Про математику та математиків

УДК 511.14 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.2**

Віктор РОМАНЕНКО, Д-р фіз.-мат. наук, Пров. наук. співроб.
ORCID ID: 0000-0001-8554-0214
e-mail: victor.romanenko@gmail.com
Інститут фізики НАН України, Київ, Україна

Ірина ЛЕБЕДЄВА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА: ОБЧИСЛЕННЯ ВРУЧНУ

Анотація. *Учень знайомиться з чисельними розрахунками на початкових етапах вивчення математики. Учень опановує виконання чотирьох арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) вручну. Для обчислення тригонометричних та показникових функції, квадратних та кубічних коренів зазвичай використовують арифметичні калькулятори чи таблиці, це також стосується обчислення логарифмів. Водночас впевнене володіння математикою обов'язково передбачає здатність, хоча б з невеликою точністю (2–3 значущих цифри), виконувати обчислення вручну для будь-якої задачі з природничих дисциплін та математики в межах шкільної програми. Така компетенція дозволяє учню не сприймати комп'ютерні розрахунки чи обчислення на калькуляторі як щось незрозуміле – як фокус, «чорну скриньку», де на вході задають дані, а на виході отримують результат. Зрозуміло, автори не закликають відмовлятися від використання калькулятора при розв'язанні шкільних задач. Однак учень не повинен повністю залежати від цього інструменту. У статті демонструється, як обчислювати значення показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій, розширюється множина точних значень тригонометричних функцій понад ту, що відома зі шкільної програми (для аргументу* $0,\ \pi/6,\ \pi/4,\ \pi/3,\ \pi/2$*), і показується метод знаходження квадратного та кубічного коренів з числа.*

Ключові слова: *обчислення вручну; тригонометричні функції; показникова функція; логарифмічна функція; квадратний корінь; кубічний корінь.*
Класифікація відповідно до AMS 2020: 00A05, 00A09, 97F40, 97F50

1. Вступ

Загальновідомо, що викладанню математики в шкільних програмах відводиться все менше і менше часу. Внаслідок цього значно зменшується обсяг знань, особливо активних, які засвоює учень протягом навчання в школі. У той же час швидкий розвиток високих технологій потребує спеціалістів зі знанням технічних і фізико-математичних наук, що неможливо без глибокого знання математики. Одним з аспектів математичної освіти є обчислення вручну. Впевнене володіння математикою обов'язково передбачає здатність, хоча б з невеликою точністю (2–3 значущих цифри), виконувати обчислення вручну для будь-якої задачі з природничих дисциплін та математики в межах шкільної програми. Така компетенція дозволяє учню уникнути сприйняття комп'ютерних розрахунків чи обчислень на калькуляторі як чогось незрозумілого – фокусу, «чорної скриньки», де на вході задають дані, а на виході отримують результат.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Навички обчислення ручкою на папері надійно формулися середньою школою ще кілька десятиліть тому і були невід'ємною частиною освіти професійних математиків, інженерів та спеціалістів з природничих наук. Зараз більшість обчислень, навіть у побуті, виконується за допомогою калькулятора чи комп'ютера, створюючи тим самим почуття повної залежності людини від цих інструментів.

Зрозуміло, автори не закликають відмовлятися від використання калькулятора при розв'язанні шкільних задач. Однак учень не повинен повністю залежати від цього інструменту. У статті демонструється, як можна вручну обчислити значення квадратного та кубічного кореня, а за необхідності і кореня довільного степеня. Вже цього досить, щоб хоча б з невеликою точністю (дві-три значущих цифри) оцінити значення показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій. Також наведено множину точних значень тригонометричних функцій понад ту, що відома зі шкільної програми (для аргументів 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$).

2. Квадратний корінь

Спосіб обчислення квадратного кореня з числа цифра за цифрою (іноді його називають алгоритмом довгого ділення), який дає оцінку його значення з недостачею (Castle, 1905), раніше викладався у середній школі. Ми пояснимо математичну основу цього методу і покажемо на прикладах, як він працює. Потім викладемо ітераційну формулу Ньютона, яка призводить до збільшення удвічі кількості значущих цифр при кожній ітерації. У кінці підрозділу виведемо ітераційну формулу для обчислення кубічного кореня з числа.

В основі обчислення квадратного кореня цифра за цифрою лежить формула для квадрата суми двох чисел, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Нехай треба обчислити квадратний корінь з числа c, що є квадратом двозначного числа. Позначимо результат обчислень літерою d, у якому кількість десятків дорівнює n, а кількість одиниць дорівнює m. Таким чином, $c = 100n^2 + 20nm + m^2$. Очевидно, m дає внесок в останні 2 цифри c, $20nm$ — в другу і третю цифри від правого краю c, $100n^2$ — в третю і четверту (якщо вона є) цифри від правого краю. Дивлячись на третю і четверту цифри, легко можна вгадати значення n, а потім, розглядаючи $c - 100n^2$, підібрати m так, щоб виконувалася рівність $c - 100n^2 = 20nm + m^2$. Продемонструємо цю процедуру на прикладі.

Обчислимо квадратний корінь з $c = 7569$. Розбиваємо число на грані — по дві цифри від правого краю (якщо число тризначне, у лівій грані буде одна цифра). Маємо 75'69. Найближчий знизу до 75 квадрат цілого числа $64 = 8^2$, так що $n = 8$. Тепер шукаємо таке m, щоб $7569 - 6400 = 20 \times 8 \times m + m^2$. Маємо рівняння $1169 = 160m + m^2$. Оскільки $8 \times 160 = 1280$ вже перевищує ліву частину рівності, то перевіряємо можливість $m = 7$. Маємо $1169 = 1120 + m^2$, що дає $m^2 = 49$, і, відповідно, $m = 7$. Таким чином, $\sqrt{7569} = 87$. Проведені обчислення зручно виконувати у записі, показаному на рис. 1. Прокоментуємо його.

Число, квадратний корінь якого ми обчислюємо, розбито на грані справа наліво по дві цифри: $75'69$. Виходячи з того, що $8^2 < 75 < 9^2$, знаходимо першу цифру відповіді, 8, і записуємо її після знаку рівності. Під першою гранню, яка в нашому випадку дорівнює 75, записуємо квадрат першої цифри відповіді, $64 = 8^2$. Потім ми віднімаємо його від першої грані й отримуємо число 11, до якого приписуємо другу грань. Ліворуч від вертикальної риски пишемо подвоєну першої цифри відповіді ($16 = 2 \times 8$), залишаючи біля вертикальної риски місце для другої цифри відповіді. Підбираємо її таким чином, щоб добуток цієї цифри на 160 плюс ця цифра був найближчим до 1169, але не перевищував його. Це 7. Виконавши множення 167×7, записуємо результат під 1169 (він теж дорівнює 1169). Різниця цих двох чисел дорівнює нулю, тому 7569 – квадрат цілого числа 87 (воно записано справа після знаку рівності). Якби тут був не нуль, то це означало б, що квадратний корінь не ціле число. Більше того, якщо ми обчислюємо квадратний корінь з цілого числа і він не ціле число, то корінь — ірраціональне число. Проілюструємо цей випадок. Обчислимо квадратний корінь з 70. Процедуру розрахунку показано на рис 2.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & -\sqrt{75'69} = 87 \\
 & & \quad 64 \\ \cline{3-3}
\times & 167 & -1169 \\
 & 7 & \;\;\, 1169 \\ \cline{3-3}
 & & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Рис. 1.

Як тільки ми отримуємо всі цифри цілої частини відповіді, ставимо після 70 кому і записуємо ще одну грань цього числа, 00. Далі процедуру продовжуємо точно так само, як і при обчисленні квадратного кореня з $7\,569$. Після того, як ми отримали десяті частини кореня, дописуємо ще одну грань і аналогічно отримуємо соті частини значення кореня.

У випадках, коли число більше $10\,000$, ми його теж розбиваємо на грані і обчислюємо послідовно, цифра за цифрою, значення кореня. Метод розрахунку кореня ми описували, виходячи з формули для квадрата суми двох чисел, причому перше число – число десятків, помножене на 10. Ніде ми не накладали обмеження на кількість десятків; якщо їх сотні і тисячі, ми застосовуємо по суті ту ж саму процедуру для визначення цифр десятків, що ми раніше використовували для обчислення квадратного кореня з чотиризначного числа.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & -\sqrt{70{,}00'00} = 8{,}36 \\
 & & \quad 64 \\ \cline{3-3}
\times & 163 & -600 \\
 & 3 & \;\;\, 489 \\ \cline{3-3}
\times & 1666 & -11100 \\
 & 6 & \;\;\;\;\, 9996 \\ \cline{3-3}
 & & \;\;\;\;\, 1104
\end{array}
$$

Рис. 2.

Зазначимо, що методом цифра за цифрою ми відразу отримуємо точні значення цифр кореня і ніякої додаткової оцінки точності розрахунків робити не потрібно. Розв’язання кількох вправ цим методом сприяє розумінню основ математики, тренуванню математичної логіки та терплячості. Для перевірки правильності розрахунків наведемо кілька значень квадратних коренів:

$$\sqrt{70} \approx 8.3666002653407554797817202578 5,$$

$$\sqrt{2} \approx 1.4142135623730950488016887242 0,$$

$$\sqrt{3} \approx 1.7320508075688772935274463415 0.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Перейдемо тепер до ітераційного методу обчислення квадратного кореня, який дає значно швидшу збіжність, проте не гарантує точності отриманих цифр без оцінювання результату. Нехай A – число, квадратний корінь якого нам треба знайти, a_n – n-не наближення до відповіді. Ітераційна формула, яку ще називають формулою Ньютона, для пошуку $(n+1)$-го наближення має вигляд:

$$a_{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right). \tag{1}$$

По суті ітераційна процедура (1) – це процедура Ньютона (Burden & Faires, 2010) для випадку пошуку нуля функції $f(a) = a^2 - A$.

Математичний смисл виразу (1) прозорий. Нехай a_n трохи менше за $\sqrt{A}$. Тоді дріб у дужках у формулі (1) трохи більший за $\sqrt{A}$. Можна чекати, що півсума доданків у дужках формули (1), тобто наступне ітераційне наближення $a_{(n+1)}$, буде ближче до $\sqrt{A}$, ніж попереднє a_n. Проаналізуємо, наскільки швидко ітераційний процес збігається до $\sqrt{A}$ зі зростанням n. Припустимо, що a_n відрізняється від $\sqrt{A}$ на відносну похибку ε, тобто $\mathrm{a_n} = \sqrt{A}(1+\varepsilon)$. Тоді

$$a_{(n+1)} = \frac{\sqrt{A}}{2}\left(1 + \varepsilon + \frac{1}{1+\varepsilon}\right). \tag{2}$$

Дріб у дужках – сума геометричної прогресії зі знаменником $-\varepsilon$, тобто він дорівнює $1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \ \dots$. Обмежуючись квадратичними за ε членами, маємо $a_{(n+1)} = \sqrt{A}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)$. Таким чином, якщо відносна похибка при обчисленні квадратного кореня складала ε, то після першої ітерації ця похибка буде $\frac{1}{2}\varepsilon^2$, після другої $\frac{1}{8}\varepsilon^4$, а після третьої $\frac{1}{128}\varepsilon^8$. Наприклад, при $\varepsilon = 0.1$ маємо відповідно похибки $5 \cdot 10^{-3}$, $1.25 \cdot 10^{-5}$, $0.8 \cdot 10^{-10}$. Очевидно, для більшості випадків, залежно від вибору початкового значення, досить 1-3 ітерацій. Зразу ж зазначимо, що незалежно від того, чи початкове значення кореня було взяте з надвишком чи недостачею, результат обчислення завжди буде з надвишком.

При обчисленнях зовсім не обов’язково підставляти як чергове наближення число з багатьма десятковими знаками; досить обмежитись бажаною точністю, наприклад, три знаки після коми і проводити ітерації, поки остання цифра у відповіді перестане змінюватися. Наприклад, при обчисленні квадратного кореня з двох маємо: початкове значення 2, після першої ітерації 1.5, потім 1.416 і нарешті 1.414, при підстановці якого в формулу (2) принаймні три знаки після коми вже не змінюються. Реальна точність обчислення при цьому – сім знаків після коми, 1.4142135.

Щоб скоротити обсяг обчислень, можна користуватися звичайними дробами, а не десятковими. Наприклад, при обчисленні маємо таку послідовність (для наочності ми також записуємо наближені значення звичайного дробу через десяткові): 2, $3/2 = \underline{1}.5$, $17/12 \approx \underline{1.41}6$, $577/408 \approx \underline{1.41421}5$, $665857/470832 \approx \underline{1.41421356237}4$. Підкреслено правильні цифри результату. Видно, що з кожної ітерацією кількість правильних цифр приблизно подвоюється: $1, 3, 6, 12$.

3. Кубічний корінь

Виведемо формулу для ітераційного методу пошуку кубічного кореня. Спроба просто поставити в рівняння (1) замість дробу A/a_n^2 не дає бажаної швидкої збіжності процесу ітерацій. Можна очікувати, що внески першого і другого доданку повинні бути різними. Спробуємо їх підібрати. Шукаємо формулу для ітераційного обчислення кубічного кореня з A у вигляді

$$a_{(n+1)} = \alpha a_n + \beta \frac{A}{a_n^2}. \tag{3}$$

Нехай $a_n = \sqrt[3]{A}(1+\varepsilon)$, де ε – відносна похибка на n-ій ітерації. Тоді (3) набуває вигляду

$$a_{(n+1)} = \sqrt[3]{A}[\alpha(1+\varepsilon) + \beta(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \cdots)^2]. \tag{4}$$

Обмежуємося надалі квадратичними за ε членами. З рівняння (4) випливає

$$a_{(n+1)} = \sqrt[3]{A}[\alpha + \beta + \varepsilon(\alpha - 2\beta) + 3\varepsilon^2\beta]. \tag{5}$$

Це рівняння дозволяє знайти коефіцієнти α і β. Виходимо з того, що при $\varepsilon = 0$ повинно бути $a_{(n+1)} = \sqrt[3]{A}$, що вимагає виконання рівності $\alpha + \beta = 1$. Крім того, для швидкої збіжності процесу ітерації похибка має бути квадратичною за ε, тобто коефіцієнт при ε^1 повинен дорівнювати нулю. Ця вимога записується рівнянням $\alpha - 2\beta = 0$. У результаті маємо $\alpha = 2/3, \beta = 1/3$, так що (3) набуває вигляду

$$a_{(n+1)} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{A}{a_n^2}\right). \tag{6}$$

Проілюструємо, як працює ітераційний алгоритм обчислення кубічного кореня. Обчислимо кубічний корінь з 10. Початковим наближенням кореня виберемо $a_0 = 2$, оскільки $2^3 = 8$ близьке до 10. Три послідовні ітерації дають (підкреслено правильні цифри кубічного кореня):

$$a_1 = 13/6 \approx \underline{2.1}66,$$

$$a_2 = 3277/1521 \approx \underline{2.1545}0,$$

$$a_3 = 105569067476/49000820427 \approx \underline{2.15443469}224.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Остання ітерація дає результат, дуже близький до $\sqrt[3]{10} \approx 2.15443469003188372$. Наведені результати ітерацій наочно підтверджують зменшення похибки пропорційно квадрату похибки попередньої ітерації – спочатку одна цифра точна (ми її вгадали; можна починати з будь-якої, наприклад, з одиниці, просто процес обчислень буде дещо довшим), потім дві, чотири, дев'ять цифр.

4. Корінь n-го степеня

Користуючись методом, використаним нами при виведенні формули для ітераційного обчислення квадратного кореня, можна отримати аналогічну формулу для обчислення кореня n-степеня числа:

$$a_{(m+1)} = \frac{1}{n}\left((n-1)a_m + \frac{A}{a_m^{n-1}}\right). \tag{7}$$

Відразу видно складність, що виникає у випадку великих n. Якщо початкове наближення занадто велике, то другий доданок в круглих дужках буде значно менший за перший і, завдяки близькій до одиниці величині $\frac{n-1}{n}$, кожне нове ітераційне наближення буде мало відрізнятися від попереднього, допоки відносна похибка обчислень не стане малою. Далі точність обчислень зростатиме досить швидко, як це мало місце для обчислень квадратного і кубічного коренів. Якщо ж вибрати початкове наближення занадто малим, то більший внесок в (7) буде від другого доданка, але вже після ітерації наступне наближення стане помітно більшим за $\sqrt[n]{A}$, яке далі поступово, а потім все швидше, прямувати до $\sqrt[n]{A}$. Для ілюстрації цих тверджень наведемо обчислення кореня сьомого степеня від 10 для початкових значень $a_0 = 2$ та $a_0 = 1$ (підкреслено правильні цифри кореня сьомого степеня з 10), який приблизно дорівнює $\sqrt[7]{10} \approx 1.3894954943731376371$.

Для $a_0 = 2$ маємо: $a_1 = \underline{1}.73$, $a_2 = \underline{1}.54$, $a_3 = \underline{1}.42$, $a_4 = \underline{1.3}92$, $a_5 = \underline{1.3895}1$, $a_6 = \underline{1.38949549}50$, $c_7 = \underline{1.3894954943731376}382$.

Для $a_0 = 1$ маємо: $a_1 = 2.28$, $a_2 = \underline{1}.96$, $a_3 = \underline{1}.71$, $a_4 = \underline{1}.52$, $a_5 = \underline{1}.42$, $a_6 = \underline{1.3}91$, $a_7 = \underline{1.3895}03$.

Як бачимо, швидка збіжність ітераційного процесу починається у першому випадку після третьої, а в другому після п'ятої ітерації, коли відносна похибка обчислень складає величину порядку 10%. У наших розрахунках обчислення при початковій умові $a_0 = 1$ виявилися на дві ітерації довшими, оскільки після першої ж ітерації наближене значення кореня перевищило початкове значення за початкової умови $a_0 = 2$.

Зазначимо, що ще одним методом обчислення кореня n-го степеня є застосування ряду Тейлора для експоненціальної функції (як отримати цей ряд без знання вищої математики див. в роботах Л. П. Мироненка і О. А. Рубцової (Mironenko & Rubtsova, 2013), В. І. Романенка і О. В. Романенка (Romanenko & Romanenko, 2024), В. І. Романенка, О. В. Романенка та І. В. Лебедєвої (Романенко, Романенко &

Лебедєва, 2024) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$. Для цього $\sqrt[7]{10}$ записуємо у вигляді $\sqrt[7]{10} = e^{\frac{1}{7}\log_e 10}$ і застосовуємо ряд Тейлора для e^x з $\mathrm{x} = \frac{1}{7}\log_e 10$, де $\log_e 10 \approx 2.302585092994045684$. Поглянемо, як змінюється результат обчислення залежно від кількості врахованих членів при обчисленні ряду, від одного до семи: $\underline{1.3}28$, $\underline{1.38}30$, $\underline{1.38}897$, $\underline{1.3894}61$, $\underline{1.38949}36$, $\underline{1.3894954}08$, $\underline{1.38949549}08$. Як бачимо, точність обчислень ряду зі збільшенням кількості врахованих членів зростає приблизно лінійно, на одну-дві цифри на кожен член, значно повільніше, ніж при розрахунку методом ітерацій. При розрахунку методом ітерацій за 7 ітерацій (з початковою умовою $a_0 = 2$) було досягнуто точності 10^{-17}, тоді коли при розрахунку за розкладом експоненти в ряд Тейлора лише 10^{-7}. Зазначимо, що при розрахунку з використанням розкладу в ряд ми завжди отримуємо відповідь з недостачею, а при розрахунку ітераційним методом – завжди з надвишком.

5. Показникова функція

Знаючи, як обчислювати корені з числа, можна вручну розрахувати й значення показникової функції. Ми не будемо тут цікавитися показниковою функцією від цілого аргументу, яка зводиться до обчислення основи у певному степені. Розглянемо приклад з дробовою частиною, скажімо $3^{0.23}$. По суті цей вираз означає $\sqrt[5]{3}\left(\sqrt[100]{3}\right)^3$. Наведені значення коренів можна розрахувати ітераційним методом, наведеним у попередньому розділі. Оскільки степінь другого кореня доволі високий, є смисл зробити кілька попередніх обчислень, щоб краще вибрати значення початкової ітерації a_0. Покажемо на прикладі, як це може виглядати. Беремо якесь пробне значення кореня, робимо одну ітерацію. Якщо результат розрахунку виявився вище початкового значення, значить воно взято з недостачею, якщо нижче – з надвишком. Дивимося, на скільки початкове значення і перша ітерація відрізняються, і, якщо ця різниця значна, пробуємо інше a_0. При обчисленні $\sqrt[100]{3}$ починаємо з $a_0 = 1$, отримуємо $a_1 = 1.02$. Оскільки значення $\sqrt[100]{3}$ лежить між 1 і 1.02, щоб зменшити обсяг обчислень, беремо $a_0 = 1.01$. Ми не будемо 99 разів виконувати операцію множення, щоб знайти 1.01^{99} досить дев'яти операцій. Спочатку обчислюємо квадрат 1.01: $d_2 = a_0^2 \approx 1.020$ (обмежуємося трьома знаками після коми), потім розраховуємо $d_4 = d_2^2 \approx 1.040$, $d_8 = d_4^2 \approx 1.081$, $d_{16} = d_8^2 \approx 1.168$, $d_{32} = d_{16}^2 \approx 1.364$, $d_{64} = d_{32}^2 \approx 1.860$, $d_{96} = d_{64}d_{32} \approx 2.537$, $d_{98} = d_{96}d_2 \approx 2.587$, $d_{99} = d_{98}a_0 \approx 2.613$, що з точністю до двох значучих цифр збігається з розрахунком, зробленим з високою точністю (2.678). Подальші обчислення дають $a_1 \approx 1.011$ що з точністю до трьох значучих цифр збігається зі значенням кореня $\sqrt[100]{3} = 1.01138$. Процедуру розрахунку кореня п'ятого степеня не описуємо, вона аналогічна наведеній у попередньому підрозділі. Різниця лише в кількості врахованих значущих цифр – тут ми обмежуємося трьома цифрами після коми. Маємо, починаючи обчислення з $a_0 = 1.5$ після четвертої ітерації, на якій три цифри після коми такі ж, як у попередній: $a_4 \approx 1.245$. З урахуванням зроблених обчислень маємо: $3^{0.23} \approx 1.245 \times 1.011^3 \approx 1.286$. Обчислення цієї ж величини за

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

допомогою комп'ютерної математики дає $3^{0.23} \approx 1.287$. Різниця у третьому знаку після коми. Таким чином, вміючи обчислювати корені з числа з точністю $10^{-2} - 10^{-3}$, можна зробити досить точну оцінку значення показникової функції.

Щоб виконати описані вище обчислення, треба вміти добувати корінь довільного степеня з числа. Можна обійтися зовсім мінімальним вмінням – досить вміти добувати квадратний корінь з числа. Обчислимо $3^{0.23}$ в такий спосіб. Для цього запишемо 0.23 у вигляді суми доданків вигляду $\frac{1}{2^n}$ тобто по суті переведемо 0.23 у двійкову систему числення. Кількість таких доданків нескінченна, і нам доведеться певною кількістю членів обмежитися. Маємо у двійковій системі $0.23 = 0.0011101011 \cdots\_2$. Ми обмежилися десятьма знаками, оскільки вони вже дають десяткове число з достатньою точністю, 0.2294. Тепер можна записати, користуючись лише операцією обчислення квадратного кореня, $3^{0.23} \approx \sqrt[8]{3} \times \sqrt[16]{3} \times \sqrt[32]{3} \times \sqrt[128]{3} \times \sqrt[512]{3} \times \sqrt[1024]{3}$ оскільки $\sqrt[8]{3} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$, $\sqrt[16]{3}$ обчислюється чотирикратним добуванням кореня і т. д.

Перш ніж перейти до обчислень, наведемо алгоритм переходу від десяткового дробу до двійкового. Множимо дріб на 2, якщо результат не має цілої частини, то в першому розряді нуль. Якщо має, то пишемо 1 і відкидаємо цілу частину. Далі процес повторюємо. Для нашого прикладу початок перетворення в двійковий дріб виглядає так: Розряд 1: $0.23 \times 2 = 0.46$, пишемо 0. Розряд 2: $0.46 \times 2 = 0.92$, пишемо 0. Розряд 3: $0.92 \times 2 = 1.84$, пишемо 1. Розряд 4: $0.84 \times 2 = 1.68$, пишемо 1. Далі продовжуємо так само.

Обчислення робимо з точністю до трьох цифр після коми. Маємо:

$$\sqrt{3} \approx 1.732,\ \sqrt[4]{3} \approx 1.316,\ \sqrt[8]{3} \approx 1.147,\ \sqrt[16]{3} \approx 1.070,\ \sqrt[32]{3} \approx 1.034,$$

$$\sqrt[64]{3} \approx 1.016,\ \sqrt[128]{3} \approx 1.008,\ \sqrt[256]{3} \approx 1.004,\ \sqrt[512]{3} \approx 1.002,\ \sqrt[1024]{3} \approx 1.001.$$

В останньому рядку дробова частина після кожного обчислення квадратного кореня (наприклад, $\sqrt[\frac{1}{256}]{3} = \sqrt{\sqrt[\frac{1}{128}]{3}}$) зменшується удвічі у відповідності з тим, що при малому x маємо $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$.

Знаходимо добуток коренів, що входять у вираз для $3^{0.23}$, отримуємо 1.283, з точністю до двох знаків після коми близький до результату обчислення $3^{0.23} \approx 1.287$ за допомогою комп'ютерної математики.

Як бачимо, математичного арсеналу елементарної математики цілком досить, щоб обчислити показникову функцію бажаного аргументу.

6. Логарифмічна функція

У попередньому пункті ми показали як, маючи набір значень послідовного обчислення квадратного кореня, наприклад, 3, можна знайти будь-який дробовий степінь числа. Ми зумисно обмежили точність наших обчислень третім знаком після коми, маючи на увазі показати, що при обчисленнях вручну, з допомогою ручки і папірця, можуть бути непоганої точності, достатньої для розв'язання більшості шкільних задач. Зрозуміло, що наявність найпростішого калькулятора, який вміє виконувати лише чотири арифметичні дії, збільшить точність наших обчислень до 6–8 знаків після коми. Покажемо тепер, як той же набір значень квадратного кореня дозволить нам обчислити логарифм числа з бажаною основою.

Наприклад, ми хочемо обчислити логарифм числа $X = 3.75$ за основою 3. Оскільки $X > 3$, ділимо його на 3, можливо, кілька разів, доки частка від ділення не стане менше 3 (у нашому випадку вистачить одного ділення). Маємо: $3.75 = 3 \times 1.25$. Виходячи з властивостей логарифма (див., наприклад, (Castle, 1905; Гайштут, Ушаков, & Шамович, 2018), а саме, з того, що логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників, маємо:

$$\log_3 3.75 = \log_3 3 + \log_3 1.25 = 1 + \log_3 1.25. \tag{8}$$

Наше завдання тепер обчислити $\log_3 1.25$. Для цього треба записати 1.25 у вигляді добутку степенів 3, і тоді сума степенів дасть нам значення $\log_3 1.25$.

Ми скористаємося набором значень послідовного обчислення квадратного кореня з 3, отриманого у попередньому розділі. Зручність такого підходу полягає в тому, що сума показників кореня дорівнює одиниці (вона обчислюється як сума геометричної прогресії $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$). Це дозволяє будь-яке число між 1 і 3 записати як добуток коренів з 3. Якщо ж число менше за 1, ми множимо його на 3 кілька разів, доки воно не стане більшим за одиницю. Кількість операцій множення потім врахуємо при обчисленні логарифму так само, як ми враховуємо операції ділення у прикладі, що ми зараз розглядаємо.

У множині послідовних квадратних коренів 3 (див. попередній розділ), шукаємо найбільше з чисел, менших за 1.25. Це $\sqrt[\frac{1}{8}]{3} \approx 1.147$. Ділимо 1.25 на це число, отримуємо 1.090. Тепер ми знаємо, що $1.25 \approx \sqrt[8]{3} \times 1.090$. Далі в тій же множині коренів шукаємо найбільше з чисел, менших за 1.090. Це $\sqrt[\frac{1}{16}]{3} \approx 1.070$. Ділимо на нього 1.090, отримуємо 1.017. Тепер ми знаємо, що $1.25 \approx \sqrt[8]{3} \times \sqrt[16]{3} \times 1.017$. Повторюємо ту ж процедуру з 1.017, ділимо його на $\sqrt[\frac{1}{64}]{3} \approx 1.016$ і отримуємо $1.25 \approx \sqrt[8]{3} \times \sqrt[16]{3} \times \sqrt[64]{3} \times 1.001$. Оскільки $1.001 \approx \sqrt[1024]{3}$, маємо $1.25 \approx 3^{\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{1024}} \approx 3^{0.204}$. За визначенням логарифма маємо $\log_3 1.25 \approx 0.204$, тоді $\log_3 3.75 \approx 1.204$. Обчислення цієї ж величини за допомогою комп'ютерної математики дає 1.203, тобто похибка відповідає точності наших розрахунків.

7. Тригонометричні функції

Розраховуючи значення тригонометричних функцій, досить знати, як обчислити одну з них, інші можна обчислити з тригонометричних тотожностей. Ми оберемо за основу $\sin x$ в першу чергу через те, що для малого аргумента (в радіанній мірі) маємо $\sin x \approx x$. Нас цікавитимуть обчислення з точністю до третього знаку після коми.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Оцінимо, для яких значень аргументу наведена наближена формула для синуса кута дає правильний результат з цією точністю. Для $x = 0.14$ маємо $\sin x \approx 0.13954 \approx 0.14$, таким чином, при наближених обчисленнях з точністю до 0.001 значення аргумента в $\sin x$ не повинно перевищувати 0.14 ($8°$ в градусній мірі кута). Якщо досить точності 0.01, наближеною формулою $\sin x \approx x$ можна користуватися до $x = 0.3$ ($17°$ в градусній мірі кута).

Користуючись цими знаннями та кількома відомими значеннями синуса і косинуса на інтервалі від 0 до $\frac{1}{2}\pi$ і використовуючи властивості тригонометричних функцій (див., наприклад, (Гайштут, Ушаков, & Шамович (2018)), можна обчислити синус для будь-якого значення аргументу.

Щоб можна було скористатися наближеними формулами для синуса і косинуса малого аргументу

$$\sin x \approx x, \tag{9}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2, \tag{10}$$

(друга формула отримана з першої та тотожності $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ із врахуванням припущення $x \ll 1$ при обчисленні квадратного кореня), ми запишемо аргумент, для якого ми проводимо обчислення, як суму двох доданків, тригонометричні функції одного з яких ми знаємо, а другий доданок малий. Покажемо це на прикладі. Візьмемо до уваги, що для учня закладу загальної середньої освіти відомі значення тригонометричних функцій для аргументів 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $2\pi/3$, $\pi/2$.

Обчислимо, наприклад, $\sin\frac{2}{15}\pi$. Найближче значення аргументу, для якого тригонометричні функції відомі — $\frac{\pi}{6}$ ($\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$). Різниця цих аргументів дорівнює $\alpha = \frac{1}{6}\pi - \frac{2}{15}\pi = \frac{1}{30}\pi$. Оскільки $\alpha \approx 0.1047$ порядку 0.1, ми можемо розрахувати $\sin\frac{2}{15}\pi$ з точністю порядку 0.001, користуючись формулами (9), (10). Для $\alpha = \frac{1}{30}\pi$ обчислення за (9), (10) дають

$$\sin\alpha \approx \frac{1}{30}\pi \approx 0.1047, \tag{11}$$

$$\cos\alpha \approx 1 - \left(\frac{1}{30}\pi\right)^2 \approx 0.9945. \tag{12}$$

Далі обчислимо синус лівої і правої частин рівності

$$\frac{2}{15}\pi = \frac{1}{6}\pi - \alpha, \tag{13}$$

користуючись виразом для синуса різниці двох кутів:

$$\sin\frac{2}{15}\pi = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\cdot\cos\alpha - \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\cdot\sin\alpha \approx 0.4066. \tag{14}$$

Як і очікувалося, результат обчислення за формулою (14) менш ніж на 0.001 відрізняється від результату обчислення за допомогою комп'ютерної математики, 0.4067.

Для підвищення точності обчислень різниця між аргументом, який ми шукаємо, і аргументом, для якого тригонометричні функції відомі, повинна бути якомога меншою. Звертає на себе увагу нерівномірність розподілу аргументів, точні значення тригонометричних функції яких відомі школярам – різниця між 0 і $\frac{1}{6}\pi$ та $\frac{2}{3}\pi$ і $\frac{1}{2}\pi$ складає $\frac{1}{6}\pi$, тоді як між $\frac{1}{6}\pi$ і $\frac{1}{4}\pi$ та $\frac{1}{4}\pi$ і $\frac{2}{3}\pi$ різниця удвічі менша, тому при обчисленні значень тригонометричних функцій із застосуванням формул (9), (10) на перших двох інтервалах точність в середньому буде меншою. Непогано було б знати точні значення на серединах зазначених інтервалів, а саме аргументів $\frac{1}{12}\pi$ та $\frac{5}{12}\pi$. Насправді досить знати синуси і косинуси одного з аргументів, наприклад, $\frac{1}{12}\pi$, оскільки $\sin\frac{5}{12}\pi = \cos\frac{1}{12}\pi$ і $\cos\frac{5}{12}\pi = \sin\frac{1}{12}\pi$ завдяки $\frac{1}{12}\pi + \frac{5}{12}\pi = \frac{1}{2}\pi$. Знайдемо ці функції для $\frac{1}{12}\pi$.

Оскільки $\frac{1}{12}\pi = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi$, то

$$\sin\frac{1}{12}\pi = \sin\frac{1}{4}\pi\cdot\cos\frac{1}{6}\pi - \sin\frac{1}{6}\pi\cdot\cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right). \tag{15}$$

$$\cos\frac{1}{12}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi\cdot\cos\frac{1}{6}\pi + \sin\frac{1}{4}\pi\cdot\sin\frac{1}{6}\pi \ = \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right). \tag{16}$$

Наведених вище значень тригонометричних функцій аргументів 0, $\frac{1}{12}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ досить для обчислення тригонометричних синуса і косинуса довільного кута з похибкою, меншою за 0.001. Крім цих значень аргументів існує і безмежна кількість інших, для яких тригонометричні функції обчислюються точно. Наведемо далі деякі з них і обчислимо відповідні їм значення тригонометричних функцій.

Знайдемо $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ для $\alpha = \frac{1}{10}\pi$. Помічаємо, що

$$2\alpha + 3\alpha = \frac{1}{2}\pi. \tag{17}$$

Звідси випливає

$$\cos 3\alpha - \sin 2\alpha = 0. \tag{18}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Після нескладних обчислень із застосовуванням формул для синуса і косинуса суми двох кутів рівняння(18) набуває вигляду

$$\cos\alpha\,(1-2\sin\alpha-4\sin^2\alpha)=0. \tag{19}$$

Рівність нулю першого множника відповідає $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, що суперечить рівнянню (17). Поява зайвих коренів рівняння просто пояснюється – множина розв'язків рівняння (18) включає ті, що лежать у першій чверті і задовольняє умову (17), але не тільки їх. Рівність нулю другого множника дає

$$\sin\frac{1}{10}\pi=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right). \tag{20}$$

Той самий результат отримуємо, якщо спочатку додамо аргументи у лівій частині (17), а потім обчислимо синус або косинус обох частин рівності $5\alpha=\frac{1}{2}\pi$.

Знаючи $\sin\frac{1}{10}\pi$, обчислюємо $\cos\frac{1}{10}\pi$:

$$\cos\frac{1}{10}\pi=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}. \tag{21}$$

Знаючи (20), (21), ми знаємо, відповідно, $\sin\frac{2}{5}\pi=\cos\frac{1}{10}\pi$ і $\cos\frac{2}{5}\pi=\sin\frac{1}{10}\pi$.

Зазначимо, що подібним же чином обчислюються і добре відомі зі шкільної програми тригонометричні функції аргументів $\frac{1}{4}\pi$ та $\frac{1}{6}\pi$. У першому випадку обчислюємо синус (чи косинус) обох частин рівності $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{4}\pi$, у другому виходимо з рівності $\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}\pi-2\frac{1}{6}\pi$ з наступним обчисленням синуса обох частин рівності та використанням формули для косинуса подвійного кута.

Ще одне сімейство аргументів, для яких синус і косинус обчислюються точно, можна отримати діленням аргумента, для якого тригонометричні функції відомі, на 2 (скільки завгодно разів). Наприклад, нехай $\alpha=\frac{1}{8}\pi$. Тоді, беручи до уваги, що $2\alpha=\frac{1}{4}\pi$, маємо рівняння

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}. \tag{22}$$

Обчислюємо квадрат обох частин, робимо заміну $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, розв'язуємо біквадратне рівняння і знаходимо

$$\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\qquad \cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}. \tag{23}$$

У таблиці 1 подано значення тригонометричних функцій деяких аргументів, точні і наближені (з недостачею, тобто останній знак буде правильним і при збільшенні точності).

Ми додали в таблицю тригонометричні функції аргументів $\frac{1}{5}\pi$ $(36°)$ та $\frac{3}{10}\pi$ $(54°)$ з огляду на те, що вони можуть корисними в задачах з правильними десятикутниками і п'ятикутниками. Їх неважко обчислити як синус і косинус подвійного і потрійного аргументу $\frac{1}{10}\pi$, тригонометричні функції якого обчислено вище і наведено в таблиці. Зазначимо принагідно, що $\sin\frac{3}{10}\pi = \cos\frac{1}{5}\pi$ – це половина золотого перетину.

Таблиця 1

Тригонометричні функції деяких аргументів

α, радіани	α, градуси	$\sin\alpha$, точне	$\sin\alpha$, наближене	$\cos\alpha$, точне	$\cos\alpha$, наближене
0	0	0	0	1	1
$\pi/12$	$15°$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	0.258819045	$\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	0.965925826
$\pi/10$	$18°$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	0.309016994	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	0.951056516
$\pi/8$	$22°30'$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	0.382683432	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	0.923879532
$\pi/6$	$30°$	$\frac{1}{2}$	0.500000000	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0.866025403
$\pi/5$	$36°$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	0.587785252	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0.809016994
$\pi/4$	$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.707106781	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.707106781
$3\pi/10$	$54°$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0.809016994	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	0.587785252
$\pi/3$	$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0.866025403	$\frac{1}{2}$	0.5
$3\pi/8$	$67°30'$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	0.923879532	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	0.382683432
$2\pi/5$	$72°$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	0.951056516	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	0.309016994
$5\pi/12$	$75°$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	0.965925826	$\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	0.258819045
$\pi/2$	$90°$	1	1	0	0

Користуючись формулами для тригонометричних функцій суми і різниці аргументів, можна, спираючись на дані, наведені в таблиці, обчислити точні значення тригонометричних функцій ще для низки аргументів. При наближеному обчисленні тригонометричних функцій довільного аргументу β в межах від 0 до $\frac{1}{2}\pi$ обираємо

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

найближчий до нього аргумент α з таблиці 1 і подаємо його як суму – аргумент з таблиці плюс різниця між довільним аргументом і аргументом з таблиці: $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$. Далі користуємося виразом для синуса чи косинуса суми α і $(\beta - \alpha)$ і обчислюємо наближені значення довільного аргументу, використовуючи формули (9) та (10).

8. Висновки

Ми показали, як можна, користуючись лише чотирма арифметичними діями, вручну обчислити елементарні функції для довільного аргументу. Це уміння – необхідна основа глибокого розуміння математики, можливості виконати чисельні розрахунки в математичних та фізичних задачах за відсутності комп'ютера чи калькулятора. Наведена розширена порівняно зі шкільною програмою таблиця точних значень тригонометричних функцій деяких аргументів може використовуватися не лише для чисельного оцінювання синуса чи косинуса довільного аргументу, а й при розв'язанні задач з тригонометрії, геометрії чи стереометрії.

Список використаних джерел

Гайштут О. Г., Ушаков Р. П. & Шамович О. А. (2018). Математика: довідник для абітурієнтів та учнів загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Літера ЛТД. https://litera-ltd.com.ua/index.php?route=product/product&product_id=63&search=%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0&category_id=0

Романенко В. І., Романенко О. В. & Лебедєва І. В. (2024). Розкладання елементарних функцій у степеневі ряди методами алгебри. У світі математики. Вип. 2. https://usm.knu.ua/index.php/usm/article/view/51

Burden, R. L. & Faires J. D. (2010). Numerical analysis. Cengage Learning. https://openlibrary.org/books/OL28549995M/Numerical_Analysis

Castle, F. (1905). Practical mathematics for beginners. New York: The Macmillian Company. https://archive.org/details/practicalmathema00castrich/mode/2up

Mironenko, L. P., & Rubtsova, O. A. (2013). Approximations of some functions by polynomials and the method of undefined coefficients (in Russian). Scientific papers of Donetsk National Technical University (Ukraine). Series: Computing and Automation 2 (25) (p. 128–135). https://ea.donntu.edu.ua/jspui/handle/123456789/22814

Romanenko, V. I. & Romanenko A. V. (26 May 2024): Series expansion of some elementary functions without using mathematical analysis, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2353371

Отримано редакцією журналу: 01.03.2025
Прорецензовано: 15.04.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Victor ROMANENKO, Dr. of Sci. (Phys&Math), Leading Researcher
ORCID: 0000-0001-8554-0214
e-mail: victor.romanenko@gmail.com
Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Iryna LEBEDYEVA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ELEMENTARY MATHEMATICS: MANUAL CALCULATIONS

Abstract. *The student is introduced to numerical calculations at the initial stages of studying mathematics. The student masters the execution of four arithmetic operations (addition, subtraction, multiplication, division) manually. For calculating trigonometric and exponential functions, square and cubic roots, arithmetic calculators or tables are usually used; this also applies to logarithms. At the same time, confident proficiency in mathematics necessarily involves the ability to perform calculations manually, with at least some accuracy (2–3 significant figures), for any task in natural sciences and mathematics within the school curriculum. This competence enables the student not to perceive computer computations or calculator-based calculations as something incomprehensible — like a trick or a "black box," where input data is provided and output results are obtained. It is understood that the authors do not advocate abandoning calculators when solving school tasks. However, the student should not become entirely dependent on this tool. The article demonstrates methods for calculating the values of exponential, logarithmic, and trigonometric functions, extends the set of exact values of trigonometric functions beyond what is known from the school curriculum (for arguments* 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$*), and illustrates methods for finding square and cubic roots of a number.*

Keywords: *manual calculations; trigonometric functions; exponential functions; logarithmic functions; square root; cubic root.*