УДК 550.3 (519.21)

З. Вижва, доц.

СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СЕЙСМІЧНОГО ШУМУ У ДВОВИМІРНІЙ ОБЛАСТІ ЗМІННИХ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕОЛОГІЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром геол. наук, доц. О.Є. Кошляковим)

Розглянуто задачу статистичного моделювання випадкових процесів та полів у двовимірній області змінних для впровадження у сейсмологічні дослідження для визначення частотних характеристик геологічного середовища. Побудовано моделі та сформульовано алгоритми чисельного моделювання реалізацій випадкових процесів та полів на основі модифікованих інтерполяційних розкладів Котельникова-Шеннона для генерування адекватних реалізацій шуму сейсмограм у випадках однієї та двох змінних.

The problem of random processes and fields in 2D space statistical simulation has been considered for the introducing into seismic research into frequency characteristics of geology environment. Statistical models of random processes and fields and numerical simulation algorithms have been developed on the basis of modified Kotelnikov-Shennon interpolation sums for generating of adequate realizations 1-D and 2-D seismic noise.

При вивченні явищ і показників, які залежать від просторово-часових координат, часто буває важко, а іноді й зовсім неможливо визначити закономірності їх змінюваності на основі фізичних процесів, які обумовлюють ці явища. Нескладні фізичні методи дають можливість побудувати відносно просту модель загального тренда. При деталізації опису даних спостережень спостерігається різке збільшення числа параметрів. Такі складні детерміновані моделі не дають інформації про характер статистичної залежності всередині масиву даних досліджень, а також про їх просторово-часовий розподіл. Ця інформація складається із закономірностей самого явища та впливу різних зовнішніх чинників на показники вимірювань, які отримано в результаті спостережень. Альтернативний підхід – статистичний опис просторово-часового розподілу даних, який несе в собі інформацію як про сам процес дослідження, так і про параметри зовнішніх впливів [1].

У статті розглянуто задачу вдосконалення алгоритму [8] статистичного моделювання реалізацій випадкових процесів та полів на площині на основі модифікованих інтерполяційних розкладів Котельникова-Шеннона для впровадження в сейсмологічні дослідження з потребами визначення частотних характеристик геологічного середовища під будівельними майданчиками. Побудовано моделі та на основі оцінок похибок середньоквадратичного наближення випадкових процесів і полів, сформульовано та удосконалено алгоритми для чисельного моделювання реалізацій таких процесів та полів, адекватних реалізаціям шуму сейсмограм у випадках однієї та двох змінних.

Реалізації статистичного моделювання випадкових процесів важливо використовувати на практиці для виділення сейсмічного шуму від зовнішнього впливу і для того, щоб отримати відповідні оцінки частотних характеристик геологічного середовища області спостереження. Вказані оцінки необхідно враховувати при будівництві об'єктів різного призначення з метою забезпечення надійності споруд.

Для статистичного моделювання спостережених шумів сейсмограм використовувався метод, розроблений на основі модифікованих інтерполяційних розкладів Котельникова-Шеннона для випадкових процесів та випадкових полів у двовимірній області спостережень з обмеженим спектром на регулярній сітці спостережень [2, 3].

Нехай $\xi(t)$ ($-\infty< t <+\infty$) – стаціонарний випадковий процес з обмеженим спектром, який задано на рівномірній решітці спостережень. Змінна t може бути інтерпретована, як час спостереження випадкового процесу. Нехай відомі такі його статистичні характеристики, як математичне сподівання (припустимо, що $E\xi(t)=0$) та дисперсія − B(0). Побудовано [2] статистичну модель $\xi_N(t)$ ($0< t <T$, T – довжина інтервала спостереження випадкового процесу) для такого випадкового процесу $\xi(t)$ вигляду:

$$\xi_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \varsigma_k \frac{\sin\alpha(t-\frac{k\pi}{\alpha})}{\alpha(t-\frac{k\pi}{\alpha})}, \qquad (1)$$

де α – параметр, який визначається за частотою Найквіста; $N\in\mathcal{N}$ − деяке натуральне число, з яким пов'язана кількість доданків ряду в моделі; $\{\varsigma_k\}$, $k=\overline{-N,N}$; − послідовність гауссівських випадкових величин, які мають такі статистичні характеристики:

$$\mathrm{M}\varsigma_k = 0\,;\; D\varsigma_k = E\varsigma\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2 = D\varsigma_k = B(\tfrac{k\pi}{\alpha};\tfrac{k\pi}{\alpha}),\quad k=\overline{-N,N} \qquad (2)$$

де $\left\{\varsigma\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)\right\}, k=\overline{-N,N}$ − послідовність відліків (значень) випадкового процесу $\xi(t)$, B(x, x), $x\in \mathbf{R}$ – коваріаційна матриця реалізації випадкового процесу $\xi(t)$.

Для удосконалення побудованого в [2] алгоритму використо результати [4] та знайдено покращену оцінку середньоквадратичного відхилення моделі $\xi_N(t)$ від випадкового процесу $\xi(t)$ вигляду:

$$E\left|\xi(t)-\xi_N(t)\right|^2 \le \frac{4}{\pi^2(2N-1)}B(0). \quad (3)$$

Тоді в алгоритмі для заданої точності моделювання ε ($\varepsilon > 0$) можна визначати значення натурального числа *N,* з яким пов'язана кількість доданків ряду в моделі $\xi_N(t)$, за наступною нерівністю:

$$\frac{4}{\pi^2(2N-1)}B(0) \le \varepsilon. \quad (4)$$

Якщо розглядати випадкове поле $\xi(t,s)$ ($-\infty \le t, s \le +\infty$) на двовимірній області спостережень із властивістю стаціонарності та із обмеженим спектром по кожній змінній, то на основі модифікованого інтерполяційного розкладу Котельникова-Шеннона можна побудувати модель такого поля [2]. Змінна s може бути інтерпретована, як відстань пункту спостереження модельованого шуму сейсмограми від початкового пункту спостереження.

Аналогічна модель $\xi_{N,M}(t,s)$ ($0\le t \le T$, $0\le s \le S$; T, S – довжини інтервалів спостереження по часу і по відстані відповідно) для гауссівського випадкового поля $\xi(t,s)$ на двовимірній області спостережень із зазначеними властивостями має вигляд:

$$\xi_{N,M}(t,s) = \sum_{k=-N}^{N}\sum_{m=-M}^{M} \varsigma_{k,m}\frac{\sin\alpha(t-\frac{k\pi}{\alpha})}{\alpha(t-\frac{k\pi}{\alpha})}\frac{\sin\beta(s-\frac{m\pi}{\beta})}{\beta(s-\frac{m\pi}{\beta})}, \quad (5)$$

де α, β – параметри, які визначаються за частотою Найквіста по кожній змінній; *N,M* − деякі натуральні числа, з якими пов'язані кількості доданків у рядах моделі; а $\{\varsigma_{k,m}\}$, $k=\overline{-N,N}; m=\overline{-M,M}$ − послідовності гауссівських випадкових величин, які мають такі статистичні характеристики:

$$E\varsigma_{k,m}=0,\quad k,m=\overline{-N,N};\ D\varsigma_{k,m}=B(\tfrac{k\pi}{\alpha},\tfrac{m\pi}{\beta};\tfrac{k\pi}{\alpha},\tfrac{m\pi}{\beta}),$$
$$k=\overline{-N,N};\ m=\overline{-M,M}, \quad (6)$$

де $B(u,v)$, $u,v \in \mathbf{R}^2$ − кореляційна матриця реалізації випадкового поля $\xi(t,s)$.

За результатами [4] знайдено покращену оцінку середньоквадратичного відхилення моделі $\xi_{N,M}(t,s)$ від таких випадкових полів $\xi(t,s)$ у вигляді нерівності.

$$E\left|\xi(t,s)-\xi_N(t,s)\right|^2 \le \frac{16}{\pi^4(2N-1)(2M-1)}B(0). \quad (7)$$

Тоді, на основі оцінки (7), в наступному алгоритмі для заданої точності моделювання ε ($\varepsilon > 0$) можна визначати значення натуральних чисел *N* та *M,* з якими пов'язана кількість доданків у рядах моделі $\xi_{N,M}(t,s)$.

Побудовано на основі моделі (5) та оцінки (7) алгоритм для чисельного моделювання реалізацій гауссівських випадкових полів $\xi(t,s)$ на двовимірній області спостережень із властивістю стаціонарності та з обмеженим спектром по кожній змінній, який має вигляд:

Алгоритм 1.

1. Підбираємо, відповідно до заданої точності $\varepsilon > 0$, натуральні числа *N* та *M* , які задовольняють умові:

$$\frac{16}{\pi^4(2N-1)\ (2M-1)}B(0) < \varepsilon. \quad (8)$$

де $B(0)= D\xi(t,s)$ – дисперсія випадкового поля $\xi(t,s)$.

2. Моделюємо послідовності гауссівських випадкових величин $\{\varsigma_{k,m}\}$, $k=\overline{-N,N}; m=\overline{-M,M}$ із статистичними характеристиками (6).

3. Обчислюємо значення виразу (5) в точці (t,s) $t\in[0, T]$, $s\in[0, S]$ (T – довжина часового інтервалу спостереження, S − довжина просторового інтервалу спостереження), підставляючи в нього числа *N* та M і згенеровані послідовності $\{\varsigma_{k,m}\}$, $k=\overline{-N,N}; m=\overline{-M,M}$, що і буде значенням згенерованої реалізації заданого випадкового поля $\xi(t,s)$ у цій точці.

4. Перевіряється згенерована за п. 3 реалізація випадкового поля $\xi(t,s)$ на заданій регулярній сітці точок із двовимірної області [0, T] × [0, S] на адекватність даним цього випадкового поля шляхом порівняння статистичних характеристик.

Потрібно зауважити, що модель (5) та алгоритм 1 мають одне суттєве обмеження, яке полягає в тому, що відліки реалізацій даних мають бути задані на рівномірній решітці. Якщо для часової змінної t ця умова, в основному, виконується, то для просторової змінної s задовольнити таке обмеження можна у дуже рідких випадках. Тому пропонується у просторі змінних (t,s) $t\in[0, T]$, $s\in[0, S]$ моделювати реалізацій таких випадкових полів $\xi(t,s)$ іншим способом, використовуючи другий підхід.

На основі розкладу [7] Котельникова-Шеннона для однорідних за часом t та ізотропних випадкових полів $\xi(t,x)$ ($0\le t \le T$, $0\le x \le X$) по *x* на циліндрі $R\times S_2$ одиничного радіуса з обмеженим спектром, зосередженим на $[-\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}]$, побудовано модель [3], яку узагальнено на циліндр $R\times S(X)_2$ довільного радіуса X/2π. Така модель $\tilde{\xi}_{N,M}(t,x)$ має вигляд ряду:

$$\tilde{\xi}_{N,M}(t,x) = \sum_{k=-N}^{N}\frac{\sin\alpha\left(t-\dfrac{n\pi}{\alpha}\right)}{\alpha\left(t-\dfrac{n\pi}{\alpha}\right)}\left\{\frac{1}{2}\zeta_0\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)+\sum_{m=1}^{M}\left[\zeta_k\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)\cos\frac{m\pi x}{X}+\eta_k\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)\sin\frac{m\pi x}{X}\right]\right\}, \quad (9)$$

де α – ($\alpha > \tilde{\alpha}$) параметр, який визначається за частотою Найквіста, $\left\{\zeta_k\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)\right\},\left\{\eta_k\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)\right\}$, $k=\overline{-N,N}, m=\overline{0,M}$, − послідовності гауссівських випадкових величин що задовольняють умовам:

$$\mathrm{M}\zeta_k(t)\zeta_r(s)=\delta_k^r b_k(t-s),\quad \mathrm{M}\eta_k(t)\eta_r(s)=\delta_k^r b_k(t-s),$$
$$\mathrm{M}\zeta_k(t)\eta_r(s)=0, \quad (10)$$

де $b_k(t-s)$ $(k=0,1,2,...)$ – коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є кореляційної функції $B(t-s,|x_1-x_2|)$ ізотропного по x та однорідного за часом t випадкового поля $\xi\ (t,x)$ на циліндрі $R\times S(X)_2$, які можна визначити за формулою:

$$b_k(t-s)=\int_{-\alpha}^{\alpha}e^{i\lambda(t-s)}F_k(d\lambda). \quad (11)$$

де $F_k(\quad)$ – послідовність невипадкових спектральних мір на (-α, α).

Із [2], [3] та [4] випливає, що оцінка середньоквадратичного наближення однорідного за часом та ізотропного по *x* випадкового поля $\xi\ (t,x)$ на циліндрі $R\times S(X)_2$ з обмеженим спектром моделлю (9) буде така:

$$\mathrm{M}\left|\xi(t,x)-\tilde{\xi}_{N,M}(t,x)\right|^2 \le \frac{4B(0)}{\pi^2(2N-1)}K_p\left(\frac{X}{\pi}\right)^p\frac{M+2(p+1)}{M^p(p-1)},\ (p\ge 2). \quad (12)$$

де X – довжина просторового інтервалу, p – індекс класу функцій D_p, тобто функцій, для яких існують похідні до порядку р–1 включно і похідна р–1 порядку $B^{(p-1)}(\varphi)$ абсолютно неперервна, а р-та похідна $B^{(p)}(\varphi)$ – підсумовувана та обмежена; $K_p = \max\limits_{0\le\phi\le 2\pi} \left|B^{(p)}(t-s,|x_1-x_2|)\right|$ – максимум p-ї похідної від кореляційної функції $B(t-s,|x_1-x_2|)$ випадкового поля $\xi\ (t,x)$ на $R\times S(X)_2$, а B(0) – дисперсія випадкового поля $\xi\ (t,x)$.

Потрібно зауважити, що циліндрична форма області змінних випадкових полів означає те, що за часом t поле − однорідне, а за змінною x (ізотропність) – періодичне, тобто його кореляційну функцію по просторовій змінній x можна періодично продовжити із періодом, рівним інтервалу кореляції.

Опишемо побудований на основі моделі (9) та оцінки (12) середньоквадратичного наближення однорідниого за часом ізотропного по x випадкового поля $\xi\ (t,x)$ з обмеженим спектром на циліндрі $R\times S(X)_2$ алгоритм для моделювання реалізацій таких випадкових полів, які розподілені за гауссівським законом.

Алгоритм 2.

1) Вибираємо, відповідно до необхідної точності ε >0,натуральні числа N та M для моделі (9) за допомогою нерівності:

$$\frac{4B(0)}{\pi^2(2N-1)} K_p \left(\frac{X}{\pi}\right)^p \frac{M+2\,(p+1)}{M^p(p-1)} \le \varepsilon \quad (p \ge 2).$$

де K_p – максимум p-ї похідної для кореляційної функції $B(t-s,|x_1-x_2|)$ випадкового поля $\xi\ (t,x)$ на циліндрі $R\times S(X)_2$.

2) Моделюємо послідовності гауссівських випадкових величин $\left\{\zeta_k\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)\right\}, \left\{\eta_k\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)\right\},\ k=\overline{-N,N}, k=\overline{0,M},$ що задовольняють умовам (10).

3) Обчислюємо вираз (9) в заданій точці (t,x) на $R\times S(X)_2$, підставляючи в нього обчислені за пунктом 1) величини N та M і згенеровані за пунктом 2) послідовності гауссівських випадкових величин

$$\left\{\zeta_k\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)\right\}, \left\{\eta_k\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)\right\},\ k=\overline{-N,N}, k=\overline{0,M}, .$$

4) Перевіряється згенерована в п. 3 реалізація випадкового поля $\xi(t,x)$ на адекватність даним цього випадкового поля шляхом порівняння відповідних статистичних характеристик.

За наведеним алгоритмом можна змоделювати реалізацій випадкових полів, які однорідні за змінною t (час) та ізотропні за просторовою координатою x, та мають обмежений спектр. Такими полями можуть бути масиви шумів у сейсмограмах, які отримано одночасно в пунктах сейсмічних спостережень, розташованих на деякій відстані х один від одного. Алгоритм 2 має деякі переваги над алгоритмом, запропонованим у [8], оскільки відліки реалізацій даних за просторовою змінною х можуть бути задані на нерівномірній решітці, але при цьому потрібно, щоб випадкове поле $\xi(t,x)$ за змінною x було періодичне.

Висновок. Метод статистичного моделювання реалізацій випадкових полів дає можливість згенерувати за побудованими алгоритмами шуми в сейсмограмах пунктів спостережень для оцінки частотних характеристик геологічного середовища [6] під цими сейсмостанціями та у близько розташованих від них пунктах, у яких не було проведено спостережень.

1. *Демьянов В.В., Савєльєва Е.А.* Геостатистика / Под ред. Р.В. Арутюняна. – М., 2010. 2. *Вижва З.О.* Статистичне моделювання випадкових полів на площині з рівномірною решіткою інтерполяції // Доповіді НАН України. – 2003. – №5. – С.7-12. 3. *Вижва З.О.* Статистичне моделювання випадкових процесів та полів – К., 2011. 4. *Оленко А.Я.* Оцінка помилки інтерполяції в багатовимірній теоремі Котельникова-Шеннона // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. 2004. – Вип. 3. – С. 49-54. 5. *Higgins J.R.* Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis. Clarendon Press. Oxford. New York, 1996. 6. *Бат М.* Спектральный анализ в геофизике. – М., 1979. 7. *Халікулов С.И., Ядренко В.М.* Теорема Котельникова-Шеннона для випадкових полів на циліндрі // Вісн Київ. ун-ту. Мат. і Мех. – 2000. – №5. –С. 55-60. *8. Кендзера О.В., Вижва З.О., Федоренко К. В., Вижва А.С.* Визначення частотних характеристик геологічного середовища під будівельними майданчиками з використанням статистичного моделювання сейсмічного шуму на прикладі спостережень в м. Одесі // Вісн Київ. ун-ту. Геологія. – 2012. – №58.

Надійшла до редколегії 21.09.12