Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем
Кафедра комп'ютерної інженерії

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи і виконання індивідуальних завдань
з освітньої компоненти "Дискретна математика"
для студентів спеціальності
123 "Комп’ютерна інженерія"

Частина 1. Множини і відношення. Булева алгебра.

Київ, 2025

Методичні вказівки для самостійної роботи і виконання індивідуальних завдань з освітньої компоненти "Дискретна математика" [Електронний ресурс] / Укладачі С.Д.Погорілий, О.В.Самощенко. – К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2025. – 58с.

Рецензенти: С.Л.Кривий, д.ф-м.н., проф.

Ю.А.Коба, к.т.н., доц.

У першому розділі вказано на основоположні поняття з теорії множин та *n*-арних відношень. Розглянуто операції обчислення суперпозиції бінарних відношень, правило обчислення обернених відношень та за наведеними матрицями бінарних відношень R_1 і R_2 визначення наявності певних властивостей. Наведено 50 варіантів задач обчислення суперпозиції бінарних відношень та обернених відношень.

У другому розділі розглянуто форми подання булевих функцій, сформульовано постановку задачі їх мінімізації, вказано на методи знаходження виразів у тупикових і мінімальних диз'юнктивній та кон'юнктивній формах. Наведено 70 варіантів задач з обчислення тупикових та мінімальних форм булевих функцій. Розглянуто методику побудови функціональних комбінаційних схем в базисах логічних елементів.

Опис операцій і методів супроводжується прикладами розв'язання завдань.

Методичні вказівки суттєво розширюють коло задач, що наведено в підручнику [1].

Автори висловлюють подяку магістру Олександру Лещуку та бакалавру Максиму Хотячуку за допомогу у підготовці завдань.

Рекомендовано вченою радою факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем.

Протокол № 10 від 24.04.2025р.

ЗМІСТ

Розділ 1. МНОЖИНИ І ВІДНОШЕННЯ

1.1. Властивості відношень

Надалі будемо позначати множини великими літерами, а при перелічуванні елементів множин будемо брати ці елементи у фігурні дужки, наприклад, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Операції над множинами можуть бути ***теоретико-множинними***, ***алгебраїчними*** та ***мішаними*** [1].

Нехай $A_1, A_2, ..., A_n$ – довільні множини (не обов'язково відмінні). Під ***n-арним відношенням*** або ***n-відношенням*** R^n на множинах $A_1, A_2, ..., A_n$ будемо розуміти закон (характеристичну властивість), що виділяє в декартовому добутку $A_1{\times}A_2{\times}...{\times}A_n$ певну підмножину $R^n{\subseteq}A_1{\times}A_2{\times}...{\times}A_n$, яка називається графіком відношення R^n. Якщо $A_1= A_2=...= A_n= A$, то кажуть про n-відношення R^n на множині A з графіком $R^n \subseteq A^n$. З означення випливає, що відношення є множинами, а тому стосовно них можна використовувати ті ж теоретико-множинні операції, що і для множин.

У зв'язку з тим, що n-відношення є підмножинами декартового добутку, існують різноманітні способи завдання n-відношень, які певною мірою аналогічні способам задання множин.

У випадку, коли $n=1$, відношення називають ***унарними***, при $n=2$ – ***бінарними***, при $n=3$ – ***тернарними*** і т.д.

Найпростіший спосіб задати зв’язок між елементами двох множин – записати впорядковані пари елементів, що перебувають у цьому зв’язку. Тому часто використовуються бінарні відношення $(n=2)$. Бінарне відношення з A в B – це певна підмножина R декартового добутку $A{\times}B$ цих множин: $R{\subseteq}A{\times}B$. Інакше кажучи, бінарне відношення з A в B – це множина впорядкованих пар, у якій перший елемент пари належить множині A, а другий множині B. Бінарні відношення описують зв’язки між елементами двох множин. Якщо R - бінарне відношення, то запис aRb означає $(a,b){\in}R$. Часто розглядають бінарні відношення за умови $A=B$. Відношенням на множині A називають бінарне відношення з A в A. Тобто, бінарне відношення R на множині A – це підмножина декартового квадрату множини A, $R{\subseteq}A^2$.

Поширеним і зручним методом завдання бінарних відношень на множині A є їх подання у вигляді булевої матриці [2]. На n-елементній множині A відношення R задає $n{\times}n$ матриця $M_R=[m_{ij}]$, $i,j=1,..., n$, де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо}\left(\mathrm{a}_i, \mathrm{a}_j\right) \in R, \\ 0, \text{якщо}\left(\mathrm{a}_i, \mathrm{a}_j\right) \notin R. \end{cases}$$

Нехай $R{\subseteq}A{\times}B$. Відношення R^{-1}, задане на множині $B{\times}A$, називається ***оберненим*** до R, якщо $R^{-1}=\{(b,a) \mid aRb\}$.

<u>Приклад 1.1</u> обчислення оберненого відношення.

Визначимо бінарне відношення R на множині $A=\{a,b,c,d\}$:

$$R=\{(a,b),(a,d),(c,c),(d,b)\}.$$

Впорядкуємо елементи множини A у будь який спосіб (наприклад, $a<b<c<d$) (насправді порядок може бути довільним). Тоді у матричному вигляді це можна записати у такий спосіб:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відношення R на множині A називають ***рефлексивним***, якщо для будь якого $a \in A$ виконується $(a, a) \in R$.

Відношення R на множині A називають ***іррефлексивним*** (або ***антирефлексивним***), якщо для будь якого $a \in A$ виконується $(a, a) \notin R$.

При відсутності рефлексивності та іррефлексивності відношення називають ***нерефлексивним***.

Відношення R на множині A називають ***симетричним***, якщо для будь якого $a,b \in A$ з того, що $(a,b) \in R$, випливає, що $(b,a) \in R$. Наприклад, $R=\{(1,4),(4,1),(3,2),(2,3),(2,2),(1,3),(3,1),(4,4)\}$.

Відношення R на множині A називають ***антисиметричним***, якщо для будь якого $a,b \in A$ з того, що $(a,b) \in R$ і $(b,a) \in R$, випливає, що $a=b$. Інакше кажучи, відношення антисиметричне, якщо в разі $a \neq b$ воно водночас не містить пар (a,b) та (b, a). Наприклад, $R=\{(1,4),(3,2),(2,2),(3,1),(4,4)\}$.

Відношення R на множині A називають ***асиметричним***, якщо для всіх $a,b \in A$ з того, що $(a,b) \in R$, випливає, що $(b,a) \notin R$. Наприклад, $R=\{(1,4),(3,2),(3,1)\}$.

Таким чином, відношення:

- $R=\{(1,4),(4,1),(3,2),(2,2),(3,1),(4,4)\}$ не є симетричним, антисиметричним, асиметричним, що можна назвати *несиметричним*;
- $R=\{(2,2),(4,4)\}$ є симетричним та антисиметричним одночасно.

Відношення R на множині A називають ***транзитивним***, якщо для будь-яких $a,b,c \in A$ з того, що $(a,b) \in R$, і $(b,c) \in R$, випливає, що $(a,c) \in R$. В іншому випадку, відношення *нетранзитивне*. Наприклад, наступне відношення є транзитивним: $R=\{(1,4),(4,5),(1,5),(2,3),(3,3),(1,3),(3,1),(1,1)\}$.

Таким чином, відношення $R=\{(3,3),(4,4),(3,4)\}$ на множині $a,b,c \in \{3,4\}$ є рефлексивним, антисиметричним, транзитивним.

Відзначимо, як деякі властивості відношень відображаються у відповідних матрицях [3].

Якщо відношення R рефлексивне, то на головній діагоналі матриці M_R лише одиниці, якщо іррефлексивне – то нулі. За наявності на головній діагоналі матриці M_R одиниць та нулів відношення є нерефлексивним (відсутні рефлексивність та іррефлексивність).

Матриця симетричного відношення симетрична, а матриця M_R антисиметричного відношення R має таку властивість: якщо $i \neq j$, то з $m_{ij} = 1$ випливає $m_{ji} = 0$ (але може бути $m_{ij} = m_{ji} = 0$).

Доцільно розглянути відношення, які мають водночас декілька зазначених вище властивостей у певній комбінації. Відношення R на множині A називають ***відношенням еквівалентності***, якщо воно рефлексивне, симетричне та транзитивне. Два елементи множини A, пов'язані відношенням еквівалентності, називають еквівалентними. Оскільки відношення еквівалентності за означенням рефлексивне, то кожний його елемент еквівалентний до самого себе. Більш того, позаяк відношення еквівалентності за означенням транзитивне, то з того, що елементи a та b еквівалентні й b та c еквівалентні, випливає, що a та c також еквівалентні. Важливою властивістю будь-якого відношення еквівалентності R, яке визначено на множині A, є та, що воно розбиває A на неперерізні підмножини, що називаються ***класами еквівалентності*** [1].

<u>Приклад 1.2</u> відношення еквівалентності. Нехай R таке відношення на множині цілих чисел: aRb тоді й тільки тоді, коли $(a=b) \vee (a=-b)$. Воно рефлексивне, симетричне й транзитивне, тому являє собою відношення еквівалентності.

Відношення R на множині A називають ***відношенням толерантності***, якщо воно рефлексивне, симетричне, але не є транзитивним.

Відношення R на множині A називають ***відношенням нестрогого порядку***, якщо воно рефлексивне, транзитивне, але не є симетричним.

Відношення R на множині A називають ***відношенням строгого порядку***, якщо воно транзитивне, але не є рефлексивним та симетричним.

1.2. Суперпозиція (добуток) відношень

Розглянемо більш детально операцію ***суперпозиції (добутку)*** відношень [4]. Нехай задано бінарні відношення $R_1 \subseteq A \times B$ і $R_2 \subseteq B \times C$. Тоді відношення $R_1 * R_2$, задане на множині $A \times C$, називають ***добутком*** або ***суперпозицією*** відношень R_1 і R_2, якщо $R_1 * R_2 = \{(a,c) \mid a \in A,\ c \in C$ і $(\exists b \in B)$ $(aR_1b$ і $bR_2c)\}$.

<u>Приклад 1.3</u> обчислення суперпозиції відношень.

Визначимо бінарні відношення R_1 і R_2 на множині $A=\{a,b,c\}$:

$R_1=\{(a,a),(a,c),(b,b),(b,c)\}$;

$R_2=\{(b,a),(b,b),(c,a)\}$.

Звідси одержуємо: $R_1 * R_2=\{(a,a),(b,a),(b,b)\}$.

Впорядкуємо елементи множини A у будь який спосіб (наприклад, $a<b<c$).

Тоді у матричному вигляді це можна записати у такий спосіб:

$$R_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad R_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad R_1 * R_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Далі в поточному розділі посібника наведено три завдання з 50-ма варіантами кожне для обчислення властивостей заданих бінарних відношень.

Завдання 1. Відповідно до заданого варіанту (див. наступні сторінки) необхідно за наведеними матрицями бінарних відношень R_1 і R_2 обчислити матриці обернених відношень R_1^{-1} і R_2^{-1}.

Завдання 2. Відповідно до заданого варіанту необхідно за наведеними матрицями бінарних відношень R_1 і R_2 обчислити матриці їх суперпозиції R_1*R_2 та R_2*R_1 і з'ясувати, чи є операція суперпозиції бінарних відношень комутативною.

Завдання 3. Відповідно до заданого варіанту необхідно за наведеними матрицями вказати на властивості бінарних відношень R_1 і R_2.

1.3. Варіанти завдань для обчислення суперпозиції відношень

Варіант 1.1

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.2

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.3

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.4

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.5

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.6

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.7

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.8

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.9

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.10

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.11

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.12

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.13

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.14

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.15

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.16

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.17

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.18

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.19

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.20

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.21

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.22

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.23

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.24

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.25

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.26

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.27

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.28

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.29

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.30

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.31

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.32

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.33

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.34

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.35

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.36

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.37

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.38

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.39

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.40

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.41

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.42

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.43

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.44

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.45

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.46

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.47

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.48

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.49

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 1.50

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. БУЛЕВА АЛГЕБРА

2.1. Булеві функції і операції

Булева алгебра базується на застосуванні тверджень істини та хиби, які прийнято позначати символами одиниці та нуля (при довільній відповідності, зазвичай, істини відповідає позначення 1, а хиби - 0) [1]. Змінну (аргумент) з двома значеннями (істина та хиба) називають булевою. Функція від булевих аргументів, яка може мати два значення, називається булевою.

Значення $\boldsymbol{y}$ булевої функції $\boldsymbol{f}$ може залежати від довільного значення аргументів $\boldsymbol{x_i}$: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Практична реалізація булевої функції зіставлена комп'ютерної операції – визначеної дії з одним або декількома операндами (змінними, аргументами), що направлена на отримання результату (значення булевої функції). Булева операція у відповідності до кількості аргументів називається одномісною, двомісною і т.д.

Одномісні булеві операції $y = f(x)$ наведено у таблиці 2.1:

~ тотожність: $y = x$, результат дорівнює значенню аргумента;
~ заперечення (інверсія): $y = \bar{x}$, читається "не х", результат дорівнює значенню, що є протилежним (інверсним) значенню аргумента;
~ константа 0: $y = 0$, результат дорівнює нулеві незалежно від значень аргумента;
~ константа 1: $y = 1$, результат дорівнює одиниці незалежно від значень аргумента.

Таблиця 2.1 – Одномісні булеві операції

x	$y = x$	$y = \bar{x}$	$y = 0$	$y = 1$
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1

Двомісні булеві операції $y = f(x_1, x_2)$ наведено у таблицях 2.2–2.9:

Кон'юнкція (читається "і", "та") – результат дорівнює одиниці тільки при одиничних значеннях усіх аргументів. Позначення операції: $y = x_1 \wedge x_2$, $y = x_1 \& x_2$, $y = x_1 \cdot x_2$, $y = x_1 x_2$.

Таблиця 2.2 – Кон'юнкція

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$y = x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Штрих Шеффера (заперечення кон'юнкції) – результат дорівнює значенню, що є протилежним (інверсним) значенню кон'юнкції аргументів. Позначення операції: $y = \overline{x_1 \wedge x_2}$, $y = \overline{x_1 \& x_2}$, $y = \overline{x_1 \cdot x_2}$, $y = \overline{x_1 x_2}$, $y = x_1 | x_2$ (читається "не і", "і ні", "не та", "та ні").

Таблиця 2.3 – Штрих Шеффера

x_1	x_2	$y = x_1 \mid x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Диз'юнкція (читається "чи", "або") – результат дорівнює нулеві тільки при нульових значеннях усіх аргументів. Позначення операції: $y = x_1 \vee x_2$.

Таблиця 2.4 – Диз'юнкція

x_1	x_2	$y = x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Стрілка Пірса (заперечення диз'юнкції) – результат дорівнює значенню, що є протилежним (інверсним) значенню диз'юнкції аргументів. Позначення операції: $y = \overline{x_1 \vee x_2}$, $y = x_1 \downarrow x_2$ (читається "не чи", "чи ні", "не або", "або ні").

Таблиця 2.5 – Стрілка Пірса

x_1	x_2	$y = x_1 \downarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Додавання за модулем два (виключне ЧИ, заперечення рівнозначності) – результат дорівнює значенню результата арифметичного додавання значень аргументів (додавання однопозиційне, перенесення ігнорується). При двох аргументах – результат дорівнює нулеві при однакових (рівнозначних) значеннях аргументів. Позначення операції: $y = x_1 \oplus x_2$.

Таблиця 2.6 – Додавання за модулем два

x_1	x_2	$y = x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Рівнозначність – результат дорівнює одиниці при однакових (тотожних) значеннях аргументів. При двох аргументах – результат дорівнює значенню, що є протилежним (інверсним) значенню додавання за модулем два. Позначення операції: $y = x_1 \equiv x_2$.

Таблиця 2.7 – Рівнозначність

x_1	x_2	$y = x_1 \equiv x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Імплікативні – за умови трактування істини і хиби як одиниця та нуль вказують на результат арифметичного зіставлення значень аргументів:

~ імплікація – другий аргумент не менший першого: $y = x_1 \leq x_2$, $y = x_1 \rightarrow x_2$, результат дорівнює нулеві тільки у випадку нульового значення другого аргумента і одиничного першого: $y = \overline{x_1 \overline{x_2}}$;

~ пряма антиімплікація (заборона по x_2) – другий аргумент менший першого (заперечення імплікації): $y = x_1 > x_2$, результат дорівнює одиниці тільки у випадку нульового значення другого аргумента і одиничного першого: $y = x_1\overline{x_2}$;

~ обернена імплікація – перший аргумент не менший другого: $y = x_1 \geq x_2$, $y = x_1 \leftarrow x_2$, результат дорівнює нулеві тільки у випадку нульового значення першого аргумента і одиничного другого: $y = \overline{\overline{x_1} x_2}$;

~ обернена антиімплікація (заборона по x_1) – перший аргумент менший другого (заперечення оберненої імплікації): $y = x_1 < x_2$, результат дорівнює одиниці тільки у випадку нульового значення першого аргумента і одиничного другого: $y = \overline{x_1}x_2$.

Таблиця 2.8 – Імплікативні

x_1	x_2	$y = x_1 \leq x_2$	$y = x_1 > x_2$	$y = x_1 \geq x_2$	$y = x_1 < x_2$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0

Результат виконання наступних операцій залежить від значень одного з операндів чи незалежить від значення жодного з операндів:

- тотожність першому аргументу: $y = x_1$, результат дорівнює значенню першого аргумента;
- заперечення (інверсія) першого аргумента: $y = \overline{x_1}$, читається "не x_1", результат дорівнює значенню, що є протилежним (інверсним) значенню першого аргумента;
- тотожність другому аргументу: $y = x_2$, результат дорівнює значенню другого аргумента;
- заперечення (інверсія) другого аргумента: $y = \overline{x_2}$, читається "не x_2", результат дорівнює значенню, що є протилежним (інверсним) значенню другого аргумента;

- константа 0: $y = 0$, результат дорівнює нулеві незалежно від значень аргументів;
- константа 1: $y = 1$, результат дорівнює одиниці незалежно від значень аргументів.

Таблиця 2.9 – Тотожність, заперечення, константа

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$y = x_1$	$y = \overline{x_1}$	$y = x_2$	$y = \overline{x_2}$	$y = 0$	$y = 1$
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1

2.2. Властивості булевих операції

Подвійне заперечення: $\overline{\overline{x}} = x$.

Таблиця 2.10 – Властивості кон'юнкції і диз'юнкції

Назва	Кон'юнкція	Диз'юнкція
Переставний закон (комутативність)	$x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1$	$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$
Поглинання	$x \& 0 = 0$	$x \vee 1 = 1$
Незмінність	$x \& 1 = x$	$x \vee 0 = x$
Повторення (ідемпотентність)	$x \& x = x$	$x \vee x = x$
Додатковість	$x \& \overline{x} = 0$	$x \vee \overline{x} = 1$
Сполучений закон (асоціативність)	$(x_1 \& x_2) \& x_3 =$ $= x_1 \& (x_2 \& x_3) =$ $= x_2 \& (x_1 \& x_3) =$ $= x_1 \& x_2 \& x_3$	$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 =$ $= x_1 \vee (x_2 \vee x_3) =$ $= x_2 \vee (x_1 \vee x_3) =$ $= x_1 \vee x_2 \vee x_3$

Склеювання:

~ $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2}) = x_1$;

~ $x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} = x_1$.

Розподільна властивість (дистрибутивність):

~ $x_1(x_2 \vee x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3$;

~ $x_1 \vee (x_2 x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$.

Правило де Моргана:

~ $x_1 x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$;

~ $\overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$;

~ $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \& \overline{x_2}}$:

~ $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \& \overline{x_2}$.

Внаслідок властивостей, що вказано, існує:

~ $x_1 \lor x_1x_2 = x_1$;

~ $x_1(x_1 \lor x_2) = x_1$;

~ $x_1 \lor \overline{x_1}x_2 = x_1 \lor x_2$;

~ $x_1(\overline{x_1} \lor x_2) = x_1x_2$;

~ $x_1x_3 \lor x_2\overline{x_3} \lor x_1x_2 = x_1x_3 \lor x_2\overline{x_3}$;

~ $x_1 \to x_2 = \overline{x_1\overline{x_2}} = \overline{x_1} \lor x_2$ (імплікація);

~ $y = x_1 \leftarrow x_2 = \overline{\overline{x_1}x_2} = x_1 \lor \overline{x_2}$ (обернена імплікація);

~ $y = x_1 \equiv x_2 = \overline{x_1}\&\overline{x_2} \lor x_1\&x_2 = (x_1 \lor \overline{x_2})\&(\overline{x_1} \lor x_2) =$
$= (x_1 \leftarrow x_2)\&(x_1 \to x_2)$ (рівнозначність);

~ $y = x_1 \oplus x_2 = x_1\overline{x_2} \lor \overline{x_1}x_2 = (x_1 \lor x_2)\&(\overline{x_1} \lor \overline{x_2}) = \overline{x_1 \equiv x_2}$ (додавання за модулем два).

~ $y = x_1|x_2 = \overline{x_1x_2} = \overline{x_1} \lor \overline{x_2}$ (штрих Шеффера);

~ $y = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \lor x_2} = \overline{x_1}\&\overline{x_2}$ (стрілка Пірса).

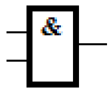
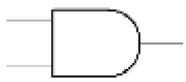
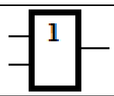
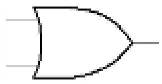
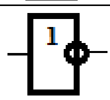
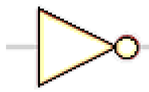
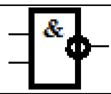
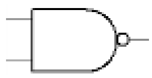
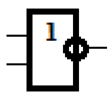
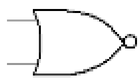
2.3. Базові логічні елементи комп'ютерної техніки

При практичному конструюванні комп'ютерних пристроїв булеві функції отримують апаратне втілення. Базові логічні елементи, що зіставлені первинним булевим функціям, присутні у всіх пристроях незалежно від їх складності (табл.2.11).

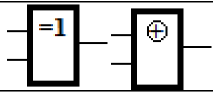
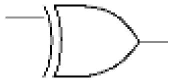
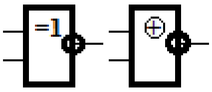
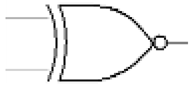
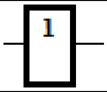
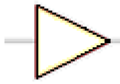
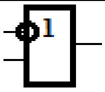
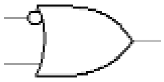
Булеві функції "Константа 1" і "Константа 0" апаратно реалізуються із застосуванням шин живлення і загальної (варіант зіставлення функціям залежить від типу логіки – пряма чи зворотна).

Відповідно до технології і конструювання логічні елементи можуть мати більшу за 2 кількість входів, за умови непорушення реалізації булевої функції.

Таблиця 2.11 – Позначення базових логічних елементів

Назва функції	Типове		Міжнародне	
	Назва елемента	Умовне графічне позначення	Назва елемента	Умовне графічне позначення
Кон'юнкція	І, ТА		AND	
Диз'юнкція	ЧИ, АБО		OR	
Заперечення	НІ, НЕ, інвертор		NOT, INV	
Шрих Шеффера	І-НІ, ТА-НІ, НЕ-І, НЕ-ТА		NAND	
Стрілка Пірса	ЧИ-НІ, АБО-НІ, НЕ-ЧИ, НЕ-АБО		NOR	

Таблиця 2.11 (Продовження)

Додавання за модулю два	Виключне ЧИ		XOR	
Рівнозначність	Інверсія виключного ЧИ		NXOR	
Тотожність	Повторювач		BUF	
Імплікація	Імплікатор, ЯКЩО ТО		OR2B1	

2.4. Аналітичне подання булевих функцій

Операції заперечення (інверсії), кон'юнкції та диз'юнкції утворюють базис у логічному просторі для подання довільної булевої функції аналітичним виразом у вигляді досконалої диз'юнктивної нормальної форми (ДДНФ) або досконалої кон'юнктивної нормальної форми (ДКНФ). Утворення ДДНФ та ДКНФ ґрунтується на поняттях конституент одиниці та нуля відповідно (табл.2.12).

Конституента 1 (мінтерм) – це кон'юнкція n-змінних (аргументів функції), що присутні в формулі у прямому виді при одиничному значенні аргумента чи інверсному – при нульовому. При n-змінних кількість конституент 1 дорівнює 2^n.

Конституента 0 (макстерм) – це диз'юнкція n-змінних (аргументів функції), що присутні в формулі у прямому виді при нульовому значенні аргумента чи інверсному – при одиничному. При n-змінних кількість конституент 0 дорівнює 2^n.

Таблиця 2.12 – Таблиця істинності функції від 2-змінних і конституенти

x_1	x_2	y	Конституента 1 (мінтерм)	Конституента 0 (макстерм)
0	0	y_0=0	$m_0 = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$	$M_0 = x_1 \vee x_2$
0	1	y_1=1	$m_1 = \overline{x_1} \wedge x_2$	$M_1 = x_1 \vee \overline{x_2}$
1	0	y_2=1	$m_2 = x_1 \wedge \overline{x_2}$	$M_2 = \overline{x_1} \vee x_2$
1	1	y_3=0	$m_3 = x_1 \wedge x_2$	$M_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$

Подання функції у ДДНФ є диз'юнкцією конституент 1 (мінтермів) відповідно до результату $\boldsymbol{y}$:

$$y = y_0 \cdot m_0 \vee y_1 \cdot m_1 \vee y_2 \cdot m_2 \vee y_3 \cdot m_3 =$$
$$= 0 \cdot m_0 \vee 1 \cdot m_1 \vee 1 \cdot m_2 \vee 0 \cdot m_3 = m_1 \vee m_2 = \overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2}.$$

Подання функції у ДКНФ є кон'юнкцією конституент 0 (макстермів) відповідно до результату $\boldsymbol{y}$:

$$y = (y_0 \vee M_0) \cdot (y_1 \vee M_1) \cdot (y_2 \vee M_2) \cdot (y_3 \vee M_3) =$$
$$= (0 \vee M_0) \cdot (1 \vee M_1) \cdot (1 \vee M_2) \cdot (0 \vee M_3) = M_0 M_3 = (x_1 \vee x_2)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}).$$

Аналогічно утворюється подання у ДДНФ та ДКНФ функцій з довільною кількістю змінних, наприклад, три (табл.2.13).

Таблиця 2.13 – Таблиця істинності функції від трьох змінних

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Вираз у ДДНФ: $y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3$.

Вираз у ДКНФ: $y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$.

Доведено, що функціонально повна система функцій, яка утворює базис у логічному просторі для подання будь-якої довільної функції, формується також з наборів:

- заперечення (інверсія), кон'юнкція;
- заперечення (інверсія), диз'юнкція;
- штрих Шеффера;
- стрілка Пірса;
- додавання по модулю два, кон'юнкція (алгебра Жегалкіна).

Перетворення у базис "штрих Шеффера" спрощується при початковому застосуванні виразу у ДДНФ, наприклад:

$$y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 =$$
$$= \overline{\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3}} =$$
$$= \overline{\left(\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3}\right)\left(\overline{\overline{x_1}x_2\overline{x_3}}\right)\left(\overline{x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}}\right)\left(\overline{x_1x_2\overline{x_3}}\right)(\overline{x_1x_2x_3})}.$$

Перетворення у базис "стрілка Пірса" спрощується при початковому застосуванні виразу у ДКНФ, наприклад:

$$y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) =$$
$$= \overline{\overline{(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})}} =$$
$$= \overline{\left(\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3}\right) \vee \left(\overline{x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}}\right) \vee \left(\overline{\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}}\right)}.$$

2.5. Принцип двоїстості

Відповідно до принципу двоїстості для будь-якої булевої функції $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ існує двоїста булева функція $\boldsymbol{y^*}$, що утворюється за правилом "заперечення значення функції, що утворюється при інверсних аргументах": $y^* = \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$.

Наприклад, для кон'юнкції $y = x_1 \wedge x_2$ двоїста функція $y^* = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}}$ має значення, що є еквівалентним диз'юнкції (табл. 2.14):

Таблиця 2.14 – Кон'юнкція і двоїста до кон'юнкції

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$y = x_1 \wedge x_2$	$y^* = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}}$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

В свою чергу, кон'юнкція є двоїстою до диз'юнкції (табл.2.15):

Таблиця 2.15 – Диз'юнкція і двоїста до диз'юнкції

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$y = x_1 \vee x_2$	$y^* = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Двоїстість між функціями кон'юнкції і диз'юнкції підтверджується аналітично за правилом де Моргана: $\overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}} = x_1 \vee x_2$, $\overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} = x_1 \wedge x_2$.

Двоїсті до інших базових функцій наведено в табл.2.16-2.18.

Таблиця 2.16 – Двоїста взаємність функцій додавання за модулем два і еквівалентність

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$y = x_1 \oplus x_2$	$y^* = \overline{\overline{x_1} \oplus \overline{x_2}}$	$y = x_1 \equiv x_2$	$y^* = \overline{\overline{x_1} \equiv \overline{x_2}}$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0

Таблиця 2.17 – Двоїста взаємність функцій штрих Шеффера і стрілка Пірса

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$y = x_1 \vert x_2$	$y^* = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$	$y = x_1 \downarrow x_2$	$y^* = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0

Таблиця 2.18 – Двоїсті до одномісних булевих операцій

x	$y = x$	$y^* = \overline{\overline{x}}$	$y = \bar{x}$	$y^* = \bar{x}$	$y = 0$	$y^* = \overline{0}$	$y = 1$	$y^* = \overline{1}$
0	0	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	0

Двоїста існує для будь-якої довільної булевої функції (табл.2.19).

Таблиця 2.19 – Довільна функція від трьох змінних і її двоїста

x_1	x_2	x_3	y	y^*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Вираз у ДКНФ для двоїстої (з таблиці):

$$y^* = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Вираз у ДКНФ для двоїстої можна отримати з виразу у ДДНФ для функції $y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3$:

$$y^* = \overline{\overline{\overline{x_1}} \cdot \overline{\overline{x_2}} \cdot \overline{x_3} \vee \overline{\overline{x_1}} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{\overline{x_3}} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{\overline{x_2}} \cdot \overline{\overline{x_3}} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{\overline{x_3}} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} =$$

$$= \overline{x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} =$$

$$= \overline{x_1x_2\overline{x_3}} \& \overline{x_1\overline{x_2}x_3} \& \overline{\overline{x_1}x_2x_3} \& \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3} \& \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}} =$$

$$= (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Таким чином, вираз у ДКНФ для двоїстої можна отримати з виразу у ДДНФ для функції **y** з врахуванням властивостей двоїстості для кон'юнкції, диз'юнкції та одномісних операцій заперечення і тотожності.

В свою чергу, вираз у ДДНФ для двоїстої можна отримати з таблиці або з виразу у ДКНФ функції ***y***:

$$y^* = (x_1x_2x_3) \vee (x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}) \vee (\overline{x_1}x_2\,\overline{x_3}).$$

2.6. Скорочення булевих аналітичних виразів

Застосування теоретичних положень булевої алгебри з метою побудови комп'ютерних пристроїв супроводжується скороченням логічних виразів. Складність логічних виразів ДНФ або КНФ оцінюється індексом простоти, що вказує на кількість, наприклад, літер змінних у виразах ("мінімальна ДНФ" або "мінімальна КНФ"), елементарних кон'юнкцій ("найкоротша ДНФ", "найкоротша КНФ"), символів заперечення тощо.

Окрім мінімальних, за певним критерієм, виразів, результатом скорочення є отримання тупикових логічних виразів, що характеризуються неможливістю подальшого скорочення операціями вилучення елементарних термів та співмножників. Оскільки серед тупикових ДНФ (ТДНФ) чи тупикових КНФ (ТКНФ) завжди містяться і мінімальні ДНФ (МДНФ) чи мінімальні КНФ (МКНФ), то типова послідовність дій щодо скорочення направлена на отримання тупикових виразів з подальшим вибором мінімальних.

Нескладними для програмної реалізації є методи із застосуванням імплікантних таблиць (Петрика, Квайна, Мак-Класкі тощо), за якими спочатку із термів ДДНФ (ДКНФ) аналітично утворюються терми нижчих рангів (імпліканти), після чого формується імплікантна таблиця, що зіставляє початкові терми і імпліканти та із якої після аналізу вмісту випливають скорочені вирази.

Імпліканти вказують на покриття одного або декількох термів булевої функції, що позначається в імплікантних таблицях. В таблиці на перетині рядків і стовпців, до термів яких може бути застосоване покриття, ставиться позначка, а після проставлення всіх позначок визначаються ядра функції, тобто скорочені імпліканти з одноосібним покриттям.

Скорочений вираз функції може мати декілька ядр або не мати взагалі. Наявні ядра обов'язково присутні в скороченому виразі. За відсутності ядр скорочені вирази формуються, за можливості, з найпростіших імплікант.

Приклад 2.1. Скорочення булевого виразу для функції від трьох змінних (ядра присутні).

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Рис.2.1 – Таблиця істинності для функції від трьох змінних

Вираз у ДДНФ: $y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3}$.

Імпліканти 2-го рангу:

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 = \overline{x_1}x_3$$

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3 = \overline{x_2}x_3$$

$$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 = x_1\overline{x_2}$$

$$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3} = x_1\overline{x_3}$$

		$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$	$\overline{x_1}x_2x_3$	$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$x_1\overline{x_2}x_3$	$x_1x_2\overline{x_3}$
A	$\overline{x_1}x_3$	*	*			
B	$\overline{x_2}x_3$	*			*	
C	$x_1\overline{x_2}$			*	*	
D	$x_1\overline{x_3}$			*		*

Рис.2.2 – Імплікантна таблиця (для прикладу 2.1)

Імпліканти A і D – ядра, що відповідають термам, які далі вилучаються з імплікантної таблиці.

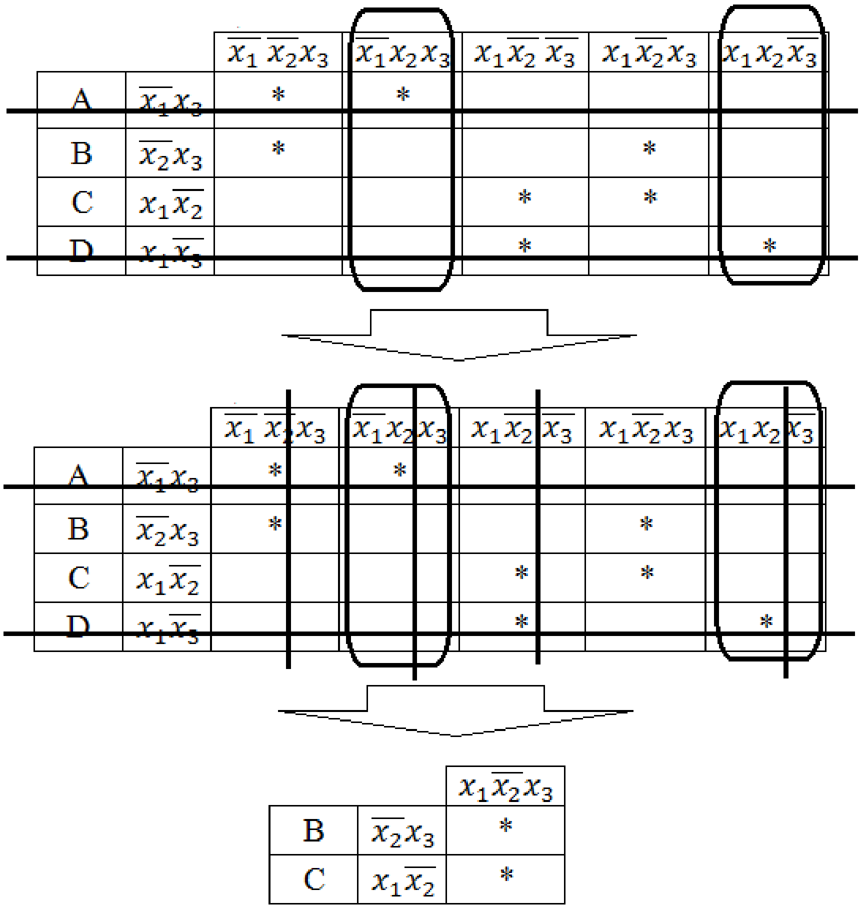


Рис.2.3 – Перетворення імплікантної таблиці при наявності ядр

Логічний вираз, що містить ядра та інші додаткові імпліканти, які позначено літерами: $A \cdot D \cdot (B \vee C) = ABD \vee ACD$.

Кожен терм логічного виразу відповідає окремому виразу у тупиковий формі. Тупикові ДНФ:

$$y_{\text{Т1}} = ABD = \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_3}$$

$$y_{\text{Т2}} = ACD = \overline{x_1}x_3 \vee x_1\overline{x_2} \vee x_1\overline{x_3}$$

Відповідно до кількості літер обидві тупикові ДНФ є мінімальними ДНФ.

Приклад 2.2. Скорочення булевого виразу для функції від трьох змінних (ядра відсутні).

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Рис.2.4 – Таблиця істинності для функції від трьох змінних

Вираз у ДДНФ: $y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3$.

Імпліканти 2-го рангу:

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}$$
$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} = \overline{x_2}\,\overline{x_3}$$
$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 = \overline{x_1}x_3$$
$$\overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 = x_2x_3$$
$$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3} = x_1\overline{x_3}$$
$$x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2$$

		$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$	$\overline{x_1}x_2x_3$	$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$x_1x_2\overline{x_3}$	$x_1x_2x_3$
A	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	*	*				
B	$\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	*			*		
C	$\overline{x_1}x_3$		*	*			
D	x_2x_3			*			*
E	$x_1\overline{x_3}$				*	*	
F	x_1x_2					*	*

Рис.2.5 – Імплікантна таблиця (для прикладу 2.2)

Логічний вираз, що містить імпліканти, які позначено літерами:

$$(A \vee B)(A \vee C)(C \vee D)(B \vee E)(E \vee F)(D \vee F) =$$
$$= (A \vee BC)(C \vee D)(B \vee E)(E \vee F)(D \vee F) =$$
$$= (AC \vee BC \vee AD)(B \vee E)(E \vee F)(D \vee F) =$$
$$= (BC \vee ABD \vee ACE \vee ADE)(E \vee F)(D \vee F) =$$
$$= (BCE \vee ACE \vee ADE \vee BCF \vee ABDF)(D \vee F) =$$
$$= BCDE \vee ADE \vee ABDF \vee ACEF \vee BCF$$

Кожен терм логічного виразу відповідає окремому виразу у тупиковий формі. Тупикові ДНФ:

$$y_{\text{Т}1} = BCDE = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1\overline{x_3}$$
$$y_{\text{Т}2} = ADE = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_2x_3 \vee x_1\overline{x_3}$$
$$y_{\text{Т}3} = ABDF = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$$
$$y_{\text{Т}4} = ACEF = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_3 \vee x_1\overline{x_3} \vee x_1x_2$$
$$y_{\text{Т}5} = BCF = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_3 \vee x_1x_2$$

Відповідно до кількості літер друга та п'ята тупикові ДНФ є мінімальними ДНФ:

$$y_{\text{М}1} = y_{\text{Т}2} = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_2x_3 \vee x_1\overline{x_3}$$
$$y_{\text{М}2} = y_{\text{Т}5} = \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_3 \vee x_1x_2$$

Приклад 2.3. Скорочення булевого виразу для функції від чотирьох змінних.

x_1	x_2	x_3	x_4	y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Рис.2.6 – Таблиця істинності для функції від чотирьох змінних

Вираз у ДДНФ: $y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4$.

Імпліканти 3-го рангу:

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 = \overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$$
$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 = \overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$$
$$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 = \overline{x_1}x_2\overline{x_3}$$
$$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} = x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$$
$$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2x_3x_4 = \overline{x_1}x_2x_4$$
$$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4 = x_2\overline{x_3}x_4$$
$$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4 = x_1\overline{x_2}x_4$$
$$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4 = x_1\overline{x_3}x_4$$
$$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4 = x_1x_2\overline{x_3}$$

Імпліканти 2-го рангу:

$$\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_3}x_4 = \overline{x_3}x_4$$
$$\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 \vee x_2\overline{x_3}x_4 = \overline{x_3}x_4$$
$$\overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3} = x_2\overline{x_3}$$
$$x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_3}x_4 = x_2\overline{x_3}$$

	A	B	C	D
	$\overline{x_3}x_4$	$x_2\overline{x_3}$	$\overline{x_1}x_2x_4$	$x_1\overline{x_2}x_4$
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	*			
$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$		*		
$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4$	*	*	*	
$\overline{x_1}x_2x_3x_4$			*	
$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	*			*
$x_1\overline{x_2}x_3x_4$				*
$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$		*		
$x_1x_2\overline{x_3}x_4$	*	*		

Рис.2.7 – Імплікантна таблиця (для прикладу 2.3)

Усі імпліканти A, B, C і D – ядра.

Тупикова ДНФ:

$$y_{\text{Т}} = ABCD = \overline{x_3}x_4 \vee x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_4$$

Єдина тупикова ДНФ одночасно є мінімальною ДНФ:

$$y_{\text{М}} = y_{\text{Т}} = \overline{x_3}x_4 \vee x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_4$$

2.7. Мінімізація булевих аналітичних виразів за методом карт Карно

Побудова комп'ютерних пристроїв передбачає застосування мінімальних, за певним критерієм, логічних виразів. Результат мінімізації створює підґрунтя для спрощення подальшого конструювання комп'ютерних пристроїв.

При умовно невеликій кількості змінних (нехай до 6 змінних) розгалуженим є спосіб мінімізації із застосуванням карт Карно, які є відображенням таблиць істинності в іншій формі. На рис. 2.8-2.10 наведено таблиці істинності та відповідні карти Карно для функцій від двох, трьох та чотирьох змінних. Рядки і стовпчики карти Карно позначено бінарними значеннями змінних функції (аргументами). Вміст кожної комірки карти Карно відповідає значенню функції у таблиці істинності.

x_1	x_2	$y = f(x_1, x_2)$
0	0	$y_0 = f(0{,}0)$
0	1	$y_1 = f(0{,}1)$
1	0	$y_2 = f(1{,}0)$
1	1	$y_3 = f(1{,}1)$

а)

		x_2 0	x_2 1
x_1	0	y_0	y_1
	1	y_2	y_3

б)

Рис.2.8 – Таблиця істинності (а) і карта Карно (б) для функції від двох змінних

x_1	x_2	x_3	$y = f\left(x_{1,}, x_2, x_3\right)$
0	0	0	$y_0 = f(0{,}0{,}0)$
0	0	1	$y_1 = f(0{,}0{,}1)$
0	1	0	$y_2 = f(0{,}1{,}0)$
0	1	1	$y_3 = f(0{,}1{,}1)$
1	0	0	$y_4 = f(1{,}0{,}0)$
1	0	1	$y_5 = f(1{,}0{,}1)$
1	1	0	$y_6 = f(1{,}1{,}0)$
1	1	1	$y_7 = f(1{,}1{,}1)$

а)

		$x_2\,x_3$ 00	01	11	10
x_1	0	y_0	y_1	y_3	y_2
	1	y_4	y_5	y_7	y_6

б)

		x_3 0	1
$x_1\,x_2$	00	y_0	y_1
	01	y_2	y_3
	11	y_6	y_7
	10	y_4	y_5

в)

Рис.2.9 – Таблиця істинності (а) і карти Карно (б, в) для функції від трьох змінних

Коректність склеювання доводиться аналітично із застосуванням властивостей булевих функцій:

$$y_{16} = y_5 m_5 \vee y_7 m_7 = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 = \overline{x_1} x_2 x_4 (\overline{x_3} \vee x_3) = \overline{x_1} x_2 x_4.$$

Наступні фрагменти склеювання:

$$y_{17} = y_9 m_9 \vee y_{11} m_{11} = x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 = x_1 \overline{x_2} x_4 (\overline{x_3} \vee x_3) = x_1 \overline{x_2} x_4;$$

$$y_{18} = y_1 m_1 \vee y_5 m_5 \vee y_9 m_9 \vee y_{13} m_{13} =$$
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 =$$
$$= \overline{x_3} x_4 \left(\overline{x_1}\,(\overline{x_2} \vee x_2) \vee x_1 (\overline{x_2} \vee x_2)\right) = \overline{x_3} x_4 (\overline{x_1} \vee x_1) = \overline{x_3} x_4;$$

$$y_{19} = y_4 m_4 \vee y_5 m_5 \vee y_{12} m_{12} \vee y_{13} m_{13} =$$
$$= \overline{x_1}\, x_2\, \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_2\, \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1 x_2\, \overline{x_3} x_4 =$$
$$= x_2 \overline{x_3} \left(\overline{x_1}\,(\overline{x_4} \vee x_4) \vee x_1 (\overline{x_4} \vee x_4)\right) = x_2 \overline{x_3} (\overline{x_1} \vee x_1) = x_2 \overline{x_3}.$$

За результатом склеювання одиниць утворюється вираз у мінімальній ДНФ: $y = \overline{x_3}x_4 \vee x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_4 \vee \overline{x_1}x_2x_4$ (загальна кількість змінних у виразі скорочена до 10 з початкових 32 у ДДНФ).

x_1	x_2	x_3	x_4	$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	$y_0 = f(0,0,0,0)$
0	0	0	1	$y_1 = f(0,0,0,1)$
0	0	1	0	$y_2 = f(0,0,1,0)$
0	0	1	1	$y_3 = f(0,0,1,1)$
0	1	0	0	$y_4 = f(0,1,0,0)$
0	1	0	1	$y_5 = f(0,1,0,1)$
0	1	1	0	$y_6 = f(0,1,1,0)$
0	1	1	1	$y_7 = f(0,1,1,1)$
1	0	0	0	$y_8 = f(1,0,0,0)$
1	0	0	1	$y_9 = f(1,0,0,1)$
1	0	1	0	$y_{10} = f(1,0,1,0)$
1	0	1	1	$y_{11} = f(1,0,1,1)$
1	1	0	0	$y_{12} = f(1,1,0,0)$
1	1	0	1	$y_{13} = f(1,1,0,1)$
1	1	1	0	$y_{14} = f(1,1,1,0)$
1	1	1	1	$y_{15} = f(1,1,1,1)$

а)

$x_1\,x_2$ \ $x_3\,x_4$	00	01	11	10
00	y_0	y_1	y_3	y_2
01	y_4	y_5	y_7	y_6
11	y_{12}	y_{13}	y_{15}	y_{14}
10	y_8	y_9	y_{11}	y_{10}

б)

Рис.2.10 – Таблиця істинності (а) і карта Карно (б) для функції від чотирьох змінних

Вираз у мінімальній КНФ утворюється за результатом склеювання нульових значень функції. В термах мінімальної КНФ присутні виключно змінні, що відповідають однаковим інверсним позначенням координат рядків і стовпців карти Карно для початкових комірок, які підпадають під склеювання. Наприклад (рис.2.11б), за результатом склеювання нулів, зіставлених конституентам 0 (макстермам), утворюється вираз у мінімальній КНФ:

$y = (\overline{x_3} \vee x_4)(x_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$.

x_1	x_2	x_3	x_4	y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

а)

$x_1 x_2$ \ $x_3 x_4$ (y)	00	01	11	10
00		1		
01	1	1	1	
11	1	1		
10		1	1	

$x_1 x_2$ \ $x_3 x_4$ (y)	00	01	11	10
00	0		0	0
01				0
11			0	0
10	0			0

б)

Рис.2.11 – Приклад таблиці істинності (а) і карт Карно (б) для функції від чотирьох змінних

Коректність склеювання доводиться аналітично із застосуванням властивостей булевих функцій:

$$y_{20} = (y_2 \vee M_2) \cdot (y_3 \vee M_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) =$$
$$= (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \vee (x_4 \overline{x_4}) = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3};$$
$$y_{21} = (y_{14} \vee M_{14}) \cdot (y_{15} \vee M_{15}) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) =$$
$$= (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \vee (x_4 \overline{x_4}) = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3};$$
$$y_{22} = (y_2 \vee M_2) \cdot (y_6 \vee M_6) \cdot (y_{10} \vee M_{10}) \cdot (y_{14} \vee M_{14}) =$$
$$= (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) =$$
$$= (\overline{x_3} \vee x_4) \vee (x_1 \overline{x_1}) \vee (x_2 \overline{x_2}) = \overline{x_3} \vee x_4;$$
$$y_{23} = (y_0 \vee M_0) \cdot (y_2 \vee M_2) \cdot (y_8 \vee M_8) \cdot (y_{10} \vee M_{10}) =$$
$$= (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) =$$
$$= (x_2 \vee x_4) \vee (x_1 \overline{x_1}) \vee (x_3 \overline{x_3}) = x_2 \vee x_4.$$

Аналогічним до карт Карно засобом мінімізації є діаграми Вейча, які передбачають інше позначення рядків і стовпчиків. Замість символів 0 та 1 в діаграмах Вейча використовуються позначення аргументів (рис.2.12).

Мінімізація з використанням діаграм Вейча аналогічна мінімізації з картами Карно. Вирази за результатом мінімізації для прикладу на рис.2.13:

~ у мінімальній ДНФ: $y = \overline{x_3} x_4 \vee x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_4$;

~ у мінімальній КНФ: $y = (\overline{x_3} \vee x_4)(x_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$.

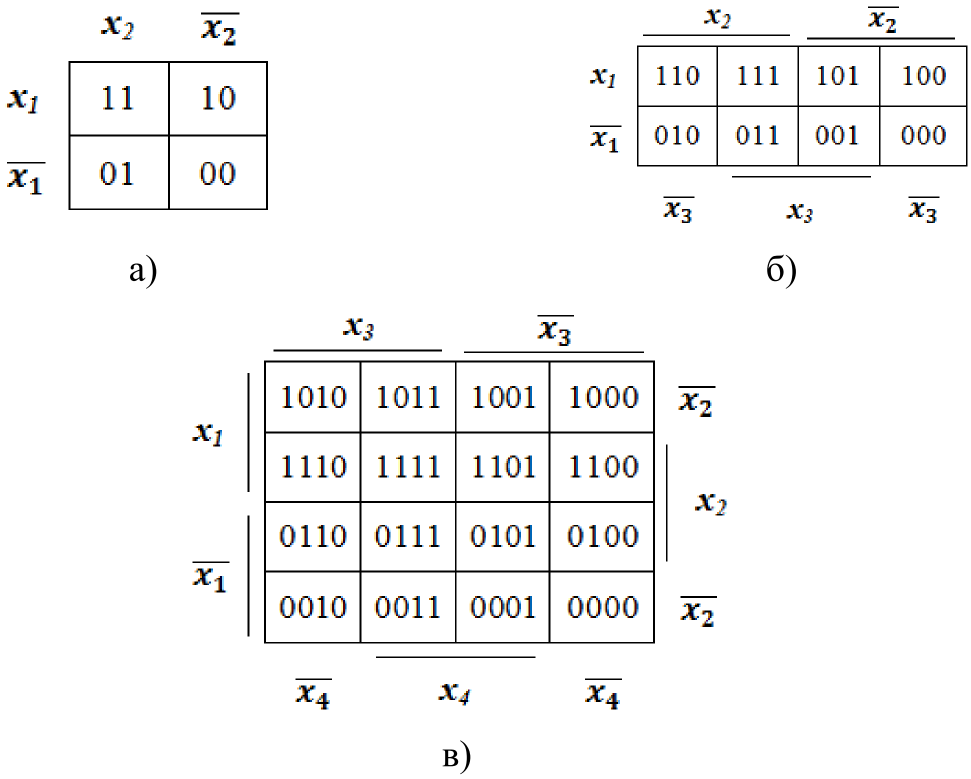


Рис.2.12 – Діаграми Вейча для функції від двох (а), трьох (б) та чотирьох змінних (в)

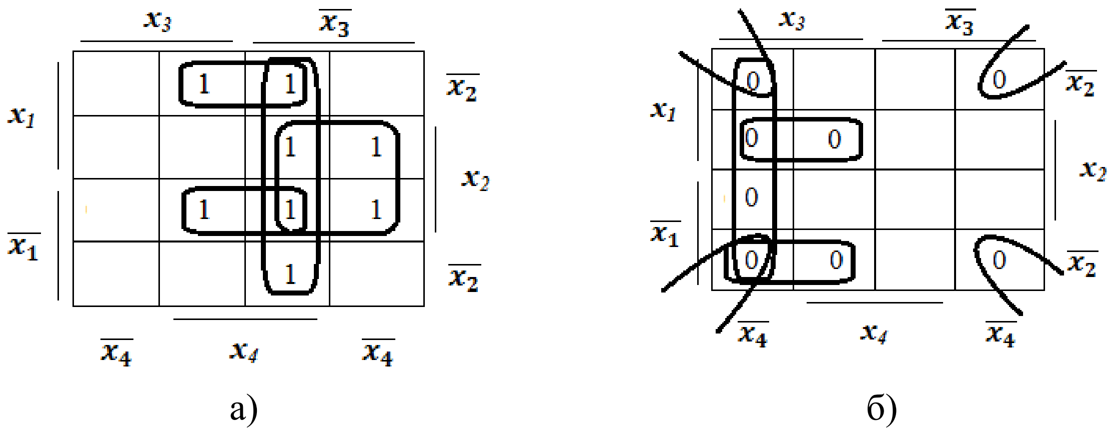


Рис.2.13 – Приклад застосування діаграм Вейча з метою мінімізації функції від чотирьох змінних і отримання виразів у ДНФ (а) та КНФ (б)

2.8. Особливості карт Карно і діаграм Вейча

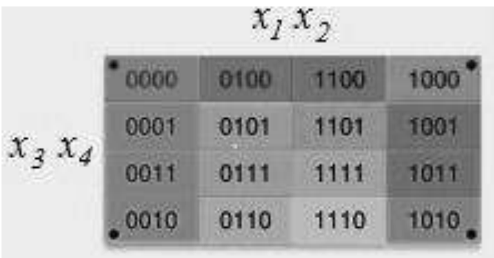
Склеюванню підлягають прямокутні фрагменти, що містять одиниці (чи нулі) і об'єднують 2, 4, 8 комірок тощо. В геометричному уявленні мінімізація передбачає позначення, наприклад кольорову розмальовку, клітин, що об'єднуються у загальний прямокутний фрагмент деякого розміру.

Прямокутні фрагменти мають назву інтервал, а множина інтервалів – покриття. Якість покриття оцінюється в кількості інтервалів і комірок в них. Мінімізація (склеювання) направлена на отримання найменшої кількості інтервалів з одночасним об'єднанням найбільшої кількості комірок.

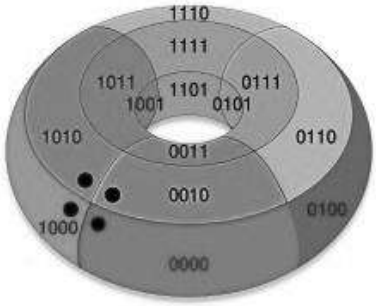
Вирази у мінімальних формах містять елементарні кон'юнкції (у ДНФ) чи диз'юнкції (у КНФ), які зіставлені інтервалам покриття і мають назву термів.

Кожен терм містить тільки незмінні аргументи відповідного інтервалу. Кількість аргументів у термах вказує на ранг інтервалу. Ранг зменшується при збільшенні кількості комірок інтервалу в процесі склеювання.

При мінімізації склеюванню підлягають також комірки, що умовно виходять за межі карт (діаграм) у горизонтальному і вертикальному напрямках. Така властивість випливає з характерної риси карт (діаграм) – позначення координат сусідніх комірок у горизонтальному та вертикальному напрямках завжди відрізняються тільки однією змінною. Карти (діаграми) можна трактувати як варіант подання у двовимірному просторі (на площині) тривимірного геометричного об'єкта, що має форму тора (рис.2.14).



а)



б)

Рис.2.14 – Подання карти Карно для функції від чотирьох змінних (а) у вигляді тора (б)

Існує можливість коректного зображення карт (діаграм) в інших варіантах, кожен з яких є відображенням первинного тора (рис.2.15).

$x_1 x_2$ \ $x_3 x_4$	01	11	10	00
11	y_{13}	y_{15}	y_{14}	y_{12}
10	y_9	y_{11}	y_{10}	y_8
00	y_1	y_3	y_2	y_0
01	y_5	y_7	y_6	y_4

$x_1 x_3$ \ $x_2 x_4$	00	01	11	10
00	y_0	y_1	y_5	y_4
01	y_2	y_3	y_7	y_6
11	y_{10}	y_{11}	y_{15}	y_{14}
10	y_8	y_9	y_{13}	y_{12}

x_4 \ $x_1 x_2 x_3$	000	001	011	010	110	111	101	100
0	y_0	y_2	y_6	y_4	y_{12}	y_{14}	y_{10}	y_8
1	y_1	y_3	y_7	y_5	y_{13}	y_{15}	y_{11}	y_9

Рис.2.15 – Варіанти карт Карно для функції від чотирьох змінних

Карти Карно і діаграми Вейча для функцій від довільної кількості аргументів нескладно утворюються рекурсивно із застосуванням карт (діаграм) для функцій від меншої кількості аргументів (рис.2.16, 2.17).

		$x_1 x_2 x_3$							
		000	001	011	010	110	111	101	100
$x_4 x_5$	00	y_0	y_4	y_{12}	y_8	y_{24}	y_{28}	y_{20}	y_{16}
	01	y_1	y_5	y_{13}	y_9	y_{25}	y_{29}	y_{21}	y_{17}
	11	y_3	y_7	y_{15}	y_{11}	y_{27}	y_{31}	y_{23}	y_{19}
	10	y_2	y_6	y_{14}	y_{10}	y_{26}	y_{30}	y_{22}	y_{18}

Рис.2.16 – Карта Карно для функції від п'яти змінних

		$x_1 x_2 x_3$							
		000	001	011	010	110	111	101	100
$x_4 x_5 x_6$	000	y_0	y_8	y_{24}	y_{16}	y_{48}	y_{56}	y_{40}	y_{32}
	001	y_1	y_9	y_{25}	y_{17}	y_{49}	y_{57}	y_{41}	y_{33}
	011	y_3	y_{11}	y_{27}	y_{19}	y_{51}	y_{59}	y_{43}	y_{35}
	010	y_2	y_{10}	y_{26}	y_{18}	y_{50}	y_{58}	y_{42}	y_{34}
	110	y_6	y_{14}	y_{30}	y_{22}	y_{54}	y_{62}	y_{46}	y_{38}
	111	y_7	y_{15}	y_{31}	y_{23}	y_{55}	y_{63}	y_{47}	y_{39}
	101	y_5	y_{13}	y_{29}	y_{21}	y_{53}	y_{61}	y_{45}	y_{37}
	100	y_4	y_{12}	y_{28}	y_{20}	y_{52}	y_{60}	y_{44}	y_{36}

Рис.2.17 – Карта Карно для функції від шести змінних

2.9. Неповністю визначені булеві функції

Можливі ситуації, за якими в таблиці істинності вказується не на усі значення булевої функції відповідно до можливих комбінацій аргументів. Це пов'язано з практичними аспектами реалізації комп'ютерних пристроїв, наприклад RS-тригера (рис.2.18-2.19а).

Особливість RS-тригера – заборона одночасного практичного подання на обидва входи тригера вхідних впливів одиничного значення (стосується тригерів з прямим керуванням, для тригерів з інверсним керуванням – нульового значення). В іншому випадку, при R=1 та S=1 від тригера вимагається одночасне скидання в нульовий стан (R – reset) і встановлення в одиничне (S – set), що є протиріччям. Тому комбінація вхідних впливів RS=11 є некоректною і тому практично забороненою, що вказується зірочками в таблицях переходів тригера і в таблицях істинності булевих функцій.

В картах Карно заборонені стани помічаються зірочками та при мінімізації довільно довизначаються булевими значеннями. Результатом мінімізації, що наведена на рис.2.19б, є вирази, за якими формується схема RS-тригера (рис.2.20).

R	**S**	Q^{t+1}	**Дія**
0	0	Q^t	Збереження поточного стану
0	1	1	Перемикання в одиницю
1	0	0	Перемикання в нуль
1	1	*	Комбінація вхідних впливів не є робочою

Рис.2.18 – Скорочена таблиця переходів RS-тригера

R	**S**	Q^t	Q^{t+1}	$\overline{Q}^{t+1}$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	*	*
1	1	1	*	*

а)

RS

Q^t \ Q^{t+1}	00	01	11	10
0	0		*	0
1			*	0

RS

Q^t \ $\overline{Q}^{t+1}$	00	01	11	10
0		0	*	
1	0	0	*	

б)

Рис.2.19 – Таблиця переходів (а) і карти Карно (б) RS-тригера

Вирази (характеристичні рівняння) для схеми RS-тригера у мінімальній КНФ та після перетворення у базис "стрілка Пірса":

$$Q^{t+1} = \overline{R}(S \vee Q^t) = \overline{\overline{\overline{R}(S \vee Q^t)}} = \overline{R \vee \overline{(S \vee Q^t)}},$$

$$\overline{Q}^{t+1} = \overline{S}\left(R \vee \overline{Q}^t\right) = \overline{S \vee \overline{\left(R \vee \overline{Q}^t\right)}}.$$

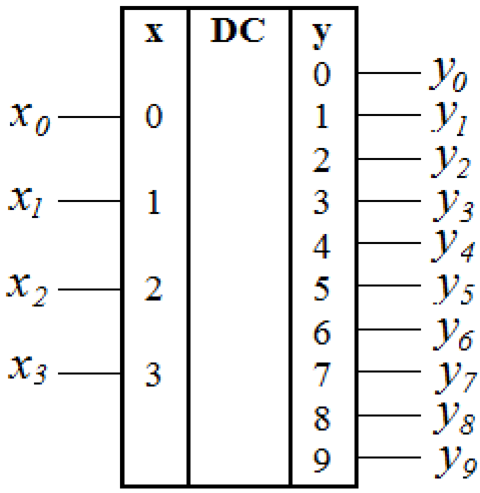
а) б)

Рис.2.20 – Схема на елементах ЧИ-НІ (а) і умовне графічне позначення (б) RS-тригера з прямим керуванням

Врахування при мінімізації заборонених станів дозволяє отримати більш раціональну схему "дешифратора 4/10", на виході якого утворюється унітарний код відповідно до двійкового позиційного на вході. Наприклад, при бінарних значеннях вхідних змінних $\mathbf{x_3x_2x_1x_0}$=0111, що відповідає десятковому значенню 7, формується одиничний сигнал на виході $\mathbf{y_7}$, а значення решти вихідних сигналів дорівнюють нулеві (рис.2.21).

x_3	x_2	x_1	x_0	y_i=1
0	0	0	0	y_0
0	0	0	1	y_1
0	0	1	0	y_2
0	0	1	1	y_3
0	1	0	0	y_4
0	1	0	1	y_5
0	1	1	0	y_6
0	1	1	1	y_7
1	0	0	0	y_8
1	0	0	1	y_9
1	0	1	0	*
1	0	1	1	*
1	1	0	0	*
1	1	0	1	*
1	1	1	0	*
1	1	1	1	*

а)



б)

Рис.2.21 – Таблиця істинності (а) і умовне графічне позначення (б) дешифратора 4/10 з прямим керуванням

Первинні вирази можна отримати у ДДНФ безпосередньо з таблиці істинності, наприклад $y_7 = \overline{x_3} x_2 x_1 x_0$. Із застосування ДДНФ випливає 10 виразів для функцій від $\mathbf{y_0}$ до $\mathbf{y_9}$, кожен з яких матиме 4 аргумента. Практична реалізація такої схеми вимагатиме 10 логічних елементів із 4 входами, загалом 40 входів.

При мінімізації для кожного виходу дешифратора складається карта Карно, яка окрім позначення для активного виходу містить зірочки заборонених комбінацій вхідних впливів, що не використовуються (рис.2.22).

За результатом мінімізації отримано вирази у ДНФ, які не завжди містять позначки для усіх входів, що вказує на скорочений варіант схеми дешифратора у зіставленні зі схемою з виразу у ДДНФ: $y_0 = \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,\overline{x_0}$, $y_1 = \overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}\,x_0$, $y_2 = \overline{x_2}\,x_1\,\overline{x_0}$, $y_3 = \overline{x_2}\,x_1\,x_0$, $y_4 = x_2\overline{x_1}\,\overline{x_0}$, $y_5 = x_2\overline{x_1}x_0$, $y_6 = x_2x_1\overline{x_0}$, $y_7 = x_2x_1x_0$, $y_8 = x_3\overline{x_0}$, $y_9 = x_3x_0$.

y_7 (x_3x_2 \ x_1x_0)	00	01	11	10
00				
01			1	
11	*	*	*	*
10			*	*

а)

y_8 (x_3x_2 \ x_1x_0)	00	01	11	10
00				
01				
11	*	*	*	*
10	1		*	*

б)

Рис.2.22 – Карти Карно для виходів $\mathbf{y_7}$ (а) і $\mathbf{y_8}$ (б) дешифратора 4/10

Практична реалізація схеми, що випливає з виразу у мінімальній ДНФ, вимагатиме 2 логічних елементів із 4 входами, 6 логічних елементів із 3 входами, 2 логічних елементів із 2 входами, загалом 30 входів, і спрощує подальше конструювання порівняно зі схемою, що зіставлена виразу у ДДНФ.

2.10. Синтез комбінаційних схем

При поєднанні логічних елементів утворюються пристрої, схеми яких називають логічними. Схеми називають комбінаційними за відсутності у логічних схемах зворотних зв'язків. Пристрої, що побудовані за комбінаційними схемами, реалізують функції, поточне значення яких визначається тільки сукупністю значень вхідних змінних і не залежать від попереднього стану пристрою. Комбінаційні пристрої не мають властивості пам'яті.

Схеми називають накопичувальними за наявності у логічних схемах зворотних зв'язків, наприклад тригери. Пристрої, що побудовані за накопичувальними схемами, реалізують функції, поточне значення яких визначається сукупністю значень вхідних змінних і попереднім станом пристрою. Накопичувальні пристрої мають властивість пам'яті.

За формального синтезу часом затримки логічних елементів нехтують незважаючи на фактичну наявність часової затримки у реальних елементах.

Невід'ємною частиною комп'ютерного процесору є вузли виконання базових арифметичних дій, які утворюють ядро будь-яких пристроїв обробки цифрової інформації. Арифметична дія додавання у дискретній (цифровій) техніці здійснюється із застосуванням суматору двійкових чисел, функція якого позначається латинськими літерами SM. Багаторозрядні суматори складаються з однорозрядних суматорів (рис.2.23).

Синтез комбінаційного однорозрядного суматора передбачає отримання виразів у мінімальній ДНФ булевих функцій від трьох змінних для суми і перенесення (рис.2.24):

$$s = \bar{a}\, b\, \overline{pin} \vee a\, \bar{b}\, \overline{pin} \vee \bar{a}\, \bar{b}\, pin \vee a\, b\, pin;$$
$$pout = a\, pin \vee b\, pin \vee a\, b.$$

Логічна схема комбінаційного однорозрядного суматору утворюється безпосередньо з виразів у мінімальній ДНФ (рис.2.25).

З урахуванням вхідного перенесення (pin)

s = a + b + pin

a	b	pin	pout	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

б)

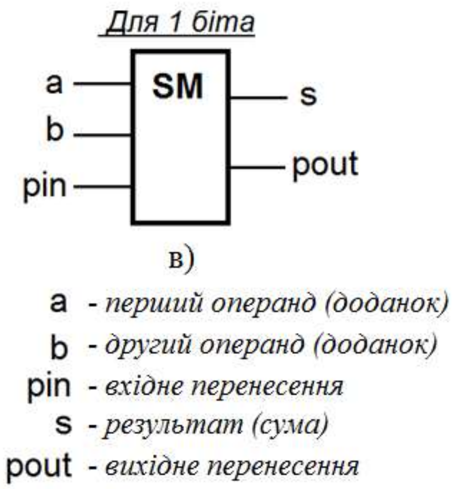


Рис.2.23 – Однорозрядний суматор: (а) правило додавання операндів розрядністю один біт, (б) таблиця істинності, (в) умовне графічне позначення

pin \ *s* (*ab*)	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

а)

pin \ *pout* (*ab*)	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

б)

Рис.2.24 – Карти Карно функцій однорозрядного суматора: (а) сума, (б) перенесення

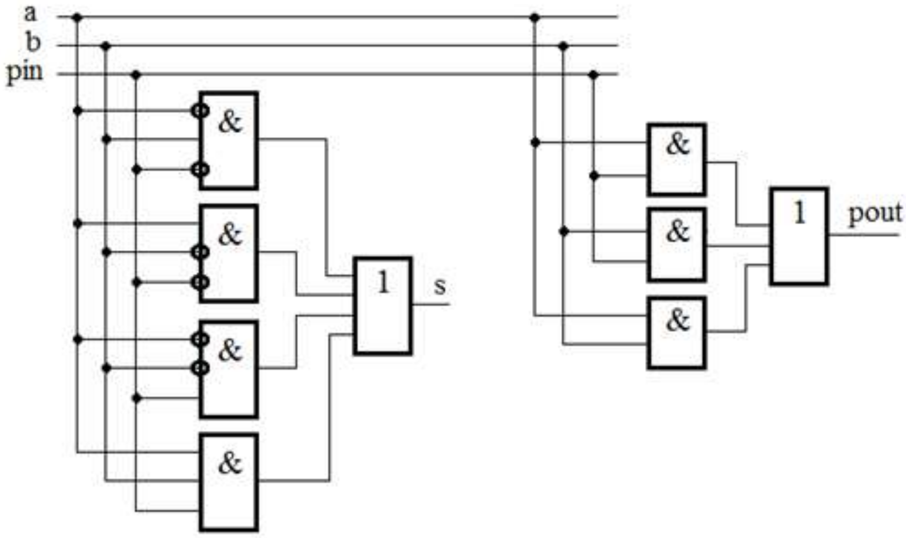


Рис.2.25 – Логічна схема однорозрядного суматора

Практична реалізація схем комп'ютерних пристроїв залежить від багатьох чинників, у т.ч. від схемотехнічного базису. Тому при конструюванні завжди присутнє перетворення схеми у заданий базис логічних елементів, наприклад І-НІ (штрих Шеффера).

Перетворення у заданий базис ґрунтується на застосуванні властивостей булевих функцій. Схема у базисі І-НІ для однорозрядного суматора наведена на рис.2.26, що відповідає виразам після перетворення за правилом де Моргана:

$$s = \overline{\left(\overline{\bar{a}\,b\,\overline{pin}}\right)\left(\overline{a\,\bar{b}\,\overline{pin}}\right)\left(\overline{\bar{a}\,\bar{b}\,pin}\right)\left(\overline{a\,b\,pin}\right)};$$

$$pout = \overline{\left(\overline{a\,pin}\right)\left(\overline{b\,pin}\right)\left(\overline{a\,b}\right)}.$$

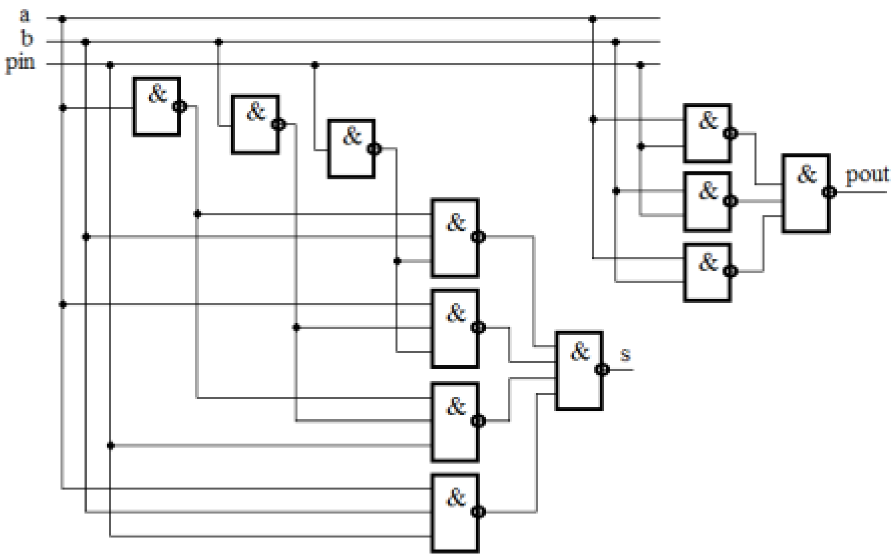


Рис.2.26 – Схема однорозрядного суматора у базисі І-НІ

При конструюванні за умови реалізації схеми на логічних елементах ЧИ-НІ (стрілка Пірса) передбачається попереднє отримання виразів функції у мінімальних КНФ. Синтез комбінаційного однорозрядного суматора передбачає отримання виразів у мінімальних КНФ булевих функцій від трьох змінних для суми і перенесення (рис.2.27):

$$s = (a \vee b \vee pin)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee pin)(a \vee \bar{b} \vee \overline{pin})(\bar{a} \vee b \vee \overline{pin});$$

$$pout = (a \vee pin)(b \vee pin)(a \vee b).$$

		ab			
	s	00	01	11	10
pin	0	0		0	
	1		0		0

а)

		ab			
	pout	00	01	11	10
pin	0	0	0		0
	1	0			

б)

Рис.2.27 – Карти Карно функцій однорозрядного суматора:

(а) сума, (б) перенесення

Схема у базисі ЧИ-НІ для однорозрядного суматора наведена на рис.2.28, що відповідає виразам після перетворення за правилом де Моргана:

$$s = \overline{\left(\overline{a \vee b \vee pin}\right) \vee \left(\overline{\bar{a} \vee \bar{b} \vee pin}\right) \vee \left(\overline{a \vee \bar{b} \vee \overline{pin}}\right) \vee \left(\overline{\bar{a} \vee b \vee \overline{pin}}\right)};$$

$$pout = \overline{\left(\overline{a \vee pin}\right) \vee \left(\overline{b \vee pin}\right) \vee \left(\overline{a \vee b}\right)}.$$

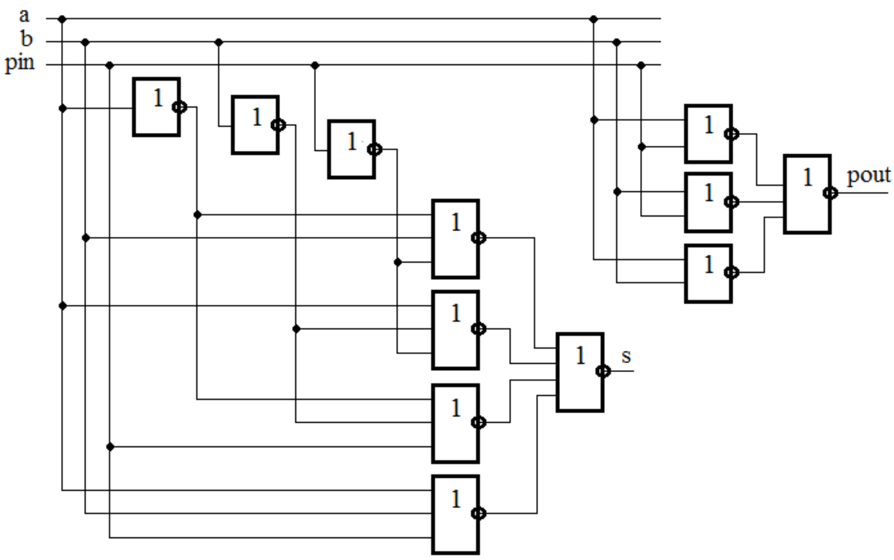


Рис.2.28 – Схема однорозрядного суматора у базисі ЧИ-НІ

Для аналітичного опису правила роботи пристроїв у канонічній формі використовуються вирази у ДДНФ згідно з таблицею істинності, наприклад для однорозрядного суматора:

$$s = \overline{a}\, b\, \overline{pin} \vee a\, \overline{b}\, \overline{pin} \vee \overline{a}\, \overline{b}\, pin \vee a\, b\, pin;$$

$$pout = a\, \overline{b}\, pin \vee \overline{a}\, b\, pin \vee a\, b\, \overline{pin} \vee a\, b\, pin.$$

Логічна схема відповідно до канонічних функцій у ДКНФ однорозрядного суматору наведена на рис.2.29. Дешифратор 3/8 у логічній схемі суматору формує сигнали відповідно до кон'юнктивних мінтермів (конституент 1) функцій суматору, що відповідають рядкам таблиці істинності (рис.2.30а). Для спрощення зображення логічної схеми позначки вихідних функцій дешифратору позначено десятковими еквівалентами мінтермів: "0" ~ $\overline{a}\, \overline{b}\, \overline{pin}$; "1" ~ $\overline{a}\, \overline{b}\, pin$; "2" ~ $\overline{a}\, b\, \overline{pin}$; "3" ~ $\overline{a}\, b\, pin$; "4" ~ $a\, \overline{b}\, \overline{pin}$; "5" ~ $a\, \overline{b}\, pin$; "6" ~ $a\, b\, \overline{pin}$; "7" ~ $a\, b\, pin$. Вихідні логічні елементи ЧИ суматору об'єднують сигнали з дешифратору відповідно до рядків таблиці істинності, у яких сума або перенесення отримують одиничне значення.

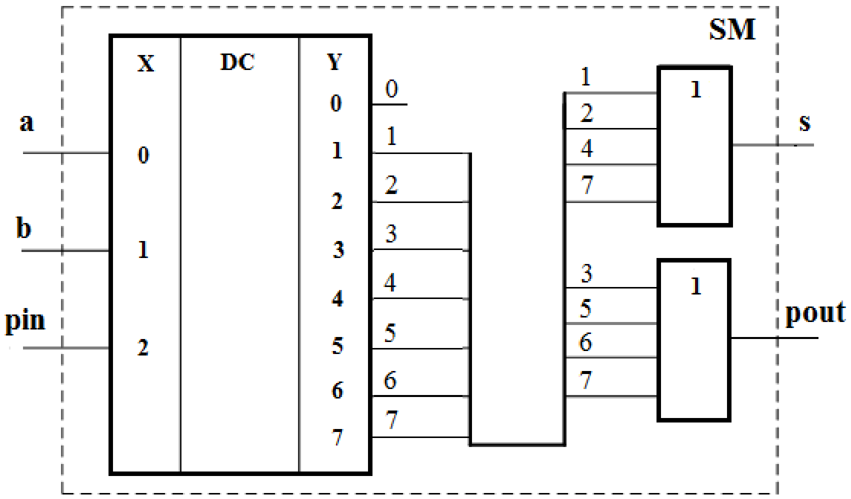


Рис.2.29 – Комбінаційна схема канонічного однорозрядного суматора

X0	X1	X2	Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

а)

X0	X1	X2	Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

б)

Рис.2.30 – Таблиці істинності дешифраторів 3/8: а) прямого, б) зворотного

У випадку використання виразів у ДКНФ для аналітичного опису правила роботи пристроїв у канонічній формі утворюється аналогічна схема з дешифратором, наприклад для однорозрядного суматора:

$$s = (a \vee b \vee pin)(\overline{a} \vee \overline{b} \vee pin)(a \vee \overline{b} \vee \overline{pin})(\overline{a} \vee b \vee \overline{pin});$$
$$pout = (a \vee b \vee pin)(\overline{a} \vee b \vee pin)(a \vee \overline{b} \vee pin)(a \vee b \vee \overline{pin}).$$

Логічна схема відповідно до канонічних функцій у ДКНФ однорозрядного суматору наведена на рис.2.31.

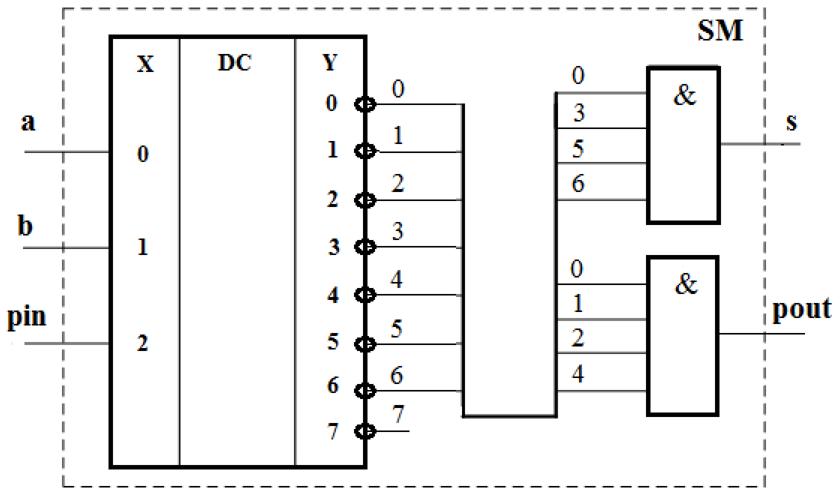


Рис.2.31 – Комбінаційна схема канонічного однорозрядного суматора

Дешифратор 3/8 зі зворотним поданням вихідних сигналів у логічній схемі суматору формує сигнали відповідно до кон'юнктивних макстермів (конституент 0) функцій суматору, що відповідають рядкам таблиці істинності. Для спрощення зображення логічної схеми позначки вихідних функцій дешифратору позначено десятковими еквівалентами макстермів:

"0" ~ $(a \vee b \vee pin)$; "1" ~ $(a \vee b \vee \overline{pin})$; "2" ~ $(a \vee \overline{b} \vee pin)$; "3" ~ $(a \vee \overline{b} \vee \overline{pin})$;
"4" ~ $(\overline{a} \vee b \vee pin)$; "5" ~ $(\overline{a} \vee b \vee \overline{pin})$; "6" ~ $(\overline{a} \vee \overline{b} \vee pin)$; "7" ~ $(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{pin})$.

Вихідні логічні елементи І суматору об'єднують сигнали з дешифратору відповідно до рядків таблиці істинності, у яких сума або перенесення отримують нульове значення.

2.11. Синтез комбінаційних схем з урахуванням двоїстості

В комп'ютерних пристроях бінарним значенням даних фізично зіставляється певний рівень напруги. Типовими є два рівнозначні варіанти. У першому випадку, який називається додатна логіка, високому рівню напруги "H" (high) зіставляється логічна одиниця, а низькому "L" (low) – логічний нуль. У другому випадку, який називається від'ємна логіка, високому рівню напруги "H" зіставляється логічний нуль, а низькому "L" – логічна одиниця. Із цього випливає, що спосіб кодування є відображенням первинних фізичних процесів в пристроях.

a	*b*	*pin*	*s*	*pout*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

а)

H ~ 1
L ~ 0

Ua	*Ub*	*Upin*	*Us*	*Upout*
L	L	L	L	L
L	L	H	H	L
L	H	L	H	L
L	H	H	L	H
H	L	L	H	L
H	L	H	L	H
H	H	L	L	H
H	H	H	H	H

H ~ 0
L ~ 1

a	*b*	*pin*	*s*	*pout*
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

б)

Рис.2.32 – Бінарне кодування високого "H" і низького "L" рівнів напруги за додатною (а) і від'ємною (б) логіками в схемі однорозрядного суматора

Застосування обох способів відображення рівнів напруги до однорозрядного суматора наведено на рис.2.32. Подальше зіставлення значень сигналів за від'ємною логікою зі значеннями однойменних сигналів двоїстої функції однорозрядного суматора вказує на рівнозначність (еквівалентність) цих сигналів (рис.2.33).

a	b	pin	$s*$	$pout*$	S^{NL}	$pout^{NL}$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Рис.2.33 – Зіставлення значень сигналів в схемі однорозрядного суматора:
$s*$, $pout*$ – результат двоїстих функцій суми і перенесення;
$\mathrm{S^{NL}}$, $pout^{NL}$ – сума і перенесення за від'ємною логікою кодування

Таким чином, властивість двоїстості створює теоретичне підґрунтя для синтезу комп'ютерних схем з сигналами за від'ємною логікою кодування. Усі положення методики щодо канонічності, мінімізації, подання в базисі тощо застосовуються аналогічно кодуванню за додатною логікою.

За наявності виразів при кодуванні за додатною логікою вирази за від'ємною логікою можливо отримати на підставі властивостей двоїстості. Наприклад, для однорозрядного суматора відомі вирази у мінімальній ДНФ за додатною логікою перетворюються у вирази за від'ємною логікою у мінімальній КНФ:

$$s^* = \left(\overline{a} \vee b \vee \overline{pin}\right)\left(a \vee \overline{b} \vee \overline{pin}\right)\left(\overline{a} \vee \overline{b} \vee pin\right)(a \vee b \vee pin);$$
$$pout^* = (a \vee pin)(b \vee pin)(a \vee b);$$
$$s = S^{NL} = s^*;$$
$$pout = pout^{NL} = pout^*.$$

З таких виразів після нескладного перетворення за правилом де Моргана утворюється схема у базисі ЧИ-НІ.

2.12. Завдання 2.1

1. Знайти тупикові та мінімальні ДНФ для булевих функцій трьох змінних (табл.2.20).

Таблиця 2.20 – Таблиця істинності функцій від трьох змінних

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0

Таблиця 2.20 (продовження)

x_1	x_2	x_3	f_{25}	f_{26}	f_{27}	f_{28}	f_{29}	f_{30}	f_{31}	f_{32}	f_{33}	f_{34}	f_{35}	f_{36}	f_{37}	f_{38}	f_{39}	f_{40}	f_{41}	f_{42}	f_{43}	f_{44}	f_{45}	f_{46}	f_{47}
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1

Таблиця 2.20 (продовження)

x_1	x_2	x_3	f_{48}	f_{49}	f_{50}	f_{51}	f_{52}	f_{53}	f_{54}	f_{55}	f_{56}	f_{57}	f_{58}	f_{59}	f_{60}	f_{61}	f_{62}	f_{63}	f_{64}	f_{65}	f_{66}	f_{67}	f_{68}	f_{69}	f_{70}
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1

2. Знайти тупикові та мінімальні ДНФ для булевих функцій чотирьох змінних (табл.2.21).

Таблиця 2.21 – Таблиця істинності функцій від чотирьох змінних

x_1	x_2	x_3	x_4	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1

Таблиця 2.21 (продовження)

x_1	x_2	x_3	x_4	f_{25}	f_{26}	f_{27}	f_{28}	f_{29}	f_{30}	f_{31}	f_{32}	f_{33}	f_{34}	f_{35}	f_{36}	f_{37}	f_{38}	f_{39}	f_{40}	f_{41}	f_{42}	f_{43}	f_{44}	f_{45}	f_{46}	f_{47}
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0

Таблиця 2.21 (продовження)

x_1	x_2	x_3	x_4	f_{48}	f_{49}	f_{50}	f_{51}	f_{52}	f_{53}	f_{54}	f_{55}	f_{56}	f_{57}	f_{58}	f_{59}	f_{60}	f_{61}	f_{62}	f_{63}	f_{64}	f_{65}	f_{66}	f_{67}	f_{68}	f_{69}	f_{70}
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1

3. Знайти тупикові та мінімальні ДНФ для булевих функцій п'яти змінних (табл. 2.22).

Таблиця 2.22 – Таблиця істинності функцій від п'яти змінних

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Таблиця 2.22 (продовження)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_{25}	f_{26}	f_{27}	f_{28}	f_{29}	f_{30}	f_{31}	f_{32}	f_{33}	f_{34}	f_{35}	f_{36}	f_{37}	f_{38}	f_{39}	f_{40}	f_{41}	f_{42}	f_{43}	f_{44}	f_{45}	f_{46}	f_{47}
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0

Таблиця 2.22 (продовження)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_{48}	f_{49}	f_{50}	f_{51}	f_{52}	f_{53}	f_{54}	f_{55}	f_{56}	f_{57}	f_{58}	f_{59}	f_{60}	f_{61}	f_{62}	f_{63}	f_{64}	f_{65}	f_{66}	f_{67}	f_{68}	f_{69}	f_{70}
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0

2.13. Завдання 2.2

1. Для заданої булевої функції трьох змінних $y = f_n(x_1, x_2, x_3)$, де n – номер варіанту (табл.2.23):

а) визначити вирази у вигляді:

- канонічних ДДНФ та ДКНФ;
- мінімальних ДНФ та КНФ,

б) для виразів у мінімальних ДНФ та КНФ вказати на двоїсті функції,

в) відповідно виразам у мінімальних формах надати схеми в базисі логічних елементів:

- "І-НІ";
- "ЧИ-НІ",

г) відповідно виразам двоїстої функції надати схеми в базисі логічних елементів:

- "І-НІ";
- "ЧИ-НІ".

Таблиця 2.23 – Таблиця істинності функцій від трьох змінних

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	*	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	*	1	*	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	*	1	0	0	*	1	1	1	1	0
0	1	1	*	1	1	1	1	1	1	0	*	0	1	1	1	0	*	0	0	0	1
1	0	0	1	*	0	1	0	0	0	*	0	0	1	1	1	1	1	*	1	0	1
1	0	1	0	1	*	1	1	1	*	1	1	1	0	0	1	1	0	0	*	1	0
1	1	0	1	1	1	*	1	*	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	*	1
1	1	1	1	1	0	1	*	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	*

Таблиця 2.23 (продовження)

x_1	x_2	x_3	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_{25}	f_{26}	f_{27}	f_{28}	f_{29}	f_{30}	f_{31}	f_{32}	f_{33}	f_{34}	f_{35}	f_{36}
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	*	1	1	0	1	0	1	*	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	*	1	*	0	1	1	1	0	1	*	1	0	0
0	1	1	1	1	1	*	0	0	1	*	1	0	1	1	0	0	*	1	1
1	0	0	0	0	*	1	0	0	0	1	*	1	1	0	0	0	1	*	1
1	0	1	1	*	1	0	1	1	0	0	0	*	0	1	0	1	1	1	*
1	1	0	*	0	1	1	1	0	1	1	1	0	*	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	*	1	1	0	0	1

Таблиця 2.23 (продовження)

x_1	x_2	x_3	f_{37}	f_{38}	f_{39}	f_{40}	f_{41}	f_{42}	f_{43}	f_{44}	f_{45}	f_{46}	f_{47}	f_{48}	f_{49}	f_{50}	f_{51}	f_{52}	f_{53}
0	0	0	0	1	*	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	*	1
0	0	1	0	1	1	*	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	*
0	1	0	1	0	0	0	*	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	*	0	0	1	0	*	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	*	1	1	0	1	*	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	*	0	1	1	1	*	0	0	1	1
1	1	0	*	0	0	1	0	1	1	1	*	1	0	0	0	*	1	0	0
1	1	1	1	*	0	1	1	0	0	1	0	*	1	0	0	1	*	0	0

Таблиця 2.23 (продовження)

x_1	x_2	x_3	f_{54}	f_{55}	f_{56}	f_{57}	f_{58}	f_{59}	f_{60}	f_{61}	f_{62}	f_{63}	f_{64}	f_{65}	f_{66}	f_{67}	f_{68}	f_{69}	f_{70}
0	0	0	1	0	1	1	0	1	*	1	0	0	1	0	1	1	*	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	*	1	0	1	1	0	0	1	*	0
0	1	0	*	1	1	1	1	1	0	0	*	1	0	1	1	1	1	0	*
0	1	1	1	*	0	0	1	1	1	1	0	*	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	*	1	0	0	1	0	1	1	*	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	*	1	1	0	1	0	1	0	*	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	*	0	0	0	1	1	1	0	*	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1	*	0	1	0	0	0	0	1	*	1	0	1

2. Для заданої булевої функції чотирьох змінних $y = f_n(x_1, x_2, x_3, x_4)$, де n – номер варіанту (табл.2.24):

а) визначити вирази у вигляді:

- канонічних ДДНФ та ДКНФ;
- мінімальних ДНФ та КНФ,

б) для виразів у мінімальних ДНФ та КНФ вказати на двоїсті функції,

в) відповідно виразам у мінімальних формах надати схеми в базисі логічних елементів:

- "І-НІ";
- "ЧИ-НІ",

г) відповідно виразам двоїстої функції надати схеми в базисі логічних елементів:

- "І-НІ";
- "ЧИ-НІ".

Таблиця 2.24 – Таблиця істинності функцій від чотирьох змінних

x_1	x_2	x_3	x_4	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
0	0	0	0	*	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	*
0	0	0	1	1	*	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	*	1
0	0	1	0	0	0	*	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	*	0	0
0	0	1	1	1	1	0	*	1	0	1	0	1	0	0	0	*	0	1	0	0	0	1	0	*	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	*	0	1	1	0	0	1	*	1	1	0	1	1	1	0	*	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	*	0	1	0	1	*	0	0	1	0	0	1	1	*	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	*	1	1	*	0	1	1	0	1	1	0	*	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	*	0	1	1	0	1	0	1	1	*	0	0	0	0	0	0	*
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	*	0	0	1	1	0	0	*	0	1	0	0	0	1	*	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	*	1	0	0	0	*	0	1	1	1	1	1	*	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	*	0	1	*	0	1	0	1	0	0	*	1	0	1
1	0	1	1	*	1	0	1	1	0	1	0	*	0	1	*	0	0	1	0	0	0	0	*	0	1	1	0
1	1	0	0	0	*	0	0	1	0	0	*	1	1	0	0	*	0	0	1	1	1	*	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	*	1	0	0	*	0	0	1	1	1	0	*	1	1	1	*	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	*	0	*	0	0	0	1	0	0	1	0	*	1	*	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	*	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	*	1	0	1	0	0	1	0	1

Таблиця 2.24 (продовження)

x_1	x_2	x_3	x_4	f_{25}	f_{26}	f_{27}	f_{28}	f_{29}	f_{30}	f_{31}	f_{32}	f_{33}	f_{34}	f_{35}	f_{36}	f_{37}	f_{38}	f_{39}	f_{40}	f_{41}	f_{42}	f_{43}	f_{44}	f_{45}	f_{46}	f_{47}
0	0	0	0	*	1	0	0	0	1	1	0	1	0	*	1	1	1	0	1	0	1	0	0	*	0	1
0	0	0	1	1	*	1	1	0	1	1	1	1	*	1	1	0	1	1	1	1	1	0	*	1	*	0
0	0	1	0	0	0	*	0	1	0	0	1	*	1	1	0	1	0	1	0	1	0	*	0	0	1	*
0	0	1	1	1	0	1	*	1	1	0	*	1	1	0	0	1	0	1	1	0	*	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	*	0	*	0	0	0	1	1	0	1	0	0	*	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	*	1	0	1	0	0	1	0	1	1	*	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	*	1	0	1	1	0	1	1	*	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	*	1	1	0	1	0	*	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	*	0	1	0	*	0	1	0	1	1	0	0	1	1	*
1	0	0	1	0	0	0	1	0	*	1	1	1	*	1	*	0	0	0	1	1	0	1	1	0	*	0
1	0	1	0	1	1	1	0	*	1	0	0	0	1	*	1	1	1	1	0	0	1	0	0	*	1	1
1	0	1	1	0	0	0	*	1	0	1	1	1	1	1	*	0	0	1	1	1	1	1	*	1	0	0
1	1	0	0	0	1	*	0	0	1	0	0	0	1	0	1	*	1	1	1	1	1	*	1	0	1	1
1	1	0	1	1	*	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	*	0	0	1	*	0	0	0	1	0
1	1	1	0	*	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	*	1	*	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	*	1	1	1	0	1	0	0

Таблиця 2.24 (продовження)

x_1	x_2	x_3	x_4	f_{48}	f_{49}	f_{50}	f_{51}	f_{52}	f_{53}	f_{54}	f_{55}	f_{56}	f_{57}	f_{58}	f_{59}	f_{60}	f_{61}	f_{62}	f_{63}	f_{64}	f_{65}	f_{66}	f_{67}	f_{68}	f_{69}	f_{70}
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	*	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	*	1
0	0	0	1	*	1	1	0	0	1	0	0	1	*	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	*	1	*
0	0	1	0	1	*	1	0	1	1	1	0	*	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	*	1	1	0
0	0	1	1	1	0	*	1	0	0	0	*	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	*	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	*	1	1	*	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	*	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	*	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	*	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	*	1	0	0	0	0	0	0	0	1	*	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	*	1	1	0	1	1	0	1	*	0	0	0	1	1	0	0	*
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	*	0	1	0	0	1	*	0	0	1	1	0	0	1	*	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	*	0	0	0	*	0	1	1	1	0	1	1	*	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	*	1	0	0	*	1	*	1	1	0	1	0	1	0	*	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0	*	0	0	1	1	1	*	1	1	0	1	0	0	1	*	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	*	0	1	1	1	0	0	1	*	1	1	0	1	0	*	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	*	0	1	0	0	1	1	1	1	1	*	0	0	0	*	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	*	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	*	1	*	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	*	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	*	0	1	1	1	0	1	0	1

3. Для заданої булевої функції п'яти змінних $y = f_n(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, де n – номер варіанту (табл.2.25):

а) визначити вирази у вигляді:

- канонічних ДДНФ та ДКНФ;
- мінімальних ДНФ та КНФ,

б) для виразів у мінімальних ДНФ та КНФ вказати на двоїсті функції,

в) відповідно виразам у мінімальних формах надати схеми в базисі логічних елементів:

- "І-НІ";
- "ЧИ-НІ",

г) відповідно виразам двоїстої функції надати схеми в базисі логічних елементів:

- "І-НІ";
- "ЧИ-НІ".

Таблиця 2.25 – Таблиця істинності функцій від п'яти змінних

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}
0	0	0	0	0	*	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	*	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	*	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	*	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	*	1	1	0	0	1	1	0	*
0	0	0	1	1	0	1	1	*	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	*	1	0	1	1	1	1	1	*	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	*	0	1	1	1	0	0	0	0	*	1	0	0	0	0	0	0	*	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	*	1	0	1	0	1	0	*	0	0	1	0	1	0	0	*	1	0	0
0	0	1	1	0	*	0	1	1	0	1	*	1	0	0	1	*	0	1	1	0	1	0	1	*	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	*	1	1	0	1	0	*	0	0	*	1	0	1	1	1	0	0	*	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	*	0	0	1	1	1	*	1	0	0	1	1	1	0	1	*	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	*	0	1	0	1	0	*	1	1	1	1	0	0	*	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	*	0	1	0	1	0	*	0	0	0	1	*	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	*	0	0	1	1	1	*	1	1	*	1	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	*	1	1	*	0	1	*	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	*	*	0	1	0	1	*	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	*	*	0	0	1	0	0	*	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	*	0	0	*	1	0	1	0	1	*	1	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	*	0	0	0	0	*	0	0	1	0	1	*	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	*	0	0	1	0	0	0	*	1	0	1	0	1	*	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	*	0	1	1	0	0	1	1	0	*	1	1	1	1	1	*	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	*	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	*	0	1	0	0	1	*	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	*	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	*	0	0	0	0	0	*	0	1	1
1	0	1	0	1	*	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	*	0	1	0	0	0	*	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	*	0	1	1	0	0	*	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	*	1	1	0	*	1	0	1	1	1	*
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	*	1	1	0	1	1	*	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	*	1	1	0	0	0	0	1	*	1	1	1	1
1	1	0	1	0	*	0	0	1	0	0	1	0	1	1	*	0	0	0	1	1	1	0	0	0	*	0	1	*
1	1	0	1	1	1	*	1	1	1	0	0	1	1	*	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	*	*	0
1	1	1	0	0	1	0	*	1	1	1	1	1	*	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	*	*	1
1	1	1	0	1	0	0	0	*	1	1	1	*	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	*	1	1	*
1	1	1	1	0	0	1	0	1	*	0	*	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	*	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	*	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	*	1	1	1	0	0

Таблиця 2.25 (продовження)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_{25}	f_{26}	f_{27}	f_{28}	f_{29}	f_{30}	f_{31}	f_{32}	f_{33}	f_{34}	f_{35}	f_{36}	f_{37}	f_{38}	f_{39}	f_{40}	f_{41}	f_{42}	f_{43}	f_{44}	f_{45}	f_{46}	f_{47}
0	0	0	0	0	*	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	*	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	*	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	*	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	*
0	0	1	0	0	1	1	1	1	*	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	*	0
0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	*	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	*	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	*	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	*	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	*	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	*	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	*	1	1	1	1	1	1	0	0	*	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	*	0	1	1	1	0	0	0	0	*	0	1	1	1	0	1	*	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	*	0	0	1	1	1	0	1	0	*	0	0	0	1	*	0	1	1	1	1	0	*
0	1	0	1	1	1	1	*	0	0	1	0	0	0	1	0	*	1	1	*	0	1	0	0	1	0	*	1
0	1	1	0	0	1	0	0	*	1	0	0	0	1	0	1	0	*	*	0	1	1	1	1	0	*	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	*	1	0	1	1	1	0	0	*	*	1	0	0	0	0	*	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	*	1	0	0	1	0	*	1	0	*	1	1	1	*	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	*	1	1	0	*	1	0	0	0	*	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	*	0	*	1	0	0	1	1	1	*	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	*	0	0	0	0	0	1	0	0	*	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	*	1	1	1	1	*	1	0	1	*	0	1	1	1	0	1	1	1	*	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	*	1	0	*	0	0	1	1	0	*	0	0	0	1	0	0	*	0	*	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	*	0	1	1	0	1	*	1	1	*	1	0	0	1	*	0	1	1	*	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	*	1	0	0	*	0	1	1	1	*	0	0	*	0	1	1	0	0	*	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	*	0	*	1	0	0	1	1	1	*	*	1	1	0	0	0	1	1	*
1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	*	0	1	1	1	1	0	0	*	*	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	*	0	0	0	1	1	*	1	1	*	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	*	1	0	0	*	0	0	0	*	1	0	0	1	*	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	*	1	1	1	0	1	*	1	*	0	0	1	1	0	0	*	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	*	0	1	0	1	0	1	0	*	1	1	1	0	0	1	1	1	*	0	0	0	1
1	1	1	0	0	*	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	*	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	*	1	1
1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	*	1
1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	*

Таблиця 2.25 (продовження)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_{48}	f_{49}	f_{50}	f_{51}	f_{52}	f_{53}	f_{54}	f_{55}	f_{56}	f_{57}	f_{58}	f_{59}	f_{60}	f_{61}	f_{62}	f_{63}	f_{64}	f_{65}	f_{66}	f_{67}	f_{68}	f_{69}	f_{70}
0	0	0	0	0	*	1	1	1	1	1	1	1	*	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	*	1	0	0	0	0	*	0	*	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	*	1	1	0	*	1	1	0	*	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	*	0	*	1	0	1	1	1	*	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	*	1	0	0	0	0	0	1	*	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	*	0	0	1	1	0	1	1	*	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	*	1	1	0	1	0	0	0	*	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	*	1	0	*	1	0	0	0	1	1	0	*	0	1	0	0	0	0	*
0	1	0	0	0	0	0	0	*	0	0	1	1	*	1	0	1	1	0	1	0	*	1	0	0	1	*	0
0	1	0	0	1	1	1	*	0	0	0	0	1	1	*	1	0	0	1	0	1	1	*	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	*	*	0	0	1	1	0	1	0	1	*	0	1	0	1	1	1	0	*	1	0	0	0
0	1	0	1	1	*	*	0	0	0	0	0	0	1	0	1	*	0	1	0	0	1	1	0	*	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	*	1	1	0	1	0	1	1	0	1	*	0	1	1	1	1	1	1	*	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	*	1	1	0	1	1	0	0	1	1	*	0	0	0	1	1	1	0	*	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0	*	1	0	0	0	0	1	0	0	0	*	0	1	1	1	1	0	0	*
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	*	0	0	1	1	0	0	1	1	0	*	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	*	1	0	1	0	0	0	1	1	0	*	1	0	0	*	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	*	0	0	1	1	1	0	0	1	1	*	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	*	0	1	1	1	1	1	0	*	0	0	1	0	0	1	1	0	1	*	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	*	0	1	0	1	1	1	1	*	0	0	1	0	0	1	1	0	0	*	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	*	1	0	0	0	0	0	1	*	1	0	1	1	0	0	1	1	1	*	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0	*	0	1	1	0	1	0	0	*	1	1	0	1	0	0	0	*	0	*	0
1	0	1	1	0	0	0	0	0	*	0	0	0	1	1	1	0	*	0	1	0	1	0	*	0	0	1	*
1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	*	0	1	1	0	1	1	1	*	1	1	0	*	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	*	0	0	1	0	0	0	0	*	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	*	1	1	1	1	1	1	1	*	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*	0	0	1	0	0	0	0	*	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	*	1	0	1	1	1	0	0	*	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	*	1	0	0	0	0	*	1	*	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	*	1	1	1	*	1	1	1	*	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	*	0	*	0	0	1	1	1	*	0	*
1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	*	0	1	0	1	1	1	0	*	0

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Погорілий С.Д. Програмне конструювання. Підручник серії Автоматизація наукових досліджень за редакцією академіка АПН України Третяка О.В. ВПЦ Київський університет., 2-е видання, 2007. – 438 с. (підручник з грифом МОН).

2. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. Серія підручників «Інформатика», видавнича група BHV, 2007. – 368 с.

3. Кривий С.Л. Дискретна математика. - Чернівці-Київ: "Букрек", 2017. – 567 с. (підручник з грифом МОН).

4. Кривий С.Л. Збірник задач з дискретної математики. – Чернівці-Київ: "Букрек", 2018. – 455 с. (навчальний посібник).