K^2}{2\gamma} (1+h)(e^{2\gamma h} - 1)e^{-2\gamma h(n+1)} \right] \\
&\quad \times e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h}. \tag{3.1.10}
\end{aligned}$$

Розглянемо $x_{n+1}(nh + h) = y(nh + h)$. З попередньої нерівності випливає оцінка

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|x_{n+1}(nh + h) - y(nh + h)|^2 &\leq \left[(5hL^2 + 5L^2)h^2q_n \right. \\ &\left. + \frac{5K^2}{2\gamma}(1 + h)(e^{2\gamma h} - 1)e^{-2\gamma h(n+1)} \right] e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h}. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Розглянемо q_{n+1} , яке згідно з уведеними позначеннями набуває вигляду

$$\begin{aligned} q_{n+1} = \max_{t \in [nh, nh+h]} \mathbb{E}|x_{n+1}(t) - y(t)|^2 &\leq 2 \max_{t \in [nh, nh+h]} \mathbb{E}|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 \\ &+ 2 \max_{t \in [nh, nh+h]} \mathbb{E}|x_n(t) - y(t)|^2. \end{aligned}$$

$$q_{n+1} \leq 4 \left[(5hL^2 + 5L^2)h^2q_n + \frac{5K^2}{2\gamma}(1 + h)(e^{2\gamma h} - 1)e^{-2\gamma h(n+1)} \right] e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h}.$$

Для оцінки q_n , використаємо наступну лему про лінійні нерівності, що легко доводиться методом математичної індукції:

Лема 3.1. Нехай ζ_1, \dots, ζ_n такі, що задовільняють нерівностям

$$0 \leq \zeta_j A_j \zeta_{j-1} + B_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тоді

$$\zeta_j \leq \zeta_0 \prod_{l=1}^{n+1} A_l + \sum_{l=1}^{n+1} B_l \prod_{k=l+1}^{n+1} A_k, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.1.12)$$

У нашому випадку

$$q_{n+1} \leq \sum_{l=1}^{n+1} B_l \prod_{j=l+1}^{n+1} A_j, \quad (3.1.13)$$

$$A_k = 4(5hL^2 + 5L^2)h^2 e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h} = A,$$

$$B_k = 4 \frac{5K^2}{2\gamma} (1 + h)(e^{2\gamma h} - 1)e^{-2\gamma h(k+1)} e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h}.$$

Тепер можемо оцінити різницю

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|x_{n+1}(0) - x_n(0)|^2 &\leq e^{2Lnh} q_{n+1} \leq e^{2Lnh} \sum_{l=1}^{n+1} B_l \prod_{j=l}^{n+1} A_j \\ &= e^{2Lnh} \left(4 \frac{5K^2}{2\gamma} (1 + h)(e^{2\gamma h} - 1)e^{-4\gamma h} e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h} \right) (A)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(4 \frac{5K^2}{2\gamma} (1+h)(e^{2\gamma h} - 1)e^{-6\gamma h} e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h} \right) (A)^{n-2} + \dots \\
& \dots + \left(4 \frac{5K^2}{2\gamma} (1+h)(e^{2\gamma h} - 1)e^{-2\gamma h(n+1)} e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h} \right) (A)^{-1} \\
& \leq e^{2Lnh} \left(4 \frac{5K^2}{2\gamma} (1+h)(e^{-2\gamma h} - e^{-4\gamma h}) e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h} \right) (A)^{n-1} \\
& \quad + \left(4 \frac{5K^2}{2\gamma} (1+h)(e^{-4\gamma h} - e^{-6\gamma h}) e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h} \right) (A)^{n-2} + \dots \\
& \dots + \left(4 \frac{5K^2}{2\gamma} (1+h)(e^{-2\gamma hn} - e^{-2\gamma h(n+1)}) e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h} \right) (A)^{-1} \\
& \leq e^{2(L-\gamma)nh} \left[\left(4 \frac{5K^2}{2\gamma} (1+h)e^{-2\gamma h(n-1)} e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h} \right) (A)^{n-1} \right. \\
& \quad + \left(4 \frac{5K^2}{2\gamma} (1+h)e^{-2\gamma h(n-2)} e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h} \right) (A)^{n-2} + \dots \\
& \quad \left. \dots + \left(4 \frac{5K^2}{2\gamma} (1+h)e^{-2\gamma h} e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h} \right) (A)^{-1} \right] \quad (3.1.14)
\end{aligned}$$

За умовою (3.1.3) сума в дужках обмежена. Отже, вираз не перевищує деякої додатної сталої C . Тоді отримуємо, що вираз (3.1.14) прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. Також з нерівності (3.1.3) маємо

$$(4(5hL^2 + 5L^2)h^2 e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h + 2\gamma)h})^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Звідси випливає нерівність

$$\mathbb{E}|x_{n+1}(0) - x_n(0)|^2 \leq C_1 (4(5hL^2 + 5L^2)h^2 e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h + 2\gamma)h})^n, \quad C_1 > 0.$$

Отже, границя

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(0)$$

існує в середньоквадратичному сенсі.

Введемо норму $\|\cdot\| := \sqrt{\mathbb{E}|\cdot|^2}$. Визначимо розв'язок $x_\infty(t)$ системи (3.1.1) як розв'язок задачі Коші з початковими умовами $x_\infty(0) = x_\infty$. Згідно з умовами на f_1 такий розв'язок існує та єдиний для всіх $t \geq 0$.

Розглянемо наступну різницю

$$\mathbb{E}|x_\infty(t) - y(t)|^2 \leq 2\mathbb{E}|y(t) - x_n(t)|^2 + 2\mathbb{E}|x_n(t) - x_\infty(t)|^2. \quad (3.1.15)$$

Потрібно показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $T > 0$ таке, що для будь якого $t > T$ виконується нерівність

$$\mathbb{E}|x_\infty(t) - y(t)|^2 \leq \varepsilon.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. З нерівності (3.1.14) нам відомо, що $q_{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Виберемо N_1 так, щоб $q_{N_1+1} < \frac{\varepsilon}{4}$. Тоді, якщо $t \in [nh, nh + h]$, де $n \geq N_1$, перший доданок в (3.1.15) менший за $\frac{\varepsilon}{2}$.

Тепер оцінимо другий доданок правої частини нерівності (3.1.15):

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - x_\infty(t)\| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} e^{L(k-n)h} \|x_{k+1}(kh + h) - x_k(kh + h)\| \\ &\leq e^{-Lnh} \sum_{k=n}^{\infty} e^{Lkh} \sum_{l=1}^{k+1} B_l \prod_{j=l+1}^{k+1} A_j. \end{aligned}$$

Останній вираз прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$ згідно з (3.1.14). Отже, можемо вибрати N_2 таким чином, щоб другий доданок у (3.1.15) був менший за $\frac{\varepsilon}{4}$ при всіх $n > N_2$. Тоді, для всіх $t \in [nh, nh + h]$ і $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ маємо

$$\mathbb{E}|x_\infty(t) - y(t)|^2 < \varepsilon.$$

Отже,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}|y(t) - x_\infty(t)|^2 = 0.$$

Це й закінчує доведення першої частини теореми 3.1.

Перейдемо до доведення другої частини. Для тієї ж послідовності $\{x_n(t) | n \geq 0\}, t \in [nh, nh + h]$ покладемо

$$\varepsilon_n := e^{-\frac{Y+L}{2}hn},$$

та оцінимо вираз

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{ \sup_{t \in [nh, nh+h]} |x_n(t) - y(t)| \geq \varepsilon_n \right\} \\ &\leq \mathbb{P}\left\{ \sup_{t \in [nh, nh+h]} \left| \int_{nh}^t [f_1(\tau, x_n(\tau)) - f_1(\tau, y(\tau))] d\tau \right| \geq \frac{\varepsilon_n}{5} \right\} \\ &\quad + \mathbb{P}\left\{ \sup_{t \in [nh, nh+h]} \left| \int_{nh}^t [f_2(\tau, x_{n\tau}) - f_2(\tau, y_\tau)] d\tau \right| \geq \frac{\varepsilon_n}{5} \right\} \\ &\quad + \mathbb{P}\left\{ \sup_{t \in [nh, nh+h]} \left| \int_{nh}^t [\sigma(\tau, x_{n\tau}) - \sigma(\tau, y_\tau)] dW(\tau) \right| \geq \frac{\varepsilon_n}{5} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in [nh, nh+h]} \left| \int_{nh}^t f_2(\tau, x_{n\tau}) d\tau \right| \geq \frac{\varepsilon_n}{5} \right\} \\
& + \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in [nh, nh+h]} \left| \int_{nh}^t \sigma(\tau, x_{n\tau}) dW(\tau) \right| \geq \frac{\varepsilon_n}{5} \right\}. \tag{3.1.16}
\end{aligned}$$

Роглянемо окремо кожен з членів правої частини нерівності (3.1.2). Для першого доданку, використовуючи нерівність Чебишова та попередні результати, маємо

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in [nh, nh+h]} \left| \int_{nh}^t [f_1(\tau, x_n(\tau)) - f_1(\tau, y(\tau))] d\tau \right| \geq \frac{\varepsilon_n}{5} \right\} \\
& \leq \frac{\varepsilon_n}{5} \mathbb{E} \sup_{t \in [nh, nh+h]} \left| \int_{nh}^t [f_1(\tau, x_n(\tau)) - f_1(\tau, y(\tau))] d\tau \right| \\
& \leq \frac{\varepsilon_n L}{5} \int_{nh}^t \mathbb{E} |x_n(\tau) - y(\tau)| d\tau \\
& \leq \frac{\varepsilon_n L}{5} \left[(5hL^2 + 5L^2)h^2 q_n + \frac{5K^2}{2\gamma} (1+h)(e^{2\gamma h} - 1)e^{-2\gamma h(n+1)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h} \tag{3.1.17}
\end{aligned}$$

Для другого доданку маємо

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in [nh, nh+h]} \left| \int_{nh}^t [f_2(\tau, x_{n\tau}) - f_2(\tau, y_\tau)] d\tau \right| \geq \frac{\varepsilon_n}{5} \right\} \\
& \leq \frac{\varepsilon_n L}{5} \left[(5hL^2 + 5L^2)h^2 q_n + \frac{5K^2}{2\gamma} (1+h)(e^{2\gamma h} - 1)e^{-2\gamma h(n+1)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h}. \tag{3.1.18}
\end{aligned}$$

Оцінимо третій доданок в (3.1.2). Враховуючи мартингальну нерівність маємо

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in [nh, nh+h]} \left| \int_{nh}^t [\sigma(\tau, x_{n\tau}) - \sigma(\tau, y_\tau)] dW(\tau) \right| \geq \frac{\varepsilon_n}{5} \right\} \\ & \leq \frac{25L^2}{\varepsilon_n^2} \int_{nh}^t \mathbb{E} |\sigma(\tau, x_{n\tau}) - \sigma(\tau, y_\tau)|^2 d\tau \\ & \leq \frac{25L^2}{\varepsilon_n^2} \left[(5hL^2 + 5L^2)h^2 q_n + \frac{5K^2}{2\gamma} (1+h)(e^{2\gamma h} - 1)e^{-2\gamma h(n+1)} \right] e^{(5hL^2 + (5hL^2 + 5L^2)h)h}. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Для оцінки двох останніх доданків в (3.1.2) використаємо умови 4. Отримуємо

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in [nh, nh+h]} \left| \int_{nh}^t f_2(\tau, x_{n\tau}) d\tau \right| \geq \frac{\varepsilon_n}{5} \right\} \leq \frac{5K}{\varepsilon_n \gamma} \left(e^{-\gamma nh} - e^{-\gamma(nh+h)} \right), \quad (3.1.20)$$

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in [nh, nh+h]} \left| \int_{nh}^t \sigma(\tau, x_{n\tau}) dW(\tau) \right| \geq \frac{\varepsilon_n}{5} \right\} \leq \frac{25K^2}{\varepsilon_n^2 2\gamma} \left(e^{-2\gamma nh} - e^{-2\gamma(nh+h)} \right). \quad (3.1.21)$$

З оцінок (3.1.17), (3.1.18), (3.1.19), (3.1.20) та (3.1.21) очевидним чином випливає збіжність ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in [nh, nh+h]} |x_n(t) - y(t)| \geq \varepsilon_n \right\}.$$

Отже, з леми Бореля-Кантеллі маємо, що існує додатне, взагалі кажучи, випадкове $N = N(\omega)$ таке, що для довільного $n \geq N(\omega)$:

$$\sup_{t \in [nh, nh+h]} |x_n(t) - y(t)| \leq e^{-\frac{\gamma+L}{2}nh}$$

майже для всіх $\omega \in \Omega$. Для $t = nh + h$ виконується також нерівність

$$|x_n(nh + h) - x_{n+1}(nh + h)| \leq e^{-\frac{\gamma+L}{2}nh}$$

з імовірністю 1. Далі отримуємо, що

$$|x_n(0) - x_{n+1}(0)| \leq e^{Lnh+Lh} e^{-\frac{\gamma+L}{2}nh} = e^{Lh} e^{-\frac{\gamma-L}{2}nh}.$$

З останнього випливає існування границі

$$x_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n(0),$$

з імовірністю 1. Подальше доведення цієї теореми проводиться аналогічно пункту 1 із заміною середньо квадратичної збіжності на збіжність із ймовірністю 1. Це приводить до остаточного співвідношення

$$\mathbb{P}\{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0\} = 1$$

яке й закінчує доведення теореми.

□

3.1.3 Приклад застосування

Проілюструємо отриманий результат таким прикладом. Розглянемо стохастичну систему із запізненням вигляду

$$\frac{dy}{dt} = (f_1(t, y(t)) + f_2(t, y(t-h))) dt + \sigma(t, y(t-h)) dW(t), \quad (3.1.22)$$

де функції $f_1(t, y)$, $f_2(t, y)$, $\sigma(t, y) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ неперервні за сукупністю змінних та ліпшицеві за змінною y , а також задовольняють умову лінійного зростання. За звичайними функціями f_2 і σ побудуємо відображення $[0, \infty) \times C_h \rightarrow \mathbb{R}^d$ таким чином:

$$f_2(t, \varphi) = f_2(t, \varphi(-h)), \quad \sigma(t, \varphi) = \sigma(t, \varphi(-h))$$

для кожного $\varphi \in C_h$.

Якщо при цьому вимагати від функцій $f_2(t, y)$, $\sigma(t, y)$ виконання умов:

$$|f_2(t, y)| \leq Ke^{-\gamma t}, \quad t \geq 0;$$

$$|\sigma(t, y)| \leq Ke^{-\gamma t}, \quad t \geq 0,$$

де $\gamma > L$, то очевидно, всі умови теореми при достатньо малих h виконано.

3.2 Асимптотична еквівалентність. Лінійний випадок

3.2.1 Постановка задачі

Попередній підрозділ роботи був присвячений розгляду асимптотичної еквівалентності для нелінійного випадку. Це накладало умови на малість

інтервалу запізнення. Якщо розглянути лінійний випадок, то від такої малости можна відмовитися.

Нагадаємо, що для $h > 0$ ми визначаємо простір функцій з $[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$C_h = C([-h, 0]; \mathbb{R}^d)$$

неперервних функцій з нормою

$$\|\phi\|_C = \sup_{\theta \in [-h, 0]} |\phi(\theta)|.$$

Норму вектора в просторі \mathbb{R}^d позначаємо символом $|\cdot|$, а норму $(d \times d)$ -матриці, узгоджену з цією векторною нормою, позначаємо $\|\cdot\|$ упродовж усієї цієї роботи.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь у наступній формі:

$$dx = Axdt \quad (3.2.1)$$

з початковими умовами

$$x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

та нехай A є сталою детермінованою матрицею. Поряд із системою (3.2.1) ми розглядаємо систему функціональних стохастичних диференціальних рівнянь:

$$dy(t) = \left(Ay(t) + \int_{-h}^0 B(t, \theta)y(t + \theta)d\theta \right) dt + \left(\int_{-h}^0 D(t, \theta)y(t + \theta)d\theta \right) dW(t) \quad (3.2.2)$$

з початковою умовою

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0],$$

де $B(t, \theta), D(t, \theta)$ — неперервні за $t \geq 0$ детерміновані матриці, $\theta \in [-h, 0]$, інтегровні за змінною θ . $W(t)$ — це вінерівський процес на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\} \subset \mathcal{F}$. Припустимо, що існують такі функції $b(t)$ та $d(t)$:

$$\left| \int_{-h}^0 B(t, \theta)\phi(\theta)d\theta \right| \leq b(t) \int_{-h}^0 |\phi(\theta)|d\theta, \quad (3.2.3)$$

$$\left| \int_{-h}^0 D(t, \theta) \phi(\theta) d\theta \right| \leq d(t) \int_{-h}^0 |\phi(\theta)| d\theta. \quad (3.2.4)$$

Основним результатом цього розділу є наступна теорема.

Теорема 3.2. *Нехай усі розв'язки системи (3.2.1) є обмеженими на $t \in [0, \infty)$. Якщо*

$$\int_0^{\infty} t |b(t)| dt \leq K_1 < \infty, \quad (3.2.5)$$

$$\int_0^{\infty} t |d(t)|^2 dt \leq K_1 < \infty, \quad (3.2.6)$$

тоді система (3.2.2) є асимптотично еквівалентною системі (3.2.1) у середньоквадратичному сенсі та з ймовірністю 1.

3.2.2 Доведення основного результату

Доведення. Доведення теореми розбивається на три частини. У першій частині будується потрібна відповідність, у другій частині доводиться асимптотична еквівалентність у середньому квадратичному. Доведення асимптотичної еквівалентності з ймовірністю 1 проводиться у третій частині.

Частина 1. Згідно з умовами теореми розв'язки системи (3.2.1) залишаються обмеженими на додатній півосі. Отже, всі власні числа матриці $A - \lambda(A)$ мають недодатні дійсні частини, причому ті власні значення, у яких дійсна частина дорівнює нулю, мають прості елементарні дільники, що є стандартною умовою для аналізу асимптотичної поведінки.

Без обмеження загальності можемо припустити, що матриця A вже приведена до квазидіагональної форми. Це означає, що ми можемо розглядати блокову структуру матриці, в якій, зокрема, кожен блок відноситься або до власного числа з від'ємною дійсною частиною, або до власного числа з нульовою дійсною частиною, що спрощує подальший аналіз.

$$A = \text{diag}(A_1, A_2), \quad (3.2.7)$$

де A_1 та $A_2 \in (p \times p)$ і $(q \times q)$ - матриці відповідно, $p + q = d$ такі, що

$$\operatorname{Re}\lambda(A_1) \leq -\alpha < 0, \quad \operatorname{Re}\lambda(A_2) = 0. \quad (3.2.8)$$

Покладемо

$$X(t) = \operatorname{diag}(e^{tA_1}, e^{tA_2}), \quad (3.2.9)$$

що є фундаментальною матрицею системи (3.2.1), причому її нормування відбувається в момент часу $t = 0$, тобто $X(0) = E_d$. Зазначимо, що матриця $\operatorname{diag}(\cdot, \cdot)$ означає блочну діагональ з двома підблоками e^{tA_1} та e^{tA_2} .

Нехай також

$$I_1 = \operatorname{diag}(E_p, 0), \quad I_2 = \operatorname{diag}(0, E_q),$$

де E_p та E_q — це одиничні матриці розмірів $p \times p$ та $q \times q$ відповідно, а $I_1 + I_2 = E_d$ (одинична $d \times d$ матриця, причому $p + q = d$).

Тоді ми можемо розкласти $X(t)$ в суму:

$$\begin{aligned} X(t) &= X_1(t) + X_2(t) = X(t) I_1 + X(t) I_2 \\ &= \operatorname{diag}(e^{tA_1}, 0) + \operatorname{diag}(0, e^{tA_2}). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Цей розклад дає нам змогу легше аналізувати поведінку розв'язків, пов'язаних з кожним блоком матриці A .

Таким чином, матрицю Коші можна подати у наступній зручній формі:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= X(t) X^{-1}(\tau) = X(t - \tau) \\ &= X_1(t - \tau) + X_2(t - \tau). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Тобто, перехід від моменту τ до моменту t для системи (3.2.1) здійснюється за допомогою тієї ж блочної структури, але аргумент просто змінюється на $(t - \tau)$.

Із структури наших блоків випливають оцінки на їхні норми:

$$\|X_1(t)\| = \|e^{tA_1}\| \leq a_1 e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \text{для } t \geq t_0 \geq 0, \quad (3.2.12)$$

$$\|X_2(t)\| = \|e^{tA_2}\| \leq a_2, \quad \text{для } t \in \mathbb{R}. \quad (3.2.13)$$

Тут a_1, a_2, α — деякі додатні константи, що описують експоненціальне згасання відповідно для частини з A_1 та обмеженість частини з A_2 .

Використовуючи метод варіації довільної сталої, розв'язок $y(t)$ системи (3.2.2) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
 y(t) = & X(t - t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t X(t - \tau) \int_{-h}^0 [B(\tau, \theta)y(\tau + \theta)] d\theta d\tau \\
 & + \int_{t_0}^t X(t - \tau) \int_{-h}^0 [D(\tau, \theta)y(\tau + \theta)] d\theta dW(\tau).
 \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Дійсно, взявши стохастичний диференціал від (3.2.14) і використавши лему [104] (3.2.1) отримаємо

$$\begin{aligned}
 dy = & \left[AX(t - t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t AX(t - \tau) \int_{-h}^0 B(\tau, \theta)y(\tau + \theta) d\theta d\tau \right. \\
 & \left. + \int_{t_0}^t AX(t - \tau) \int_{-h}^0 D(\tau, \theta)y(\tau + \theta) d\theta dW(\tau) \right] dt \\
 & + \int_{-h}^0 B(t, \theta)y(t + \theta) d\theta dt + \int_{-h}^0 D(t, \theta)y(t + \theta) d\theta dW(t) \\
 = & A \left[X(t - t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t X(t - \tau) \int_{-h}^0 B(\tau, \theta)y(\tau + \theta) d\theta d\tau \right. \\
 & \left. + \int_{t_0}^t X(t - \tau) \int_{-h}^0 D(\tau, \theta)y(\tau + \theta) d\theta dW(\tau) \right] dt \\
 & + \int_{-h}^0 B(t, \theta)y(t + \theta) d\theta dt + \int_{-h}^0 D(t, \theta)y(t + \theta) d\theta dW(t) \\
 = & Ay(t) + \int_{-h}^0 B(t, \theta)y(t + \theta) d\theta dt + \int_{-h}^0 D(t, \theta)y(t + \theta) d\theta dW(t).
 \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Використавши представлення (3.2.10) для матрицанта $X(t)$ матимемо

$$\begin{aligned}
y(t) = & X(t - t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \int_{-h}^0 [B(\tau, \theta)y(\tau + \theta)] d\theta d\tau \\
& + \int_{t_0}^t X_2(t - \tau) \int_{-h}^0 [B(\tau, \theta)y(\tau + \theta)] d\theta d\tau \\
& + \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \int_{-h}^0 [D(\tau, \theta)y(\tau + \theta)] d\theta dW(\tau) \\
& + \int_{t_0}^t X_2(t - \tau) \int_{-h}^0 [D(\tau, \theta)y(\tau + \theta)] d\theta dW(\tau),
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

для $t \geq t_0 \geq 0$ і $\theta \in [-h, 0]$.

Далі, використовуючи еволюційні властивості матрицанта

$$X_2(t - \tau) = X(t - \tau)I_2 = X(t - t_0)X(t_0 - \tau)I_2 = X(t - t_0)X_2(t_0 - \tau), \tag{3.2.17}$$

можемо переписати (3.2.16) наступним чином:

$$\begin{aligned}
y(t) = & X(t - t_0) \left\{ y(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0 - \tau) \int_{-h}^0 B(\tau, \theta)y(\tau + \theta) d\theta d\tau \right. \\
& + \left. \int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0 - \tau) \int_{-h}^0 D(\tau, \theta)y(\tau + \theta) d\theta dW(\tau) \right\} \\
& + \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \int_{-h}^0 B(\tau, \theta)y(\tau + \theta) d\theta d\tau \\
& + \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \int_{-h}^0 D(\tau, \theta)y(\tau + \theta) d\theta dW(\tau) \\
& - \int_t^{\infty} X_2(t - \tau) \int_{-h}^0 B(\tau, \theta)y(\tau + \theta) d\theta d\tau \\
& - \int_t^{\infty} X_2(t - \tau) \int_{-h}^0 D(\tau, \theta)y(\tau + \theta) d\theta dW(\tau).
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Нехай $y(t) \equiv y(t, \omega)$ є розв'язком системи (3.2.2) з початковою умовою

$$y_{t_0} = \phi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0],$$

яка відповідає деякому розв'язку $x(t)$ системи (3.2.1) з початковою умовою

$$\begin{aligned} x(t_0) = y(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0 - \tau) \int_{-h}^0 [B(\tau, \theta)y(\tau + \theta)] d\theta d\tau \\ + \int_{t_0}^{\infty} X_2(t_0 - \tau) \int_{-h}^0 [D(\tau, \theta)y(\tau + \theta)] d\theta dW(\tau). \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Для кожного розв'язку стохастичної системи (3.2.2) з початковою умовою

$$y_{t_0} = \phi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0]$$

ми, використовуючи формулу (3.2.19), задамо відображення, яке встановлює відповідність між сукупністю всіх імовірнісних траєкторій $\{y(t) \equiv y(t, \omega)\}$, що задовольняють систему (3.2.2), та сукупністю детермінованих розв'язків $\{x(t)\}$, що відповідають системі (3.2.1). По суті, це відображення ґрунтується на фіксації випадкового елемента ω і його впливу через формулу (3.2.19), що дозволяє в деякому сенсі зіставити кожному стохастичному розв'язку його детермінований образ. Це завершує розгляд першої частини доведення.

Частина 2. Оскільки ми вже побудували потрібну відповідність, тепер можна розпочати доведення асимптотичної еквівалентності у середньому квадратичному. Маємо

$$\begin{aligned} y(t) = X(t - t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t X(t - \tau) \int_{-h}^0 [B(\tau, \theta)y(\tau + \theta)] d\theta d\tau \\ + \int_{t_0}^t X(t - \tau) \int_{-h}^0 [D(\tau, \theta)y(\tau + \theta)] d\theta dW(\tau). \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Доведемо обмеженість на півосі у середньому квадратичному $y(t)$. Отже, спираючись на властивості стохастичного інтеграла, зокрема його лінійність та ізометричну властивість, а також використовуючи вище наведену рівність, ми

можемо отримати наступний результат.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|y(t)|^2 \leq & 3\|X(t-t_0)\|^2\mathbb{E}|y(t_0)|^2 + 3\mathbb{E}\left|\int_{t_0}^t X(t-\tau)\int_{-h}^0 [B(\tau,\theta)y(\tau+\theta)]d\theta d\tau\right|^2 \\ & + 3\mathbb{E}\left|\int_{t_0}^t X(t-\tau)\int_{-h}^0 [D(\tau,\theta)y(\tau+\theta)]d\theta dW(\tau)\right|^2. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

З метою спрощення аналізу детально розглянемо кожен окремий доданок, що входить до нерівності (3.2.21). Цей підхід дозволить чіткіше відстежити внесок кожного доданка у загальний результат та провести необхідні оцінки для подальших висновків. З 3.2.12 і 3.2.13 маємо, що

$$\|X(t-t_0)\|^2\mathbb{E}|y(t_0)|^2 \leq \max(a_1^2, a_2^2)\mathbb{E}|y(t_0)|^2, \quad t \geq t_0. \quad (3.2.22)$$

Оцінимо тепер другий доданок в 3.2.21. Маємо

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left|\int_{t_0}^t X(t_0-\tau)\int_{-h}^0 [B(\tau,\theta)y(\tau+\theta)]d\theta d\tau\right|^2 \\ & \leq \mathbb{E}\left(\int_{t_0}^t \sqrt{\|X(t_0-\tau)\|}\sqrt{\|X(t_0-\tau)\|}\sqrt{b(\tau)}\sqrt{b(\tau)}\int_{-h}^0 y(t+\theta)d\theta d\tau\right)^2 \\ & \leq \int_{t_0}^t \|X(t-\tau)\|b(\tau)\mathbb{E}\left(\int_{-h}^0 |y(t+\theta)|d\theta\right)^2 d\tau \int_{t_0}^t \|X(t-\tau)\|b(\tau)d\tau \\ & \leq \max(a_1^2, a_2^2)\int_0^\infty b(\tau)d\tau \int_{t_0}^t b(\tau)h\int_{-h}^0 \mathbb{E}|y(t+\theta)|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Для оцінки третього доданку отримуємо:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left| \int_{t_0}^t X(t_0 - \tau) \int_{-h}^0 [D(\tau, \theta) y(\tau + \theta)] d\theta dW(\tau) \right|^2 \\
& \leq \int_{t_0}^t \mathbb{E} \left| X(t_0 - \tau) \int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right|^2 d\tau \\
& \leq \int_{t_0}^t \|X(t_0 - \tau)\|^2 \mathbb{E} \left\| \int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right\|^2 d\tau \quad (3.2.24) \\
& \leq \int_{t_0}^t \|X(t_0 - \tau)\|^2 d^2(\tau) \mathbb{E} h \int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)|^2 d\theta d\tau \\
& \leq \max(a_1^2, a_2^2) \int_{t_0}^t d^2(\tau)^2 h \int_{-h}^0 \mathbb{E} |y(\tau + \theta)|^2 d\theta d\tau.
\end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} |y(t)|^2 & \leq 3 \max(a_1^2, a_2^2) \left(\mathbb{E} |y(t_0)| + h \int_0^\infty b(\tau) d\tau \right) \int_{t_0}^t b(\tau) \int_{-h}^0 \mathbb{E} |y(\tau + \theta)|^2 d\theta d\tau \\
& + \int_{t_0}^t d^2(\tau) \int_{-h}^0 \mathbb{E} |y(\tau + \theta)|^2 d\theta d\tau. \quad (3.2.25)
\end{aligned}$$

Але

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^0 \mathbb{E} |y(\tau + \theta)|^2 d\theta & = \int_{\tau-h}^{\tau} \mathbb{E} |y(s)|^2 ds \\
& \leq \int_{t_0-h}^{\tau} \mathbb{E} |y(s)|^2 ds \\
& = \int_{t_0-h}^{t_0} \mathbb{E} |y(s)|^2 ds + \int_{t_0}^{\tau} \mathbb{E} |y(s)|^2 ds \\
& \leq h \max_{s \in [t_0-h, h]} \mathbb{E} |\phi(s)|^2 + \int_{t_0}^{\tau} \mathbb{E} |y(s)|^2 ds. \quad (3.2.26)
\end{aligned}$$

Підставляючи нерівність (3.2.26) у нерівність (3.2.25), отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|y(t)|^2 \leq & 3 \max(a_1^2, a_2^2) \left(\mathbb{E}|y(t_0)|^2 + hK_1 \int_{t_0}^t hb(\tau) \max \mathbb{E}|\phi(s)|^2 d\tau \right. \\ & + \int_{t_0}^t b(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \mathbb{E}|y(s)|^2 ds d\tau + \int_{t_0}^t hd^2(\tau) \max_{s \in [t_0-h, t_0]} \mathbb{E}|\phi(s)|^2 d\tau \\ & \left. + \int_{t_0}^t (b(\tau) + d^2(\tau)) \int_{t_0}^{\tau} \mathbb{E}|y(s)|^2 ds d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Звідси, із використанням узагальненої леми Гронуолла, матимемо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|y(t)|^2 \leq & 3 \max(a_1^2, a_2^2) \left(2 \max_{s \in [t_0-h, t_0]} \mathbb{E}|\phi(s)|^2 \right. \\ & \left. + \max_{s \in [t_0-h, t_0]} \mathbb{E}|\phi(s)|^2 (h^2 K_1^2 + hK_1) \right) \int_{t_0}^t (b(\tau) + d^2(\tau)) \tau d\tau < \infty. \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

в силу умов (3.2.5), (3.2.6). Отже,

$$\sup_{t \geq t_0} \mathbb{E}|y(t)|^2 = Y < \infty. \quad (3.2.29)$$

Таким чином всі розв'язки $y(t)$ обмежені у середньому квадратичному при $t \geq t_0$. Наступним кроком ми оцінюватимемо очікувану різницю квадратів норм між розв'язками $x(t)$ і $y(t)$.

Відомо, що для системи (3.2.1) розв'язок $x(t)$ можна записати як

$$x(t) = X(t - t_0)x(t_0), \quad (3.2.30)$$

де $x(t_0)$ визначено рівністю (3.2.19).

Використовуючи зображення $y(t)$ з (3.2.18), ми приходимо до наступної рівності:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|x(t) - y(t)|^2 &= \mathbb{E} \left| \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] d\tau \right. \\
&\quad + \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \\
&\quad - \int_t^\infty X_2(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] d\tau \\
&\quad \left. - \int_t^\infty X_2(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right|^2,
\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

з якої випливає нерівність

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|x(t) - y(t)|^2 &\leq 4\mathbb{E} \left| \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] d\tau \right|^2 \\
&\quad + 4\mathbb{E} \left| \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right|^2 \\
&\quad + 4\mathbb{E} \left| \int_t^\infty X_2(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] d\tau \right|^2 \\
&\quad + 4\mathbb{E} \left| \int_t^\infty X_2(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right|^2.
\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

Спираючись на (3.2.29), далі ми проведемо детальний аналіз, оцінюючи внесок кожного доданка в нерівності (3.2.32).

Для першого доданку отримуємо

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left| \int_{t_0}^t X_1(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] d\tau \right|^2 \\
& \leq \mathbb{E} \left(\int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| \left\| \int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right\| d\tau \right)^2 \\
& \leq \mathbb{E} \left(\int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| b(\tau) \int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)| d\theta d\tau \right)^2 \tag{3.2.33} \\
& = \mathbb{E} \left(\int_{t_0}^t \sqrt{\|X_1(t-\tau)\| b(\tau)} \sqrt{\|X_1(t-\tau)\| b(\tau)} \int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)| d\theta d\tau \right)^2 \\
& \leq \mathbb{E} \left(\int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| b(\tau) d\tau \int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| b(\tau) \left(\int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)| d\theta \right)^2 d\tau \right).
\end{aligned}$$

Але

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| b(\tau) \left(\int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)| d\theta \right)^2 d\tau \\
& \leq \int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| b(\tau) h \int_{-h}^0 \mathbb{E} |y(\tau + \theta)|^2 d\theta d\tau.
\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

Використовуючи разом нерівності (3.2.34) та (3.2.29), отримуємо

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| b(\tau) d\tau \int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| b(\tau) \left(\int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)| d\theta \right)^2 d\tau \right) \\
& \leq \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) \left(\int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| b(\tau) d\tau \right)^2 \\
& \leq \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) \left(\int_{t_0}^t a_1 e^{-\alpha(t-\tau)} b(\tau) d\tau \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

З умови (3.2.5) очевидно випливає абсолютна інтегровність $b(t)$ при $t \geq 2t_0$, отже,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} b(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^{\frac{t}{2}} e^{-\alpha(t-\tau)} b(\tau) d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-\alpha(t-\tau)} b(\tau) d\tau \\ &\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int_{t_0}^{\frac{t}{2}} b(\tau) d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t b(\tau) d\tau \\ &\leq e^{-\frac{\alpha t}{2}} \int_0^{\infty} b(\tau) d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t b(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отримали, що перший член у правій частині (3.2.32) прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$. Для оцінки наступного доданку для початку, аналогічно (3.2.34) в силу нерівності Коші-Буняковського, матимемо

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| d(\tau) \left(\int_{-h}^0 |y(\tau+\theta)| d\theta \right)^2 d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\| d(\tau) h \int_{-h}^0 \mathbb{E} |y(\tau+\theta)|^2 d\theta d\tau. \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

Отже,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left| \int_{t_0}^t X_1(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau+\theta) d\theta \right] dW(\tau) \right|^2 \\ &\leq \int_{t_0}^t \mathbb{E} \left| X_1(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau+\theta) d\theta \right] \right|^2 d\tau \\ &\leq \int_{t_0}^t \|X_1(t-\tau)\|^2 d^2(\tau) \mathbb{E} \left(\int_{-h}^0 |y(\tau+\theta)| d\theta \right)^2 d\tau \\ &\leq \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) \int_{t_0}^t a_1^2 e^{-2\alpha(t-\tau)} d^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Тоді з інтегровності $d^2(\tau)$ при $t \geq 2t_0$ можна зробити висновок, що другий доданок у (3.2.32) також прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$. Оцінимо третій доданок у

(3.2.32), маємо

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left| \int_t^\infty X_2(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] d\tau \right|^2 \\
& \leq \mathbb{E} \left(\int_t^\infty \|X_2(t-\tau)\| \left\| \int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right\| d\tau \right)^2 \\
& \leq \mathbb{E} \left(\int_t^\infty \|X_2(t-\tau)\| b(\tau) \left(\int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)| d\theta \right) d\tau \right)^2 \\
& \leq \int_t^\infty \|X_2(t-\tau)\| b(\tau) E \left(\int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)| d\theta \right)^2 d\tau \int_t^\infty \|X_2(t-\tau)\| b(\tau) d\tau \\
& \leq \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) \left(\int_t^\infty \|X_2(t-\tau)\| b(\tau) d\tau \right)^2 \\
& \leq \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) a_2^2 \left(\int_t^\infty b(\tau) d\tau \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.2.38}$$

Для останнього доданку у (3.2.32) отримуємо

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left| \int_t^\infty X_2(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right|^2 \\
& \leq \mathbb{E} \int_t^\infty \|X_2(t-\tau)\|^2 d^2(\tau) \mathbb{E} \|y\|_C^2 d\tau \leq \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) a_2^2 \int_t^\infty d^2(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{3.2.39}$$

Як видно, обидва доданки (3.2.38 та 3.2.39) прямують до нуля при $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} |x(t) - y(t)|^2 = 0,$$

що і доводить першу частину теореми. Перейдемо до доведення другої частини.

Для цього ми вводимо послідовність, позначену $\{n_k | k \geq 1\}$, яка задовольняє вимогу $n_k > k$ для кожного $k \geq 1$, причому ця послідовність має наступні властивості

$$\int_{n_k}^\infty b(\tau) d\tau \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1,$$

а також послідовність $\{m_k | k \geq 1\}$, яка задовольняє умову $m_k > k$ для всіх $k \geq 1$, і при цьому

$$\int_{m_k}^{\infty} \tau d^2(\tau) d\tau \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1.$$

Тепер використаємо ці послідовності для побудови l_k :

$$l_k = 2 \max\{n_k, m_k\}, \quad k \geq 1.$$

Застосовуючи рівняння (3.2.19), та враховуючи співвідношення (3.2.18), матимемо

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq l_k} |x(t) - y(t)| \geq \frac{1}{k} \right\} &= \mathbb{P} \left\{ \left| \sup_{t \geq l_k} \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] d\tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_t^{\infty} X_2(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] d\tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_t^{\infty} X_2(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{k} \right\}. \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

Звідки отримуємо нерівність

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq l_k} |x(t) - y(t)| \geq \frac{1}{k} \right\} &\leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq l_k} \left| \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] d\tau \right| \geq \frac{1}{4k} \right\} \\
&+ \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq l_k} \left| \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{4k} \right\} \\
&+ \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq l_k} \left| \int_t^\infty X_2(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] d\tau \right| \geq \frac{1}{4k} \right\} \\
&+ \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq l_k} \left| \int_t^\infty X_2(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{4k} \right\}, \\
&k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

(3.2.41)

Використовуючи підхід, аналогічний тому, що застосовувався у першій частині теореми, ми приступаємо до поетапної оцінки кожного члена у правій частині розглядуваної нерівності. Почнемо з аналізу першого доданка. Застосовуючи нерівність Чебишова, можемо записати наступний вираз:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq l_k} \left| \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta d\tau \right| \geq \frac{1}{4k} \right\} \\
&\leq 4k \mathbb{E} \sup_{t \geq l_k} \left| \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta d\tau \right| \\
&\leq 4k \mathbb{E} \sup_{t \geq l_k} \int_{t_0}^t \|X_1(t - \tau)\| \left\| \int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right\| d\tau \\
&\leq 4k \mathbb{E} \sup_{t \geq l_k} \int_{t_0}^t \|X_1(t - \tau)\| b(\tau) \int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)| d\theta d\tau \\
&\leq 4ka_1 \mathbb{E} \sup_{t \geq l_k} \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} b(\tau) \int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)| d\theta d\tau \\
&= 4ka_1 \mathbb{E} \sup_{t \geq l_k} \left(\int_{t_0}^{t/2} e^{-\alpha(t-\tau)} b(\tau) \int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)| d\theta d\tau + \int_{t/2}^t e^{-\alpha(t-\tau)} b(\tau) \int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)| d\theta d\tau \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4ka_1 \sqrt{\tilde{K} (\mathbb{E}\|\phi\|_C^2 + Y)} \left(e^{-\frac{\alpha l_k}{2}} \int_{t_0}^{\infty} b(\tau) d\tau + \int_{\frac{l_k}{2}}^{\infty} b(\tau) d\tau \right) \\
&\leq 4ka_1 \sqrt{\tilde{K} (\mathbb{E}\|\phi\|_C^2 + Y)} (e^{-\frac{\alpha l_k}{2}} K_1 + 2^{-k}) =: I_k^{(1)} \tag{3.2.42}
\end{aligned}$$

Щоб оцінити другий член у правій частині нерівності (3.2.41), зупинимося на аналізі послідовності випадкових подій, які визначатимуть внесок цього доданка до загальної оцінки. Розглянемо події

$$A_N = \left\{ \omega \mid \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{t_0}^t X_1(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{4k} \right\}.$$

Для довільних $K_1 \leq K_2$ очевидно маємо $A_{K_1} \subset A_{K_2}$. Таким чином, A_N є монотонно неспадною послідовністю подій. А тому

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{N \rightarrow \infty} A_N = \bigcup_{N=0}^{\infty} A_N = \\
&\left\{ \omega \mid \sup_{l_k \leq t} \left| \int_{t_0}^t X_1(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{4k} \right\},
\end{aligned}$$

таким чином, що

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_N).$$

Отже, для $N \geq l_k$, отримуємо

$$\begin{aligned}
&\sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{t_0}^t X_1(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \\
&\leq \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{t_0}^{l_k} X_1(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \\
&+ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_1(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right|. \tag{3.2.43}
\end{aligned}$$

Таким чином, приходимо до наступного виразу

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{t_0}^t X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{4k} \right\} \\
& \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{t_0}^{l_k} X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{8k} \right\} \\
& + \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{8k} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.2.44}$$

Розглянемо перший член у правій частині останньої нерівності. Для його оцінки знову використаємо нерівність Чебишова. Маємо

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{t_0}^{l_k} X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{8k} \right\} \\
& \leq 64k^2 \mathbb{E} \left(\sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{t_0}^{l_k} X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right|^2 \right) \\
& \leq 64k^2 \tilde{K} \left((\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) \left(e^{-\alpha l_k} \int_{t_0}^{\frac{l_k}{2}} d^2(\tau) d\tau \right) + \int_{\frac{l_k}{2}}^{l_k} d^2(\tau) d\tau \right) \\
& \leq 64k^2 \tilde{K} \left((\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) \left(e^{-\alpha l_k} \int_{t_0}^{\infty} d^2(\tau) d\tau \right) + \int_{\frac{l_k}{2}}^{\infty} d^2(\tau) d\tau \right) \\
& \leq 64k^2 \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) \left(e^{-\alpha l_k} K_1 + \frac{1}{2k} \right) =: I_k^{(2)}.
\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

Тепер перейдемо до оцінки другого доданка у правій частині нерівності (3.2.44).

Отримуємо

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_1(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{8k} \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_1(t-\tau) + X_1(t-l_k) - X_1(t-l_k) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{8k} \right\} \tag{3.2.46} \\
&\leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_1(t-\tau) - X_1(t-l_k) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{16k} \right\} \\
&\quad + \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_1(t-l_k) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{16k} \right\},
\end{aligned}$$

Далі можемо оцінити кожен з доданків у наведеній вище нерівності. Почнемо з другого доданка. Знову, в силу нерівності Чебишова, маємо

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_1(t-l_k) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{16k} \right\} \\
&\leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \|X_1(t-l_k)\| \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{16k} \right\} \\
&\leq 256k^2 a_1^2 \mathbb{E} \left(\sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right|^2 \right) \tag{3.2.47} \\
&\leq 1024k^2 a_1^2 \int_{l_k}^N d^2(\tau) \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) d\tau \\
&\leq 1024k^2 a_1^2 \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) \int_{l_k}^{\infty} d^2(\tau) \tau d\tau \leq 1024k^2 a_1^2 \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) \frac{1}{2k}.
\end{aligned}$$

При цьому використовується мартингальна нерівність Дуба для стохастичного

інтеграла. Наступні оцінки є важливими для аналізу першого доданка нерівності, яку ми розглядаємо на цьому етапі. Маємо

$$\begin{aligned}
& \int_{l_k}^t X_1(t-\tau) - X_1(t-l_k) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \\
&= - \int_{l_k}^t \left(\int_{l_k}^{\tau} X_1(t-s) A \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right) \\
&= - \int_{l_k}^t \left(\int_{l_k}^{\tau} X_1(t-s) A I_{\{s \leq \tau\}} \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right) \\
&= - \int_{l_k}^t X_1(t-s) A \left(\int_{l_k}^{\tau} I_{\{s \leq \tau\}} \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right) ds.
\end{aligned} \tag{3.2.48}$$

З цього випливає наступне

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_1(t-\tau) - X_1(t-l_k) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{16k} \right\} \\
&\leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_1(t-s) A \left(\int_{l_k}^{\tau} I_{\{s \leq \tau\}} \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right) ds \right| \geq \frac{1}{16k} \right\} \\
&\leq 256k^2 \mathbb{E} \left(\sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_1(t-s) A \left(\int_{l_k}^{\tau} I_{\{s \leq \tau\}} \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right) ds \right|^2 \right) \\
&\leq 256k^2 \mathbb{E} \left(\sup_{l_k \leq t \leq N} \left(\int_{l_k}^t a_1 e^{-\alpha(t-s)} \|A\| \left| \int_{l_k}^{\tau} I_{\{s \leq \tau\}} \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| ds \right)^2 \right) \\
&\leq 256k^2 \mathbb{E} \left(\sup_{l_k \leq t \leq N} \left(\int_{l_k}^t a_1^2 e^{-2\alpha(t-s)} \|A\|^2 \int_{l_k}^{\tau} \int_{l_k}^{\tau} I_{\{s \leq \tau\}} \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right)^2 ds \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{256k^2 a_1^2 \|A\|^2}{2\alpha} \mathbb{E} \left(\sup_{l_k \leq t \leq N} \int_{l_k}^t \left| \int_{l_k}^t I_{\{s \leq \tau\}} \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right|^2 ds \right) \\
&\leq \frac{256k^2 a_1^2 \|A\|^2}{2\alpha} \int_{l_k}^N \mathbb{E} \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t I_{\{s \leq \tau\}} \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right|^2 ds \\
&\leq \frac{1024^2 a_1^2 \|A\|^2}{2\alpha} \int_{l_k}^N \left(\int_{l_k}^N d^2(\tau) \mathbb{E} \|y_\tau\|_C^2 d\tau ds \right) \\
&\leq \frac{1024^2 a_1^2 \|A\|^2 \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) k^2}{2\alpha} \int_{l_k}^N \left(\int_{l_k}^N d^2(\tau) d\tau \right) ds \\
&\leq \frac{1024^2 a_1^2 \|A\|^2 \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) k^2}{2\alpha} \int_{l_k}^N d^2(\tau) \int_{l_k}^{\tau} ds d\tau \\
&\leq \frac{1024^2 a_1^2 \|A\|^2 \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) k^2}{2\alpha} \int_{l_k}^N \tau d^2(\tau) d\tau \leq \frac{1024^2 a_1^2 \|A\|^2 \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) k^2}{2\alpha 2^k}.
\end{aligned} \tag{3.2.49}$$

Згідно з результатами, отриманими у (3.2.47) та (3.2.49),

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_1(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{8k} \right\} \\
&\leq 256 \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) (1 + 4a_1^2 \|A\|^2) 2^{-k} =: I_k^{(3)}.
\end{aligned}$$

Остання нерівність отримана з використання нерівності Чебишова.

Далі перейдемо до оцінки третього доданка, який знаходиться у правій

частині нерівності (3.2.41). Маємо

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq l_k} \left| \int_t^\infty X_2(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] d\tau \right| \geq \frac{1}{4k} \right\} \\
& \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq l_k} \left| \int_t^\infty \|X_2(t - \tau)\| \left\| \int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right\| d\tau \right| \geq \frac{1}{4k} \right\} \\
& \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq l_k} \left| \int_{l_k}^\infty \|X_2(t - \tau)\| \left\| \int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right\| d\tau \right| \geq \frac{1}{4k} \right\} \quad (3.2.50) \\
& \leq 16k^2 \sup_{t \geq l_k} \left| \int_{l_k}^\infty \|X_2(t - \tau)\| b(\tau) \left(\int_{-h}^0 |y(\tau + \theta)| d\theta \right) d\tau \right| \\
& \leq 16k^2 a_2^2 \sqrt{\tilde{K} \mathbb{E} \|\phi(\theta)\|^2} \int_{l_k}^\infty b(\tau) d\tau \leq 6k^2 a_2^2 \sqrt{\tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + \mathbf{Y})} \frac{1}{2^k} =: I_k^{(4)}.
\end{aligned}$$

Наступним кроком буде оцінка останнього доданка, у правій частині нерівності (3.2.41). Для цього розглянемо наступну послідовність випадкових подій.

$$A_N = \left\{ \omega \left| \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_t^\infty X_2(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{4k} \right\}.$$

Відповідно до визначення, множина A_N утворює монотонно спадну послідовність, а отже,

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{N \rightarrow \infty} A_N = \bigcup_{N=0}^{\infty} A_N \\
&= \left\{ \omega \left| \sup_{l_k \leq t} \left| \int_t^\infty X_2(t - \tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau + \theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{4k} \right\},
\end{aligned}$$

відповідно тоді

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_N).$$

Зважаючи на те, що $l_k \leq t$, маємо наступну нерівність:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_t^\infty X_2(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau+\theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{4k} \right\} \\
& \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^\infty X_2(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau+\theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{8k} \right\} \\
& + \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_2(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau+\theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{8k} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.2.51}$$

Розглянемо кожен доданок у нерівності (3.2.51).

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^\infty X_2(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau+\theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{8k} \right\} \\
& \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \|X_2(\tau)\| \left| \int_{l_k}^\infty X_2^{-1}(t) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau+\theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{8k} \right\} \\
& \leq 64k^2 a_2^4 \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) \frac{1}{2^k} =: I_k^{(5)}.
\end{aligned} \tag{3.2.52}$$

Тепер переходимо до другого доданка. В силу нерівності Чебишова маємо:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left\{ \sup_{l_k \leq t \leq N} \left| \int_{l_k}^t X_2(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 D(\tau, \theta) y(\tau+\theta) d\theta \right] dW(\tau) \right| \geq \frac{1}{8k} \right\} \\
& \leq 256k^2 a_2^4 \tilde{K} (\mathbb{E} \|\phi\|_C^2 + Y) \frac{1}{2^k} =: I_k^{(6)}.
\end{aligned} \tag{3.2.53}$$

Переходячи до границі при $N \rightarrow \infty$ у нерівності (3.2.51), ми отримуємо наступний результат

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq l_k} \left| \int_t^\infty X_2(t-\tau) \left[\int_{-h}^0 B(\tau, \theta) y(\tau+\theta) d\theta \right] d\tau \right| \geq \frac{1}{4k} \right\} \leq I_k^{(5)} + I_k^{(6)}.$$

У підсумку матимемо

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq l_k} |x(t) - y(t)| \geq \frac{1}{k} \right\} \leq I_k^{(1)} + I_k^{(2)} + I_k^{(3)} + I_k^{(4)} + I_k^{(5)} + I_k^{(6)} = I_k.$$

Очевидно, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} I_k$ є збіжним. Це дозволяє застосувати лему Бореля-Кантеллі, яка гарантує існування додатного цілого числа $M = M(\omega)$, для якого для будь-якого $k \geq M(\omega)$ виконується нерівність:

$$\sup_{t \geq l_k} |x(t) - y(t)| \geq \frac{1}{k}$$

з імовірністю 1.

Таким чином, для майже всіх ω і будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти $T = T(\varepsilon, \omega) = l_{k_0}$, де $k_0 = \max\{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil, M(\omega)\}$, таке, що для всіх $t \geq T$ виконується наступна нерівність:

$$|x(t) - y(t)| \leq \sup_{t \geq T} |x(t) - y(t)| \geq \frac{1}{k_0} \leq \varepsilon.$$

Отже, доведення теореми завершено. □

3.2.3 Приклад застосування

Покажемо застосування нашої теореми.

Приклад 3.1. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$d \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} dt. \quad (3.2.54)$$

Разом із системою (3.2.54) розглянемо наступну систему функціональних стохастичних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} d \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} dt + \int_{-h}^0 B(t, \theta) \begin{bmatrix} y_1(t + \theta) \\ y_2(t + \theta) \end{bmatrix} d\theta dt \\ &+ \int_{-h}^0 D(t, \theta) \begin{bmatrix} y_1(t + \theta) \\ y_2(t + \theta) \end{bmatrix} d\theta dW(t), \end{aligned} \quad (3.2.55)$$

де

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.2.56)$$

$$B(t, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{b_1(\theta)}{(t+1)^3} & 0 \\ 0 & \frac{b_1(\theta)}{(t+1)^3} \end{bmatrix}, \quad (3.2.57)$$

$$D(t, \theta) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d_1(\theta)}{(t+1)^2} \\ \frac{d_1(\theta)}{(t+1)^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2.58)$$

де $b_1(\theta), d_1(\theta)$ — неперервні функції на $[-h, 0]$. Тоді

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-h}^0 B(t, \theta) \phi(\theta) d\theta \right\| &\leq \int_{-h}^0 \|B(t, \theta)\| \times |\phi(\theta)| d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(t+1)^3} \int_{-h}^0 |b_1(\theta) \phi(\theta)| d\theta. \end{aligned} \quad (3.2.59)$$

Отже, $b(t) = \frac{\sqrt{2}}{(t+1)^3} \int_{-h}^0 b_1(\theta) d\theta$ і $\int_0^\infty b(t) dt < \infty$.

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-h}^0 D(t, \theta) \phi(\theta) d\theta \right\| &\leq \int_{-h}^0 \|D(t, \theta)\| \times |\phi(\theta)| d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(t+1)^2} \int_{-h}^0 |d_1(\theta) \phi(\theta)| d\theta. \end{aligned} \quad (3.2.60)$$

Отже, $d(t) = \frac{\sqrt{2}}{(t+1)^2} \int_{-h}^0 d_1(\theta) d\theta$ і $\int_0^\infty t d^2(t) dt < \infty$.

З цього випливає, що система (3.2.55) асимптотично еквівалентна системі (3.2.54) у середньоквадратичному сенсі та з імовірністю 1.

3.3 Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності ($t \rightarrow \infty$) розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь. Показано, що при $t \rightarrow \infty$ поведінка розв'язків таких систем еквівалентна поведінці розв'язків певних систем звичайних диференціальних рівнянь. Отримано такі нові результати:

1. Встановлено рівномірні середньоквадратичні оцінки при $t \geq 0$ розв'язків збуреної системи стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь.
2. За системою нелінійних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь побудована система звичайних диференціальних рівнянь та встановлено відповідність між їх розв'язками.

3. У нелінійному випадку доведено теорему про асимптотичну еквівалентність таких систем при достатньо малому кроці запізнення.
4. Для систем лінійних стохастичних рівнянь отримано інтегральне представлення розв'язку через матрицант незбуреної лінійної системи.
5. Встановлено відповідність між розв'язками стохастично збуреної лінійної системи з запізненням та незбуреної лінійної детермінованої системи.
6. Доведено асимптотичну еквівалентність стохастично збуреної лінійної системи функціонально-диференціальних рівнянь до її незбуреної детермінованої частини.

Розділ 4

Апроксимація стохастичних систем із запізненням системами без запізнення

4.1 Апроксимація у скінченновимірному випадку

4.1.1 Постановка задачі

В просторі \mathbb{R}^d розглядається наступна початкова задача для системи стохастичних диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t), x(t-h)) dt + \sigma(t, x(t), x(t-h)) dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (4.1.1) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h, 0]. \end{aligned}$$

Тут функції $f, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ визначені, неперервні за сукупністю змінних, та задовільняють наступні умови:

Існує стала $L > 0$, що виконано:

1) Лінійний ріст:

$$|f(t, x, y)|^2 + |\sigma(t, x, y)|^2 \leq L(1 + |x|^2 + |y|^2) \quad (4.1.2)$$

для довільних $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$;

2) умова Ліпшиця:

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)|^2 + |\sigma(t, x_1, y_1) - \sigma(t, x_2, y_2)|^2 \\ \leq L(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2). \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Вважаємо також, що задано повний ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, потік σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, з яким узгоджено процес Вінера $W(t)$. Не втрачаючи загальності, але спрощуючи викладку, будемо вважати, що він одновимірний. Стала

$h > 0$ характеризує інтервал запізнення $[-h, 0]$, на якому задана початкова, неперервна детермінована функція $\phi(t)$. Через $C_h = C([-h, 0]; \mathbb{R}^d)$ позначимо клас неперервних d -вимірних вектор-функцій $\phi(t) : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ із супремумною нормою

$$\|\phi\| = \sup_{t \in [-h, 0]} |\phi(t)|.$$

Тут $|\cdot|$ — звичайна евклідова норма вектора в просторі \mathbb{R}^d . Розв'язок рівняння (4.1.1) будемо розуміти в стандартному сенсі [104].

Означення 4.1. Скажемо, що \mathcal{F}_t -вимірний випадковий процес із неперервними траєкторіями є сильним розв'язком початкової задачі на $[0, T]$, якщо

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0]$$

та

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t f(s, x(s), x(s-h)) ds + \int_0^t \sigma(s, x(s), x(s-h)) dW(s)$$

при $t \in [0, T]$ з імовірністю 1.

Добре відомо [104], що умови 4.1.2 та 4.1.3 забезпечують існування та єдиність сильного розв'язку задачі (4.1.1) на $[0, T]$, при цьому $\mathbb{E}|x(t)|^2$ — обмежений.

За системою (4.1.1) побудуємо наступну систему стохастичних диференціальних рівнянь без запізнення, яку назвемо апроксимуючою. А саме: зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$ і розіб'ємо відрізок $[-h, 0]$ точками $-\frac{h}{m}j$, $j = \overline{0, m}$ на m частин. Визначимо функції $z_j(t) \in \mathbb{R}^d$, як розв'язки наступних задач Коші

$$\begin{cases} dz_0 = f(t, z_0(t), z_m(t)) dt + \sigma(t, z_0(t), z_m(t)) dW(t), \\ dz_j(t) = \frac{m}{h} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \\ z_j(0) = \phi\left(-\frac{hj}{m}\right), \end{cases} \quad \begin{matrix} t \in [0, T], \\ j = \overline{0, m}. \end{matrix} \quad (4.1.4)$$

Означення 4.2. Система (4.1.4) називається апроксимуючою для системи (4.1.1) у середньому квадратичному, якщо

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left| x\left(t - \frac{h}{m}j\right) - z_j(t) \right|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad j = \overline{0, m}.$$

Основним результатом даного розділу є наступна теорема.

Теорема 4.1. *За виконання умов 4.1.2 та 4.1.3 система (4.1.4) є апроксимуючою у середньому квадратичному для початкової задачі (4.1.1) рівномірно по $j = \overline{0, m}$, тобто*

$$\sup_{j=\overline{0, m}} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |x(t - \frac{h}{m}j) - z_j(t)|^2 \rightarrow 0, m \rightarrow 0. \quad (4.1.5)$$

Для подальших міркувань важливою є лема, яка у середньому квадратичному оцінює модуль неперервності розв'язку початкової задачі на $[-h, T]$. Оскільки даний результат має і самостійний характер, то ми його винесемо в окремий підрозділ.

4.1.2 Лема про модуль неперервності

Має місце наступне твердження

Лема 4.1 (Про модуль неперервності). *За виконання умов 4.1.2 та 4.1.3 для розв'язку початкової задачі справедлива нерівність*

$$\sup_{t_1 \in [-h, T]} \mathbb{E} \sup_{t_2 \in [t_1, t_1 + l]} |x(t_2) - x(t_1)|^2 \leq C(T, \|\phi\|, l) \rightarrow 0, l \rightarrow 0.$$

Доведення. Оскільки розв'язок початкової задачі $x(t)$ існує на $[0, T]$ і має там обмежений другий момент, то в силу умови лінійного росту на коефіцієнти системи, матимемо

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &\leq 3|\phi(0)|^2 + 3 \int_0^t |f(s, x(s), x(s-h))|^2 ds \\ &\quad + 3 \int_0^t |\sigma(s, x(s), x(s-h))|^2 dW(s). \end{aligned}$$

Звідси, в силу нерівності Коші-Буняковського, отримаємо

$$\begin{aligned}
|x(t)|^2 &\leq 3|\phi(0)|^2 + 3T \int_0^t L(1 + |x(s)|^2 + |x(s-h)|^2) ds \\
&\quad + 3 \sup_{s \in [0,t]} \left(\int_0^s |\sigma(\tau, x(\tau), x(\tau-h))| dW(\tau) \right)^2 \\
&\leq 3|\phi(0)|^2 + 3T \int_0^t L \left(1 + \sup_{\tau \in [0,s]} |x(\tau)|^2 + \sup_{\tau \in [0,s]} |x(\tau-h)|^2 \right) ds \\
&\quad + 3 \sup_{s \in [0,t]} \left(\int_0^s |\sigma(\tau, x(\tau), x(\tau-h))| dW(\tau) \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Очевидною є наступна нерівність

$$\sup_{s \in [0,t]} |x(s-h)|^2 \leq \|\phi\|^2 + \sup_{s \in [0,t]} |x(s)|^2. \tag{4.1.7}$$

Враховуючи (4.1.7) та максимальну мартингальну нерівність [31] для стохастичного інтеграла, із (4.1.6) отримаємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{s \in [0,t]} |x(s)|^2 &\leq 3|\phi(0)|^2 + 3T^2 L \|\phi\|^2 + 3T^2 L \\
&\quad + 6T \int_0^t L \mathbb{E} \sup_{\tau \in [0,s]} |x(\tau)|^2 d\tau \\
&\quad + 12 \int_0^t L \left(1 + \|\phi\|^2 + 2\mathbb{E} \sup_{\tau \in [0,s]} |x(\tau)|^2 \right) d\tau \\
&\leq C_1(T, \|\phi\|) + C_2(T, \|\phi\|) \int_0^t L \mathbb{E} \sup_{\tau \in [0,s]} |x(\tau)|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Звідси в силу нерівності Гронуолла, матимемо оцінку

$$\mathbb{E} \sup_{s \in [0,t]} |x(s)|^2 \leq C_1 e^{C_2 T} = C_3(T, \|\phi\|).$$

Якщо $t_1 \geq t_0$ то отримуємо

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t), x(t-h)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t, x(t), x(t-h)) dW(t).$$

Тоді

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [t_1, t_1+l]} |x(t_2) - x(t_1)|^2 \leq 2 \left(l \int_{t_1}^{t_1+l} L (1 + \mathbb{E}|x(t)|^2 + \mathbb{E}|x(t-h)|^2) dt + \mathbb{E} \sup_{t \in [t_1, t_1+l]} \left| \int_{t_1}^t \sigma(s, x(s), x(s-h)) dW(s) \right|^2 \right).$$

Далі в силу останньої нерівності матимемо:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{t_2 \in [t_1, t_1+l]} |x(t_2) - x(t_1)|^2 &\leq 2 \left(l^2 LC_3(T, \|\phi\|) + \int_{t_1}^{t_1+l} L \cdot 2C_3(T, \|\phi\|) dt \right) \\ &= C(T, \|\phi\|, l) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Якщо t_1 та $t_1 + l \in [-h, 0]$ то тоді, в силу означення розв'язку маємо, що

$$\mathbb{E} \sup_{t_2 \in [t_1, t_1+l]} |x(t_2) - x(t_1)|^2 = \sup_{t_2 \in [t_1, t_1+l]} |\phi(t_2) - \phi(t_1)|^2 \rightarrow 0, \quad l \rightarrow 0,$$

в силу рівномірної неперервності на $[-h, 0]$ функції ϕ .

Якщо ж $t_1 \in [-h, 0]$, а $t_2 > 0$, то

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq |x(t_2) - \phi(0)| + |\phi(t_1) - \phi(0)|.$$

Очевидно, що $t_1 \rightarrow 0$ і $t_2 \rightarrow 0$, якщо $l \rightarrow 0$. Тоді, за доведеним вище, маємо

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, t_1+l]} |x(t) - \phi(0)|^2 \rightarrow 0, \quad l \rightarrow 0.$$

Останнє і доводить лему. □

4.1.3 Доведення основного результату

Оскільки випадковий процес $x(t)$ має недиференційовні траєкторії (а лише неперервні з імовірністю 1), то введемо наступний згладжений випадковий процес $x_\mu(t)$, побудований для кожного малого $\mu > 0$ наступним чином:

$$x_\mu(t) = \frac{1}{\mu} \int_t^{t+\mu} x(s) ds, \quad t \in [-h, T].$$

При цьому для $t \geq T$ процес $x(s)$ продовжимо як сталу випадкову величину за неперервністю. Очевидно, що процес $x_\mu(t)$ має гладкі траєкторії і

$$\dot{x}_\mu(t) = \frac{1}{\mu} [x(t + \mu) - x(t)].$$

Оцінимо різницю в середньому квадратичному між $x(t)$ і $x_\mu(t)$. Маємо

$$\mathbb{E} \left| x(t) - \frac{1}{\mu} \int_t^{t+\mu} x(s) ds \right|^2 = \sup_{t \in [-h, T]} \frac{1}{\mu} \mathbb{E} \left| \int_t^{t+\mu} (x(t) - x(s)) ds \right|^2. \quad (4.1.8)$$

Але

$$\sup_{t \in [-h, T]} \mathbb{E} |x(t) - x(s)|^2 \leq \sup_{t \in [-h, T]} \mathbb{E} \sup_{s \in [t, t+\mu]} |x(t) - x(s)|^2 \leq C(T, \|\phi\|, \mu) \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow 0, \quad (4.1.9)$$

в силу леми про модуль неперервності. Отже,

$$\sup_{t \in [-h, 0]} \mathbb{E} |x(t) - x_\mu(t)|^2 \leq C(T, \|\phi\|, \mu) \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow 0. \quad (4.1.10)$$

Для зручності читання далі опишемо схему доведення. Позначимо $y_j(t) = x(t - \frac{hj}{m})$ та введемо різниці $N_j(t) = \mathbb{E} |y_j(t) - z_j(t)|^2$, $j = \overline{0, m}$, де $z_j(t)$ — розв'язки системи (4.1.4). Зазначимо, що в силу класичних теорем існування та єдиності розв'язку задачі Коші для систем стохастичних рівнянь, за виконання умов 4.1.2, 4.1.3 система (4.1.4) для кожного натурального m має єдиний сильний розв'язок, визначений на $[0, T]$. Розглянемо систему (4.1.4), починаючи з другого рівняння.

Далі доведення розбивається на кілька кроків.

Крок 1. Використовуючи лінійність системи (4.1.4) (починаючи з другого рівняння) розіб'ємо її на дві системи і представимо $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$, де відповідно $z_j^{(1)}$ — розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{z}_1^{(1)} = x(t) - z_1^{(1)}, \\ \frac{h}{m} \dot{z}_j^{(1)} = z_{j-1}^{(1)} - z_j^{(1)}, \quad j = \overline{1, m}, \\ z_j^{(1)}(0) = x(-\frac{hj}{m}), \end{cases} \quad (4.1.11)$$

а $z_j^{(2)}$ – розв’язок системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{z}_1^{(2)} = -z_1^{(2)} + (z_0 - x), \\ \frac{h}{m} \dot{z}_j^{(2)} = z_{j-1}^{(2)} - z_j^{(2)}, \quad j = \overline{1, m}, \\ z_j^{(2)}(0) = 0. \end{cases} \quad (4.1.12)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left| x \left(t - \frac{hj}{m} \right) - z_j(t) \right|^2 &= \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |y_j(t) - z_j(t)|^2 \\ &\leq 2 \left(\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |y_j(t) - z_j^{(1)}(t)|^2 + \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |z_j^{(2)}(t)|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Крок 2. На цьому кроці проводимо оцінку першого доданку в (4.1.13). Для цього $x(t)$ подаємо у вигляді $x(t) = x_\mu(t) + (x(t) - x_\mu(t)) = x_\mu(t) - x_1(t)$, а $y_j(t) = y_j^{(1)}(t) + y_j^{(2)}(t)$. Тут $y_j^{(1)}(t) = x_\mu(t - \frac{hj}{m})$, а $y_j^{(2)}(t) = x_1(t - \frac{hj}{m})$. Тоді система (4.1.11) розпадається на дві підсистеми $z_j^{(1)}(t) = u_j(t) + v_j(t)$, де відповідне $u_j(t)$ є розв’язком задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{u}_1 = -u_1 + x_\mu, \\ \frac{h}{m} \dot{u}_j = u_{j-1} - u_j, \quad j = \overline{2, m}, \\ u_j(0) = y_j^{(1)}(0) = x_\mu(-\frac{hj}{m}), \end{cases} \quad (4.1.14)$$

а $v_j(t)$ є розв’язком задачі Коші для системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{v}_1 = -v_1 + x_1, \\ \frac{h}{m} \dot{v}_j = v_{j-1} - v_j, \quad j = \overline{2, m}, \\ v_j(0) = y_j^{(2)}(0) = x_1(-\frac{hj}{m}) - x_\mu(-\frac{hj}{m}). \end{cases} \quad (4.1.15)$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \left| y_j(t) - z_j^{(1)}(t) \right|^2} &\leq \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \left| y_j^{(1)}(t) + y_j^{(2)}(t) - (u_j(t) + v_j(t)) \right|^2} \\
&\leq \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \left| y_j^{(1)}(t) - u_j(t) \right|^2} \\
&\quad + \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \left| y_j^{(2)}(t) \right|^2} + \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \left| v_j(t) \right|^2}.
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Оцінюючи кожен доданок в (4.1.16) окремо, прийдемо до оцінки першого доданку в (4.1.13).

Крок 3. Використовуючи систему (4.1.12), оцінюємо другий доданок в (4.1.13).

Крок 4. Використовуючи оцінки кожного із доданків в (4.1.13), отримані на попередніх кроках, з нерівності (4.1.13) приходимо до оцінки (4.1.5), що і доведе теорему.

Подальше доведення теореми відбувається у послідовній реалізації кожного із кроків.

Оцінимо перший доданок в (4.1.16). Приведемо оцінки при $j = 1$. Позначимо $\varepsilon_1(t) = u_1(t) - y_1^{(1)}(t)$, при цьому $\varepsilon_1(0) = 0$. Тоді

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_1 &= \dot{u}_1 - \dot{y}_1^{(1)} \\
&= \frac{m}{h}(x_\mu - u_1) - \dot{y}_1^{(1)} \\
&= \frac{m}{h}(-u_1 + y_1^{(1)}) + \frac{m}{h}(x_\mu - y_1^{(1)}) - \dot{y}_1^{(1)} \\
&= -\frac{m}{h}\varepsilon_1 + \frac{m}{h}(x_\mu - y_1^{(1)}) - \dot{y}_1^{(1)} \\
&= -\frac{m}{h}\varepsilon_1 + \psi(t).
\end{aligned}$$

Таким чином, для $\varepsilon_1(t)$ отримується система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = -\frac{m}{h}\varepsilon_1 + \psi(t), \\ \varepsilon_1(0) = 0. \end{cases} \tag{4.1.17}$$

Для оцінки $\psi(t)$ маємо

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{m}{h} \left(x_\mu(t) - y_1^{(1)}(t) \right) - \dot{y}_1^{(1)}(t) \\ &= \frac{m}{h} \left(x_\mu(t) - x_\mu \left(t - \frac{h}{m} \right) \right) - \dot{x}_\mu \left(t - \frac{h}{m} \right) \\ &= \dot{x}_\mu(\theta_i) - \dot{x}_\mu \left(t - \frac{h}{m} \right),\end{aligned}$$

тут $\theta_i(\omega) \in [t - \frac{h}{m}, t]$, своя для кожного x_i — компоненти вектора $x \in \mathbb{R}^d$. Із визначення процесу $x_\mu(t)$ отримуємо

$$\psi(t) = \frac{1}{\mu} [x(\theta_i + \mu) - x(\theta)] - \frac{1}{\mu} [x(t - \frac{h}{m} + \mu) - x(t - \frac{h}{m})].$$

Тоді

$$\begin{aligned}\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |\psi(t)|^2} &\leq \frac{1}{\mu} \left[\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \left| x(\theta_i + \mu) - x \left(t - \frac{h}{m} + \mu \right) \right|^2} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \left| x(\theta_i) - x \left(t - \frac{h}{m} \right) \right|^2} \right] \\ &\leq \frac{1}{\mu} \left[\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \sup_{s \in [t - \frac{h}{m} + \mu, t + \mu]} \left| x(s) - x \left(t - \frac{h}{m} + \mu \right) \right|^2} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \sup_{s \in [t - \frac{h}{m} + \mu, t + \mu]} \left| x(s) - x \left(t - \frac{h}{m} \right) \right|^2} \right] \\ &\leq \sqrt{\frac{4}{\mu^2}} C \left(T, \|\phi\|, \frac{h}{m} \right) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Остання оцінка отрималась із використанням леми про модуль неперервності. З (4.1.17), та формули варіації довільної сталої маємо

$$\varepsilon_1(t) = \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} \psi(s) ds.$$

Отже, з використанням нерівності Коші-Буняковського, звідси отримуємо

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} \psi(s) ds \right|^2 &\leq \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left(\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} ds \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} \mathbb{E} |\psi(s)|^2 ds \right) \\ &\leq \frac{h}{m} \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} ds \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |\psi(t)|^2 \\ &\leq \left(\frac{h}{m} \right)^2 \frac{4}{\mu^2} C \left(T, \|\phi\|, \frac{h}{m} \right). \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Таким чином для $\varepsilon_1(t)$ справедлива нерівність

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |\varepsilon_1(t)|^2} \leq \frac{h}{m} \frac{2}{\mu} \sqrt{C \left(T, \|\phi\|, \frac{h}{m} \right)}. \quad (4.1.19)$$

Далі оцінимо $y_1^{(2)}(t) = x_1(t - \frac{h}{m}) = x_\mu(t - \frac{h}{m}) - x(t - \frac{h}{m})$.

З (4.1.9) маємо

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |y_1^{(2)}(t)|^2} = \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \left| x_\mu \left(t - \frac{h}{m} \right) - x \left(t - \frac{h}{m} \right) \right|^2} \leq \sqrt{C(T, \|\phi\|, \mu)}.$$

Оцінимо тепер $v_1(t)$ у системі (4.1.15). Аналогічно, з формули варіації для лінійного рівняння маємо

$$v_1(t) = e^{-\frac{m}{h}t} v_1(0) + \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} x_1(s) ds.$$

Отже,

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |v_1(t)|^2} \leq \sqrt{\mathbb{E} |v_1(0)|^2} + \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \left| \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} x_1(s) ds \right|^2} \left(\frac{m}{h} \right)^2. \quad (4.1.20)$$

Але $v_1(0) = x_1(-\frac{h}{m})$. Тоді з (4.1.9) отримуємо

$$\mathbb{E} |v_1(0)|^2 \leq C(T, \|\phi\|, \mu), \quad (4.1.21)$$

а тому

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \left| \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} x_1(s) ds \right|^2} \left(\frac{m}{h} \right)^2 \leq \left(\frac{h}{m} \right) C(T, \|\phi\|, \mu) \left(\frac{m}{h} \right). \quad (4.1.22)$$

Оцінка інтеграла в (4.1.22) проводиться аналогічною оцінці (4.1.18) з використанням нерівності Коші–Буняковського. Отже, з (4.1.20)–(4.1.22) маємо

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|v_1(t)|^2} \leq 2 \left(\sqrt{C(T, \|\phi\|, \mu)} + \sqrt{C(T, \|\phi\|, \mu)} \right) = 2\sqrt{C(T, \|\phi\|, \mu)}. \quad (4.1.23)$$

Значить з (4.1.16), (4.1.19) і (4.1.23) маємо

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|y_1(t) - z_1^{(1)}(t)|^2} \leq \frac{h}{m} \frac{2}{\mu} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})} + 2\sqrt{C(T, \|\phi\|, \mu)}.$$

Приведемо тепер оцінку для $j = 2$.

Аналогічно випадку $j = 1$ потрібно оцінити вирази

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|y_2(t) - z_2^{(1)}(t)|^2} &\leq \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|y_2^{(1)}(t) - u_2(t)|^2} \\ &+ \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|y_2^{(2)}(t)|^2} \\ &+ \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|v_2(t)|^2}. \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Позначимо $\varepsilon_2(t) = u_2(t) - y_2^{(1)}(t)$. Друга система в (4.1.11) знову в силу лінійності розпадеться на дві системи. А саме: представимо $u_2(t) = u_2^{(1)}(t) + u_2^{(2)}(t)$.

Тоді маємо

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{u}_2^{(1)} = -u_2^{(1)} + y_1^{(1)}, \\ u_2^{(1)}(0) = y_2^{(1)}(0). \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{u}_2^{(2)} = -u_2^{(2)} + \varepsilon_1, \\ u_2^{(2)}(0) = 0. \end{cases} \quad (4.1.25)$$

Тепер справедливі нерівності.

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_2(t)|^2} \leq \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|u_2^{(1)}(t) - y_2^{(1)}(t)|^2} + \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|u_2^{(2)}(t)|^2}. \quad (4.1.26)$$

Позначимо $\varepsilon_2^{(2)} = u_2^{(1)} - y_2^{(1)}$, очевидно, що $\varepsilon_2(0) = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_2^{(2)} &= \dot{u}_2^{(1)} - \dot{y}_2^{(1)} \\ &= \frac{m}{h} \left(-u_2^{(1)} + y_1^{(1)} \right) - \dot{y}_2^{(1)} \\ &= -\frac{m}{h} \varepsilon_2^{(2)} + \frac{m}{h} \left(y_1^{(1)} - y_2^{(1)} \right) - \dot{y}_2^{(1)} \\ &= -\frac{m}{h} \varepsilon_2^{(2)} + \psi_1(t). \end{aligned}$$

Таким чином отримуємо наступну систему

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_2^{(2)} = -\frac{m}{h}\varepsilon_2^{(2)} + \psi_1(t), \\ \varepsilon_2^{(2)}(0) = 0. \end{cases}$$

Аналогічно попередньому, звідси маємо оцінку

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_2^{(2)}(t)|^2} \leq \frac{h}{m} \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|\psi_1(t)|^2}. \quad (4.1.27)$$

Також аналогічно до оцінки виразу $\psi(t)$, для процесу $\psi_1(t)$ справедлива нерівність

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|\psi_1(t)|^2} \leq \frac{2}{\mu} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})}. \quad (4.1.28)$$

Тоді з (4.1.27) та (4.1.28) маємо

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_2^{(2)}(t)|^2} \leq \frac{h}{m} \frac{2}{\mu} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})}. \quad (4.1.29)$$

Оцінимо тепер $u_2^{(2)}(t)$. З системи (4.1.25) отримуємо

$$u_2^{(2)} = \frac{m}{h} \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} \varepsilon_1(s) ds.$$

Із останнього представлення тепер приходимо до оцінки

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|u_2^{(2)}(t)|^2} \leq \frac{h}{m} \frac{m}{h} \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_1(t)|^2} \leq \frac{h}{m} \frac{2}{\mu} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})}, \quad (4.1.30)$$

при цьому врахована нерівність (4.1.19).

З (4.1.26), (4.1.29) та (4.1.30) отримується нерівність

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|u_2(t) - y_2^{(1)}(t)|^2} \leq \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|\varepsilon_2(t)|^2} \leq \frac{h}{m} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})}. \quad (4.1.31)$$

Оцінимо тепер $y_2(t)$. Маємо

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|y_2^{(2)}(t)|^2} = \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|x_1(t - \frac{h2}{m})|^2} \leq \sqrt{C(T, \|\phi\|, \mu)} \quad (4.1.32)$$

як випливає із (4.1.9).

Залишилося оцінити останній доданок в (4.1.24). Для цього проведемо у системі (4.1.15) оцінки відразу для всіх $j = \overline{1, m}$. Розглянемо цю систему покоординатно. Отримаємо

$$\begin{cases} \dot{v}_{j,i} = -\frac{m}{h}v_{j,i} + \frac{m}{h}v_{j-1,i}, \\ v_{j,i}(0) = x_{1,i}\left(-\frac{hj}{m}\right), \quad j = \overline{2, m}, \quad i = \overline{1, d}. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$\mathbb{E}v_{j,i}^2(0) \leq C(T, \|\phi\|, \mu).$$

Далі також маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v_{j,i}^2 &= 2v_{j,i}\dot{v}_{j,i} \\ &= 2v_{j,i}\left(-\frac{m}{h}v_{j,i} + \frac{m}{h}v_{j-1,i}\right) \\ &= -2\frac{m}{h}v_{j,i}^2 + \frac{m}{h}2v_{j,i}v_{j-1,i} \\ &\leq -2\frac{m}{h}v_{j,i}^2 + \frac{m}{h}v_{j,i}^2 + \frac{m}{h}v_{j-1,i}^2. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{d}{dy}v_{j,i}^2 \leq -\frac{m}{h}v_{j,i}^2 + \frac{m}{h}v_{j-1,i}^2, \quad j = \overline{2, m}, \quad i = \overline{1, d}. \quad (4.1.33)$$

У нерівностях (4.1.33) проведемо заміни змінних

$$v_{j,i}^2(t) = e^{-\frac{m}{h}t}a_{j,i}(t), \quad a_{j,i}(t) = e^{\frac{m}{h}t}v_{j,i}^2(t). \quad (4.1.34)$$

При цьому $v_{j,i}^2(0) = a_{j,i}(0)$, а тому

$$\mathbb{E}a_{j,i}(0) \leq C(T, \|\phi\|, \mu).$$

Тоді із (4.1.33), врахувавши заміну (4.1.34), матимемо

$$\frac{d}{dt}a_{j,i} \leq \frac{m}{h}a_{j-1,i}, \quad j = \overline{2, m}. \quad (4.1.35)$$

Але

$$\mathbb{E}a_{1,i}(t) = e^{\frac{m}{h}t}\mathbb{E}v_{1,i}^2(t) \leq 4C(T, \|\phi\|, \mu)e^{\frac{m}{h}t}$$

в силу (4.1.23). Тоді із (4.1.35) отримуємо

$$a_{2,i}(t) \leq a_{2,i}(0) + \frac{m}{h} \int_0^t a_{1,i}(s) ds.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}a_{2,i}(t) &\leq \mathbb{E}a_{2,i}(0) + \frac{m}{h} \int_0^t \mathbb{E}a_{1,i}(s) ds \\
&\leq C(T, \|\phi\|, \mu) + 4\frac{m}{h}C(T, \|\phi\|, \mu) \int_0^t e^{\frac{m}{h}s} ds \\
&= C(T, \|\phi\|, \mu) + 4C(T, \|\phi\|, \mu) \left(e^{\frac{m}{h}t} - 1 \right) \\
&\leq 4C(T, \|\phi\|, \mu)e^{\frac{m}{h}t}.
\end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}a_{3,i}(t) &\leq \mathbb{E}a_{3,i}(0) + \frac{m}{h} \int_0^t \mathbb{E}a_{2,i}(s) ds \\
&\leq C(T, \|\phi\|, \mu) + 4\frac{m}{h}C(T, \|\phi\|, \mu) \int_0^t e^{\frac{m}{h}s} ds \\
&= C(T, \|\phi\|, \mu) + 4C(T, \|\phi\|, \mu) \left(e^{\frac{m}{h}t} - 1 \right) \\
&\leq 4C(T, \|\phi\|, \mu)e^{\frac{m}{h}t}.
\end{aligned}$$

Тому для всіх $j = \overline{1, m}$ маємо оцінку

$$\mathbb{E}a_{j,i}(t) \leq 4C(T, \|\phi\|, \mu)e^{\frac{m}{h}t}.$$

Отже, із врахуванням заміни (4.1.34) отримаємо

$$\mathbb{E}v_{j,i}^2(t) = \mathbb{E}e^{-\frac{m}{h}t}a_{j,i}(t) \leq 4C(T, \|\phi\|, \mu),$$

а тому

$$\sqrt{\mathbb{E}|v_j(t)|^2} \leq \sqrt{d4C(T, \|\phi\|, \mu)}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (4.1.36)$$

де d – розмірність простору. Тоді з (4.1.24), (4.1.31) та (4.1.32) отримуємо оцінку

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|y_2(t) - z_2^{(1)}(t)|^2} \leq \frac{4}{\mu} \frac{h}{m} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})} + 3\sqrt{dC(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})}.$$

Тепер неважко побачити, що для кожного $j = \overline{2, m}$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |y_j(t) - z_j^{(1)}(t)|^2} &\leq \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |u_j(t) - y_j^{(1)}(t)|^2} \\ &+ \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |y_j^{(2)}(t)|^2} \\ &+ \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |v_j(t)|^2}, \end{aligned}$$

де $z_j^{(1)} = u_j + v_j$, $y_j = y_j(1) + y_j(2)$. Із введенням аналогічно вище викладеного позначення $\varepsilon_j(t) = u_j(t) - y_j^{(1)}(t)$, остання нерівність набуває вигляду

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |y_j(t) - z_j^{(1)}(t)|^2} &\leq \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |\varepsilon_j(t)|^2} \\ &+ \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |y_j^{(2)}(t)|^2} + \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |v_j(t)|^2}. \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

Аналогічно випадку $j = 2$, представимо $u_j(t) = u_j^{(1)}(t) + u_j^{(2)}(t)$, де $u_j^{(1)}$ та $u_j^{(2)}$ — розв'язки наступних задач Коші відповідно

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{u}_j^{(1)} = -u_j^{(1)} + y_{j-1}^{(1)}, \\ u_j^{(1)}(0) = y_j^{(1)}(0) \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{u}_j^{(2)} = -u_j^{(2)} + \varepsilon_{j-1}, \\ u_j^{(2)}(0) = 0. \end{cases}$$

Позначимо $\varepsilon_j^j = u_j^{(1)} - y_j^{(1)}$, $\varepsilon_j^j(0) = 0$. Тоді аналогічно випадку $j = 2$, для ε_j^j отримаємо оцінку

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |\varepsilon_j^j(t)|^2} \leq \frac{h}{m} \frac{2}{\mu} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})}.$$

Тоді

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |\varepsilon_j(t)|^2} \leq \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |\varepsilon_j^j(t)|^2} + \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |u_j^{(2)}(t)|^2}.$$

Аналогічно випадку $j = 2$, для $u_j^{(2)}$ отримаємо нерівність

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |u_j^{(2)}(t)|^2} \leq \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |\varepsilon_{j-1}(t)|^2}.$$

Отже,

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |\varepsilon_j(t)|^2} \leq \frac{h}{m} \frac{2}{\mu} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})} + \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |\varepsilon_{j-1}(t)|^2}.$$

Остання нерівність із введенням позначення $b_j = \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |\varepsilon_j(t)|^2}$ набуває вигляду

$$b_j \leq \frac{h}{m} \frac{2}{\mu} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})} + b_{j-1}.$$

Звідси, індукцією за j легко отримати, що

$$b_j \leq b_1 + j \frac{h}{m} \frac{2}{\mu} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})},$$

а отже, для всіх $j = \overline{2, m}$ маємо оцінку

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |\varepsilon_j(t)|^2} \leq \frac{2h}{\mu} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})} + \frac{h}{m} \frac{2}{\mu} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})} \quad (4.1.38)$$

в силу (4.1.19). Величини $y_j^{(2)}(t)$ оцінюються аналогічно випадку $j = 2$, з використанням універсальної оцінки (4.1.9), а саме:

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |y_j^{(2)}(t)|^2} \leq \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})}. \quad (4.1.39)$$

Аналогічно для $v_j(t)$ також маємо

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |v_j^{(2)}(t)|^2} \leq 2 \sqrt{dC(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})}. \quad (4.1.40)$$

Отже, з (4.1.36), (4.1.38)-(4.1.40) отримуємо

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |y_j(t) - z_j^{(1)}(t)|^2} \leq \frac{2h}{\mu} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})} + 3 \sqrt{dC(T, \|\phi\|, \mu)}. \quad (4.1.41)$$

Візьмемо в останній нерівності $\mu = C^{\frac{1}{4}}(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})$. Очевидно, що $\mu \rightarrow 0$, якщо $m \rightarrow \infty$. Тоді

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} |y_j(t) - z_j^{(1)}(t)|^2} &\leq 2hC^{\frac{1}{4}}(T, \|\phi\|, \frac{h}{m}) + 3 \sqrt{dC(T, \|\phi\|, C^{\frac{1}{4}}(T, \|\phi\|, \frac{h}{m}))} \\ &= \alpha(T, \|\phi\|, \frac{h}{m}) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Проведемо оцінки для системи (4.1.12). Ми мали $N_0(t) = \mathbb{E}|z_0(t) - x(t)|^2$. Для першого рівняння в (4.1.12) отримуємо.

$$z_1^{(2)}(t) = \frac{m}{h} \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} (z_0(s) - x(s)) ds,$$

а тому

$$\mathbb{E}z_1^{(2)}(t) \leq \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}|z_0(t) - x(t)|^2 = \mathbb{E}N_0(t).$$

Для інших рівнянь в (4.1.12) проведемо міркування аналогічні до оцінок $v_j(t)$, а саме: розпишемо їх покоординатно. Маємо

$$\begin{cases} \dot{z}_{j,i}^{(2)} = -\frac{m}{h}z_{j,i}^{(2)} + \frac{m}{h}z_{j-1,i}^{(2)} \\ z_{j,i}^{(2)}(0) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, d}. \end{cases}$$

Тоді для $(z_{j,i}^{(2)})^2$ отримуємо нерівність

$$\frac{d}{dt}(z_{j,i}^{(2)})^2 \leq -\frac{m}{h}(z_{j,i}^{(2)})^2 + \frac{m}{h}(z_{j-1,i}^{(2)})^2, \quad (4.1.42)$$

з якої за допомогою заміни $(z_{j,i}^{(2)})^2 = e^{-\frac{m}{h}t} b_{j,i}$, $b_{j,i}(0) = 0$ прийдемо до нерівності

$$\frac{d}{dt}b_{j,i}(t) \leq \frac{m}{h}b_{j-1,i}(t).$$

Проінтегрувавши її на $[0, t]$, з урахуванням початкової умови $b_{j,i}(0) = 0$, матимемо

$$b_{j,i}(t) \leq \frac{m}{h} \int_0^t b_{j-1,i}(s) ds,$$

при цьому

$$b_{1,i}(t) = e^{\frac{m}{h}t} (z_{1,i}^{(2)})^2 = e^{\frac{m}{h}t} N_0(t).$$

Отже,

$$\mathbb{E}b_{2,i}(t) \leq \frac{m}{h} \int_0^t e^{\frac{m}{h}s} \mathbb{E}N_0(s) ds \leq e^{\frac{m}{h}t} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}N_0(t).$$

Далі

$$\mathbb{E}b_{3,i}(t) \leq \frac{m}{h} \int_0^t \mathbb{E}b_{2,i}(s) ds \leq \frac{m}{h} \int_0^t e^{\frac{m}{h}s} \mathbb{E}N_0(s) ds \leq e^{\frac{m}{h}t} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}N_0(t).$$

Продовжуючи дану процедуру, у загальному випадку матимемо

$$\mathbb{E}b_{j,i}(t) \leq e^{\frac{m}{h}t} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}N_0(t).$$

А отже, із урахуванням заміни (4.1.42), отримаємо

$$\mathbb{E}(z_{j,i}^{(2)})^2 \leq \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}N_0(t).$$

Тому

$$\mathbb{E}(z_j^{(2)})^2 \leq \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}N_0(t). \quad (4.1.43)$$

Тоді в результаті для $j = \overline{1, m}$ отримуємо

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|x(t - \frac{hj}{m}) - z_j(t)|^2} \leq \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|x(t - \frac{hj}{m}) - z_j^{(1)}(t)|^2} + \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|z_j^{(2)}(t)|^2},$$

що із урахуванням позначення $N_j(t)$, оцінок (4.1.41) та (4.1.43) приводять до нерівності

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{N_j(t)} \leq \alpha(T, \|\phi\|, \frac{h}{m}) + \sqrt{\sup_{t \in [0, T]} N_0(t)}. \quad (4.1.44)$$

А отже, для оцінки $z_0(t) - x(t)$ маємо

$$\begin{aligned} z_0(t) - x(t) &= \int_0^t (f(s, z_0(s), z_m(s)) - f(s, x(s), x(s-h))) ds \\ &+ \int_0^t (\sigma(s, z_0(s), z_m(s)) - \sigma(s, x(s), x(s-h))) dW(s). \end{aligned}$$

Тепер, з урахуванням умови 4.1.3 теореми, отримуємо

$$\begin{aligned} N_0(t) &\leq 2(T+1) \int_0^t L (\mathbb{E}|z_0(s) - x(s)|^2 + \mathbb{E}|z_m(s) - x(s-h)|^2) ds \\ &\leq 2(T+1) \int_0^t 4L \sup_{s \in [0, s]} N_0(s) ds + 2\alpha^2 C \left(T, \|\phi\|, \frac{h}{m} \right). \end{aligned}$$

Звідки, з урахуванням леми Гронуолла матимемо

$$\sup_{t \in [0, T]} N_0(t) \leq 2\alpha^2 C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m}) e^{8(T+1)LT} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow 0.$$

Остання оцінка, з урахуванням (4.1.44) і доводить теорему.

4.2 Випадок інтегрального запізнення

4.2.1 Постановка задачі

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — повний простір ймовірностей із фільтрацією $\{\mathcal{F}_t\}, t \geq 0$, відносно якої скалярний процес Вінера $W(t), t \geq 0$, є адаптованим. Без втрати загальності та для спрощення викладки знову будемо вважати, що він є одновимірним.

Нехай $h > 0$ — це інтервал запізнення, на якому визначена неперервна детермінована початкова функція $\phi(t)$.

Розглянемо таку задачу Коші для системи стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} dx(t) = f(t, x(t), \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta)dt + \sigma(t, x(t), \int_{-h}^0 x(t+\theta)d\theta)dW(t), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (4.2.1)$$

де функції $f, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ визначені, неперервні за всіма змінними та існує стала $L > 0$, виконані умови:

1) Умова лінійного зростання:

$$|f(t, x, y)|^2 + |\sigma(t, x, y)|^2 \leq L(1 + |x|^2 + |y|^2),$$

для будь-яких $t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^d$.

2) Умова Ліпшиця:

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)|^2 + |\sigma(t, x_1, y_1) - \sigma(t, x_2, y_2)|^2 \leq L(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2).$$

Розв'язок задачі Коші (4.2.1) знову будемо розуміти у стандартному сенсі [104].

Означення 4.3. Стохастичний процес із неперервними траєкторіями, адаптований до \mathcal{F}_t , називається сильним розв'язком задачі Коші (4.2.1) на $[0, T]$, якщо:

1) $x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0];$

2) $x(t) = \phi(0) + \int_0^t f(s, x(s), \int_{-h}^0 x(s+\theta)d\theta)ds + \int_0^t \sigma(s, x(s), \int_{-h}^0 x(s+\theta)d\theta)dW(s),$

з імовірністю 1, при $t \in [0, T]$.

Зауважимо, що рівняння (4.2.1) задає абстрактні відображення із простору C у \mathbb{R}^d такого вигляду:

$$f_1(t, \phi) = f\left(t, \phi(0), \int_{-h}^0 \phi(\theta) d\theta\right), \quad \sigma_1(t, \phi) = \sigma\left(t, \phi(0), \int_{-h}^0 \phi(\theta) d\theta\right).$$

З умов 1) і 2) очевидним чином маємо, що:

$$|f_1(t, \phi)|^2 + |\sigma_1(t, \phi)|^2 \leq L(1 + (1 + h^2)\|\phi\|^2),$$

$$|f_1(t, \phi) - f_1(t, \psi)|^2 + |\sigma_1(t, \phi) - \sigma_1(t, \psi)|^2 \leq L((1 + h^2)\|\phi - \psi\|^2).$$

З отриманих нерівностей випливає виконання умов [104] існування та єдиності сильного неперервного розв'язку задачі (4.2.1) на $[0, T]$, що задовільняє нерівність

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}|x(t)|^2 < \infty.$$

На основі системи стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь (4.2.1) ми будемо систему стохастичних диференціальних рівнянь без запізнення, яку назвемо апроксимуючою системою, наступним чином. Фіксуємо $m \in \mathbb{N}$ і розбиваємо інтервал $[-h, 0]$ точками $-\frac{hj}{m}$, $j = \overline{0, m}$, на m частин.

Визначимо функції $z_j(t) \in \mathbb{R}^d$ на $[0, T]$ як розв'язки наступних задач Коші:

$$\begin{cases} dz_0(t) = f(t, z_0(t), \frac{h}{m} \sum_{j=1}^m z_j(t)) dt + \sigma(t, z_0(t), \frac{h}{m} \sum_{j=1}^m z_j(t)) dW(t), \\ dz_j(t) = \frac{m}{h} [z_{j-1}(t) - z_j(t)], \quad j = \overline{1, m}, \\ z_j(0) = \phi(-\frac{hj}{m}), \quad j = \overline{0, m}. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Означення 4.4. Система (4.2.2) називається апроксимуючою системою для системи (4.2.1) в середньоквадратичному сенсі на $[0, T]$, якщо

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left| x\left(t - \frac{hj}{m}\right) - z_j(t) \right|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad j = \overline{0, m}. \quad (4.2.3)$$

Основний результат цієї частини представлено у наступній теоремі.

Теорема 4.2. *За виконання умов 1) і 2), система (4.2.2) є апроксимуючою системою в середньоквадратичному сенсі для початкової задачі (4.2.1), рівномірно за $j = \overline{0, m}$, тобто,*

$$\sup_{j=\overline{0, m}} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left| x\left(t - \frac{hj}{m}\right) - z_j(t) \right|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (4.2.4)$$

Доведення. Щоб довести теорему, нам знадобиться лема про оцінку середньо-квадратичного модуля неперервності розв'язку задачі (4.2.1), аналогічно до попереднього параграфа.

4.2.2 Лема про модуль неперервності

Справедливою є наступна лема.

Лема 4.2 (Про модуль неперервності). *За виконання умов 4.1.2) і 4.1.3) для розв'язку початкової задачі (4.2.1) справджується наступне співвідношення:*

$$\sup_{t_1 \in [-h, T]} \mathbb{E} \sup_{t_2 \in [t_1, t_1 + l]} |x(t_2) - x(t_1)|^2 \leq C(T, \|\phi\|, h, l) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow 0. \quad (4.2.5)$$

Доведення. Оскільки розв'язок початкової задачі (4.2.1) існує на $[0, T]$ і має обмежений другий момент, то за умовою лінійного зростання маємо

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 \leq & 3 \left(|\phi(0)|^2 + \left| \int_0^t f\left(s, x(s), \int_{-h}^0 x(s + \theta) d\theta\right) ds \right|^2 \right. \\ & \left. + \left| \int_0^t \sigma\left(s, x(s), \int_{-h}^0 x(s + \theta) d\theta\right) dW(s) \right|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Далі враховуємо нерівність

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{\theta \in [-h, 0]} |x(t + \theta)|^2 \leq \|\phi\|^2 + \sup_{t \in [0, T]} |x(t)|^2. \quad (4.2.7)$$

Використовуючи (4.2.7), нерівність Коші–Буняковського та максимальну мартингальну [31] нерівність для стохастичних інтегралів, з (4.2.6) отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{s \in [0, t]} |x(s)|^2 \leq & 3|\phi(0)|^2 + 3T^2L\|\phi\|^2h^2 + 3T^2L + 6TL \int_0^t \mathbb{E} \sup_{\tau \in [0, s]} |x(\tau)|^2 d\tau \\ & + 12L \int_0^t \left(1 + h^2\|\phi\|^2 + h^2\mathbb{E} \sup_{\tau \in [0, s]} |x(\tau)|^2 \right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Звідки, застосовуючи нерівність Гронуолла, отримуємо

$$\mathbb{E} \sup_{s \in [0, t]} |x(s)|^2 \leq C_3(T, \|\phi\|, h). \quad (4.2.9)$$

Далі, якщо $t_1 \geq 0$, то маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{t \in [t_1, t_1+l]} |x(t) - x(t_1)|^2 \leq & 2 \left(l \int_{t_1}^{t_1+l} L \left(1 + \mathbb{E}|x(t)|^2 + \mathbb{E} \left| \int_{-h}^0 x(t+\theta) d\theta \right|^2 \right) dt \right. \\ & \left. + \mathbb{E} \sup_{t \in [t_1, t_1+l]} \left| \int_{t_1}^t \sigma \left(s, x(s), \int_{-h}^0 x(s+\theta) d\theta \right) dW(s) \right|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Використовуючи (4.2.9) і попередню нерівність, а також враховуючи (4.2.7), отримуємо

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [t_1, t_1+l]} |x(t_2) - x(t_1)| \leq C(T, \|\phi\|, h, l) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow 0. \quad (4.2.11)$$

Якщо $t_1, t_1 + l \in [-h, 0]$, тоді, за означенням розв'язку, маємо

$$\mathbb{E} \sup_{t_2 \in [t_1, t_1+l]} |x(t_2) - x(t_1)|^2 = \sup_{t_2 \in [t_1, t_1+l]} |\phi(t_2) - \phi(t_1)|^2 \rightarrow 0, \quad l \rightarrow 0. \quad (4.2.12)$$

При $t_1 \in [-h, 0]$, а $t_2 > 0$ маємо

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq |x(t_2) - \phi(0)| + |\phi(t_1) - \phi(0)|.$$

Очевидно, що $t_1 \rightarrow 0$ і $t_2 \rightarrow 0$, якщо $l \rightarrow 0$. Тоді, за доведеним вище

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, t_1+l]} |x(t) - \phi(0)|^2 \rightarrow 0, \quad l \rightarrow 0$$

в силу рівномірної неперервності функції $\phi(t)$, що завершує доведення леми. \square

4.2.3 Доведення основного результату

Перейдемо до доведення теореми 4.2. Добре відомо, що траєкторії розв'язку задачі (4.2.1) є неперервними, але ніде недиференційованими функціями, тому

ми згладимо розв'язок наступним чином. Для будь-якого достатньо малого $\mu > 0$ покладемо

$$x_\mu(t) = \frac{1}{\mu} \int_t^{t+h} x(s) ds, \quad t \in [-h, T], \quad (4.2.13)$$

де для $t \geq T$ ми продовжуємо процес $x(s)$ сталою випадковою величиною за неперервністю. Очевидно, що процес $x_\mu(t)$ має гладкі траєкторії з імовірністю 1 і

$$\dot{x}_\mu(t) = \frac{1}{\mu} [x(t+h) - x(t)]. \quad (4.2.14)$$

Оцінимо різницю в середньому квадратичному між $x(t)$ і $x_\mu(t)$. Маємо

$$\mathbb{E} \left| x(t) - \frac{1}{\mu} \int_t^{t+\mu} x(s) ds \right|^2 = \sup_{t \in [-h, T]} \frac{1}{\mu} \mathbb{E} \left| \int_t^{t+\mu} (x(t) - x(s)) ds \right|^2. \quad (4.2.15)$$

Але

$$\sup_{t \in [-h, T]} \mathbb{E} |x(t) - x(s)|^2 \leq \sup_{t \in [-h, T]} \mathbb{E} \sup_{s \in [t, t+\mu]} |x(t) - x(s)|^2 \leq C(T, \|\phi\|, \mu) \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow 0, \quad (4.2.16)$$

в силу леми про модуль неперервності. Отже,

$$\sup_{t \in [-h, 0]} \mathbb{E} |x(t) - x_\mu(t)|^2 \leq C(T, \|\phi\|, \mu) \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow 0. \quad (4.2.17)$$

Нехай $y_j(t) = x\left(t - \frac{hj}{m}\right)$, і введемо різниці

$$N_j(t) = \mathbb{E} |y_j(t) - z_j(t)|^2, \quad j = \overline{0, m}, \quad (4.2.18)$$

де $z_j(t)$ — розв'язки системи (4.2.2). Зазначимо, що за класичними теоремами про існування та єдиність задачі Коші для систем стохастичних рівнянь без запізнення, враховуючи умови 1) і 2), отримуємо, що система (4.2.2) для кожного натурального m має єдиний сильний розв'язок, визначений на $[0, T]$.

Доведення тепер продовжується декількома кроками:

Крок 1. Розкладемо систему (4.2.2) на дві частини та представимо її розв'язок у вигляді суми:

$$z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t),$$

де $z_j^{(1)}$ — це розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{z}_0^{(1)} = x(t) - z_1^{(1)}(t), \\ \frac{h}{m} \dot{z}_j^{(1)} = z_{j-1}^{(1)}(t) - z_j^{(1)}(t), \quad j = \overline{1, m}, \\ z_j^{(1)}(0) = x\left(-\frac{hj}{m}\right), \end{cases} \quad (4.2.19)$$

а $z_j^{(2)}$ — це відповідний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{z}_1^{(2)} = -z_1^{(2)}(t) + z_0(t) - x(t), \\ \frac{h}{m} \dot{z}_j^{(2)} = z_{j-1}^{(2)}(t) - z_j^{(2)}(t), \quad j = \overline{1, m}, \\ z_j^{(2)}(0) = 0. \end{cases} \quad (4.2.20)$$

Для зручності позначимо норму

$$\|\xi\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}\xi^2}.$$

Тоді

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| x\left(t - \frac{hj}{m}\right) - z_j(t) \right\|_2 \leq \sup_{t \in [0, T]} \|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\|_2 + \sup_{t \in [0, T]} \|z_j^{(2)}(t)\|_2. \quad (4.2.21)$$

Оскільки наступні кроки і дійсно схожі до викладок попереднього підрозділу, то ми детально зупинимось лише на другому та четвертому кроках.

Крок 2. На цьому етапі оцінюємо перший член у (4.2.21) та показуємо, що виконується наступна нерівність:

$$\sup_{t \in [0, T]} \|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\|_2 \leq \alpha(T, \|\phi\|, h, \frac{h}{m}) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (4.2.22)$$

Для початку $x(t)$ подаємо у вигляді $x(t) = x_\mu(t) + (x(t) - x_\mu(t)) = x_\mu(t) - x_1(t)$, а $y_j(t) = y_j^{(1)}(t) + y_j^{(2)}(t)$. Тут $y_j^{(1)}(t) = x_\mu(t - \frac{hj}{m})$, а $y_j^{(2)}(t) = x_1(t - \frac{hj}{m})$. Тоді система (4.1.11) розпадається на дві підсистеми $z_j^{(1)}(t) = u_j(t) + v_j(t)$, де відповідне $u_j(t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{u}_1 = -u_1 + x_\mu, \\ \frac{h}{m} \dot{u}_j = u_{j-1} - u_j, \quad j = \overline{2, m}, \\ u_j(0) = y_j^{(1)}(0) = x_\mu\left(-\frac{hj}{m}\right), \end{cases} \quad (4.2.23)$$

а $v_j(t)$ є розв'язком задачі Коші для системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m}\dot{v}_1 = -v_1 + x_1, \\ \frac{h}{m}\dot{v}_j = v_{j-1} - v_j, \quad j = \overline{2, m}, \\ v_j(0) = y_j^{(2)}(0) = x_1\left(-\frac{hj}{m}\right) - x_\mu\left(-\frac{hj}{m}\right). \end{cases} \quad (4.2.24)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)\|_2 &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|y_j^{(1)}(t) + y_j^{(2)}(t) - (u_j(t) + v_j(t))\|_2 \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|y_j^{(1)}(t) - u_j(t)\|_2 \\ &\quad + \sup_{t \in [0, T]} \|y_j^{(2)}(t)\|_2 + \sup_{t \in [0, T]} \|v_j(t)\|_2. \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

Тепер розглянемо кожен доданок у (4.2.25). Оцінимо перший член цієї нерівності. Приведемо оцінки при $j = 1$. Для цього позначино $\varepsilon_1(t) = u_1(t) - y_1^{(1)}(t)$, при цьому $\varepsilon_1(0) = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \dot{u}_1 - \dot{y}_1^{(1)} \\ &= \frac{m}{h}(x_\mu - u_1) - \dot{y}_1^{(1)} \\ &= \frac{m}{h}(-u_1 + y_1^{(1)}) + \frac{m}{h}(x_\mu - y_1^{(1)}) - \dot{y}_1^{(1)} \\ &= -\frac{m}{h}\varepsilon_1 + \frac{m}{h}(x_\mu - y_1^{(1)}) - \dot{y}_1^{(1)} \\ &= -\frac{m}{h}\varepsilon_1 + \psi(t). \end{aligned}$$

Таким чином, для $\varepsilon_1(t)$ отримується система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = -\frac{m}{h}\varepsilon_1 + \psi(t), \\ \varepsilon_1(0) = 0. \end{cases} \quad (4.2.26)$$

Для оцінки $\psi(t)$ маємо

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{m}{h} \left(x_\mu(t) - y_1^{(1)}(t) \right) - \dot{y}_1^{(1)}(t) \\ &= \frac{m}{h} \left(x_\mu(t) - x_\mu \left(t - \frac{h}{m} \right) \right) - \dot{x}_\mu \left(t - \frac{h}{m} \right) \\ &= \dot{x}_\mu(\theta_i) - \dot{x}_\mu \left(t - \frac{h}{m} \right), \end{aligned}$$

тут $\theta_i(\omega) \in [t - \frac{h}{m}, t]$, своя для кожного x_i - компоненти вектора $x \in \mathbb{R}^d$. Із визначення процесу $x_\mu(t)$ отримуємо

$$\psi(t) = \frac{1}{\mu} [x(\theta_i + \mu) - x(\theta)] - \frac{1}{\mu} [x(t - \frac{h}{m} + \mu) - x(t - \frac{h}{m})].$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|_2 &\leq \frac{1}{\mu} \left[\sup_{t \in [0, T]} \|x(\theta_i + \mu) - x\left(t - \frac{h}{m} + \mu\right)\|_2 \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t \in [0, T]} \|x(\theta_i) - x\left(t - \frac{h}{m}\right)\|_2 \right] \\ &\leq \frac{1}{\mu} \left[\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \sup_{s \in [t - \frac{h}{m} + \mu, t + \mu]} |x(s) - x\left(t - \frac{h}{m} + \mu\right)|^2} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \sup_{s \in [t - \frac{h}{m} + \mu, t + \mu]} |x(s) - x\left(t - \frac{h}{m}\right)|^2} \right] \\ &\leq \sqrt{\frac{4}{\mu^2} C\left(T, \|\phi\|, \frac{h}{m}\right)} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Остання оцінка отрималась із використанням леми про модуль неперервності. З (4.2.26), та формули варіації довільної сталої маємо

$$\varepsilon_1(t) = \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} \psi(s) ds.$$

Отже, з використанням нерівності Коші-Буняковського, звідси отримуємо

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} \psi(s) ds \right|^2 &\leq \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left(\int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} ds \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} \mathbb{E} |\psi(s)|^2 ds \right) \\ &\leq \frac{h}{m} \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} ds \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} |\psi(t)|^2 \quad (4.2.27) \\ &\leq \left(\frac{h}{m}\right)^2 \frac{4}{\mu^2} C\left(T, \|\phi\|, \frac{h}{m}\right). \end{aligned}$$

Таким чином для $\varepsilon_1(t)$ справедлива нерівність

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\varepsilon_1(t)\|_2 \leq \frac{h}{m} \frac{2}{\mu} \sqrt{C\left(T, \|\phi\|, \frac{h}{m}\right)}. \quad (4.2.28)$$

Далі оцінимо $y_1^{(2)}(t) = x_1(t - \frac{h}{m}) = x_\mu(t - \frac{h}{m}) - x(t - \frac{h}{m})$.

З (4.2.16) маємо

$$\sup_{t \in [0, T]} \|y_1^{(2)}(t)\|_2 = \sup_{t \in [0, T]} \|x_\mu\left(t - \frac{h}{m}\right) - x\left(t - \frac{h}{m}\right)\|_2 \leq \sqrt{C(T, \|\phi\|, \mu)}.$$

Оцінимо тепер $v_1(t)$ у системі (4.2.24). Аналогічно, з формули варіації для лінійного рівняння маємо

$$v_1(t) = e^{-\frac{m}{h}t} v_1(0) + \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} x_1(s) ds.$$

Отже,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|v_1(t)\|_2 \leq \|v_1(0)\|_2 + \sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} x_1(s) ds \right\|_2 \left(\frac{m}{h}\right). \quad (4.2.29)$$

Але $v_1(0) = x_1(-\frac{h}{m})$. Тоді з (4.2.16) отримуємо

$$\mathbb{E}|v_1(0)|^2 \leq C(T, \|\phi\|, \mu), \quad (4.2.30)$$

а тому

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t e^{-\frac{m}{h}(t-s)} x_1(s) ds \right\|_2 \left(\frac{m}{h}\right) \leq \left(\frac{h}{m}\right) C(T, \|\phi\|, \mu) \left(\frac{m}{h}\right). \quad (4.2.31)$$

Оцінка інтеграла в (4.2.31) проводиться аналогічною оцінці (4.2.27) з використанням нерівності Коші–Буняковського. Отже, з (4.2.29)–(4.2.31) маємо

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|v_1(t)|^2} \leq 2 \left(\sqrt{C(T, \|\phi\|, \mu)} + \sqrt{C(T, \|\phi\|, \mu)} \right) = 2\sqrt{C(T, \|\phi\|, \mu)}. \quad (4.2.32)$$

Значить з (4.2.25), (4.2.28) і (4.2.32) маємо

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|y_1(t) - z_1^{(1)}(t)|^2} \leq \frac{h}{m} \frac{2}{\mu} \sqrt{C(T, \|\phi\|, \frac{h}{m})} + 2\sqrt{C(T, \|\phi\|, \mu)}.$$

Провівши аналогічну оцінку при $j = 2$, матимемо нерівність.

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E}|y_j(t) - z_j^{(1)}(t)|^2} &\leq 2hC^{\frac{1}{4}}(T, \|\phi\|, \frac{h}{m}) + 3\sqrt{dC(T, \|\phi\|, C^{\frac{1}{4}}(T, \|\phi\|, \frac{h}{m}))} \\ &= \alpha(T, \|\phi\|, \frac{h}{m}) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Остання оцінка завершує крок 2.

Крок 3. Для оцінки другого члена в (4.2.21), аналогічно параграфу 3, використовуючи метод варіації сталих, отримуємо нерівність

$$\mathbb{E}z_1^{(2)}(t) \leq \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}|z_0(t) - x(t)|^2 = \mathbb{E}N_0(t). \quad (4.2.33)$$

Крок 4. Оцінюємо $z_0(t) - x(t)$. Оскільки вигляд запізнення у нашому випадку відрізняється від запізнення у попередньому параграфі, то тут ми зупинимось детальніше, маємо

$$\begin{aligned} z_0(t) - x(t) &= \int_0^t \left[f \left(s, z_0(s), \frac{h}{m} \sum_{j=1}^m z_j(s) \right) - f \left(s, x(s), \int_{-h}^0 x(s + \theta) d\theta \right) \right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\sigma \left(s, z_0(s), \frac{h}{m} \sum_{j=1}^m z_j(s) \right) - \sigma \left(s, x(s), \int_{-h}^0 x(s + \theta) d\theta \right) \right] dW(s). \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

З умови Ліпшиця маємо:

$$\mathbb{E}N_0(t) \leq 2(T+1) \int_0^t [\mathbb{E}|x(s) - z_0(s)|^2] + \mathbb{E} \left| \int_{-h}^0 x(s + \theta) d\theta - \frac{h}{m} \sum_{j=0}^{m-1} z_j(s) \right|^2 dt. \quad (4.2.35)$$

Але,

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 x(s + \theta) d\theta - \frac{h}{m} \sum_{j=1}^m z_j(s) &= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-\frac{h}{m}(j+1)}^{-\frac{h}{m}j} x(s + \theta) d\theta - \frac{h}{m} \sum_{j=1}^m z_j(s) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{h}{m} x \left(s + \rho_j^{(i)} \right) - \frac{h}{m} \sum_{j=1}^m z_j(s), \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

де $\rho_j^{(i)}(\omega) \in \left(-\frac{h}{m}(j+1), -\frac{h}{m}j \right)$ своє для кожної компоненти вектора $x(t) \in \mathbb{R}^d$ за теоремою про середнє значення. Отже,

$$\frac{h}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (x(s + \rho_j^{(i)}) - x(s - \frac{hj}{m})) + \frac{h}{m} \sum_{j=1}^m (x(s - \frac{hj}{m}) - z_j(s)), \quad (4.2.37)$$

тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N_0(t) \leq & 2(T+1) \int_0^t \left[\mathbb{E}N_0(s) + \frac{2h^2}{m^2} \left(\mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^m \left| x(s + \rho_j^{(i)}) - x(s - \frac{hj}{m}) \right| \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^m \left| x(s - \frac{hj}{m}) - z_j(s) \right| \right)^2 \right) \right] ds. \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

Оцінимо суми у нерівності (4.2.38). Для першої суми, за лемою про модуль неперервності, отримуємо

$$\mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^m \left| x(s + \rho_j^{(i)}) - x(s - \frac{hj}{m}) \right| \right)^2 \leq m \sum_{j=1}^m \mathbb{E} \left| x(s + \rho_j^{(i)}) - x(s - \frac{hj}{m}) \right|^2 \leq m^2 C(T, \|\phi\|, l, \frac{h}{m}). \quad (4.2.39)$$

Для другої суми маємо оцінку:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^m \left| x(s - \frac{hj}{m}) - z_j(s) \right| \right)^2 \leq m \sum_{j=1}^m \mathbb{E} \left| x(s - \frac{hj}{m}) - z_j(s) \right|^2 \leq m^2 \alpha^2(T, \|\phi\|, h, \frac{h}{m}), \quad (4.2.40)$$

згідно з оцінкою (4.2.22). Тоді з (4.2.38)-(4.2.40) отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N_0(t) \leq & 2(T+1)L \int_0^t \mathbb{E}N_0(s) ds + 2(T+1)T2h^2(C(T, \|\phi\|, l, \frac{h}{m}) \\ & + \alpha^2(T, \|\phi\|, h, \frac{h}{m})). \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

З останнього, використовуючи лему Гронуолла, отримуємо оцінку:

$$\mathbb{E}N_0(t) \leq 2(T+1)T2h^2(C(T, \|\phi\|, l, \frac{h}{m}) + \alpha^2(T, \|\phi\|, h, \frac{h}{m}))e^{2(T+1)LT}, \quad (4.2.42)$$

яка і завершує доведення теореми. □

4.3 Апроксимація у нескінченновимірному випадку

У попередніх підрозділах розглядалась задача апроксимації системи, еволюція якої відбувається у скінченновимірних просторах. Однак при вивченні об'єктів із розподіленими параметрами основну роль починають відігравати

рівняння у частинних похідних. Тож важливо отримати подібні результати у нескінченновимірних просторах, що ми і зробимо у даному підрозділі.

Нехай H і K – гільбертові простори з нормами $\|\cdot\|_H$ і $\|\cdot\|_K$ відповідно. Нехай також $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ є повним імовірнісним простором, а Q – лінійний, обмежений коваріаційний оператор такий, що $Tr(Q) < \infty$. Введемо Q -ядерний K -значний вінерівський процес

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \beta_i(t) l_i, \quad t \geq 0,$$

описаний у розділі 2.

Через $C_h = C([-h, 0]; H)$ позначимо простір H -значних, неперервних функцій $\phi : [-h, 0] \rightarrow H$ із супремумною нормою

$$\|\phi\|_C = \sup_{t \in [-h, 0]} \|\phi(t)\|,$$

тут $h > 0$ – інтервал запізнення. Будемо вважати, що $L_2^0 = L_2(Q^{\frac{1}{2}}, K, H)$ є простором операторів Гільберта-Шмідта з відповідною нормою, а простори K і H та оператор Q беруть участь у конструкції стохастичного інтеграла, описаного у розділі 2. Нехай $A : H \rightarrow H$ – необмежений, замкнутий, лінійний оператор і $D(A) \subset H$ – його область визначення. Будемо вважати, що він є генератором компактної напівгрупи $S(t)$, $t > 0$ в H .

У даному підрозділі розглядаємо нескінченновимірне стохастичне рівняння із запізненням вигляду

$$du(t) = [Au(t) + f(t, u(t), u(t-h))]dt + \sigma(t, u(t), u(t-h))dW(t), \quad (4.3.1)$$

$$t \in [0, T],$$

$$u(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0].$$

Відносно відображень f і σ будемо вважати виконаними наступні умови:

1. $f : [0, T] \times H \times H \rightarrow H$, $\sigma : [0, T] \times H \times H \rightarrow L_2^0$ є неперервним за сукупністю аргументів;
2. існує стала $L > 0$, що виконано умову лінійного росту

$$\|f(t, u, v)\|^2 + \|\sigma(t, u, v)\|_{L_2^0}^2 \leq L(1 + \|u\|^2 + \|v\|^2),$$

для довільних t, u, v з області визначення;

3. умова Ліпшиця

$$\begin{aligned} & \|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)\|^2 + \|\sigma(t, u_1, v_1) - \sigma(t, u_2, v_2)\|_{L_2^0}^2 \\ & \leq L(\|u_1 - u_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2), \end{aligned}$$

для $t \in [0, T]$ та довільних $u_1, u_2, v_1, v_2 \in H$;

4. початкова невинадкова функція $\phi : [-h, 0] \rightarrow H$ має неперервні траєкторії. Розв'язок початкової задачі (4.3.1) будемо розуміти у м'якому сенсі.

Означення 4.5. Неперервний \mathcal{F}_t -адаптований випадковий процес $u : [-h, T] \times \Omega \rightarrow H$ назвемо м'яким розв'язком початкової задачі (4.3.1) на $[0, T]$ якщо:

1. $u(t) = \phi(t), t \in [-h, 0]$;
2. на $[0, T]$ $u(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$u(t) = S(0)\phi(0) + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s), u(s-h))ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(s, u(s), u(s-h))dW(s), \quad (4.3.2)$$

тут перший інтеграл розуміється як інтеграл Бохнера, а другий як стохастичний інтеграл Іто.

З роботи [98] випливає, що за виконання умов 1-4, початкова задача (4.3.1) має єдиний на $[0, T]$ м'який розв'язок, який має обмежений p -момент ($p \geq 1$), тобто

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \|u(t)\|_H^p < \infty.$$

4.3.1 Постановка задачі. Основний результат

За рівнянням (4.3.1) побудуємо наступну систему стохастичних еволюційних рівнянь без запізнення, яку ми назвемо апроксимуючою.

Зафіксуємо натуральне m та розіб'ємо відрізок $[-h, 0]$ точками $-\frac{h}{m}j, j = \overline{0, m}$ на m частин. Визначимо процеси $z_j(t) \in H$ як розв'язки наступних задач Коші

$$\begin{cases} dz_0(t) = [Az_0 + f(t, z_0(t), z_m(t))] dt + \sigma(t, z_0(t), z_m(t)) dW(t), \\ dz_j(t) = \frac{m}{h} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), & t \in [0, T], \\ z_j(0) = \phi\left(-\frac{hj}{m}\right), & j = \overline{0, m}. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

Тут $z_0(t)$ — розв'язок першого рівняння розуміється у м'якому сенсі, а решта m рівнянь у звичайному сенсі, де $\frac{dz_j(t)}{dt}$ розглядається як сильна, за нормою простору H похідна. З [37] випливає, що задача Коші (4.3.3) має єдиний на $[0, T]$ розв'язок, де процес $z_0(t)$ задовільняє (4.3.3) у м'якому сенсі, а $z_j(t)$ задовільняють наступні m рівнянь у звичайному сенсі.

Означення 4.6. Система (4.3.3) називається апроксимуючою для (4.3.1) у середньому квадратичному, якщо

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left\| u\left(t - \frac{h}{m}j\right) - z_j(t) \right\|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad j = \overline{0, m}.$$

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 4.3. *За виконання умов 1-4 система (4.3.3) є апроксимуючою у середньому квадратичному для початкової задачі (4.3.1) рівномірно по $j = \overline{0, m}$, тобто*

$$\sup_{j = \overline{0, m}} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left\| u\left(t - \frac{h}{m}j\right) - z_j(t) \right\|^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (4.3.4)$$

У подальшому нам знадобиться лема, що є аналогом лем про модуль неперервності із попередніх розділів для нескінченновимірного випадку.

Лема 4.3 (Про модуль неперервності). *За виконання умов 1-4 для розв'язку початкової задачі (4.3.1) справедлива нерівність*

$$\sup_{t_1 \in [-h, T]} \mathbb{E} \sup_{t_2 \in [t_1, t_1 + l]} \|u(t_2) - u(t_1)\|^2 \leq C(T, \|\phi\|_C, l) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow 0. \quad (4.3.5)$$

Доведення. З означення розв'язку маємо

$$\begin{aligned} \|u(t)\| \leq & 3 \|S(t)\phi(0)\|^2 + 3 \left(\int_0^t \|S(t-s)f(s, u(s), u(s-h))\| ds \right)^2 \\ & + 3 \left\| \int_0^t S(t-s)\sigma(s, u(s), u(s-h)) dW(s) \right\|^2. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Оскільки напівгрупа $S(t)$ є напівгрупою класу C_0 , то $\|S(t)\| \leq M$, при $t \in [0, T]$ [79].

Тоді, в силу умови 2, матимемо

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2 &\leq 3M \|\phi(0)\|^2 + 3TM \int_0^t L (1 + \|u(s)\|^2 + \|u(s-h)\|^2) ds \\
&\quad + 3 \sup_{s \in [0, t]} \left\| \int_0^s S(t-\tau) \sigma(\tau, u(\tau), u(\tau-h)) dW(\tau) \right\|^2 \\
&\leq 3 \left(M \|\phi(0)\|^2 + TM \int_0^t L \left(1 + \sup_{\tau \in [0, s]} \|u(\tau)\|^2 + \sup_{\tau \in [0, s]} \|u(\tau-h)\|^2 \right) ds \right. \\
&\quad \left. + \sup_{s \in [0, t]} \left\| \int_0^s S(t-\tau) \sigma(\tau, u(\tau), u(\tau-h)) dW(\tau) \right\|^2 \right),
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

при цьому для оцінки нестохастичного члена використана нерівність Коші-Буняковського.

Очевидною є наступна нерівність

$$\sup_{s \in [0, t]} \|u(s-h)\|^2 \leq \|\phi\|_C^2 + \sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\|^2. \tag{4.3.8}$$

Врахувавши (4.3.8) та Лему 2.3 із розділу 2, матимемо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\|^2 &\leq 3 \left(M \|\phi(0)\| + T^2 LM \|\phi\|_C + T^2 ML + 2TM \int_0^t L \mathbb{E} \sup_{\tau \in [0, s]} \|u(\tau)\|^2 ds \right. \\
&\quad \left. + C_1(T, \|\phi\|_C) + C_2(T, \|\phi\|_C) LM \int_0^t \mathbb{E} \sup_{\tau \in [0, s]} \|u(\tau)\|^2 d\tau \right),
\end{aligned}$$

звідси, в силу нерівності Гронуолла, отримаємо оцінку

$$\mathbb{E} \sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\|^2 \leq C_3(T, \|\phi\|_C). \tag{4.3.9}$$

Нехай $t_2 = t_1 + r$. Далі, якщо $t_1 \geq 0$ то із (4.3.2) матимемо

$$\begin{aligned}
u(t_2) - u(t_1) &= (S(t_2) - S(t_1))\phi(0) \\
&+ \int_0^{t_1} (S(t_2 - s) - S(t_1 - s))f(s, u(s), u(s - h)) ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} S(t_2 - s)f(s, u(s), u(s - h)) ds \\
&+ \int_0^{t_1} (S(t_2 - s) - S(t_1 - s))\sigma(s, u(s), u(s - h)) dW(s) \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} S(t_2 - s)\sigma(s, u(s), u(s - h)) dW(s) \\
&= (S(t_1 + r) - S(t_1))\phi(0) \\
&+ \int_0^{t_1} (S(t_1 + r - s) - S(t_1 - s))f(s, u(s), u(s - h)) ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_1+r} S(t_1 + r - s)f(s, u(s), u(s - h)) ds \\
&+ \int_0^{t_1} (S(t_1 + r - s) - S(t_1 - s))\sigma(s, u(s), u(s - h)) dW(s) \\
&+ \int_{t_1}^{t_1+r} S(t_1 + r - s)\sigma(s, u(s), u(s - h)) dW(s).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{t_2 \in [t_1, t_1+l]} \|u(t_2) - u(t_1)\|^2 = \mathbb{E} \sup_{r \in [0, l]} \|u(t_1 + r) - u(t_1)\|^2 \\
& \leq 5 \left(\sup_{r \in [0, l]} \|S(t_1 + r)\phi(0) - S(t_1)\phi(0)\|^2 \right. \\
& \quad + T \mathbb{E} \sup_{r \in [0, l]} \int_0^{t_1} \|S(t_1 + r - s) - S(t_1 - s)\|^2 \|f(s, u(s), u(s - h))\|^2 ds \\
& \quad + \mathbb{E} \sup_{r \in [0, l]} \int_{t_1}^{t_1+l} L \|S(t_1 + r - s)\|^2 \left(1 + \mathbb{E} \|u(s)\|^2 + \mathbb{E} \|u(s - h)\|^2 \right) ds \quad (4.3.10) \\
& \quad + \mathbb{E} \sup_{r \in [0, l]} \left\| \int_0^{t_1} (S(t_1 + r - s) - S(t_1 - s)) \sigma(s, u(s), u(s - h)) dW(s) \right\|^2 \\
& \quad \left. + \mathbb{E} \sup_{r \in [0, l]} \left\| \int_{t_1}^{t_1+r} S(t_1 + r - s) \sigma(s, u(s), u(s - h)) dW(s) \right\|^2 \right) \\
& = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
\end{aligned}$$

Оцінимо кожен доданок в (4.3.10). Оскільки напівгрупа $S(t)$ є напівгрупною класу C_0 , то в силу рівномірної неперервності вираз I_1 рівномірно по t_1 прямує до нуля при $r \rightarrow 0$. Далі, для оцінки I_2 маємо

$$\begin{aligned}
I_2 & \leq T \mathbb{E} \left(\sup_{\tau \in [0, l]} \int_0^{t_1} \|S(t_1 + r - s) - S(t_1 - s)\|^2 ds \sup_{s \in [0, t_1]} \|f(s, u(s), u(s - h))\|^2 \right) \\
& \leq T \int_0^T \|S(t + r) - S(t)\|^2 dt L \left(1 + 2C_3(T, \|\phi\|_h) \right), \quad (4.3.11)
\end{aligned}$$

в силу (4.3.9) та умови 2). Оскільки напівгрупа $S(t)$ компактна при $t > 0$, то в силу [79], вона є неперервною в рівномірній операторній топології, а тому вираз у правій частині (4.3.11) прямує до 0 при $r \rightarrow 0$, в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність.

Оцінимо вираз I_3 . Маємо, в силу (4.3.9)

$$I_3 \leq L(1 + 2C_3(T, \|\phi\|_h)) \int_{t_1}^{t_1+l} \|S(t_1 + r - s)\|^2 ds \leq LM^2(1 + 2C_3(T, \|\phi\|_C))l \rightarrow 0, \quad (4.3.12)$$

при $l \rightarrow 0$.

Для оцінки I_4 використаємо факторизаційну формулу [37], згідно з якою

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} (S(t_1 + r - s) - S(t_1 - s))\sigma(s, u(s), u(s - h)) dW(s) \\ &= \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha} \int_0^{t_1} \left((t_1 + r - s)^{\alpha-1} S(t_1 + r - s) - (t_1 - s)^{\alpha-1} S(t_1 - s) \right) \mathcal{Y}(s) ds. \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

де

$$\mathcal{Y}(s) = \int_0^s (s - v)^{-\alpha} S(s - v)\sigma(v, u(v), u(v - h))dW(v),$$

$\alpha \in [0, 1]$.

Виберемо для $p > 1$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. Тоді, із нерівності Гельдера для оцінок доданку I_4 отримуємо

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \mathbb{E} \left(\sup_{r \in [0, l]} \left(\int_0^{t_1} \left\| (t_1 + r - s)^{\alpha-1} S(t_1 + r - s) - (t_1 - s)^{\alpha-1} S(t_1 - s) \right\|^2 ds \right) \right) \\ &\times \int_0^{t_1} \|\mathcal{Y}(s)\|^2 ds = \sup_{r \in [0, 1]} \left(\int_0^{t_1} \|(s + r)^{\alpha-1} S(s + r) - s^{\alpha-1} S(s)\|^2 ds \right) \\ &\times \mathbb{E} \int_0^{t_1} \|\mathcal{Y}(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Але

$$\|(s + r)^{\alpha-1} S(s + r) - s^{\alpha-1} S(s)\|^{2q} \leq 2Ms^{2(\alpha-1)}.$$

Тому в силу умови на α інтеграл $\int_0^{t_1} s^{2(\alpha-1)} ds$ збіжний.

Враховуючи, що напівгрупа $S(t)$ компактна при $t > 0$, то вона неперервна в рівномірній операторній топології. Тепер перший співмножник у (4.3.14) прямує

до нуля в силу теореми Лебега про мажоровану збіжність. Покажемо, що другий співмножник обмежений. Маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\mathcal{Y}(t)\|^2 &= \mathbb{E} \left\| \int_0^t (t-s)^{-\alpha} S(t-s) \sigma(s, u(s), u(s-h)) dW(s) \right\|^2 \\ &\leq C_T \mathbb{E} \left(\int_0^t (t-s)^{-2\alpha} \|\sigma(s, u(s), u(s-h))\|_{L_2^0}^2 ds \right). \end{aligned}$$

Звідси,

$$\int_0^{t_1} \mathbb{E} \|\mathcal{Y}(t)\|^2 dt \leq (1 + 2C_3(T, \|\phi\|_C)) \int_0^T s^{-2\alpha} ds \leq C_4.$$

Оцінюємо нарешті доданок I_5 . Маємо

$$\begin{aligned} I_5 &\leq \mathbb{E} \sup_{r \in [0, l]} \left\| \int_{t_1}^{t_1+r} S(t_1+r-s) \sigma(s, u(s), u(s-h)) dW(s) \right\|^2 \\ &\leq \mathbb{E} \int_{t_1}^{t_1+l} M^2 \|\sigma(s, u(s), u(s-h))\|_{L_2^0}^2 ds \leq C_5 l \rightarrow 0, \quad l \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Якщо ж t_1 та $t_1 + l$ належать $[-h, 0]$, то в силу означення розв'язку маємо, що

$$\mathbb{E} \sup_{t_2 \in [t_1, t_1+l]} \|u(t_2) - u(t_1)\|^2 = \sup_{t_2 \in [t_1, t_1+l]} \|\phi(t_2) - \phi(t_1)\|^2 \rightarrow 0, \quad l \rightarrow 0,$$

в силу рівномірної неперервності на $[-h, 0]$ функції $\phi(t)$.

Якщо ж $t_1 \in [-h, 0]$, а $t_2 > 0$, то $\|u(t_2) - u(t_1)\| \leq \|u(t_2) - \phi(0)\| + \|u(t_1) - \phi(0)\|$.

Очевидно, що $t_1 \rightarrow 0$ і $t_2 \rightarrow 0$, якщо $l \rightarrow 0$. Тоді, врахувавши, що всі отримані вище оцінки рівномірні по t_1 , отримуємо доведення леми. \square

4.3.2 Доведення основного результату

Зауважимо, що принциповою відмінністю даної частини роботи від попередніх параграфів є доведення леми про модуль неперервності. В решті ідеї

доведення схожі з попередніми параграфами, тому ми детально не будемо його повторювати, а зупинимось лише на принципових відмінностях, які з'являються завдяки нескінченновимірності.

Зазначимо, що з [37] впливає неперервність траєкторії $u(t)$ в нормі простору H . Введемо наступний згладжений випадковий процес $u_\mu(t)$, побудований для кожного малого $\mu > 0$ наступним чином

$$u_\mu(t) = \frac{1}{\mu} \int_t^{t+\mu} u(s) ds, \quad t \in [-h, T]. \quad (4.3.15)$$

При цьому для $t \geq T$ процес $u(s)$ продовжено як сталу випадкову величину за неперервністю. Із властивостей інтеграла Бохнера впливає сильна гладкість процесу $u_\mu(t)$ і

$$\dot{u}_\mu(t) = \frac{1}{\mu} [u(t + \mu) - u(t)]. \quad (4.3.16)$$

Оцінимо різницю у середньому квадратичному між $u(t)$ і $u_\mu(t)$. Маємо

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [-h, T]} \mathbb{E} \|u(t) - u_\mu(t)\|^2 &= \frac{1}{\mu^2} \sup_{t \in [-h, T]} \mathbb{E} \left\| \int_t^{t+\mu} (u(s) - u(t)) ds \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{\mu^2} \sup_{t \in [-h, T]} \mathbb{E} \left(\int_t^{t+\mu} \|u(s) - u(t)\| ds \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{\mu} \sup_{t \in [-h, T]} \int_t^{t+\mu} \mathbb{E} \|u(s) - u(t)\|^2 ds \\ &\leq C(T, \|\phi\|_C, \mu) \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

в силу леми про модуль неперервності.

Оскільки в системі (4.3.3) всі рівняння, починаючи з другого, є лінійними рівняннями із обмеженими сталими операторами, то вони мають єдиний сильний розв'язок.

Далі система (4.3.3) розбивається на дві системи, і розв'язок $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$ подається в даній формі, де $z_j^{(1)}$ — розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{z}_1^{(1)} = u(t) - z_1^{(1)}, \\ \frac{h}{m} \dot{z}_j^{(1)} = z_{j-1}^{(1)} - z_j^{(1)}, \quad j = \overline{1, m}, \\ z_j^{(1)}(0) = u(-\frac{hj}{m}). \end{cases} \quad (4.3.18)$$

а $z_j^{(2)}$ – розв’язок системи

$$\begin{cases} \frac{h}{m} \dot{z}_1^{(2)} = -z_1^{(2)} + (z_0 - x), \\ \frac{h}{m} \dot{z}_j^{(2)} = z_{j-1}^{(2)} - z_j^{(2)}, \quad j = \overline{1, m}, \\ z_j^{(2)}(0) = 0. \end{cases} \quad (4.3.19)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left\| u\left(t - \frac{hj}{m}\right) - z_j(t) \right\|^2 &\leq 2 \left(\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left\| u\left(t - \frac{hj}{m}\right) - z_j^{(1)}(t) \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \left\| z_j^{(2)}(t) \right\|^2 \right). \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Позначимо $y_j(t) = u\left(t - \frac{hj}{m}\right)$, та введемо різниці

$$N_j(t) = \mathbb{E} \left\| y_j(t) - z_j^{(1)}(t) \right\|^2, \quad j = \overline{0, m}.$$

Далі, аналогічно підрозділам 4.1.3 та 4.2.3, для першого доданку у (4.3.19) отримується нерівність

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \left\| y_j(t) - z_j^{(1)}(t) \right\|^2} \leq \frac{2h}{\mu} C^{\frac{1}{2}}(T, \|\phi\|_C, \frac{h}{m}) + 3C^{\frac{1}{2}}(T, \|\phi\|_C, \mu). \quad (4.3.21)$$

Якщо в нерівності (4.3.21) покласти $\mu = C^{\frac{1}{4}}(T, \|\phi\|_C, \frac{h}{m})$, то матимемо

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{\mathbb{E} \left\| y_j(t) - z_j^{(1)}(t) \right\|^2} &\leq \frac{2h}{\mu} C^{\frac{1}{4}}\left(T, \|\phi\|_C, \frac{h}{m}\right) + 3C^{\frac{1}{2}}\left(T, \|\phi\|_C, C^{\frac{1}{4}}\left(T, \|\phi\|_C, \frac{h}{m}\right)\right) \\ &= \alpha\left(T, \|\phi\|_C, \frac{h}{m}\right) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Відповідні оцінки для системи (4.3.19) набирають вигляду

$$\mathbb{E} \left\| z_j^{(2)}(t) \right\|^2 = \sup_{t \in [0, T]} N_0(t). \quad (4.3.23)$$

Тому, аналогічно підрозділам 4.1.3 та 4.2.3 отримується нерівність

$$\sup_{t \in [0, T]} \sqrt{N_j(t)} \leq \alpha \left(T, \|\phi_C\|, \frac{h}{m} \right) + \sqrt{\sup_{t \in [0, T]} N_0(t)}. \quad (4.3.24)$$

Нарешті оцінимо $N_0(t)$. Маємо

$$\begin{aligned} z_0(t) - u(t) &= \int_0^t S(t-s) (f(s, z_0(s), z_m(s))) ds + \\ &+ \int_0^t S(t-s) (\sigma(s, z_0(s), z_m(s)) - \sigma(s, u(s), u(s-h))) dW(s). \end{aligned}$$

Із властивостей стохастичних інтегралів тоді отримуємо

$$\begin{aligned} N_0(t) &\leq 2T \int_0^t LM^2 (\mathbb{E} \|z_0(s) - u(s)\|^2 + \mathbb{E} \|z_m(s) - u(s-h)\|^2) ds \leq \\ &\leq 2TLM^2 \int_0^t 4L \sup_{\tau \in [0, s]} N_0(\tau) ds + 2\alpha^2 C(T, \|\phi\|_C, \frac{h}{m}). \end{aligned}$$

Звідси, з урахуванням леми Гронуолла, матимемо

$$\sup_{t \in [0, T]} N_0(t) \leq 2\alpha^2 C(T, \|\phi\|_C, \frac{h}{m}) e^{(T+1)LMT} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Остання оцінка із урахуванням (4.3.24) доводять теорему.

4.3.3 Приклад застосування

Проілюструємо отриманий результат наступним стохастичним функціонально-диференціальним рівнянням типу реакція-дифузія.

Нехай D — обмежена область в \mathbb{R}^d із межею ∂D , що задовольняє умову Ляпунова $H = L^2(D)$ і оператор A є диференціальним оператором другого порядку еліптичного типу

$$Au = \sum_{i,j=1}^d (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = \operatorname{div}(a(x)\nabla u).$$

Тут a_{ij} є неперервними за Гельдером коефіцієнтами із показниками Гельдера $\beta \in (0, 1)$, симетричними, обмеженими, що задовольняють умову рівномірної еліптичності

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\eta_i \eta_j \geq C_0|\eta|^2, \quad \eta \in \mathbb{R}^d,$$

для деякої сталої $C_0 > 0$, $|\cdot|$ – евклідова норма в \mathbb{R}^d . Нехай $e_n(x)$ – ортонормований базис в H такий, що $e_n(x) \in L^\infty(D)$, $\sup_n \|e_n\|_{L^\infty(D)} < \infty$. Введемо коваріаційний оператор $Q \in \mathcal{L}(H)$ такий, що Q є невід’ємним і $T_r(Q) < \infty$, а також $Qe_n = \lambda_n e_n$. При цьому λ_n є послідовністю невід’ємних чисел, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty.$$

Тепер визначимо H -значний Q -ядерний процес Вінера

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \beta_i(t) e_i(x), \quad t \geq 0.$$

При цьому вважаємо, що простори K і H в означенні вінерівського процесу співпадають, тобто $K = H = L^2(H)$. Позначимо $V := Q^{\frac{1}{2}}(L^2(D))$. Як випливає з [73](Лема 2.2) $V \subset L^\infty(D)$ – простору обмежених на D функцій.

Тоді можна ввести мультиплікативний оператор $\Psi : V \rightarrow H$ наступним чином. Для кожного фіксованого $\phi \in L^2(D)$ покладемо $\Psi(\phi) = \phi \cdot \psi$, для $\psi \in V$. Оскільки $\phi \in L^2(D)$ та $\psi \in L^\infty(D)$, то оператор Ψ коректно визначений, а також $\Psi \circ Q^{\frac{1}{2}} : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ визначає оператор Гільберта-Шмідта із оцінкою норми

$$\|\Psi \circ Q^{\frac{1}{2}}\|_{L^2}^2 \leq \operatorname{Tr}(Q) \sup_n \|e_n\|_\infty^2 \|\phi\|_{L^2(D)}^2.$$

Розглянемо наступне рівняння

$$\begin{cases} d(u(t, x)) = [Au + f(t, u(t), u(t-h))] dt + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \sigma(t, u(t), u(t-h)) e_i(x) d\beta_i(t), \\ u(t, x) = \phi(t, x), \quad t \in [-h, 0], \quad u(0, x) = \phi_0(x) \quad \text{в } D, \\ u(t, x) = 0, \quad x \in \partial D, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (4.3.25)$$

Тут дійснозначні функції $f : [0, T] \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^1$ визначені, неперервні за сукупністю змінних та задовольняють за другою та третьою змінними глобальну умову Ліпшиця та умову лінійного росту. Із [79] випливає, що оператор A є генератором компактної напівгрупи операторів $S(t) : H \rightarrow H$. Неважко бачити, що умови 1-4 для рівняння (4.3.25) виконані, а тому для (4.3.25) справедливе твердження теореми.

4.4 Висновки до розділу 4

У даному розділі розглянута задача апроксимації системи стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з системами звичайних стохастичних рівнянь як у скінченновимірному так і в нескінченновимірному просторах. Оскільки в обох випадках стохастична система функціонально-диференціальних рівнянь є нескінченновимірним об'єктом, то його апроксимація відбувається за рахунок збільшення розмірності таких систем. Основними результатами цього розділу є наступні.

1. Для системи стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням у скінченновимірному випадку доведено лему про модуль неперервності.
2. Побудована система звичайних стохастичних рівнянь, яка апроксимує у середньому квадратичному розв'язки вихідної системи із запізненням.
3. Доведена теорема про близькість у середньому квадратичному розв'язків вихідної системи з запізненням та апроксимізаційної системи.
4. Для стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням інтегрального типу доведена лема про модуль неперервності.
5. Для систем з інтегральним запізненням побудована апроксимізаційна система стохастичних рівнянь без запізнення.

6. Доведена теорема про близькість у середньому квадратичному розв'язків вихідної та апроксимуючої систем.
7. Для системи стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням у нескінченновимірних просторах із необмеженим головним лінійним оператором встановлено аналог леми про модуль неперервності.
8. Доведена теорема про близькість розв'язків вихідної нескінченновимірної системи стохастичних рівнянь із запізненням та розв'язків системи апроксимацій без запізнення.
9. Отримані результати застосовані до стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Висновки

У дисертаційній роботі отримано наступні результати.

У задачі дослідження асимптотичної поведінки на нескінченності ($t \rightarrow \infty$) розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь отримано такі нові результати:

1. Встановлено рівномірні середньоквадратичні оцінки при $t \geq 0$ розв'язків збуреної системи стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь.
2. За системою нелінійних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь побудована система звичайних диференціальних рівнянь та встановлено відповідність між їх розв'язками.
3. У нелінійному випадку доведено теорему про асимптотичну еквівалентність таких систем при достатньо малому кроці запізнення.
4. Для систем лінійних стохастичних рівнянь отримано інтегральне представлення розв'язку через матрицант незбуреної лінійної системи.
5. Встановлено відповідність між розв'язками стохастично збуреної лінійної системи з запізненням та незбуреної лінійної детермінованої системи.
6. Доведено асимптотичну еквівалентність стохастично збуреної лінійної системи функціонально-диференціальних рівнянь до її незбуреної детермінованої частини.

Для задачі апроксимації системи стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь системами звичайних стохастичних рівнянь як у скінченновимірному так і в нескінченновимірному просторах отримані наступні результати:

1. Для системи стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням у скінченновимірному випадку доведено лему про модуль неперервності.
2. Побудована система звичайних стохастичних рівнянь, яка апроксимує у середньому квадратичному розв'язки вихідної системи із запізненням.
3. Доведена теорема про близькість у середньому квадратичному розв'язків вихідної системи з запізненням та апроксимізаційної системи.

4. Для стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням інтегрального типу доведена лема про модуль неперервності.
5. Для систем з інтегральним запізненням побудована апроксимізаційна система стохастичних рівнянь без запізнення.
6. Доведена теорема про близькість у середньому квадратичному розв'язків вихідної та апроксимуючої систем.
7. Для системи стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням у нескінченновимірних просторах із необмеженим головним лінійним оператором встановлено аналог леми про модуль неперервності.
8. Доведена теорема про близькість розв'язків вихідної нескінченновимірної системи стохастичних рівнянь із запізненням та розв'язків системи апроксимацій без запізнення.
9. Отримані результати застосовані до стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Список використаних джерел

1. Agresti A., Sauerbrey M. Well-posedness of the stochastic thin-film equation with an interface potential. <https://arxiv.org/abs/2403.12652>. 2024. arXiv preprint arXiv:2403.12652.
2. Agresti A., Veraar M. Stability properties of stochastic maximal L^p -regularity // J. Math. Anal. Appl. 2020. Vol. 482, no. 2. P. 123553.
3. Agresti A., Veraar M. Nonlinear parabolic stochastic evolution equations in critical spaces part I. Stochastic maximal regularity and local existence // Nonlinearity. 2022. Vol. 35, no. 8. P. 4100–4210.
4. Agresti A., Veraar M. Nonlinear parabolic stochastic evolution equations in critical spaces part II: Blow-up criteria and instantaneous regularization // J. Evol. Equ. 2022. Vol. 22, no. 2. Paper No. 56, 96.
5. Agresti A., Veraar M. Reaction-diffusion equations with transport noise and critical superlinear diffusion: Local well-posedness and positivity // J. Differential Equations. 2023. Vol. 368. P. 247–300.
6. Agresti A., Veraar M. Stochastic maximal $L^p(L^q)$ -regularity for second order systems with periodic boundary conditions // Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 2024. Vol. 60, no. 1. P. 413–430.
7. Artola M. Sur les perturbations des equations d'évolution. Application a des problemes de retard // Annales Ec. Norm. Sup. 1969. Vol. 2. P. 137–253.
8. Asymptotic Behavior of Stochastic Functional Differential Evolution Equation / Clark J., Misiats O., Mogyloyva V., and Stanzhytskyi O. // Electronic Journal of Differential Equations. 2023. Vol. 2023, no. 35. P. 1–21. ISSN: 1072-6691, <https://ejde.math.txstate.edu> or <https://ejde.math.unt.edu>.

9. Bailey H. R., Reeve E. B. Mathematical models describing the distribution of I-albumin in man // *J. Lab. Clin. Med.* 1962. Vol. 60. P. 923–943.
10. Bailey H. R., Williams. Some results on the differential difference equation. $\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^N A_i x(t - T_i)$ // *J. Math. Anal. Appl.* 1966. Vol. 15. P. 569–587. MR 33,6046.
11. Baiocchi C. Teoremi di esistenza e regolarità per certe classi di equazioni differenziali astratte // *Ann. Mat. Pura. App.* (4). 1966. Vol. 72. P. 235–418.
12. Baiocchi C. Sulle equazioni astratte lineari del primo e del secondo ordine negli spazi di Hilbert // *Ann. Math. Pura. App.* (4). 1967. Vol. 76. P. 233–304.
13. Bank H. T., Kent G. Control of functional differential equations to target sets in functional space // *SIAM J. Control.* 1972. Vol. 10. P. 567–593.
14. Banks H. T., Burns I. A. An abstract framework for approximate solutions to optimal control problems governed by hereditary systems // *Proc. Int. Conf. Different. Equat.* New York : Acad. Press. 1975. P. 10–25.
15. Banks H. T., Burns I. A. Hereditary control problems: numerical methods based on averaging approximation // *SIAM J. Control Optim.* 1978. Vol. 16, no. 2. P. 169–208.
16. Bao H., Cao J. Existence and Uniqueness of Solutions to Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Infinite Delay // *Applied Mathematics and Computation.* 2009. Vol. 215, no. 15. P. 1732–1743.
17. Barbu V. A semigroup approach to an infinite delay equation in Hilbert space // *Abstract Cauchy Problems and Functional Differential Equations.* 1981. Vol. 48, no. 3. P. 1–25.
18. Bellman R., Cooke K. *Differential difference equations.* Academic Press, 1963. 235 p.
19. Bigun Y. I. Existence of a Solution and Averaging of Nonlinear Multifrequency Problems With Delay // *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal.* 2007. Vol. 59, no. 4. P. 435–446.
20. Boffi V., Scozzafara R. Sull'equazione funzionale lineare $f' = -A(x)f(x - 1)$ // *Rend. Math. Appl.* 1966. Vol. 25. P. 402–410.

21. Boffi V., Scozzafara R. A first-order linear differential difference equation with N delays // *IBM J. Res. Dev.* 1968. Vol. 12. P. 577–589.
22. Boichyc O., Jyravlyv V. P. Dichotomy on semi-axis and bounded on the entire axis solutions of linear systems with delay // *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2015. Vol. 18, no. 4. P. 431–445. Translation by Nonlinear oscillations.
23. Boufoussi B., Hajji S., Lakhel E. Time-dependent neutral stochastic functional differential equations driven by a fractional Brownian motions // *Commun. Stoch. Anal.* 2016. Vol. 10, no. 1. P. 1–12.
24. Boufoussi B., Hajji S., Lakhel E.-H. Exponential Stability of Impulsive Neutral Stochastic Functional Differential Equation Driven by Fractional Brownian Motion and Poisson Point Processes // *Afrika Mathematica*. 2018. Vol. 29, no. 1–2. P. 233–247.
25. Brayton R. Nonlinear oscillations in a distributed network // *Quart. Appl. Math.* 1976. Vol. 24. P. 289–301.
26. Brewer D. W. The asymptotic stability of a nonlinear functional differential equation of infinite delay. n.d. Houston.
27. Britton N. F. *Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology*. New York : Academic Press, 1986. P. x+320.
28. Chen H., Yuan C. On the Asymptotic Behavior for Neutral Stochastic Differential Delay Equations // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2019. Vol. 64, no. 4. P. 1671–1678.
29. Chen H. Y. The existence of solutions to functional integrodifferential equations // *Chinese J. Math.* 1990.
30. Cherevko I. M., Pidubna L. A. Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials // *Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations*. 1999. Vol. 28, no. 1. P. 15–21.
31. Chow P. *Stochastic Partial Differential Equations*. Springer Series in Statistics. Boca Raton, London, New York : Chapman and Hall/CRC, 2007. P. ix+281.
32. Cooke K., Krumme D. Differential difference equation and nonlinear initial-boundary-value problem for linear hyperbolic partial difference equations // *J. Math. Anal. Appl.* 1968. Vol. 24. P. 372–387.

33. Da Prato G., Iannelli M. Existence and regularity for a class of integrodifferential equations of parabolic type // *J. Math. Anal. Appl.* 1985. no. 112. P. 36–55.
34. Dafermos C. On the existence and asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity // *Arch. Rat. Mech. Ana.* 1968. Vol. 29. P. 241–271.
35. Dafermos C. An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity // *J. Differential Equations.* 1970. Vol. 7. P. 554–569.
36. Dawson D. A. Stochastic evolution equations // *Mathematical Biosciences.* 1975. no. 3–4. P. 21–34.
37. De Prato G., Zabczyk J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions.* Cambridge : Cambridge University Press, 1992. 454 p.
38. Ergen W. K. Kinetics of the circulating fuel nuclear reactor // *J. Appl. Phys.* 1954. Vol. 25. P. 702–711.
39. Es-Sarhir A., Scheutzow M., van Gaans O. Invariant measures for stochastic functional differential equations with superlinear drift term // *Differential Integral Equations.* 2010. Vol. 23, no. 1-2. P. 189–200.
40. Fife P. C. *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems.* 1979. Vol. 28 of *Lecture Notes in Biomath.* P. x+250.
41. Gurtin M., Pipkin A. A general theory of heat conduction with finite wave speeds // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1968. Vol. 31, no. 2. P. 113–126.
42. Halanay A. *Differential equations, Stability, Oscillations, Time Lags.* Academic Press, 1966. 250 p.
43. Hale J. K. *Theory of Functional Differential Equations.* Springer-Verlag New York, Inc., 1977. Vol. 3 of *Applied Mathematical Sciences.* P. x+365.
44. Henriquez H. R. Regularity of solutions of abstract retarded functional differential equations with unbounded delay. 1995. Preprint.
45. Hetzer G. The structure of the principal component for semilinear diffusion equations from energy balance climate models // *Houston J. Math.* 1990. Vol. 16. P. 203–216.
46. Hetzer G. A functional reaction-diffusion equation from climate modelling: S-shapedness of the principle branch of fixed points of the time-I-map // *Differential and Integral Equations.* 1995. Vol. 8. P. 1047–1059.

47. Hetzer G. S-shapedness for energy balance climate models of sellers-type // *The Mathematics of Models for Climatology and Environment*. Teuerife, Spain : NATO Adv. Studies Inst., 1995. to appear.
48. Hetzer G., Jarausch H., Mackens W. A multiparameter sensitivity analysis of a 2D diffusive climate model // *Impact. Comput. Sci. End.* 1989. Vol. 1. P. 327–393.
49. Hetzer G., Schmidt P. G. A global attractor and stationary solutions for a reaction diffusion system arising from climate modelling // *Nonlinear Anal.* 1990. Vol. 14. P. 915–926.
50. Hetzer G., Schmidt P. G. Global existence and asymptotic behavior for a quasi linear reaction-diffusion system from climate modelling // *J. Math. Anal. Appl.* 1991. Vol. 160. P. 250–262.
51. Hoppenstadt F., Waltman P. A problem in the theory of epidemics. I and II // *Math. Biosciences.* 1970. Vol. 9. P. 71–91.
52. Іліка С. А., Черевко І. М. Апроксимація нелінійних диференціально-функціональних рівнянь // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* Vol. 55, no. 1. P. 39–48.
53. Jankovic S., Randjelovic J. On the p -th Moment Exponential Stability Criteria of Neutral Stochastic Functional Differential Equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2007. Vol. 8, no. 5. P. 234–247.
54. Jianhong W. *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations.* Springer-Verlag New York, Inc., 1996. Vol. 119 of Applied Mathematical Sciences. P. x+431.
55. Jones D. G., Sleeman B. D. *Differential Equations and Mathematical Biology.* London : George Allen and Unwin, 1983. P. x+350.
56. Kapustyan O., Misiats O., Stanzhytskyi O. Strong solutions and asymptotic behavior of bidomain equations with random noise // *Stochastics and Dynamics.* 2022. Vol. 22, no. 6. P. 115–131.
57. Katalin K., Kuchinka A. I., Slyvka-Tylyshchak A. I. Modelling a solution of a homogeneous parabolic equation with random initial condition from $L^p(\Omega)$ // *Przegld Elektrotechniczny.* 2023. P. 77–82.

58. Keener J. J., Sneyd J. *Mathematical Physiology* / ed. by Abramowitz M., Stegun I. A. *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, 1998.
59. Keller E., Segel L. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability // *Journal of Theoretical Biology*. 1970. Vol. 26.
60. Kolmanovskii V., Myshkis A. *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 1992. P. xii+232.
61. Kolmanovskii V., Nosov V. *Stability and Periodic Regimes of Regulated Systems with Aftereffect*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1990. Vol. 113 of *Translations of Mathematical Monographs, Applied Mathematical Sciences*. P. x+448, ISBN: <http://isbndb.com/search-all.html?kw=0-387-94501-60-387-94501-6>.
62. Kolmanovskii V., Shaikhet L. *Control of Systems with Aftereffect*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1992. P. x+340.
63. Levin J. J., Nohel J. On a nonlinear delay equation // *J. Math. Anal. Appl.* 1964. Vol. 8. P. 31–44.
64. Levin S. A. Spatial patterning in the structure of ecological communities // *Lect. on Math. in the Life Sciences*. 1976. Vol. 8. P. 1–36.
65. Levin S. A. Population models and community structure in heterogeneous environments // *Studies in Mathematical Biology, II: Population and Communities*. 1978. P. 439–476.
66. Levinson N. The asymptotic behavior of systems of linear differential equations // *Amer. J. Math.* 1946. Vol. 68. P. 1–6.
67. Liang J., Xiao T. J. Solutions to abstract functional differential equations with infinite delay // *Acta Math. Sci.* 1991. no. 34. P. 631–644.
68. Lions J. L. *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non linearies*. Paris : Dunod Cauthier-Villar, 1969. 554 pp.
69. Liu K., Taniguchi T., Truman A. Existence, Uniqueness and Asymptotic Behavior of Mild Solutions to Stochastic Functional Differential Equations in Hilbert Spaces // *Journal of Differential Equations*. 2002. Vol. 35, no. 3. P. 1113–1128.
70. Liu W., Rockner M. *Stochastic Partial Differential Equations: An Introduction*. Switzerland : Springer International Publishing, 2015. 266 p.

71. Existencia e estabilidade de oscilacoes forçadas de equacoes diferenciais funcionais : Rep. / Dep. MAT. Inst. Cienc. Mat. Sao Carlos, Brasil ; executor: Lopes O. : 1975. 25-35 p.
72. Lopes O. Stability and forced oscillations in nonlinear distributed networks. 1975. Preprint, 96 p.
73. Manthey R., Zausinger T. Stochastic evolution equations in L_p^{2v} // Stochastics and Stochastic Reports. 1999. Vol. 66. P. 37–85.
74. Minorsky N. Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions // J. Appl. Mech. 1942. Vol. 9. P. 67–71.
75. Minorsky N. Nonlinear oscillations. Princeton : D. Van Nostrand Company, Inc., 1962. 210 p.
76. Mishura Y., Ralchenko K., Kushnirenko S. Driven by Brownian motion Cox–Ingersoll–Ross and squared Bessel processes: Interaction and phase transition // Physics of Fluids. 2025. January. Vol. 37, no. 1.
77. Murray J. D. Mathematical Biology. Springer-Verlag New York, 1989. P. x+365.
78. Neutral Stochastic Differential Delay Equations with Markovian Switching / Kolmanovskii V., Koroleva N., Maizenberg T., et al. // Stochastic Analysis and Applications. 2003. Vol. 21, no. 4. P. 819–847.
79. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York : Springer-Verlag, 1983. 279 p.
80. Petryna G. Conditions for asymptotic equivalence of Functional Stochastic Differential Equations // Міжнародна наукова конференція «Прикладна математика та інформаційні технології», присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій. Чернівці, Україна. 2022. 22–24 вересня 2022, С. 286–287.
81. Petryna G. Investigations into the Asymptotic Equivalence between Stochastic Functional Differential Equations and Ordinary Differential Equations // Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики. Чернівці, Україна. 2023. 28–30 вересня 2023, С. 110–111.

82. Petryna G. On the asymptotic equivalence of ordinary and functional stochastic differential equations // International Conference of Young Mathematicians, The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Kyiv, Ukraine. 2023. June 1–3, 2023, <https://www.imath.kiev.ua/young/youngconf2023/Abstracts2023/DEMF/Petryna.pdf>.
83. Petryna G., Denysenko N. Asymptotic behavior of functional stochastic differential equations // The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022. Chisinau, Republic of Moldova. 2022. August 25–27, 2022, P. 67–68.
84. Petryna G., Murzabaeva A., Khaletska Z. Approximation of Stochastic Systems with Integral-Type Delay by Stochastic Systems without Delay // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2024. Tbilisi, Georgia. 2024. December 21–23, 2024, P. 227–232.
85. Petryna G., Stanzhytskyi A. Approximation methods for stochastic systems with delay // V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації». Запоріжжя, Україна. 2024. 29–31 травня, 2024, С. 49–51.
86. Pituk M. The Hartman-Wintner Theorem for Functional Differential Equations // Journal of Differential Equations. 1999. Vol. 155. P. 1–16.
87. Prevot C., Rockner M. A Concise Course on Stochastic Partial Differential Equations. Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2007. P. xi+115.
88. Radchenko V. The Burgers equation driven by a stochastic measure // Modern Stoch. Theory Appl. 2023. Vol. 10, no. 3. P. 229–246.
89. Rockner M., Zhu R., Zhu X. Existence and uniqueness of solutions to stochastic functional differential equations in infinite dimensions // Nonlin. Anal. 2012. Vol. 125, no. 4. P. 358–397.
90. Ruan S. G., Wu J. Reaction-diffusion equations with infinite delay // Canad. Appl. Math. Quart. 1994. Vol. 2, no. 2. P. 485–550.
91. Ruess W. Existence of Solutions to Partial Functional Differential Equations with Delay // Lecture Notes Pure Appl. Math. 1996. Vol. 178, no. 2. P. 259–288.
92. Scheutzow M., Butkovsky O. Invariant measures for stochastic functional differential equations // Electron. J. Probab. 2017. no. 98. P. 1–23.

93. Slater M., Wilf H. S. A class of linear differential difference equations // *Pac. J. Math.* 1960. Vol. 10. P. 1419–1427.
94. Sleeman B. D. Analysis of diffusion equations in biology // *Bull. IMA.* 1981. Vol. 17. P. 7–13.
95. Slemrod M. A hereditary partial differential equations with application in the theory of simple fluids. 1970. Preprint, 135 p.
96. Smoller J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* New York : Springer-Verlag, 1983. P. x+340.
97. Stanzhytsky A. O. On weak and strong solutions of paired stochastic functional differential equations in infinite-dimensional spaces // *Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications.* 2021. Vol. 29. P. 48–75.
98. Stanzhytsky A. O., Stanzhytskyi O. M. Invariant measure for neutral stochastic functional differential equations with non-Lipschitz coefficients // *Evolution Equations and Control Theory.* 2022. Vol. 11, no. 6. P. 1929–1953.
99. Stanzhytskyi A. N., Misiats O., Yip N. Existence and Uniqueness of Invariant Measures for Stochastic Reaction-Diffusion Equations in Unbounded Domains // *Journal of Theoretical Probability.* 2016. Vol. 29, no. 3. P. 996–1026.
100. Stanzhytskyi A. N., Misiats O., Yip N. Asymptotic Analysis and Homogenization of Invariant Measures // *Stochastics and Dynamics.* 2018. Vol. 18, no. 6. P. 1–2.
101. Stanzhytskyi O., Petryna G., Hrysenko M. On the Asymptotic Equivalence of Ordinary and Functional Stochastic Differential Equations // *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA).* 2023. Vol. 31, no. 1. P. 125–142.
102. Steele J. R. Spatial heterogeneity and population stability // *Nature (London).* 1974. Vol. 248, no. 2. P. 83–85.
103. Thin film equations with nonlinear deterministic and stochastic perturbations / Kapustyan O., Martynyuk O., Misiats O., and Stanzhytskyi O. // *Nonlinear Anal. TMA.* 2025. Vol. 250. P. 113646.
104. Tsar'kov E. F. *Random Perturbations of Functional Differential Equations.* Riga : Zinatne, 1989. 421 p.

105. Valeev K. G., Kulesko N. A. Family of solutions with a finite number of parameters of a system of differential equations with deviating argument // *Ukrainian Mathematical Journal*. 1968. Vol. 20, no. 6. P. 739–749. <https://doi.org/10.1007/BF01085232>.
106. von Renesse M.-K., Scheutzow M. Existence and uniqueness of solutions of stochastic functional differential equations // *Random Operators and Stochastic Equations*. 2010. Vol. 18, no. 3. P. 267–284.
107. Wei F., Cai Y. Existence, Uniqueness and Stability of the Solution to Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Infinite Delay under non-Lipschitz Conditions // *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*. 2013. Vol. 2013. P. 1–12.
108. Wright E. M. Linear differential difference equations // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1948. Vol. 44. P. 179–185.
109. Wright E. M. A nonlinear differential difference equation // *J. Reine Angew. Math.* 1955. Vol. 194. P. 66–87.
110. Wright E. M. A functional equation in the heuristic theory of primes // *The Mathematical Gazette*. 1961. Vol. 45. P. 15–16.
111. Xu Y., Hu S. The Existence and Uniqueness of the Solution for Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Infinite Delay in Abstract Space // *Acta Applicandae Mathematicae*. 2010. Vol. 110, no. 2. P. 627–638.
112. Yang X., Zhu Q. Existence, Uniqueness and Stability of Stochastic Neutral Functional Differential Equations of Sobolev-Type // *Journal of Mathematical Physics*. 2015. Vol. 56, no. 12. P. 1–16.
113. Yong X., Bin P. Mild Solutions of Local non-Lipschitz Stochastic Evolution Equations with Jumps // *Applied Mathematics Letters*. 2015. Vol. 52.
114. Yorke J. A. Noncontinuable solutions of differential delay equations // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1970. Vol. 21. P. 189–202.
115. Клевчук І. І., Пернай С. А., Черевко І. М. Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь // *Доповіді НАН України*. 2012. Vol. 7. P. 28–34.

116. Кренивч А. П. Асимптотична еквівалентність розв'язків нелінійних стохастичних систем Іто // Нелінійні коливання. Інститут математики НАН України. 2006. Vol. 9, no. 2. P. 213–220.
117. Мартинюк Д. І., Самойленко А. М. Про періодичні розв'язки нелінійних систем із запізненням // Мат.фізика. 1967. no. 3. P. 128–145.
118. Матвій О. В., Пернай С. А., Черевко І. М. Про стійкість лінійних систем із запізненням // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. 2008. no. 421. P. 66–70. Математика.
119. Матвій О. В., Черевко І. М. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. 2004. Vol. 7, no. 2. P. 208–216.
120. Матвій О. В., Черевко І. М. Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. 2007. Vol. 10, no. 3. P. 329–335.
121. Митропольский Ю., Фодчук В. Асимптотичні методи нелінійної механіки стосовно нелінійних диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом // Український математичний журнал. 1966. Vol. 18, no. 3. P. 65–84.
122. Митропольський Ю. О., Мартинюк Д. І. Періодичні та квазіперіодичні коливання систем із запізненням. Київ : Вища школа, 1979. 247 р.
123. Піддубна Л. А., Черевко І. М. Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. 1999. Vol. 2, no. 1. P. 42–50.
124. Петрина Г., Кравець В. Аналіз та апроксимація стохастичних диференціальних рівнянь з запізненням // V Міжнародна конференція, присвячена 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана. Чернівці, Україна. 2024. 23–27 вересня, 2024, С. 81.
125. Петрина Г. О. Про асимптотичну відповідність розв'язків звичайних та стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь // XII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк, Україна. 2023. 2–4 червня 2023, С. 32.
126. Петрина Г. О., Станжицький А. О. Апроксимація систем стохастичних рівнянь із запізненням стохастичною системою без запізнення // Буковинський математичний журнал. 2024. Vol. 12, no. 1. P. 120–136.

127. Петрина Г. О., Станжицький О. М., Мартинюк О. В. Про апроксимацію стохастичних рівнянь із запізненням у нескінченновимірних просторах // Буковинський математичний журнал. 2024. Vol. 12, no. 2. P. 168–181.
128. Петрина Г. О., Халецька З. П. ПРО НАБЛИЖЕННЯ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ З ЗАПІЗНЕННЯМ // XIII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк – Світязь, Україна. 2024. 31 травня – 2 червня, 2024, С. 60–61.
129. Самойленко А. М., Мустафаев Х. Про принцип усереднення для одного класу систем диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу // Асимптотичні методи та їх застосування у задачах математичної фізики. 1990. no. 3. P. 104–107.
130. Самойленко А. М., Станжицький О. М., Новак І. Г. Про асимптотичну відповідність між розв'язками стохастичних та звичайних рівнянь // Укр. мат. журн. 2011. Vol. 63, no. 6. P. 1103–1127.
131. Самойленко А. М., Трофимчук О. П., Банцур Н. І. Періодичні та майже періодичні розв'язки систем диференціальних рівнянь з максимумами // Доп. НАН України. 1998. no. 1. P. 53–57.
132. Сергеева Л. І., Бігун Я. Й. Про глобальні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. 2011. Vol. 14, no. 1. P. 100–110.
133. Слюсарчук В. Ю. Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. Рівне : Видавництво УДУВГП, 2003. 288 р.
134. Станжицький О. М., Петрина Г. О., Денисенко Н. Л. Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних функціонально диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. 2023. Vol. 26, no. 1. P. 155–165. Переклад англійською: *Asymptotic Behavior of the Solutions of Stochastic Functional Differential Equations*, *Journal of Mathematical Sciences* 278, 1102–1112 (2024), DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-024-06980-x>.

Додаток

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Станжицький О. М., Петрина Г. О., Денисенко Н. Л. Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь. *Нелінійні коливання*. 2023 Випуск 26 (1), С. 155–165. Переклад англійською: Stanzhytskyi, O.M., Petryna, G.O., Denysenko, N.L. Asymptotic Behavior of the Solutions of Stochastic Functional-Differential Equations. *Journal of Mathematical Sciences* 278, 1102–1112 (2024). DOI: 10.1007/s10958-024-06980-x
2. Stanzhytskyi O., Petryna G., Hrysenko M. On the Asymptotic Equivalence of Ordinary and Functional Stochastic Differential Equations. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA)*. 2023. Vol. 31 (1). P. 125–142. DOI: 10.15421/142307
3. Петрина Г. О., Станжицький А. О. Апроксимація систем стохастичних рівнянь із запізненням стохастичною системою без запізнення. *Буковинський математичний журнал*. 2024 Випуск 12 (1), С. 120–136. DOI: 10.31861/bmj2024.01.11
4. Петрина Г. О., Станжицький О. М., Мартинюк О. В. Про апроксимацію стохастичних рівнянь із запізненням у нескінченновимірних просторах. *Буковинський математичний журнал*. 2024 Випуск 12 (2), С. 168–181. DOI: 10.31861/bmj2024.02.16

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Petryna G., Denysenko N. Asymptotic behavior of functional stochastic differential equations // The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022. Chisinau, Republic of Moldova. August 25 – 27, 2022. P. 67–68.
2. Petryna G., Stanzhytskyi A. Approximation methods for stochastic systems with delay // V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток

- сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації». Запоріжжя, Україна. 29 – 31 травня, 2024. С. 49–51.
3. Петрина Г., Кравець В. Аналіз та апроксимація стохастичних диференціальних рівнянь з запізненням // V Міжнародна конференція, присвячена 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана. Чернівці, Україна. 23 – 27 вересня, 2024. С. 81.
 4. Petryna G., Murzabaeva A., Khaletska Z. Approximation of Stochastic Systems with Integral-Type Delay by Stochastic Systems without Delay // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2024. Tbilisi, Georgia. December 21 – 23, 2024. P. 227–232.
 5. Petryna G. Investigations into the Asymptotic Equivalence between Stochastic Functional Differential Equations and Ordinary Differential Equations // Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики. Чернівці, Україна. 28 – 30 вересня 2023. С. 110–111.
 6. Петрина Г. О. Про асимптотичну відповідність розв'язків звичайних та стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь // XII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк, Україна. 2 – 4 червня 2023. С. 32.
 7. Petryna G. Conditions for asymptotic equivalence of Functional Stochastic Differential Equations // Міжнародна наукова конференція «Прикладна математика та інформаційні технології», присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій. Чернівці, Україна. 22 – 24 вересня 2022. С. 286–287.
 8. Petryna G. On the asymptotic equivalence of ordinary and functional stochastic differential equations // International Conference of Young Mathematicians, The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Kyiv, Ukraine. June 1 – 3, 2023. https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2023/Abstracts_2023/DEMF/Petryna.pdf
 9. Петрина Г.О., Халецька З. П. Про наближення стохастичних систем з запізненням // XIII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Луцьк – Світязь, Україна. 31 травня – 2 червня, 2024. С. 60–61.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції

1. Міжнародна наукова конференція «Прикладна математика та інформаційні технології», присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, 22–24 вересня 2022, Чернівці, Україна.
2. III Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації», 30 вересня 2022, Запоріжжя, Україна.
3. XII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 2–4 червня 2023, Луцьк – Світязь, Україна.
4. Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023, Чернівці, Україна.
5. The 29th Conference on applied and industrial mathematics, CAIM 2022, August 25–27, 2022, Chisinau, Republic of Moldova.
6. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2024, December 21–23, 2024, Tbilisi, Georgia.
7. XIII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», 31 травня – 2 червня 2024, Луцьк – Світязь, Україна.
8. V Міжнародна науково-практична інтернет-конференція «Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації», 29–31 травня 2024, Запоріжжя, Україна.
9. International Conference of Young Mathematicians June 1–3, 2023, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (online), Kyiv, Ukraine.
10. Науковий семінар з диференціальних рівнянь на базі кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь (спільно з кафедрою загальної математики), 12 березня 2025, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.