Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра системного аналізу та теорії прийняття рішень

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

на тему:

ЕКСПЕРТНІ ОЦІНКИ НЕЧІТКОЮ МНОЖИНОЮ ЕКСПЕРТІВ

студентки 4 курсу бакалаврату

Алексеєнко Наталії Євгенівни

Науковий керівник:

професор, доктор фізико-математичних наук

Мащенко С.О.

Робота заслухана на засіданні кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень та рекомендована до захисту в ЕК,

протокол № 10 **від** 07.06. **2022 р.**

Завідувач кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень **проф. Наконечний О.Г.**

Київ – 2022

АНОТАЦІЯ

Тема дипломного проєкту – Експертні оцінки нечіткою множиною експертів.

Метою дипломного проєкту є розробка методу розв’язання задачі побудови агрегованої експертної оцінки експертами, компетентність яких задається нечіткою множиною.

Дипломний проєкт складається зі змісту, вступу, двох розділів, висновків та списку використаної літератури.

У першому розділі проводиться огляд з теорії нечітких множин та методів експертного оцінювання.

Другий розділ присвячено постановці задачі та побудові експертної оцінки групою експертів, компетентність яких задається нечіткою множиною, Розроблений метод продемонстровано на прикладі.

Методи дослідження – системний аналіз, методи теорій нечітких множин та експертного оцінювання.

Ключові слова: нечітке число, нечітка множина, нечітка множина типу-2, агреговані експертні оцінки.

Кваліфікаційна робота бакалавра складається з: 38 с., 9 рис. та 7 літературних джерел.

ЗМІСТ

Вступ

Прийняття рішень - процес вибору з множини альтернативних варіантів по якомусь критерію. Проблема вибору є постійною в різних областях діяльності людини. Зараз методи теорії нечіткої множини використовуються майже у всіх областях, навіть при управлінні підприємством, якістю продукції, що випускається і технологічними процесами. За допомогою методів теорії нечітких множин можна приймати рішення в різних ситуаціях, з якими стикається людина. Саме це робить цю тему актуальною для вивчення.

Експертні оцінки застосовується в ситуаціях, коли вибір, обґрунтування і оцінка результатів прийнятого рішення не можуть бути визначені на основі точних розрахунків. Подібні ситуації виникають при розробці сучасних проблем інноваційного розвитку країни.

Основними принципами побудови експертних оцінок виступають наступні: розгляд експертів як своєрідних вимірювальних приладів для випадків, коли безпосереднє вимірювання за допомогою об'єктивних методів або розрахунку неможливо або недоцільно; прагнення до формалізації інформації експертів за допомогою відповідних шкал і статистичних методів; науково обґрунтована організація проведення всіх етапів експертизи.

Розділ 1. Огляд з теорії нечітких множин та нечіткого оцінювання

1.1 Нечіткі множини 1-го типу

Поняття нечіткої множини – спроба математичної формалізації нечіткої інформації з цілю її використання при побудові математичних моделей складних систем. Один з найпростіших методів математичного опису нечіткої множини – характеризація ступеня належності елементу множини числом, наприклад, з інтервалу [0,1].

Нехай X – деяка множина елементів. Далі будемо розглядати підмножини цієї множини. Нечіткою множиною C в X називається множина пар виду (x, $\mu_c(x)$), де $x \in X$, а μ_c- функція $X \to [0,1]$, яка називається функцією належності нечіткої множини C. Значення $\mu_c(x)$ цієї функції для конкретного x називається ступенем належності цього елемента нечіткій множині C.

Можна визначити множини і більш загального вигляду, наприклад, нечіткі множини, значеннями яких є нечіткі підмножини інтервалу [0,1], які називаються нечіткими множинами 2-го типу. Нечіткі множини називаються нечіткими множинами типу 1. З цього випливає наступне означення: нечітка множина є множиною типу n, n=1,2,3…, якщо значенням його функції належності є нечіткі множини типу n-1. Функція належності нечіткої множини типу 1 приймає значення з інтервалу [0,1].

Операції над нечіткими множинами такі, як об’єднання і перетин, можна визначити різними способами:

Об’єднанням нечітких множин A і B в X називається нечітка множина $A \bigcup B$ з функцією належності виду:

$$\mu_{A \bigcup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in X .$$

Об’єднання нечітких множин A і B в X можна також визначити через алгебраїчну суму їх функцій належності:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \{ \begin{array}{cc} 1, & \mu_A(x) + \mu_B(x) \geq 1, \\ \mu_A(x) + \mu_B(x), & otherwise. \end{array}$$

Перетином нечітких множин A і B в X називається нечітка множина $A \cap B$ з функцією належності виду:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in X .$$

Ще один спосіб визначення перетину нечітких множин A і B – використання алгебраїчного добутку їх функцій належності:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x), x \in X .$$

Доповненням нечіткої множини A в X називається нечітка множина A' з функцією належності виду:

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), x \in X .$$

Різниця множин A і B в X визначається як нечітка множина A\B з функцією належності виду:

$$\mu_{A\backslash B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), & \mu_A(x) \geq \mu_B(x); \\ 0, & \mu_A(x) < \mu_B(x). \end{cases}$$

Декартів добуток $A_1 \times \ldots \times A_n$ нечітких множин A_i в X_i, i=1,2,…n, визначається як нечітка множина A в декартовому добутку $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ з функцією належності виду:

$$\mu_A(x) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\}, x = (x_1, \ldots, x_n) \in X .$$

Опуклою комбінацією нечітких множин $A_1, \ldots, A_n$ в X називається нечітка множина A з функцією належності виду:

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(x) \text{, де } \lambda_i \geq 0 \text{, i=1,2,…,n, } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 .$$

Множина рівня α нечіткої множини A в X називається множина складена із елементів x∈X, ступені належності, яких нечіткій множині A, не менше числа α.

Множина (A_α) рівня α будь-якої випуклої комбінації нечітких множин $A_1, \ldots, A_n$ містить перетин множин рівня α всіх цих множин, тобто

$$\bigcap_{i=1}^{n} (A_i)_\alpha \subset A_\alpha .$$

В багатьох задачах прийняття рішень виникає необхідність розширити область визначення X заданого відображення або відношення, включив її разом з елементами множини X довільні нечіткі підмножини цієї множини. Спосіб розширення області визначення відображення на клас нечітких множин нижче називається принципом узагальнення.

Образом B нечіткої множини A в X при нечіткому відображенні $\mu_\varphi(y): X \times Y \to [0,1]$ називається нечітка множина з функцією належності виду:

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x,y)\}.$$

Прообразом A нечіткої множини B в Y при нечіткому відображенні $\mu_\varphi : X \times Y \to [0,1]$ називається об'єднанням всіх нечітких множин, образі яких при цьому відображенні належать нечіткій множині B.

1.2 Нечіткі множини 2-го типу

Концептуальне визначення нечітких множин типу 2 (НМТ2) та інших узагальнень нечітких множин більш високого порядку вперше було введено Заде в роботі [1].

Нечітка підмножина універсальної множини X є нечітка множина типу 2, якщо значеннями її функції належності є нечіткі множини з інтервалу [0,1].

У роботах [2, 3] дано визначення НМТ2 через формальне подання її функції приналежності у вигляді відповідного відображення.

Нечітка множина типу 2, яку позначимо як A, на множині X це нечітка множина, яке характеризується нечіткою функцією належності $\mu_A : X \to [0,1]^J$ зі значенням $\mu_A(x)$ званим нечітким ступенем (нечітким ступенем належності) і представляє собою НМТ1 на множині $J \subseteq [0,1]$.

У роботах [2, 3], за аналогією з НМТ1, нечітка ступінь $\mu_A(x)$ для скінченної множини J представляється як

$$\mu_A(x) = \frac{f_X(u_1)}{u_1} + \frac{f_X(u_1)}{u_2} + \ldots + \frac{f_X(u_M)}{u_n} = \sum_{i=1}^{M} \frac{f_X(u_i)}{u_i}.$$

Нечітка ступінь $\mu_A(x)$ для нескінченної множини J представляється як:

$$\mu_A(X) = \int_u \frac{f_X(u)}{u}.$$

Якщо необхідна додаткова оцінка самих значень з інтервалу $[u_i, u_j]$, то переходимо до поняття НМТ2, значеннями функції належності якої є НМТ1. НМТ2 А можна представити як:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{[\sum_{i=1}^{M_j} \frac{f_X(u_i)}{u_i}]}{x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_j)}{x_j} \text{ або } A = \int_x \frac{\int_u \frac{f_X(u)}{u}}{x} = \int_x \frac{\mu_A(x)}{x}.$$

В рамках даної роботи розглянемо набір термінів і форми подання НМТ2 в порівнянні з описаними вище, так званою, класичною термінологією і формами подання НМТ2, а також термінологією і формами подання, які відповідають НМТ1.

Для кожного елемента $x \in X$, званого первинною змінною (primary variable), графічне представлення НМТ1 (у формі значень функції належності цієї множини, наприклад, функції належності f_{x_k} на рис.1.1) на площині, чиїми осями є належності u і μ_A, називається вертикальним зрізом (vertical slice) нечіткої функції належності μ_A.

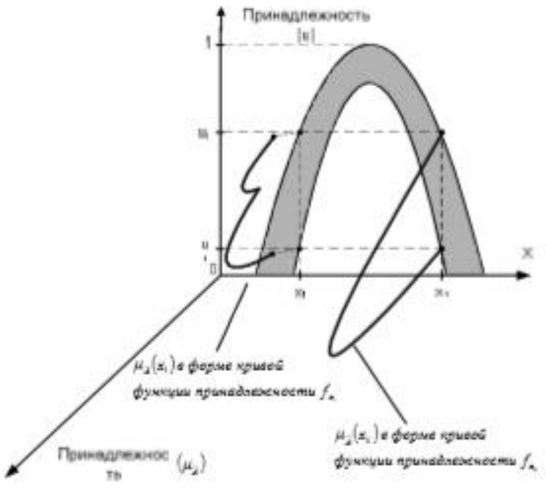

Рис. 1.1.

Подання НМТ2 A у вигляді вертикальних зрізів або, що по суті є тим же самим, сукупності всіх вторинних множин або, що також є тим же самим, об'єднання всіх вторинних функцій належності називається поданням НМТ2 способом вертикального зрізу.

Так як $\mu_A(x)$ розглядаємо як функцію (маючи на увазі під нею і НМТ1), то можна говорити і про її області визначення і значень:

Елементами області значень вторинної функції належності є вторинні ступені. Вторинна ступінь являє собою амплітуду значень вторинної функції належності $f_x(u)$.

Область визначення вторинної функції належності називається первинної належністю і позначається як J_x , де $J_x \subseteq [0,1], \forall x \in X$. Елементами первинної належності є вторинні змінні, що позначаються u, $u \in U$ або $u \in J_x \subseteq U = [0,1]$.

Вторинні змінні можна розглядати як значення функцій належності так званих вкладених НМТ1 (новий тип НМТ1, який використовується при описі НМТ2 і відмінний від вторинної множини). Перш ніж розглядати вкладені НМТ1, розглянемо вкладені НМТ2.

Вкладеним НМТ2 A_e з потужністю N для дискретних (кінцевих) множин X і U називається множиною кортежів з трьох елементів, де перші елементи кортежу являють собою відповідні первинні змінні $x_i \in X$, другі елементи представляють точно одне значення з $J_{x_1}, J_{x_2}, ..., J_{x_N}$ для кожної первинної змінної, а саме $u_1, u_2, ..., u_N$, треті елементи представляють відповідні вторинні ступені $f_{x_1}(u_1), f_{x_2}(u_2), ..., f_{x_N}(u_N)$, тобто

$$A_e = \sum_{i=1}^{N} \frac{[\frac{f_{x_i}(u_i)}{u_i}]}{x_i}, u_i \in J_{x_i} \subseteq U = [0,1], x_i \in X .$$

Вкладеною НМТ2 A_e для нескінченних множин X і U називається множина, у якої кожна первинна змінна $x \in X$ має тільки одну вторинну змінну $u \in U$ (тобто, одне значення первинної належності) з відповідним вторинним ступенем, тобто

$$A_e = \int_{x \in X} \frac{[\frac{f_x(u)}{u}]}{x}, u \in J_x \subseteq U = [0,1].$$

Вкладеною НМТ1 A_e з потужністю N для дискретних (кінцевих) множин X і U називається множина пар, де перші елементи пари являють собою відповідні первинні змінні $x_i \in X$, а другі елементи точно одне значення з $J_{x_1}, J_{x_2}, ..., J_{x_N}$, а саме $u_1, u_2, ..., u_N$, тобто

$$A_e = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i}{x_i}, u_i \in J_{x_i} \subseteq U = [0,1], x_i \in X .$$

Вкладеною НМТ1 A_e для нескінченних множин X і U називається множина, що представляє собою об'єднання всіх первинних ступенів належності вкладеного НМТ2 A_e (рис.1.2, 1.3) тобто

$$A_e = \int_{x \in X} \frac{u}{x}, u \in J_x \subseteq U = [0,1].$$

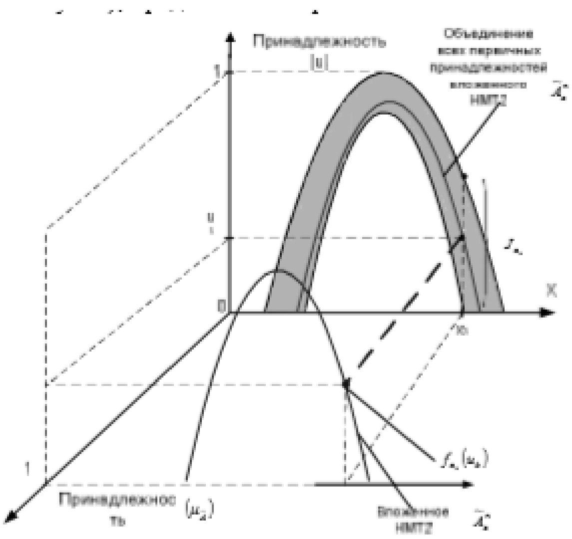

Рис. 1.2.

Таким чином, вкладене НМТ1 A_e являє собою область визначення для вкладеного НМТ2 A_e.

Вкладені НМТ2 A_e і НМТ1 A_e з нескінченними множинами X і U використовуються тільки в теоретичних цілях, в зв'язку з тим, що кількість відповідних вкладених множин є незліченою.

Займана площа невизначеності фактично може розглядатися як нечітка множина, значеннями функції належності якої є інтервали. Як інтервалів в такому випадку виступають первинні належності. Даний підхід до подання займаної площі невизначеності в теорії НМТ2 не розглядається, проте представляє інтерес з точки зору відображення теоретичних передумов до появи і використання самого поняття FOU, як розвитку класичних форм представлення НМТ2. У загальному випадку, обмежень на вид FOU не існує. При цьому FOU може мати обмеження зверху і знизу відповідно у вигляді верхньої та нижньої функцій приналежності.

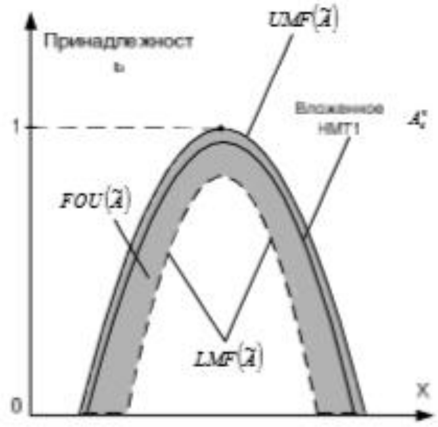

Рис.1.3.

Верхня функція належності (upper membership function), що позначається UMF(A) або $\underline{\mu}_A$, і нижня функція належності, що позначається LMF (A) або $\underline{\mu}_A$(рис.1.3), визначають відповідні НМТ1 і обмежують FOU зверху і знизу відповідно, тобто $\bar{\mu}_A \equiv \overline{FOU(A)}\ \ \forall x \in X$, $\underline{\mu}_A \equiv \underline{FOU(A)}\ \ \forall x \in X$.

Розглянемо новий спосіб представлення НМТ2, представлений в роботі [4] і заснований на теоремі уявлення (Representation Theorem). Доведення теореми уявлення наведено також в роботі [4]. Згідно теореми уявлення НМТ2 А може бути представлена як об'єднання вкладених в неї більш простих НМТ2 A_e^j , тобто $A = \sum_{i=1}^{n} A_e^j = \bigcup_{j=1}^{n} A_e^j$.

1.3 Нечіткі числа

За означенням Dubois and Prade [5], нечітка підмножина f числової прямої R з обмеженим носієм називається нечітким числом, якщо його функція належності $\mu_f(x),\ x \in R$ це

1) неперервне відображення з R в замкнутий інтервал [0, 1];

2) стала на $(-\infty, c)$: $\mu_f(x) = 0$ для будь-якого $x \in (-\infty, c)$;

3) строго зростає на $[c, a]$;

4) стала на $[a,b]$: $\mu_f(x)=1$ для будь-якого $x\in[a,b]$;

5) строго зменшується на $[b,d]$;

6) стала на $(d,+\infty)$: $\mu_f(x)=0$ для будь-кого $x\in(d,+\infty)$.

Тут $a,b,c,d\in R$ за умови $c\le a\le b\le d$.

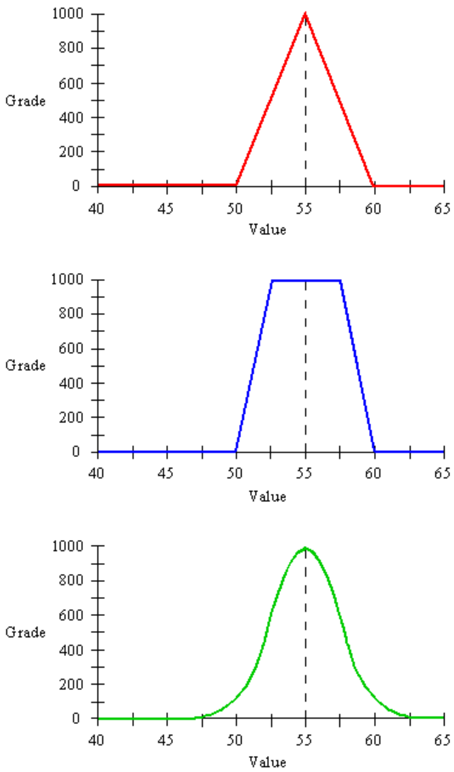

Рис. 1.4

Нечітка множина f з R з функцією належності $\mu_f(x)$, $x\in R$, називається нечітким дискретним числом, якщо його носій є скінченним, тобто $\mathrm{supp}(f)=\{x_1,...,x_m\}$, де $x_1,...,x_m\in R$ за умови $x_1<...<x_m$ та існують натуральні числа s,t такі, що $1\le s\le t\le m$, а також для натуральних чисел i,j,p,q виконуються умови:

1) $\mu_f(x_i)=1$ для будь-якого $s\le i\le t$;

2) якщо $i<j<s$, то $\mu_f(x_i)\le\mu_f(x_j)<1$;

3) якщо $t>p>q$, то $1>\mu_f(x_p)\ge\mu_f(x_q)$.

1.4 Нечіткі експертні оцінки

Думка експертів часто має невизначений, нечіткий характер. У задачах, де думку експерта приймають як строго задані числа, які потім обробляють за допомогою методів прикладної статистики і приймають за результат звичайних фізичних вимірів, є поширеною помилкою. У разі такої "цифровізації" висновки, отримані внаслідок обробки інформації, можуть не мати відношення до реальності. Не варто забувати і про те, що оцінка об'єктів часто проводиться з деяким ступенем похибки, яка повинна враховуватися. Щоб врахувати нечіткі судження, можна скористатися апаратом «м'яких» обчислень, теорією нечітких множин.

Експерти можуть мати нечіткі міркування як за одним критерієм, якщо вони мають схожу спеціалізацію, так і за різними критеріями, якщо вони оцінюють різні сторони об'єкта експертизи. Найбільш простим вирішенням цієї проблеми є дефазифікація оцінок. Якщо дана нечітка оцінка X з функцією належності $\mu(x)$, дефазиційна оцінка X^a знаходиться за формулою[7]:

$$X^a = \frac{\int x\mu(x)dx}{\int \mu(x)dx}$$

Після дефазифікації можна використовувати множину поширених методів обробки експертних оцінок. Нечітка оцінка дозволяє відбити не тільки «цінність» значення критерію для об'єкта експертизи, а й ступінь впевненості експерта у цій оцінці.

На рис. 1.5 представлено дві експертні оцінки. Медіана оцінки другого експерта більша за медіану оцінки першого експерта. Це пов'язано з тим, що другий експерт набагато впевненіший у своїй оцінці і цю впевненість необхідно враховувати.

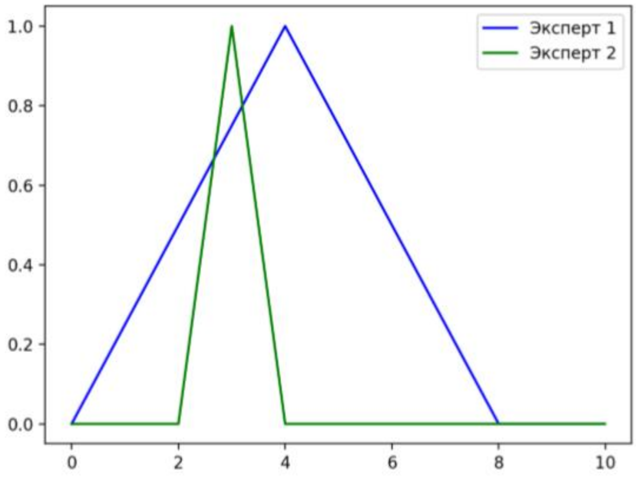

Рис. 1.5.

1.5 Нечітка зважена сума

Найбільш простим способом є знаходження середньої нечіткої оцінки. Функція належності загальної оцінки виглядатиме так:

$$\mu(x^*) = \sup_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = x^*} \min_i \mu_i(x_i), \qquad (1.1)$$

де $\mu_i(x_i)$ – це функція належності оцінки i-го експерта, n – це кількість експертів. Приклад розрахунку двох експертів наведено на рисунку 1.6.

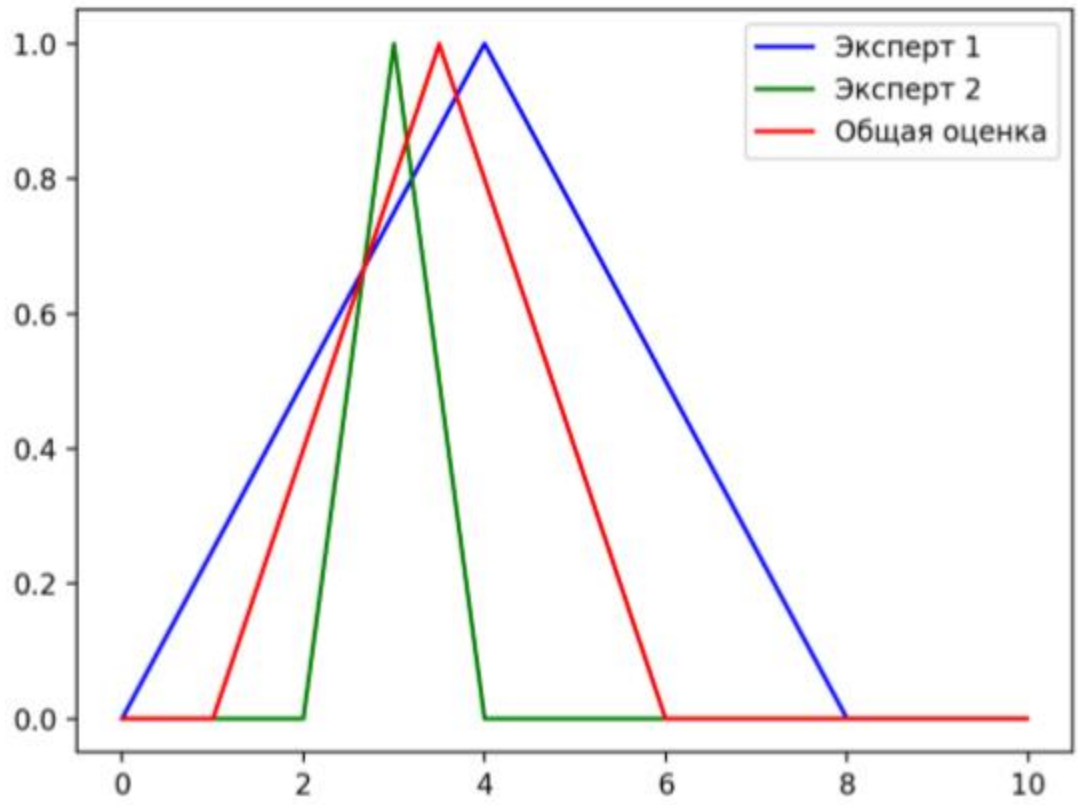

Рис. 1.6.

Експертам можна надати нечіткі ваги. Наприклад, при прийнятті рішення в задачі бере участь особа, яка приймає рішення (ОПР). Наприклад, чим більшу кількість експертиз зробив експерт, тим більша його вага. Оцінюючи наукові праці ефективним є аналіз публікацій експерта і визначення рейтингу статей з тематики проекту. Для оцінки програмного проекту ефективним є аналіз профілю експерта у системах управління версіями.

Для задання нечіткої компетентності можуть використовуватися модифікатори нечітких значень, такі як, наприклад, для нечіткої проблеми компетентний експерт можливі наступні варіанти: "найкомпетентніший експерт", "суттєво компетентний експерт", "досить компетентний експерт", "задовільно компетентний експерт" "малокомпетентний експерт". Функції належності компетентності експерта представлені рисунку 1.7. Нечіткі ваги експерта можуть змінюватися від проекту до проекту, залежно з релевантністю тематики експерту.

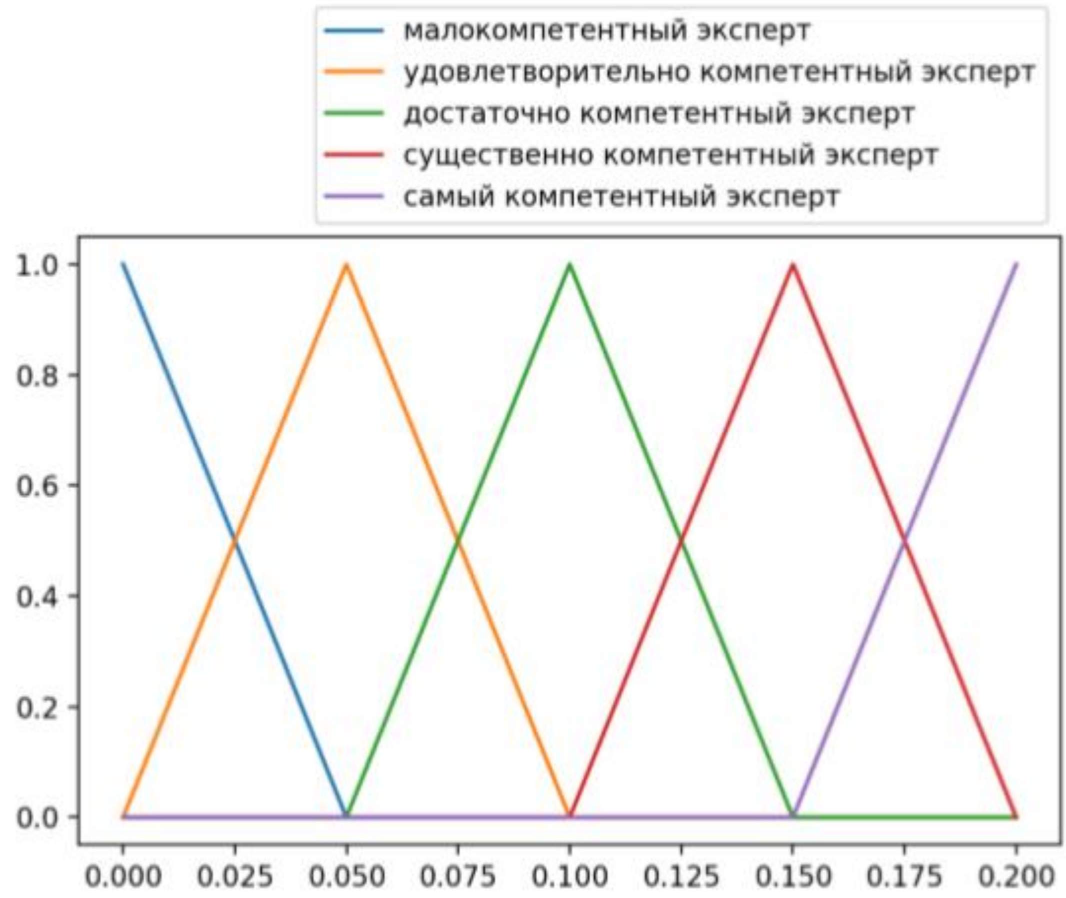

Рис 1.7.

Обчислення підсумкової оцінки відбувається за стандартною формулою виваженої суми[7]:

$$X^* = \sum_{i=1}^{n} W_i X_i \, .$$

де X_i – нечітка оцінка альтернативної, а W_i – нечітка компетентна думка експерта, X^* – підсумкова оцінка альтернативи.

У цьому правила підсумовування та добуток нечіткого числа виконуються з урахуванням принципу спілкування. Належність операції до певної операції.

$$\mu(y^*) = \sup_{\eta(y_1, y_2, \dots y_n) = y^*} \underset{i}{\theta} \mu_i(y_i) \, ,$$

де η - операція, яку необхідно зробити (у разі обчислення $W_i X_i$ - це добуток, а для обчислення $\sum_{i=1}^{n} W_i X_i$ – це сума), y_i - значення, з якими виконується потрібна операція, $\mu_i(y_i)$ - функція належності нечітких значень, $\mu(y^*)$ - функція належності для результату застосування операції η. θ - це операція перетину для функцій належності. В роботі – це min, але є інші різновиди цієї операції.

Нехай «Експерт 1» є задовільно компетентним, а «Експерт 2» суттєво компетентним. Тоді функція належності підсумкової оцінки матиме вигляд, показаний рисунку 1.8.

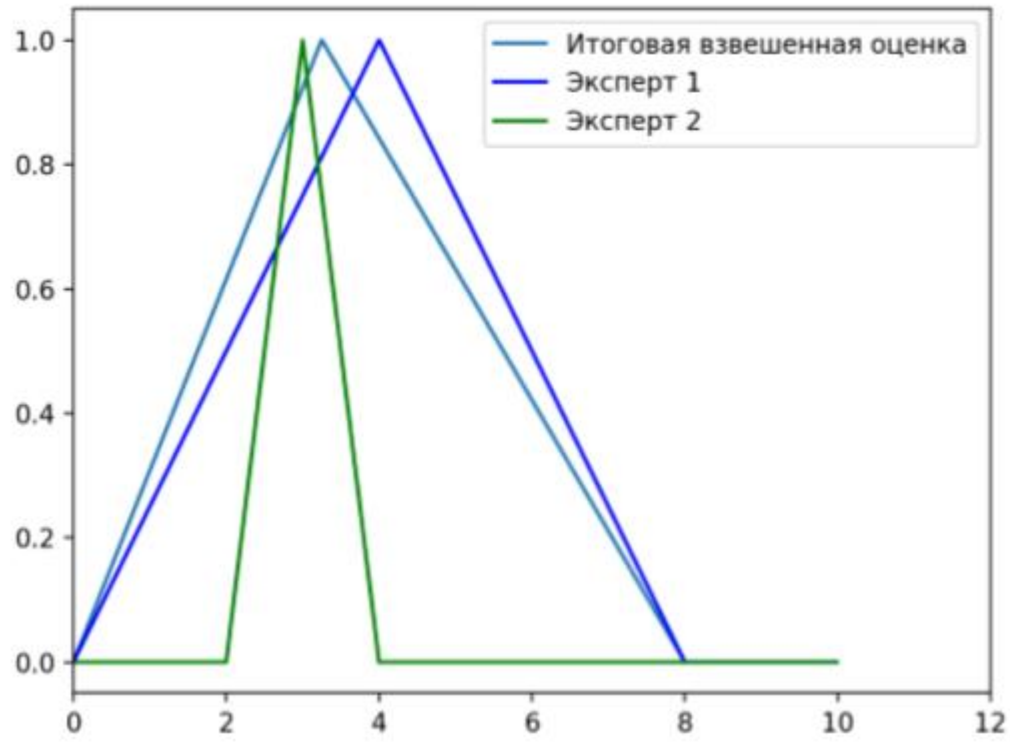

Рис. 1.8.

При цьому розрахунки за формулою (1.1) вигідніші, оскільки не вимагають залучення ЛПР, а також дозволяють вирішувати деякі питання самостійно без залучення ЛПР.

1.6 Порівняння нечітких рангів

Нехай ми отримали нечіткі оцінки кількох об'єктів. Це можуть бути оцінки одного експерта або оцінка, отримана шляхом агрегування кількох думок експертів. Як побудувати рейтинг об'єктів? Який об'єкт краще вибрати?

Замість дефазифікації розглянемо парні порівняння нечітких рангів. Будемо вважати, що чим вища оцінка об'єкта, тим він кращий.

Розглянемо два об'єкти: A_i та A_j, $A_i \succ A_j$. Це означає, що об'єкт A_i не гірший за об'єкт A_j. Щодо двох об'єктів, що знаходяться у відношенні $\succ$, можна визначити ступінь впевненості, використовуючи число $r_{ij} \in [0,1]$. В цьому випадку можна задати матрицю бінарного співвідношення:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & & r_{2m} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & & r_{3m} \\ & & & \ldots & \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & & 1 \end{bmatrix}$$

У загальному випадку ця матриця не є симетричною або обернено симетричною. Матриця складається з елементів, які значеннями функцій належності:

$$r_{ij} = \sup_{x_i \geq x_j} \min(\mu_i(x_i), \mu_j(x_j)) \qquad (1.2)$$

На основі методу парних порівнянь Сааті можна визначити підсумкові ранги об'єктів. Цей метод полягає у використанні мультиплікативної матриці: r_{ij} показує наскільки об'єкт краще іншого, тобто $r_{ij} * r_{ji} = 1$, але в цьому випадку це не так. Виконавши прості арифметичні дії, можна отримати необхідну умову[7]:

$$R^* = \left\| r_{ij}^* = \frac{r_{ij}}{r_{ji}} \right\| \qquad (1.3)$$

Далі за умовою $(\lambda I - R^*)u = 0$ знайдемо максимальне власне значення $\lambda_{\max}^*$ та відповідний вектор факторів впливу u^*. Елемент u_i^* буде підсумковим рангом альтернативи A_i. Значення $\lambda_{\max}^*$ дозволяє визначити суперечливість нечітких відношень переваги C:

$$C = \frac{\lambda_{\max}^* - m}{m - 1}$$

На практиці, значення C<0.1 говорить про відсутність істотних суперечностей у нечіткому ранжируванні.

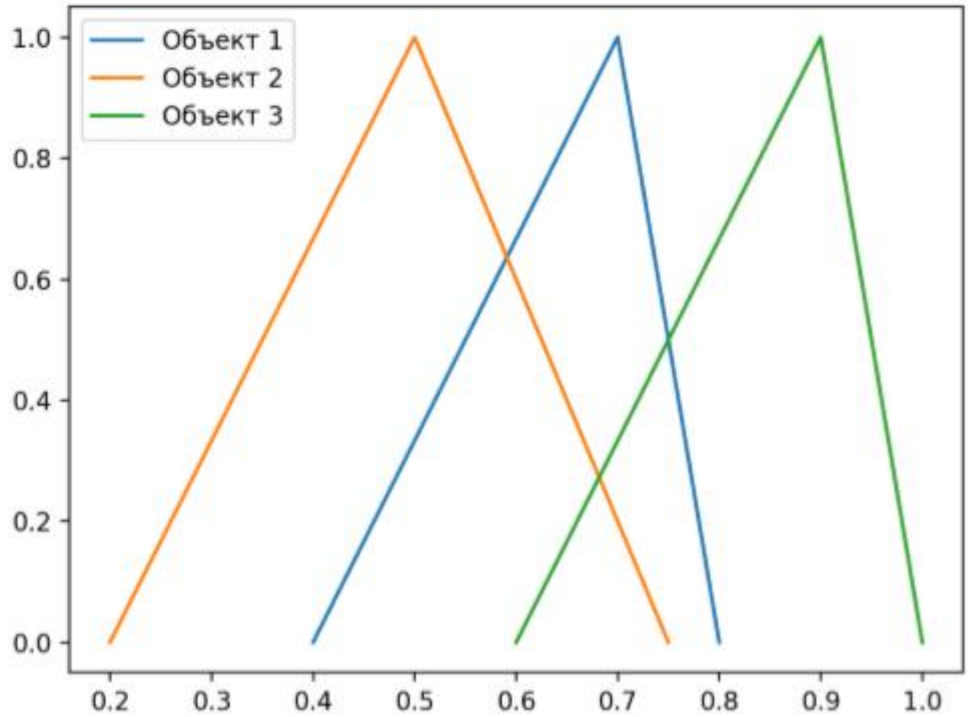

Рис. 1.9.

На рисунку 1.9 можна оцінити три об'єкти, котрим було визначено нечіткі експертні оцінки. При цьому було проведено оцінку за формулою (1.2) з урахуванням результатів розрахунків елементів матриці нечіткого бінарного відношення переваги

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 0.64 & 1 & 0.27 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далі за формулою (1.3) було здійснено перехід до мультиплікативної матриці

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1.57 & 0.5 \\ 0.64 & 1 & 0.27 \\ 2 & 3.67 & 1 \end{bmatrix}.$$

Максимальне значення $\lambda^*_{\max}$ = 3.003. Відповідний власний вектор u^* = (0.415, 0.251, 0.874). Індекс суперечливості: C=0.0013, що свідчить про хорошу узгодженість рангів об'єктів. В результаті об'єкти розташувалися в наступному порядку:

1) об'єкт 3 із рангом 0.874;

2) об'єкт 1 із рангом 0.415;

3) об'єкт 2 із рангом 0.251.

1.7. Середнє нечітке ранжування

Результати розрахунків, призначених для агрегування суджень експертів, можуть бути далекі від думки більшості експертів. Це відбувається, коли дуже висока чи дуже низька оцінка одного експерта сильно зміщує підсумкову оцінку. Для усунення недоліків пропонується наступний алгоритм:

1) за формулою (1.2) розраховуються елементи матриць R_k кожного k-го експерта;

2) шляхом розв'язання оптимізаційної задачі знаходиться «медіанне» нечітке ставлення R^v , яке «близько» на думку більшості експертів;

3) у формулу (1.3) підставляються елементи R^v замість елементів R і таким чином знаходяться підсумкові оцінки об'єктів.

Тепер розглянемо другий крок цього алгоритму. Нехай нечітке відношення R^v є наступною матрицею:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12}^v & r_{13}^v & & r_{1m}^v \\ r_{21}^v & 1 & r_{23}^v & & r_{2m}^v \\ r_{31}^v & r_{32}^v & 1 & & r_{3m}^v \\ & & & \ldots & \\ r_{m1}^v & r_{m2}^v & r_{m3}^v & & 1 \end{bmatrix}.$$

Нечітке відношення для k-го експерта представлено у вигляді наступної матриці:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12}^k & r_{13}^k & & r_{1m}^k \\ r_{21}^k & 1 & r_{23}^k & & r_{2m}^k \\ r_{31}^k & r_{32}^k & 1 & & r_{3m}^k \\ & & & \dots & \\ r_{m1}^k & r_{m2}^k & r_{m3}^k & & 1 \end{bmatrix}.$$

За метрику відстані між відношеннями R^v і R_k використовуємо Манхеттенську відстань. Вона обчислюється за такою формулою[7]:

$$d(R^v, R_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1, j \neq i}^{n} \left| r_{ij}^k - r_{ij}^v \right|.$$

Сума відстаней від усіх відношень R_k до R^v задає цільову функцію оптимізаційної задачі[7]:

$$\min_{r_{ij}} \sum_{k=1}^{n} d(R^v, R_k) = \min_{r_{ij}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1, j \neq i}^{n} \left| r_{ij}^k - r_{ij}^v \right|. \qquad (1.4)$$

Ця задача близька медіані Кемені на випадок "чіткого" ранжування. Через бінарні оптимізаційні змінні вихідна постановка медіани Кемені не має сенсу в силу бінарних оптимізаційних змінних, а в даній постановці обмеження значно м'якше: $r_{ij}^v \in [0,1]$.

Цільова функція (1.4) нелінійна, але задача легко може бути перетворена на задачу лінійного програмування. Введемо дві нові невід'ємні змінні: y_{ij}^+ та y_{ij}^-. Для них має виконуватись обмеження $y_{ij}^+ - y_{ij}^- = r_{ij}^k - r_{ij}^v$. Оскільки змінні y_{ij}^+ та y_{ij}^- − невід'ємні, можна позбутися модуля $\left| r_{ij}^k - r_{ij}^v \right| = \left| y_{ij}^+ - y_{ij}^- \right| = y_{ij}^+ - y_{ij}^-$. В результаті перетворення задача буде записана у вигляді:

$$\min_{r_{ij}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1, j \neq i}^{n} (y_{ij}^+ - y_{ij}^-),$$

$$y_{ij}^+ - y_{ij}^- + r_{ij}^v = r_{ij}^k,$$

$$y_{ij}^+ \geq 0, y_{ij}^- \geq 0, 0 \leq r_{ij}^v \leq 1$$

Оптимальне рішення оптимізаційної задачі не зміниться, якщо для кожної комбінації (i,j), y_{ij}^{+} або y_{ij}^{-} дорівнюватиме нулю. Якщо $r_{ij}^{k} - r_{ij}^{v} < 0$, то y_{ij}^{+} = 0, а якщо $r_{ij}^{k} - r_{ij}^{v} > 0$, то y_{ij}^{-} =0.

За допомогою запропонованих методів агрегування нечітких оцінок судження експертів можна враховувати інформацію про розмитість і невизначеність судження експерта до останнього етапу прийняття рішень. Нечітке ранжування на основі експертних суджень дозволяє оцінити рівень узгодженості отриманих результатів.

Розділ 2. Побудова оцінок для нечіткої множини експертів

2.1. Сума нечітких чисел з нечіткою множиною доданків

Нехай на числової осі R задані нечіткі числа F_j, $j \in N$ з відповідні функціями належності $\mu_{F_j}(x_j)$, де $N = \{1, 2, ..., n\}$ - множина їх індексів, n - їх кількість. Позначимо їх носії X_j, $j \in N$.

Спочатку розглянемо $F = \tilde{\sum\limits_{j \in N}} F_j$ - суму чіткої множини N нечітких чисел F_j, $j \in N$. Позначимо $x = (x_1, ..., x_n)$ - вектор доданків, $X = \prod\limits_{j \in N} X_j$ - множина цих векторів. Нечітку суму $F = \tilde{\sum\limits_{j \in N}} F_j$ визначимо як нечітке число $F = \{(z, \mu_F(z)) : z \in R\}$ з функцією належності

$$\mu_F(z) = \max_{x \in X:\ \sum\limits_{j \in N} x_j = z} \ \min_{j \in N} \mu_{F_j}(x_j),\ z \in R.$$

Нехай I - деяка нечітка множина на множині індексів N з функцією належності $\mu_I(j)$, $j \in N$. Розглянемо питання, що являє собою сума нечітких чисел F_j, $j \in N$, у випадку, коли ці множини беруть участь в цій операції з відповідними ступенями належності $\mu_I(j)$, $j \in N$? Іншими словами, який результат дає операція додавання нечітких чисел F_j, $j \in N$, з нечіткою множиною складових I? Для запису цієї операції використовуємо позначення $\sum\limits_{(j, \mu_I(j)) \in I} F_j$.

Природне узагальнення операції суми $F = \tilde{\sum\limits_{j \in N}} F_j$ на випадок нечіткої множини доданків I призводить до того, що множина $S = \sum\limits_{(j, \mu_I(j)) \in I} F_j$ матиме функцію приналежності такого виду

$$\tilde{M}_S(z) = \max_{x\in X:\ \sum\limits_{(j,\mu_I(j))\in I} x_j = z} \ \min_{(j,\mu_I(j))\in I} \mu_{F_j}(x_j),\ z\in R \qquad (2.1)$$

У формулі (2.1) записи $\sum\limits_{(j,\mu_I(j))\in I} x_j$ і $\min\limits_{(j,\mu_I(j))\in I} \mu_{F_j}(x_j)$ є позначеннями того, що значення відповідно x_j і $\mu_{F_j}(x_j)$, $j\in N$ беруть участь в операціях відповідно складання і взяття мінімуму з відповідними ступенями належності $\mu_I(j)$, $j\in N$ (тобто індекси $j\in N$ операндів цих операцій утворюють нечітку множину $I=\{(j,\mu_I(j)):\ j\in N\}$). Слід звернути увагу на те, що у формулі (1) не присутній завдання знаходження значення $\sum\limits_{(j,\mu_I(j))\in I} x_j$ (яка подібна постановці вихідної завдання). Йдеться про множину $\{x\in X:\ \sum\limits_{(j,\mu_I(j))\in I} x_j = z\}$.

Давайте розберемося, який сенс має формула (1) з такими записами. Для цього використовуємо відомий підхід [1] декомпозиції нечіткої множини на множини -рівня $\hat{z}\in R$. Позначимо

$$I_\alpha = \{j\in N:\ \mu_I(j)\ge\alpha\}$$

- множина рівня нечіткої множини індексів доданків $I=\{(j,\mu_I(j)):\ j\in N\}$.

Для фіксованого $\hat{z}\in R$. позначимо

$$G_\alpha(\hat{z}) = \{x\in X:\sum_{j\in I_\alpha} x_j = \hat{z}\}$$

- множина векторів $x=(x_1,...,x_n)$ таких, що сума їх компонент з індексами з множини I_α, $\alpha\in(0,1]$ дорівнює $\hat{z}$. Позначимо також $G(\hat{z}) = \bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]} (G_\alpha(\hat{z}),\alpha)$ - відповідна нечітка множина з функцією належності $\mu_{G(\hat{z})}(x) = \max\{\alpha\in(0,1]:\ x\in G_\alpha(\hat{z})\}$, $x\in X$.

Зауваження 2.1. Слід зазначити, що область визначення значення суми z можна цілком звузити до множини її можливих значень $Z=\{z\in R:\ z=\sum\limits_{j\in I_\alpha} x_j,\ x_j\in X_j,\ j\in I_\alpha,\ \alpha\in(0,1]\}$. Тому далі будемо писати $z\in Z$

Зауваження 2.2 Нехай A - множина значень $\mu_I(j), j \in N$ ступенів належності нечіткої множини індексів доданків $I = \{(j, \mu_I(j)) : j \in N\}$. Оскільки ступеня належності різних індексів доданків можуть збігатися, то $|A| \le n$.

Означення 2.1 [6]. Сумою $\tilde{\sum\limits_{(i,\eta(i))\in\tilde{N}}} f_i$ нечіткої множини нечітких чисел називається T2FS $S = \{((z, y), \mu_S(z, y)) : z \in Z, y \in [0,1]\}$ з T2MF

$$\mu_S(z, y) = \begin{cases} \max\limits_{\alpha \in A}\{\alpha : y = \mu_{\Phi(\alpha)}(\hat{z})\}, & y \in J_z; \\ 0, & y \notin J_z; \end{cases}$$

$z \in Z$, де $Z = \{z \in R : z = \sum\limits_{j \in I_\alpha} x_j, x_j \in X_j, j \in I_\alpha, i \in N\}$

- множина можливих значень суми

$$J_z = \{y \in [0,1] : y = \mu_{\Phi(\alpha)}(\hat{z}), \alpha \in A\} \tag{2.2}$$

- множина первинних ступенів $y \in [0,1]$ зі строго позитивними вторинними оцінками $\mu_S(z, y)$, яка збігається з носієм $\mathrm{supp}\tilde{M}_S(z)$ (формула (9)) нечіткої множини $\tilde{M}_S(z)$ значень максміна (2.1);

$$\mu_{\Phi(\alpha)}(z) = \begin{cases} \max\limits_{x \in G_\alpha(z)} \min\limits_{j \in I_\alpha} \varphi_j(x_j), & G_\alpha(z) \ne \varnothing; \\ 0, & G_\alpha(z) = \varnothing; \end{cases} \tag{2.3}$$

- функція належності нечіткого числа

$$\Phi(\alpha) = \{(z, \mu_{\Phi(\alpha)}(z)) : z \in Z\} \tag{2.4}$$

це сума рівня α, вона дорівнює сумі нечітких чисел F_j з індексами j з множини складових I_α рівня α, тобто $\Phi(\alpha) = \tilde{\sum\limits_{j \in I_\alpha}} F_j$

$$G_\alpha(z) = \{x \in X : \sum_{j \in I_\alpha} x_j = z\} \tag{2.5}$$

- множина векторів $x = (x_1, ..., x_n)$, для яких сума компонент з індексами з множини доданків I_α дорівнює z

$$I_\alpha = \{j \in N : \mu_I(j) \ge \alpha\} \tag{2.6}$$

- множина доданків рівня α, $\alpha \in A$ і A - множина значень $\mu_I(j), j \in N$ ступенів належності нечіткої множини індексів доданків $I = \{(j, \mu_I(j)) : j \in N\}$

Декомпозиція суми нечіткої множини нечітких чисел. Інтерпретація отриманого T2FS суми S недостатньо наочна. Тому, метою даного підрозділу буде уявлення операції суми нечіткої множини нечітких чисел в зручній для розуміння і використання формі. Для цього ми застосуємо декомпозиційний підхід.

Нехай A - множина значень $\mu_I(j), j \in N$ ступенів належності нечіткої множини індексів доданків $I = \{(j, \mu_I(j)) : j \in N\}$. Нехай також для $\forall z \in Z$ задана єдина первинна ступінь належності $y_z \in J_z \subseteq [0,1]$. Скажімо, що вкладене T2FS в T2FS суми S має постійну вторинну оцінку $\alpha \in A$, якщо $\varphi(z, y_z) \equiv \alpha$. Позначимо його $\tilde{S}^e_\alpha = \{((z, y_z), \eta(i)) :\ z \in Z\}$. Для кожного $\alpha \in A$ нехай T1FS $S^e_\alpha = \{(z, y_z) :\ z \in Z\}$ - це сума рівня α, яка є нечітким числом $S^e_\alpha \equiv \Phi(\alpha) = \{(z, \mu_{\Phi(\alpha)}(z)) :\ z \in Z\}$, рівним сумі $\tilde{\sum\limits_{j \in I_\alpha}} F_j$ нечітких чисел F_j з індексами j з множини I_α індексів доданків рівня α.

Теорема 2.1 [6]. T2FS S суми представляється як сукупність $\{\tilde{S}^e_\alpha :\ \alpha \in A\}$ вкладених T2FSs $\tilde{S}^e_\alpha = \{(S^e_\alpha, \alpha)\}$ з постійною вторинною оцінкою $\alpha \in A$. Іншими словами,

$$\tilde{F} = \{(\Phi(\alpha), \alpha) :\ \alpha \in A\}. \tag{2.7}$$

2.2 Постановка задачі побудови оцінок для нечіткої множини експертів та метод її розв'язання

Професіональний експерт володіє такими якостями як: компетентність, креативність, евристичність, інтуїція, предикативність, всебічність.

Степінь компетентності експертів, як правило, визначають на основі статистичного аналізу участі експерта у попередніх експертизах, отримуючи так звані ваги експертів $\alpha_i, i = \overline{1,n}$. Нехай $a_{\Phi j}$ – фактична оцінка у j – й експертизі, a_{ij} – оцінка i-го експерта. Тоді відносна похибка i – го експерта у j – й експертизі $\varepsilon_{ij} = \left| a_{\Phi j} - a_{ij} \right| / a_{\Phi j}$, а його вага

$$\alpha_i = ((\sum_{s=1}^{k_i} \varepsilon_{is}) / k_i) / (\sum_{i=1}^{n} ((\sum_{s=1}^{k_i} \varepsilon_{is})) / k_i$$

Ваги експертів можна обраховувати й іншими способами, зокрема, враховувати їх психофізіологічні характеристики (схильність до ризику, "правдивість", "незалежність", "реалістичність" і т.п.). Задачу визначення ваги експертів, у свою чергу, можна розглядати як задачу обробки експертної інформації. У загальному випадку ваги експертів можна визначати у довільних шкалах, тоді, як правило, їх нормалізують:

$\alpha_i' = \alpha_i / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, де α_i - вага і-го експерта у довільній шкалі.

Результуюча оцінка a:

$$a = \Phi(a_1, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \tag{2.8}$$

Нехай на числової осі R задані нечіткі оцінки F_j, $j \in N$ з відповідні функціями належності $\mu_{F_j}(x_j)$, де $N = \{1, 2, ..., n\}$ - множина їх індексів, n - їх кількість. Позначимо їх носії X_j, $j \in N$.

Спочатку розглянемо $F = \frac{1}{n} \tilde{\sum_{j \in N}} F_j$ - агреговану оцінку чіткої множини N експертів, які дають індивідуальні нечіткі оцінки F_j, $j \in N$. Позначимо $x = (x_1, ..., x_n)$ - вектор індивідуальних оцінок експертів, $X = \prod_{j \in N} X_j$ - множина цих векторів. Нечітку експертну агреговану оцінку $F = \frac{1}{n} \tilde{\sum_{j \in N}} F_j$ визначимо як нечітке число $F = \{(z, \mu_F(z)) : z \in R\}$ з функцією належності

$$\mu_F(z) = \max_{x \in X:\ \frac{1}{n}\sum_{j \in N} x_j = z} \ \min_{j \in N} \mu_{F_j}(x_j),\ z \in R.$$

Нехай I - деяка нечітка множина на універсальній множині індексів N експертів з функцією належності $\mu_I(j)$, $j \in N$. Розглянемо питання, що являє собою агрегована експертна оцінка F_j, $j \in N$, у випадку, коли ці оцінки беруть участь в цій операції з відповідними ступенями належності $\mu_I(j)$, $j \in N$? Іншими словами, який результат дає операція агрегування нечітких оцінок F_j, $j \in N$, з нечіткою множиною складових I? Для запису цієї операції використовуємо позначення $\frac{1}{n}\sum_{(j,\mu_I(j))\in I} F_j$.

Виникає природне запитання: «Коли виникає необхідність в такій операції?» Для відповіді на це питання ми візьмемо такий приклад. Нехай кожен експерт дає індивідуальну оцінку F_j, j, $j \in N = \{1,2,3,4,5\}$. Навряд чи викличе нерозуміння питання: «Наскільки істинна якість товару, яку оцінив кожен з експертів?» Для того що б на нього відповісти, нам потрібно знайти агреговану експертну оцінку для нечітких оцінок F_j, $j \in N = \{1,2,3,4,5\}$. Складно не погодитися з тим, що в ряді випадків, невизначеність може мати місце також при завданні множини доданків операції знаходження середнього. Наприклад, для відповіді на питання «Наскільки істинна якість товару, яку оцінив кожен з експертів?» треба знайти середнє нечітких чисел, за умови, що ці числа беруть участь в операції додавання зі ступенями належності, нечіткій множині «Якість товару». У цьому прикладі ця множина буде нечіткою множиною індексів доданків.

З означення про суму нечіткої множини нечітких чисел і результуючої оцінки a (2.8) випливає означення:

Означення 2.2. Агрегованою оцінкою $\frac{1}{n}\tilde{\sum_{(i,\eta(i))\in\tilde{N}}} f_i$ нечіткої множини нечітких оцінок називається T2FS $S = \{(z,y),\mu_S(z,y)) : z \in Z,\ y \in [0,1]\}$,

з T2MF

$$\mu_S(z,y)=\begin{cases}\max\limits_{\alpha\in A}\{\alpha:\ y=\mu_{\Phi(\alpha)}(\hat{z})\},\ y\in J_z;\\ \qquad 0, \qquad\qquad y\notin J_z;\end{cases}$$

$z\in Z$, де $Z=\{z\in R:\ z=\sum\limits_{j\in I_\alpha}x_j,\ x_j\in X_j,\ j\in I_\alpha,\ i\in N\}$, а $\mu_{\Phi(\alpha)}(z)$- функція належності нечіткого числа $\Phi(\alpha)=\{(z,\mu_{\Phi(\alpha)}(z)):\ z\in Z\}$, що дорівнює середньому $\frac{1}{|I_\alpha|}\tilde{\sum\limits_{j\in I_\alpha}}F_j$ нечітких чисел F_j з індексами j з множини I_α індексів доданків рівня α.

Як наслідок з теореми 2.1 одержимо.

Твердження 2.1. T2FS S агрегованої оцінки представляється як сукупність $\{\tilde{S}^e_\alpha:\ \alpha\in A\}$ вкладених T2FSs $\tilde{S}^e_\alpha=\{(S^e_\alpha,\alpha)\}$ з постійною вторинною оцінкою $\alpha\in A$. Для кожного $\alpha\in A$ T1FS $S^e_\alpha=\{(z,y_z):\ z\in Z\}$ - це агрегованої оцінки рівня α, яка є нечітким числом $S^e_\alpha\equiv\Phi(\alpha)=\{(z,\mu_{\Phi(\alpha)}(z)):\ z\in Z\}$, що нечіткому середньому $\frac{1}{|I_\alpha|}\tilde{\sum\limits_{j\in I_\alpha}}F_j$ нечітких чисел F_j з індексами j з множини I_α індексів доданків рівня α. Іншими словами,

$$S=\{(\frac{1}{|I_\alpha|}\tilde{\sum_{j\in I_\alpha}}F_j,\alpha):\ \alpha\in A\} \qquad (2.9)$$

2.3 Приклад побудови експертних оцінок

Експертний метод визначення показників якості продукції - це метод визначення значень показників, який здійснюється на основі рішення, яке приймають експерти. Експертні оцінки - це судження висококваліфікованих спеціалістів-професіоналів, висловлені у вигляді змістовної, якісної чи кількісної оцінки об'єкта, призначені для використання під час прийняття рішень. Експертизи бувають індивідуальні та колективні, однотурові та багатотурові з обміном інформацією між експертами та без, анонімні та відкриті. Розмаїття сфер застосування робить досить гнучким використовуваний практично апарат експертного оцінювання. Однак досвід показує, що при реальному використанні експертних оцінок далеко не завжди можна вкластися в одну з широко відомих схем, що застосовуються. Виникаючі практично завдання нерідко виявляються складніше традиційних підходів. Справжня мета застосування технологій експертного оцінювання - прийняття ефективного рішення, а не обов'язкове використання традиційних схем. Тому фахівцям, які проводять експертизи, важливо вміти творчо підійти до їх організації та проведення для того, щоб вирішити основне завдання - забезпечити адекватну оцінку об'єкта експертизи, виробити альтернативні варіанти рішень, що ведуть до мети, а серед них вибрати найефективніший і надійніший. Основна мета організації та проведення експертиз – підвищити професійний рівень прийнятих рішень за рахунок використання спеціально розроблених та перевірених на практиці технологій експертного оцінювання. Повернемося безпосередньо до експертних оцінок. Для того, щоб отримувана експертна інформація була якісною, необхідно виконання наступних умов:

- наявність експертної комісії, що складається з фахівців, професійно знайомих з об'єктом експертизи, які мають досвід роботи експерта;
- наявність аналітичної групи, що професійно володіє технологією організації та проведення експертиз, методами отримання та аналізу експертної інформації;
- отримання достовірної експертної інформації;
- коректне оброблення та аналіз експертної інформації. Відсутність будь-якої з перерахованих умов ставить під сумнів ефективність і коректність експертизи, що проводиться. Експертне оцінювання є процесом вимірювання, який можна визначити як процедуру порівняння об'єктів за обраними показниками (ознаками). Як показники порівняння можуть використовуватися просторово-часові, фізичні, психічні та інші властивості та характеристики об'єктів.

Для цілей експертного оцінювання виникають такі базисні задачі:
- Побудова узагальненої оцінки понять та об'єктів на основі індивідуальних оцінок експертів;
- Побудова узагальненої оцінки на основі парного порівняння об'єктів кожним з експертів;
- Оцінка компетентності експертів;
- Оцінка достовірності результатів.

Так при застосуванні комплексного методу оцінки якості виробів, що вважається найбільш перспективним, застосовують комплексний показник якості, який визначається шляхом зведення окремих показників за допомогою коефіцієнтів вагомості кожного показника, значення яких можливо отримати тільки експертним шляхом. За існуючими методиками розрахунок комплексних та узагальнених показників проводиться за формулою $K_i = \sum K_i^{'} * m_i$, де K_i - комплексний показник; $K_i^{'}$ - поодинокі показники, що характеризують певні властивості продукції, що встановлюються експертним методом або одержуються розрахунковим шляхом, m_i - показник вагомості.

Показники якості $K_i = 1 = (\max)$ відповідають так званим ідеальним варіантам. Іншими словами, під час розробки та виробничого тестування не було виявлено жодних невідповідностей чи відхилень як у процесі виготовлення, так і в самому продукті, оскільки це майже неможливо.

Оскільки інтервали норм якості виробів мають верхню та нижню межі, то умова відповідності виробу вимогам до якості має вигляд $K_0^{\min} \le K_0 \le 1,$ де $K_0^{\min}$ - мінімальне значення комплексного показника якості.

Створення експертної групи. Прийнята концепція оцінки експертів з метою встановлення істинності їх думок містить у першу чергу ступінь знань і підготовленості експерта до проведення експертної оцінки в оголошеній сфері. Експертні комісії за оцінкою товарів, систематизованим відповідно до основних функціонально конструктивних показників, повинні складатися з експертів, які сприяють вивченню.

$B=1$ - для експерта, який займається розробкою виробів досліджуваної групи.

$B=0.8$ - для експерта, який займається розробкою виробів досліджуваної групи.

$B=0.2$ - для експерта, який зрідка виконує такі роботи.

Приклад. Нехай є експерти множина $N=\{1,2,...,5\}$, яким треба оцінити товар. Експерти пропонують індивідуальні нечіткі оцінки у вигляді нечітких чисел $F_1=(0,1,2)$, $F_2=(4,5,6)$, $F_3=(8,9,10)$, $F_4=(3;3,5;4)$, $F_5=(1;1,5;2)$ "трикутного" типу з функціями належності

$$\mu_{F_1}(x_1)=\begin{cases} x_1, & x_1\in[0,1]; \\ 2-x_1, & x_1\in[1,2]; \end{cases} \quad \mu_{F_2}(x_2)=\begin{cases} x_2-4, & x_2\in[4,5]; \\ 6-x_2, & x_2\in[5,6]; \end{cases}$$

$$\mu_{F_3}(x_3)=\begin{cases} x_3-8, & x_3\in[8,9]; \\ 10-x_3, & x_3\in[9,10]; \end{cases}$$

$$\mu_{F_4}(x_4)=\begin{cases} x_4-3, & x_4\in[3;3,5]; \\ 4-x_4, & x_4\in[3,5;4]; \end{cases} \quad \mu_{F_5}(x_2)=\begin{cases} x_5-1, & x_5\in[1;1,5]; \\ 2-x_5, & x_5\in[1,5;2]; \end{cases}$$

які визначені на носіях відповідно $X_1=[4,5]$, $X_2=[3,5]$, $X_3=[2,4]$, $X_4=[3,4]$ і $X_5=[1,2]$. Нехай I - нечітка множина індексів експертів на множині $N=\{1,2,3,4,5\}$ експертів з функцією належності $\mu_I\ (1)=1$, $\mu_I\ (2)=1$, $\mu_I(3)=1$, $\mu_I(4)=0,8$, $\mu_I(5)=0,2$. Побудуємо:

$X=[4,5]\times[3,5]\times[2,4]\times[3,4]\times[1,2]$ - множина векторів.

$Z=[2,6;4]$- множина можливих агрегованих оцінок.

А={0,2;0,8;1,0}- множину значень ступенів належності нечіткої множини індексів експертів (див. Зауваження 2.2).

Спочатку для $\alpha=\mu_I(1)=\mu_I(2)=\mu_I(3)=1$ згідно формули (2.6) побудуємо множину рівня $I_1=\{1,2,3\}$ нечіткої множини індексів доданків I і на формулі (2.5) побудуємо множини $G_1(z)=\{x\in X:\frac{1}{3}\sum_{i\in I_1}x_i=z\}=\{x\in X:\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)=z\}$ векторів $x=(x_1,x_2,x_3)$

для яких агрегована оцінка індексів із множини доданків $I_1 = \{1, 2, 3\}$ дорівнює $z \in Z$.

Отримаємо: $G_1(z) = \varnothing$ для $z \notin [4,7;5]$

$$G_1(z) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = z,$$
$$x_1 \in [4,5],\ x_2 \in [3,5],\ x_3 \in [2,4], x_4 \in [3,4], x_5 \in [1,2]\}$$

для $z \in [3; 4,7]$.

Далі за формулою (2.3) значення функції належності

$$\mu_{\Phi(1)}(z) = \begin{cases} \max\limits_{x \in G_1(z)} \min\{\mu_{F_1}(x_1), \mu_{F_2}(x_2), \mu_{F_3}(x_3)\}, & z \in [3; 4,7]; \\ 0, & z \in (4,7; 5]; \end{cases}$$

нечіткого числа

$$\Phi(1) = \{(z, \mu_{\Phi(1)}(z)) :\ z \in Z\},$$

яке рівне агрегованій оцінці експертів F_1, F_2 і F_3 з індексами із множини доданків $I_1 = \{1, 2, 3\}$.

$$\mu_{\Phi(1)}(z) = 2 - z / 3, z \in [3; 4,7]$$

Тепер для $\alpha = \mu_{F_4}(4) = 0{,}8$ згідно формули (2.6) побудуємо множину рівня $I_{0,8} = \{1, 2, 3, 4\}$ нечіткої множини індексів доданків I і згідно формули (2.5) побудуємо множину

$$G_{0,8}(z) = \{x \in X : \frac{1}{4}\sum_{i \in I_{0,8}} x_i = z\} = \{x \in X : \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = z\}$$

векторів $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ для яких агрегована оцінка компонент з індексами із множини складових $I_{0,8} = \{1, 2, 3, 4\}$ дорівнює $z \in Z$.

Отримаємо:

$$G_{0,8}(z) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = z,$$
$$x_1 \in [4,5],\ x_2 \in [3,5],\ x_3 \in [2,4], x_4 \in [3,4], x_5 \in [1,2]\}$$

для $z \in [3; 4,5]$.

Далі за формулою (2.1) значення функції належності $\mu_{\Phi(0,8)}(z) = \max\limits_{x \in G_{0,8}(z)} \min\limits_{j \in I_{0,8}} \mu_{F_j}(x) = \max\limits_{x \in X_{0,8}(z)} \min\{\mu_{F_1}(x_1), \mu_{F_2}(x_2), \mu_{F_3}(x_3), \mu_{F_4}(x_4)\}$ нечіткої оцінки $\Phi(0,8) = \{(z, \mu_{\Phi(0,8)}(z)) :\ z \in Z\}$, яка рівна агрегованій оцінці з індексами із множини доданків $I_{0,8} = \{1,2,3,4\}$.

$$\mu_{\Phi(0,8)}(z) = \begin{cases} 1 - z/4,\ z \in [3;4]; \\ z/4 - 1,\ z \in [4;4,5]; \end{cases}$$

Тепер для $\alpha = \mu_{F_5}(5) = 0,2$ згідно формули (2.6) побудуємо множину рівня $I_{0,2} = \{1,2,3,4,5\}$ нечіткої множини індексів доданків I і згідно формули (2.5) побудуємо множину

$$G_{0,2}(z) = \{x \in X : \frac{1}{5}\sum_{i \in I_{0,2}} x_i = z\} = \{x \in X : \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = z\}$$

векторів $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ для яких агрегована оцінка компонент з індексами із множини складових $I_{0,2} = \{1,2,3,4,5\}$ дорівнює $z \in Z$.

Отримаємо:

$$G_{0,2}(z) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = z,$$
$$x_1 \in [4,5],\ x_2 \in [3,5],\ x_3 \in [2,4], x_4 \in [3,4], x_5 \in [1,2]\}$$

для $z \in [2,6;4]$. Далі за формулою (2.1) значення функції належності

$$\mu_{\Phi(0,2)}(z) = \max_{x \in G_{0,2}(z)} \min_{j \in I_{0,2}} \mu_{F_j}(x)$$
$$= \max_{x \in X_{0,2}(z)} \min\{\mu_{F_1}(x_1), \mu_{F_2}(x_2), \mu_{F_3}(x_3), \mu_{F_4}(x_4), \mu_{F_5}(x_5)\}$$

нечіткої оцінки $\Phi(0,2) = \{(z, \mu_{\Phi(0,2)}(z)) :\ z \in Z\}$, яка рівна агрегованій оцінці з індексами із множини доданків $I_{0,2} = \{1,2,3,4,5\}$.

$$\mu_{\Phi(0,2)}(z) = 1 - z/5, z \in [2,6;4]$$

Тепер за формулою (2.3) розрахуємо значення T2MF $\mu_S(z, y)$, $z \in Z,\ y \in J_z$. Для цього спочатку згідно формулі (2.2) побудуємо множини $J_z = \{y \in [0,1] :\ y = \mu_{\Phi(\alpha)}(z),\ \alpha \in A\}$, $z \in Z = [2,6;4]$ первинних ступенів $y \in [0,1]$ зі строго додатними вторинними оцінками $\varphi(z, y)$. Отримаємо:

$$J_z = \{1 - z/5\} \text{для } z \in [2,6;3];$$

$$J_z = \{2 - z/3, 1 - z/4, 1 - z/5\} \text{ для } z \in [3,4];$$

$$J_z = \{2 - z/3, z/4 - 1\} \text{ для } z \in [4;4,7];$$

Тоді за означенням отримаємо:

$$S = \{((z, 1 - z/5); 0,2)\} \text{ для } z \in [2,6;3];$$

$$S = \{((z, 2 - z/3); 1), ((z, 1 - z/4); 0,8), ((z, 1 - z/5); 0,2)\} \text{ для } z \in [3,4];$$

$$S = \{((z, 2 - z/3); 1), ((z, z/4 - 1); 0,8)\}; \text{ для } z \in [4;4,7];$$

Або в формі (2.9)

$$S = \{((\frac{16}{5}, \frac{20}{5}, \frac{24}{5}); 0,2), ((\frac{30}{8}, \frac{37}{8}, \frac{44}{8}); 0,8), ((\frac{12}{3}, \frac{15}{3}, \frac{18}{3}); 1)\},$$

де суми рівнів:

$$\Phi_{0,2} = \frac{1}{|I_{0,2}|} \tilde{\sum_{j \in I_{0,2}}} F_j = \frac{1}{5}(F_1 + ... + F_5) = (\frac{16}{5}, \frac{20}{5}, \frac{24}{5});$$

$$\Phi_{0,8} = \frac{1}{|I_{0,8}|} \tilde{\sum_{j \in I_{0,8}}} F_j = \frac{1}{4}(F_1 + ... + F_4) = (\frac{30}{8}, \frac{37}{8}, \frac{44}{8});$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{|I_1|} \tilde{\sum_{j \in I_1}} F_j = \frac{1}{3}(F_1 + F_2 + F_3) = (\frac{12}{3}, \frac{15}{3}, \frac{18}{3}).$$

Висновки

Використання методу експертних оцінок допомагає формалізувати процедури збору, узагальнення та аналізу думок фахівців з метою перетворення їх у формі, найбільш зручну для прийняття обґрунтованого рішення. Експертні методи безупинно розвиваються і удосконалюються. Основні напрямки цього розвитку визначаються цілою низкою чинників, в числі яких можна вказати на прагнення розширити області застосування, підвищити ступінь використання математичних методів і електронно-обчислювальної техніки, а також знайти шляхи усунення виявляються недоліків.

В огляді роботі були розглянуті нечіткі множини 1-го та 2-го типів. Також було розглянута сума множин з нечіткою множиною операндів та методи побудови нечітких оцінок.

У роботі було вирішено задачу побудови експертної оцінки групою експертів, компетентності яких задаються значеннями функції належності до заданої нечіткої множини «компетентних» експертів. Показано, що агрегована оцінка буде нечіткою множиною типу-2, що визначена на числовій осі. Вона може бути розкладеною за вторинними ступенями належності на нечіткі числа. Ці числа є нечіткими агрегованими оцінками, які відповідають множинам експертів, що відповідають різним рівням нечіткої множини експертів. Отримані результати продемонстровано на прикладі.

Список використаних джерел

1. Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning / L.A. Zadeh // Inform. Sci. – 1975. – Vol. 8. – P. 199-249.
2. Mizumoto M. Some Properties of Fuzzy Sets of Type 2 / M. Mizumoto, K. Tanaka // Reprinted from Information and Control. – August 1976. – Vol. 31, no. 4. – P. 312-340
3. Mizumoto M. Fuzzy sets of type-2 under algebraic product and algebraic sum / M. Mizumoto, K. Tanaka // Fuzzy Sets Syst. – 1981. – Vol. 5. – P. 277-290.
4. Mendel J.M. Type-2 Fuzzy Sets Made Simple / J.M. Mendel, R.I. John // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – April 2002. – Vol. 10, no. 2. – P. 117-127.
5. D. Dubois and H. Prade, Operations on fuzzy numbers, International Journal of Systems Science 9(6) (1978), 613-626.
6. Mashchenko, Sums of fuzzy set of summands, Fuzzy sets and systems 417 (2021) 140–151.
7. Posadsky A. I., Sivakova T. V., Sudakov V. A. Aggregation of Fuzzy Expert Judgments. Keldysh Institute Preprints. 2019. No. 101. P. 1–12.