МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

БАШОВА НАДІЯ ПЕТРІВНА

УДК 519.1

КЛАСИФІКАЦІЯ ТА ПІДРАХУНОК КІЛЬКОСТІ ТОПОЛОГІЙ НА СКІНЧЕННИХ МНОЖИНАХ

01.01.08 – математична логіка, теорія алгоритмів і дискретна математика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри та геометрії математичного факультету Запорізького національного університету Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Стєганцева Поліна Георгіївна,
Запорізький національний університет,
доцент кафедри алгебри та геометрії.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
Максименко Сергій Іванович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник;

доктор фізико-математичних наук,
Бондаренко Євген Володимирович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, доцент кафедри алгебри та математичної логіки.

Захист відбудеться « 19 » вересня 2016 р. о 14.00 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.18 при Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, проспект академіка Глушкова, 4-е.

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці ім. М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, вул. Володимирівська, 58).

Автореферат розісланий «15» липня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради В. М. Журавльов

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Інтерес до дослідження топологій на скінченних множинах не зменшується протягом тривалого часу. На сьогодні задача про підрахунок числа топологій на довільній скінченній множині залишається актуальною з кількох причин:

- вона досі повністю не розв’язана;
- постійно з’являються статті з новими результатами у цьому напрямку;
- дослідження з цієї тематики перетинаються з багатьма розділами сучасної математики: алгебраїчна топологія, теорія груп, комбінаторний аналіз, теорія графів.

У загальній постановці задача підрахунку топологій на скінченній множині є NP-повною, тобто для знаходження розв’язку цієї задачі на сьогоднішній день не існує алгоритму поліноміальної складності, а всі точні алгоритми так чи інакше зводяться до повного перебору.

Перші результати дослідження топологій на скінченних множинах з’явилися у 60-70-х роках двадцятого століття у статтях H. Sharp, Jn., J. W. Evans, S. D. Chatterji, D. Kleitman. В роботах H. Sharp, Jn.[1] та J. W. Evans[2] топології на скінченних множинах розбиваються на класи за числом елементів і досліджуються в кожному класі окремо. Для дослідження топологій на скінченних множинах використовуються транзитивні графи. У книзі Ф. Харарі[3] задача підрахунку усіх топологій на n-елементній множині ототожнюється з задачею підрахунку усіх позначених транзитивних орграфів з n вершинами і відноситься до списку нерозв’язаних задач. Паралельно з задачею підрахунку усіх топологій на скінченній множині розглядалась задача підрахунку числа усіх негомеоморфних топологій. Відомо, що загальне число $\tilde{T}(n)$ негомеоморфних топологій та число $T(n)$ усіх топологій на n-елементній множині пов’язані формулою $T(n)=\sum_{i=0}^{n} S(n,m)\tilde{T}(m)$, де $S(n,m)$ – числа Стірлінга другого роду. Вперше ця формула була опублікована у роботі J. W. Evans [2].

В роботі D. Kleitman[4] розглядались асимптотичні оцінки числа топологій на скінченній множині. Доводилось, що логарифм по основі 2 від числа усіх топологій на довільній n-елементній множині, при $n\to\infty$,

---

[1] Sharp, Jr. H. Cardinality of finite topologies / Henry Sharp, Jr. // Journal Combinatorial Theory — 1968 — Vol. 5. — P. 82–86.

[2] Evans J. W. On the computer enumeration of finite topologies / J. W. Evans, F. Harary, M.S. Lynn // Communications of the ACM. — 1967. — Vol.10, №5. — P. 295–297.

[3] Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер; пер. с англ. Г.П. Гаврилова. — М.: Мир, 1977. — 324 с.

[4] Kleitman D. The number of finite topologies / D. Kleitman, B. Rothschild // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1970. — Vol. 25. — P. 276–282.

асимптотично дорівнює $\frac{n^2}{4}$. При доведенні цього факту використовувалась опублікована в роботі S. D. Chatterji[5] нерівність $T_n \geq 2^{\frac{n^2}{4}}$ для загального числа усіх топологій на n-елементній множині.

Питанням перерахунку топологій на довільній скінченній множині займався у своїх роботах З. І. Боревич. Він звів підрахунок загального числа T_0-топологій на довільній n-елементній множині до підрахунку позначених T_0-топологій спеціального вигляду, пов'язаних з наборами $(p_1, \ldots, p_m)$, де $p_1 + \ldots + p_m = n$. В роботі З. І. Боревич[6] доведена періодичність послідовності лишків числа позначених T_0-топологій. Однією з останніх робіт в цьому напрямку є робота M. Yasir Kizmaz[7], в якій автор доводить, що для будь-якого простого числа p має місце порівняння $T(p^k) \equiv k+1 \pmod{p}$, де $T(p^k)$ − число усіх топологій на p^k-елементній множині.

Для створення ефективного алгоритму підрахунку топологій на довільній скінченній множині виникає необхідність представлення елементів топології у такій формі, яку було б легко зберігати у пам'яті комп'ютера. Це можна зробити, використовуючи для кодування топологій булеві функції. Такий підхід було застосовано у роботі І. А. Шиліна[8]. На сьогодні, при дослідженні булевих функцій багато уваги приділяється не лише замкненим класам Поста, а і класам Шефера, які були введені T. J. Schaefer[9] у 1978р. Значний вклад у вивчення питань про розміри та властивості класів Шефера внесли роботи авторів В. Б. Олексієва, С. П. Горшкова, С. О. Гізунова, В. О. Носова та О. В. Тарасова.

Все вищесказане свідчить про актуальність задач дослідження та підрахунку топологій на скінченній множині. Саме цим питанням присвячено дану дисертаційну роботу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась відповідно до планів наукових

---

[5] Chatterji S. D. The number of topologies on n points / S. D. Chatterji // Kent State University, NASA Technical Report. — 1966.

[6] Borevich Z.I. Periodicity of residues of the number of finite labeled T_0-topologies / Z.I. Borevich // Journal of Soviet Mathematics. — 1984. — V. 27, Is. 4. — P. 2851–2854.

[7] Kizmaz M.Y. On the number of topologies on a finite set [Электронный ресурс] / Muhammet Yasir Kizmaz // Cornell University Library. — 2015. — Режим доступа к стат.: http://arxiv.org/abs/1503.08359v1.

[8] Шилин И.А. Программный способ вычисления топологий и исследования их свойств / И.А. Шилин, В.В. Китюков // Прикладная информатика. — 2013. — №1(43). — С. 126–136.

[9] Schaefer T.J. The complexity of satisfiability problems / T.J. Schaefer // Proc. of the 10th Symp. On Theory of Computing (STOC'78), San Diego (California, USA), 1978. — New York: ACM Press, 1978. — P. 216–226.

досліджень на кафедрі алгебри та геометрії ДВНЗ «Запорізький національний університет» МОНУ поза межами держбюджетних та госпдоговірних тем.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є класифікація та підрахунок топологій на довільній скінченній множині.

Досягнення цієї мети пов'язане з постановкою та розв'язанням таких задач:

− класифікація топологій на скінченних множинах;

− дослідження структури топологій в деяких класах;

− опис топологій на скінченних множинах орієнтованими графами;

− розробка апарату для доведення існування топологій в m-класах, якщо $2^{n-1} < m \le 2^n$;

− дослідження топологій на скінченних множинах за допомогою булевих функцій.

Об'єкт дослідження: топології на скінченних множинах.

Предмет дослідження: структура топологій на скінченних множинах, властивості топологій на скінченних множинах, спеціальні види топологій на скінченних множинах.

Методи дослідження: при розв'язанні поставлених задач у дисертації використовувались комбінаторні методи, методи математичного моделювання, теорії графів, теорії частково впорядкованих множин, теорії булевих функцій та теорії кодування.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі:

− знайдена явна формула для кількості топологій-матрьошок на довільній n-елементній множині;

− уперше для дослідження топологій на скінченних множинах були використані сагайдаки;

− отримано критерій T_0-топологій на скінченних множинах у термінах T-сагайдаків;

− сформульована та доведена теорема про існування та структуру близьких до дискретної топологій на скінченних множинах;

− уперше для дослідження топологій на скінченних множинах були використані булеві функції;

− показано, що булеві функції, які задають топології на скінченних множинах, є біюнктивними слабко додатними та слабко від'ємними булевими функціями та мають 2-КНФ, кожна диз'юнкція якої має вигляд $x \vee \bar{y}$;

− сформульована і доведена теорема про вигляд 2-КНФ булевих функцій, які задають близькі до дискретної топології на скінченних множинах.

Отже, наукове значення роботи полягає в тому, що були застосовані нові об'єкти для дослідження топологій на скінчених множинах та отримані нові результати для деяких класів топологій.

Практичне значення одержаних результатів. В представленій роботі дослідження топологічних структур на скінченних множинах проводилося методами теорії графів, комбінаторними методами, а також за допомогою біюнктивних булевих функцій. Воно може зацікавити фахівців і з геометрії та топології, і з дискретної математики. Запропонований підхід для класифікації топологій на скінченних множинах може бути поширений на будь-які частково впорядковані множини, що з'являються при дослідженнях в алгебраїчній топології, диференціальній топології, k-значній логіці, комбінаторному аналізі, теорії графів тощо.

Топології на скінченних множинах і відповідні їм графи застосовуються у хімії для опису молекулярної структури, а топологічні поняття застосовуються при аналізі молекулярних структур.

Той факт, що топології на скінченних множинах задаються булевими функціями, 2-КНФ яких мають певний вигляд, може бути використаний для створення ефективного алгоритму пошуку всіх топологій на скінченних множинах.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертаційної роботи, що виносяться на захист, отримані автором особисто. У публікаціях, які видані у співавторстві, автору належить: [2, 7, 9, 11] – виведення формул для підрахунку топологій-матрьошок та топологій у класах з малою кількістю відкритих множин; [3, 4,10,12, 13, 14, 17] – дослідження топологій на скінченній множині за допомогою орієнтованих графів спеціального вигляду (T-сагайдаків), доведення властивостей T-сагайдаків T_0-топологій; [5, 15, 16, 19] – застосування понять індексу елемента топології, вектора топології, глибини множини для оцінки числа елементів топології та дослідження структури близьких до дискретної топологій на скінченних множинах; [1, 6, 8, 18, 20] – уведення відповідності між топологіями на n-елементній множині та булевими функціями від n змінних, доведення еквівалентності множини усіх топологій на n-елементній множині та множини усіх біюнктивних 0-здійснених та 1-здійснених булевих функцій від n змінних, доведення теореми про вигляд 2-КНФ булевих функцій, які задають близькі до дискретної топології на скінченій множині.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідалися на таких науково-практичних конференціях і семінарах:

− Міжнародних конференціях «Геометрія в Одесі» (м. Одеса – 2005 − 2008);

− Міжнародній конференції по геометрії та топології (м. Черкаси − 2007);

− Міжнародній школі-семінарі по геометрії та аналізу пам'яті М.В. Єфімова (Абрау-Дюрсо − 2006);

− Міжнародній науково-практичній конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (м. Дніпропетровськ − 2007);

− Міжнародному семінарі «Симетрії: теоретичні та методичні аспекти» (м. Астрахань − 2007);

− Міжвузівських науково-практичних семінарах «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» (м. Кіровоград − 2010, 2011, 2015);

− Міжнародному науковому семінарі «Дискретна математика та її застосування в економіко-математичному моделюванні та інформаційних технологіях» (м. Запорожжя − 2012);

− Всеукраїнській науково-практичній конференції «Інформатика та системні науки». (м. Полтава − 2015);

− науковому семінарі відділу топології Інституту математики НАН України (м. Київ − 2015);

− науковому семінарі кафедри алгебри та математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ − 2015);

− X літній школі «Алгебра, Топологія, Аналіз» (м. Одеса − 2015);

− наукових семінарах кафедри алгебри та геометрії Запорізького національного університету (м. Запоріжжя − 2004-2015).

Публікації. Основні результати за темою дисертації викладено у 20 опублікованих роботах: 6 [1−6] статей у наукових журналах і збірниках, що входять до переліку фахових видань, затверджених МОН України, та міжнародних виданнях, з них 2 статті [3,5] в журналах з наукометричної бази SCOPUS, 1 стаття [6] в журналі з наукометричної бази РІНЦ, 14 тез доповідей в збірниках праць наукових конференцій та семінарів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаних джерел із 90 найменувань (10 сторінок). Загальний обсяг роботи складає 128 сторінок, у тому числі 109 основного тексту, ілюстрованого 21 рисунком і 2 таблицями.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовані мета, предмет та методи проведених досліджень та їх зв’язок з тематикою дисертаційної роботи, зазначене наукове і практичне значення та новизна. Обґрунтована ефективність дослідження топологій на скінченній множині за допомогою сагайдаків та булевих функцій. Наведено кількість публікацій автора за темою дисертаційної роботи та відзначено особистий внесок у них здобувача.

В **першому розділі** проведено огляд літературних джерел за тематикою дисертації, зроблено детальний аналіз основних методів і підходів, застосованих при дослідженні топологій на скінченній множині.

Проведений аналіз показав, що розглянута задача у загальній постановці відноситься до NP-складних задач. Тому у більшості випадків топології на скінченній множині поділяються на класи за кількістю відкритих множин, а потім досліджуються в кожному класі окремо. Визначено, що для дослідження топологій на скінченній множині застосовувалися транзитивні орієнтовані графи. На сьогодні існують формули для обчислення топологій в окремих класах, а також формула, що описує зв'язок кількості усіх топологій з кількістю негомеоморфних топологій.

У дисертаційній роботі пропонується декілька нових підходів до дослідження топологій на скінченній множині, серед яких відзначимо дослідження структури за допомогою сагайдаків певного вигляду та встановлення бієктивної відповідності між множиною усіх топології на n-елементній множині та множиною усіх біюнктивних 0-здійснених та 1-здійснених булевих функцій від n змінних.

У **другому розділі** усі топології на скінченних множинах розбиваються на класи по числу відкритих множин. Серед усіх топологій виділено особливий вид топологій − топології-матрьошки. За допомогою комбінаторних методів досліджуються топології-матрьошки та обчислюється число усіх топологій та число негомеоморфних топологій у 3-, 4-, 5- класах.

Основні означення та теореми наведені згідно з нумерацією в дисертаційній роботі.

Нехай в якості *універсальної* множини обрана скінченна множина X, число n елементів у ній прийнято називати *потужністю множини* X та позначати символом $|X|$. Сукупність усіх підмножин множини X позначають символом 2^X і називають *булеаном* цієї множини. Серед наборів підмножин з булеану виділимо ті, що мають топологічну структуру, тобто відповідно до класичного означення кожний такий набір τ містить: 1) $\varnothing$ і X; 2) разом з будь-якою сукупністю елементів з τ їх об'єднання також належить τ; 3) разом з будь-якою скінченною сукупністю елементів з τ їх перетин також належить τ. У випадку ж скінченної множини X кожний набір підмножин з 2^X також буде скінченним, тому означення топології на скінченній множині спрощується таким чином.

Означення 2.1. Будемо говорити, що на скінченній множині X задана *топологія,* якщо вказана сукупність τ підмножин множини X, яка задовольняє таким аксіомам:

1) $\varnothing \in \tau$ та $X \in \tau$;
2) $\forall U,V \in \tau \quad U \cup V \in \tau$;
3) $\forall U,V \in \tau \quad U \cap V \in \tau$.

Елементи сукупності τ називаються *відкритими множинами.* Пара (X,τ) називається *топологічним простором*.

Означення 2.4. *Мінімальним околом* M_a *елемента* a називається перетин усіх околів цього елемента.

Означення 2.5. Будемо казати, що топологія на довільній n-елементній множині X, що складається з m елементів (відкритих множин), відноситься до m-*класу топологій* ($m = 2, 3, \ldots, 2^n$).

Означення 2.7. Систему μ підмножин множини X, що містить $\varnothing$ та X, де усі елементи впорядковані по включенню, будемо називати *матрьошкою* на множині X. Число нетривіальних елементів в матрьошці будемо називати її довжиною.

Теорема 2.1. Числа матрьошок довжин l та $l-1$ зв'язані рекурентним співвідношенням: $S(n,l) = \sum_{k=l}^{n-1} C_n^k S(k,l-1)$.

Теорема 2.2. Число $S(n,l)$ усіх матрьошок довжини l на n-елементній множині обчислюється за формулою $S(n,l) = (-1)^{l+1} \sum_{k=1}^{l+1} (-1)^k C_{l+1}^k k^n$.

Означення 2.10. Нехай X – скінченна множина та τ_X – топологія на ній. Множина $A \in \tau_X$ називається *максимальною* в τ_X, якщо A не міститься ні в якій іншій множині з τ_X, окрім самої X.

Означення 2.11. Нехай задано топологічний простір (X, τ_X) та $Y \subset X$. Визначимо τ_Y – сім'ю підмножин множини Y наступним чином: $\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau_X\}$. Сім'я τ_Y буде топологією на Y. Топологія τ_Y називається *індукованою топологією* τ_X. Топологічний простір (Y, τ_Y) називається підпростором простору (X, τ_X).

Нехай задані множини A, X, $A \subset X$ та топологія τ_A. Будемо відновлювати усі такі топології на множині X, в яких множина A є максимальною та які індукують на множині A топологію τ_A (в цьому випадку топологію τ_A та відповідні топології на X будемо називати *узгодженими*).

Теорема 2.3 (про топології на універсальній множині). Нехай X – скінченна множина, $A \subset X$, $B = X \setminus A$ та τ_A – топологія на A. Припустимо, що $L \in \tau_A$, а набір $\sum_L$ складається з усіх елементів топології τ_A та всіляких множин вигляду $\{B \cup W_i \mid L \subseteq W_i \subseteq A, W_i \in \tau_A\}$. Набір τ_X підмножин множини X є топологією на X, узгодженою з τ_A, тоді и тільки тоді, коли він є набором $\sum_L$ для деякого L.

Наслідок 2.2. Якщо на множині A задана топологія, то будь-яку топологію на універсальній множині X (узгоджену з топологією на A) можна отримати у такий спосіб. Обираємо будь-яку відкриту множину $L \in \tau_A$ і кожний елемент з τ_A, що містить в собі L, об'єднуємо з $B = X \setminus A$. До отриманої сукупності додаємо усі елементи з τ_A.

У **третьому розділі** топології на скінченних множинах досліджуються за допомогою скінченних орієнтованих графів − сагайдаків.

Нехай τ_X – топологія на скінченній множині X. Поставимо у відповідність кожній відкритій множині з топології τ_X деяку вершину сагайдака, а його стрілки визначимо наступним чином. З вершини v_i у вершину v_j веде стрілка, якщо множина A_i, що відповідає вершині v_i, є підмножиною множини A_j, яка відповідає вершині v_j, і для будь-якої множини $A \in \tau_X$ не виконується включення $A_i \subset A \subset A_j$.

Сагайдак, який відповідає деякій топології на скінченній множині X, будемо називати T-*сагайдаком на множині* X та казати, що топологія задається T-сагайдаком.

Означення 3.13. Два топологічних простори (X_1, τ_{X_1}) і (X_2, τ_{X_2}) будемо називати T-*гомеоморфними*, якщо відповідні їм T-сагайдаки ізоморфні.

Таким чином, при T–*гомеоморфізмі* бієкція встановлюється між відкритими множинами топологічних просторів. При цьому топологічні простори можуть бути задані на множинах різної потужності, але обов'язково відносяться до одного класу, тобто містять однакову кількість відкритих множин, та мають однакову структуру.

Дослідивши залежність між поняттями гомеоморфізму та T-гомеоморфізму, отримали такі результати. Якщо простори гомеоморфні, то вони і T-гомеоморфні. Обернене твердження не завжди вірне. Можна сказати, що T-сагайдаки зображують структуру топології. В топологічних термінах цей факт можна сформулювати наступним чином: два топологічних простори (X_1, τ_{X_1}) і (X_2, τ_{X_2}) будуть T-*гомеоморфними*, якщо існує відображення (необов'язково функціональне) між елементами множин X_1 та X_2, яке є відкритим, неперервним та задає бієкцію між відкритими множинами з τ_{X_1} та τ_{X_2}. T-гомеоморфізм є гомеоморфізмом у звичайному сенсі тоді і тільки тоді, коли вказане відображення $X_1 \to X_2$ є бієкцією між елементами цих множин.

Сформулюємо алгоритм побудови T-сагайдаків.

Теорема 3.1. 1. Сагайдак, зображений на мал. 3.3, є T–сагайдаком.

Рис. 3.3

2. Нехай є T–сагайдак Q_A на множині A та $B \cap A = \varnothing$. З будь-якої вершини L T–сагайдака Q_A добудовується стрілка у нову вершину, яка відповідає множині $L \cup B$. З цієї нової вершини добудовується підграф, ізоморфний підграфу T-сагайдака Q_A з витоком у вершині L. Усі відповідні вершини обох підграфів з'єднуються стрілками. Цей сагайдак буде T-сагайдаком на множині $X = A \cup B$.

Лема 3.1. Якщо топологія τ є T_0-топологією на n-елементній множині X, то в τ існує хоча б одна $(n-1)$-елементна відкрита множина.

Теорема 3.2. T-сагайдаки усіх T_0–топологій можуть бути отримані описаним у теоремі 3.1 способом.

Наслідок 3.1. T-сагайдаки усіх топологій на скінченній множині можна отримати описаним у теоремі 3.1 способом.

Означення 3.14. Будемо називати вершину T-сагайдака *вершиною* k-*того рівня,* якщо простий ланцюг з витоку до неї має довжину k. Вершина, що відповідає порожній множині, буде вершиною нульового рівня. Рівень стоку T-сагайдака будемо називати рівнем T-сагайдака. Якщо рівень стоку дорівнює n, то такий T-сагайдак будемо називати n-*рівневим*.

Теорема 3.3. Вершини k-того рівня T-сагайдака довільної T_0-топології відповідають k-елементним відкритим множинам.

Теорема 3.4 (Критерій T_0-топології). Топологія на n-елементній множині є T_0-топологією тоді і тільки тоді, коли їй відповідає n-рівневий T-сагайдак.

Для T_0-топологій поняття гомеоморфізму та T-гомеоморфізму співпадають, отже має місце

Твердження 3.3. Число негомеоморфних T_0-топологій дорівнює числу відповідних їм неізоморфних T-сагайдаків.

Уведемо позначення $T(n,m)$ для числа усіх топологій на n-елементній множині в m-класі. В роботі Стенлі була сформульована теорема, у якій були наведені формули для обчислення $T(n,m)$ у деяких класах. За допомогою T-сагайдаків вдалося дослідити топології в цих класах, отримати загальну формулу для обчислення $T(n,m)$ для будь-якого n при $m > 2^{n-1}$. Ці результати сформульовано у вигляді двох наступних тверджень

Твердження 3.6. Для будь-якого $k \neq 3$ топологія на n–елементній множині, яка містить $2^{n-1} + 2^{n-1-k}$ елементів, індукує дискретну топологію на деякій $(n-1)$-елементній множині.

Твердження 3.7. Для $n > k \geq 1$:

$$T\left(n, 2^{n-1-k}\left(2^k+1\right)\right) = \begin{cases} \dfrac{2(n)_{k+1}}{k!}, & k \neq 1, 3; \\ (n)_2, & k = 1; \\ \dfrac{(n)_4}{3} + \dfrac{(n)_4}{2}, & k = 3, \end{cases}$$

де $(n)_m = n(n-1)\ldots(n-m+1)$ – символ Похгаммера.

За допомогою T-сагайдаків вдалося також довести існування $11 \cdot 2^{n-5}$-класу топологій, повністю дослідити його і підрахувати загальну кількість топологій в цьому класі. Топології цього класу були досліджені вперше.

Твердження 3.8. Усі топології $11 \cdot 2^{n-5}$–класу, $n \geq 5$, задаються T-сагайдаками восьми видів, причому має місце формула $T(n, 11 \cdot 2^{n-5}) = \dfrac{25(n)_5}{6} + \dfrac{5(n)_6}{2} + \dfrac{(n)_7}{6}$.

У **четвертому розділі** вводяться поняття індексу топології, вектору топології та глибини множини. За допомогою запропонованого апарату доведено теорему про існування та структуру топологій з числом елементів, більшим ніж 2^{n-1}.

Означення 4.2. *Індексом елемента* $a \in X$ відносно топології τ назвемо число $ind_\tau(a)$, яке дорівнює кількості відмінних від a елементів в його мінімальному околі M_a.

З леми 3.1 випливає, що у T_0-просторі існує хоча б одна одноелементна замкнена множина. Наступна лема уточнює цей факт.

Лема 4.1 (про елемент максимального індексу). Елемент T_0-простору X, який має максимальний індекс, є одноелементною замкненою множиною. Якщо таких елементів декілька, то усі вони є одноелементними замкненими множинами.

Лема 4.2 (про мінімальне розширення топології). Нехай τ – топологія на множині X, що не містить множину $H \subset X$. Тоді мінімальна топологія, яка містить усі елементи з τ та множину H, складається з усіх множин виду $(U \cup H) \cap V$, де U та V пробігають τ.

Теорема 4.2. Нехай на множині X задана недискретна T_0-топологія τ та a – елемент максимального індексу. Тоді існує більш сильна топологія π, в якій $ind_\pi(a) = ind_\tau(a) - 1$, а індекси усіх інших елементів залишаються тими ж.

Означення 4.4. Неспадну послідовність індексів усіх елементів з X будемо називати *вектором топології*. Вектор топології τ будемо позначати $v(\tau) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Твердження 4.2. Послідовність невід'ємних цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ буде вектором деякої T_0-топології на n-елементній множині тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умовам

1. $\alpha_i \le \alpha_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$,
2. $\alpha_i \le i - 1$, $i = \overline{1, n}$.

Означення 4.5. *Глибиною відкритої множини* $M \in \tau$ назвемо число $g(M)$, яке дорівнює кількості елементів з τ, які містять множину M в якості підмножини (власної або невласної).

Твердження 4.4. Якщо T_0-топологія τ на множині X має вектор $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, то на множині $X \setminus \{x_n\}$ індукована топологія τ' має вектор $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1})$. При цьому $|\tau| = |\tau'| + g(M)$, де $M \in \tau'$ та $|M| = \alpha_n$, тобто множина M обирається як $M_n \setminus \{x_n\}$, де M_n – мінімальний окіл елемента x_n.

Означення 4.6. Будемо називати топологію τ на n–елементній множині близькою до дискретної, якщо $|\tau| > 2^{n-1}$.

Усі близькі до дискретної топології описуються наступною теоремою.

Теорема 4.3. На множині X, $|X| = n$, $n \ge 4$ існують такі і тільки такі топології τ з кількістю елементів $|\tau| > 2^{n-1}$, вектор яких має один з наступних видів:

1) $v(\tau) = (0,\ldots,0,\alpha_n)$, $1 \le \alpha_n \le n-1$, причому $|\tau| = 2^{n-1} + 2^{n-1-\alpha_n}$.

2) $v(\tau) = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k},1,\ldots,1)$, $1 \le k \le n-2$ і $\bigcap_{m=k+1}^{n} M_m = \{x_k\}$. При цьому $|\tau| = 2^{n-1} + 2^{k-1}$.

3) $v(\tau) = (0,\ldots,0,1,1)$ и $M_{n-1} \cap M_n = \varnothing$, при цьому $|\tau| = 2^{n-1} + 2^{n-4}$.

Наслідок 4.5. Будь-яка близька до дискретної топологія на n-елементній множині є T_0-топологією.

Наслідок 4.6. Кількість усіх близьких до дискретної непозначених топологій на n-елементній множині дорівнює $2n-1$.

Твердження 4.5. Кількість усіх близьких до дискретної позначених топологій на n-елементній множині дорівнює $n \cdot 2^n + \frac{(n-4)}{2} - (n-2)$.

У **п'ятому розділі** встановлюється зв'язок між булевими функціями та топологіями на скінченній множині. Проводиться дослідження топологій на скінченній множині за допомогою булевих функцій. Доведено, що топології на скінченних множинах задаються біюнктивними булевими функціями певного вигляду.

Кожній підмножині n-елементної упорядкованої множини X будемо ставити у відповідність булевий вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, у якому $x_i = 1$, якщо i-тий елемент множини X належить цій підмножині, та $x_i = 0$, якщо не належить.

Розглянемо усі можливі набори підмножин множини X. Кожному з них поставимо у відповідність булеву функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, область істинності якої задає усі підмножини, що належать обраному набору. Очевидно, що відповідність між множиною усіх булевих функцій від n змінних та множиною усіх наборів підмножин n-елементної множини X є бієктивною. Якщо позначити елементи множини X символами $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$, тоді при вказаній бієктивній відповідності має місце ототожнення $\tilde{x}_i \leftrightarrow x_i$ для усіх $i = 1, \ldots, n$. Це дозволяє використовувати для позначення елемента множини X такий самий символ, що і для позначення відповідної цьому елементу змінної булевої функції.

Розглянемо множину булевих функцій, які задають топології на скінченній множині, та дослідимо зв'язок цих функцій з замкненими класами Поста. Будь-яка булева функція, що зображує топологію, є функцією, що не зберігає 0 та зберігає 1. Таким чином, довільна булева функція, що зображує топологію, не може бути монотонною (крім булевої функції, яка відповідає дискретній топології) та самодвоїстою. Внесемо у відомі означення монотонної та самодвоїстої функції деякі додаткові вимоги.

Означення 5.3. Булева функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ називається *майже монотонною,* якщо для будь-яких пар булевих ненульових векторів $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ і $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ з того, що $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, випливає $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le f(y_1,y_2,\ldots,y_n)$.

Твердження 5.1. Нехай Φ – множина булевих функцій, що задають T_0-топології на n-елементній множині, та $f\in\Phi$. Функція f майже монотонна тоді і тільки тоді, коли вона задає топологію, яка є або дискретною, або належить $(2^{n-1}+1)$-класу і має вектор $(0,1,\ldots,1)$.

Означення 5.4. Функцію $f^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ будемо називати *майже двоїстою* до функції $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, якщо $f^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ для будь-якого булевого вектора $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, окрім нульового та одиничного.

Означення 5.5. Будемо називати функцію $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *майже самодвоїстою,* якщо вона майже двоїста самій собі, тобто якщо $f=f^*$ для будь-якого булевого вектора, окрім нульового та одиничного.

Твердження 5.2. Нехай Φ – множина булевих функцій, які задають топології на n-елементній множині, та $f\in\Phi$. Функція f майже самодвоїста тоді й тільки тоді, коли f задає топологію з $(2^{n-1}+1)$-класу, що має вектор $(0,\ldots,0,n-1)$ або $(0,1,\ldots,1)$.

Теорема 5.1. Сукупність підмножин n-елементної множини X утворює топологію на даній множині тоді і тільки тоді, коли відповідна цій сукупності булева функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ належить перетину $Bi\cap WP\cap WN$ біюнктивних, слабко додатних та слабко від'ємних булевих функцій, тобто її 2-КНФ має вигляд

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\bigwedge_{i=1}^{t}(x_{s_{i1}}\vee\bar{x}_{s_{i2}}),\ \text{де } s_{i1},s_{i2}\in\{1,\ldots,n\}.$$

Означення 5.7. Змінна $x_i\in X$ називається *неістотною* в топології τ, якщо для будь-якого $U\in\tau$ виконуються умови: $U\cup\{x_i\}\in\tau$ і $U\setminus\{x_i\}\in\tau$. В іншому випадку змінна x_i називається *істотною.*

Твердження 5.3 (критерій неістотності змінної). Змінна x_i буде неістотною в топології τ тоді і тільки тоді, коли множина $\{x_i\}$ одночасно і відкрита і замкнена.

Нехай V' – множина усіх неістотних змінних в топології τ на n-елементній множині X, $|V'|=p>0$. Тоді, множина $\widetilde{V}$ усіх істотних змінних в цій топології складається з $n-p$ елементів. Розглянемо індуковану на цій множині топологію $\tau_{\widetilde{V}}$. Усі елементи індукованої топології є елементами і вихідної топології, оскільки множина $\widetilde{V}$ відкрита в τ. Має місце

Теорема 5.4. $|\tau| = |\tau_{\tilde{V}}| \cdot 2^p$.

Розглянуті властивості булевих функцій, що задають топології на скінченних множинах, дозволили сформулювати та довести теорему про вигляд 2-КНФ близьких до дискретної топологій.

Теорема 5.5. Булева функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задає близьку до дискретної топологію на множині $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ тоді і тільки тоді, коли її 2-КНФ може бути зведена (при необхідності, після перенумерації змінних) до одного з наступних виглядів:

1) $\bigwedge_{i=1}^{a_n} (x_n \vee x_i)$, де $1 \le a_n \le n-1$. При цьому кількість істотних змінних функції дорівнює $a_n + 1$;

2) $(x_n \vee x_i) \wedge (x_{n-1} \vee x_i) \wedge \ldots \wedge (x_{k+1} \vee x_i)$, де $1 \le k \le n-2$ и $i = \overline{1,k}$. При цьому функція буде містити $(n-k+1)$ істотних змінних;

3) $(x_n \vee x_i) \wedge (x_{n-1} \vee x_j)$, де $i = \overline{1, n-2}$, $j = \overline{1, n-2}$, $i \neq j$. При цьому істотних змінних буде 4.

За аналогією з поняттям бази топології було введене поняття бази булевої функції.

Означення 5.7. *Базою булевої функції*, що задає T_0-топологію на n-елементній множині, будемо називати набір з n булевих векторів, що відповідають мінімальним околам усіх її змінних, і нульового булевого вектора.

Використовуючи це поняття, теорему 4.3 можна сформулювати таким чином.

Теорема 5.6. Булева функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з вагою, більшою числа 2^{n-1}, лежить у перетині класів 0-здійснених, 1-здійснених та біюнктивних булевих функцій тоді і тільки тоді, коли її база (при необхідності, після перенумерації змінних) має вигляд

1) $B = (0, e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n \vee x)$, де $x = \bigvee_i e_i$, $1 \le i \le n-1$. При цьому кількість істотних змінних функції дорівнює $i+1$;

2) $B = (0, e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1} \vee e_k, \ldots, e_n \vee e_k)$, $1 \le k \le n-2$. При цьому функція буде містити $(n-k+1)$ істотних змінних.

3) $B = (0, e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1} \vee e_1, e_n \vee e_2)$. При цьому істотних змінних буде 4.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі топології на скінченних множинах були досліджені за допомогою сагайдаків та булевих функцій.

У відповідності до задач дисертаційного дослідження отримано такі основні нові наукові результати:

1. У m-класах топологій на n-елементній множині для $2 \le m \le n+1$ вивчалися топології спеціального вигляду – топології-матрьошки: отримано формули для обчислення числа усіх позначених та непозначених матрьошок довжини l; встановлено зв'язок між щільними матрьошками та T_0-топологіями.

2. Для топологій з m-класу для $m = 3,4,5$: виділено підкласи та описана структура топологій у кожному підкласі; знайдена формула для числа усіх позначених та непозначених топологій у підкласах та загального числа топологій у кожному класі; число позначених топологій у кожному з цих класів виражено через число матрьошок.

3. Встановлена відповідність між множиною топологій на n-елементній множині та множиною орієнтованих графів певного виду (T-сагайдаків). Запропоновано алгоритм побудови T-сагайдаків на довільній скінченній множині.

4. Досліджено властивості T-сагайдаків T_0-топологій.

5. За допомогою T-сагайдаків: для топологій з m-класів при $m = 7 \cdot 2^{n-4}$, 2^{n-1}, $13 \cdot 2^{n-5}$, $15 \cdot 2^{n-5}$ описана їх структура та отримані формули для загального числа цих топологій; знайдено новий m-клас топологій при $m = 11 \cdot 2^{n-5}$; описана структура та обчислена загальна кількість топологій на n-елементній множині в m-класах при $m = 2^{n-1} + 2^{n-1-k}$ для будь-якого $1 \le k \le n-1$.

6. Для дослідження топологій на скінченній множині побудовано наступний апарат: уведено поняття індексу елемента топології, вектора топології та глибини множини; розроблена методика оцінки числа елементів топології в залежності від її вектора.

7. Для топологій у m-класах при $2^{n-1} < m \le 2^n$: за допомогою введеного апарату доведена теорема про їх існування і будову; описані усі відповідні їм T-сагайдаки; підрахована загальна кількість позначених та непозначених топологій у цих класах.

8. Доведена еквівалентність множини усіх топологій на n-елементній множині та множини усіх біонктивних 0-здійснених та 1-здійснених булевих функцій від n змінних. Показано, що булеві функції, які задають топології на скінченних множинах, належать перетину класів біонктивних, слабко додатних и слабко від'ємних булевих функцій і мають 2-КНФ, кожна диз'юнкція якої має вигляд $x \vee \bar{y}$.

9. У термінах булевих функцій дано визначення деяких топологічних понять та доведені наступні теореми: критерій неістотності змінної; про залежність ваги булевої функції від числа неістотних змінних; теорема про існування топологій з m неістотними змінними, якщо $m = 0,1\ldots,n-2,n$.

10. Доведено теорему про вигляд 2-КНФ булевих функцій, які задають близькі до дискретних топології на скінченній множині.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у фахових виданнях

1. Адаменко Н.П. Описание топологий на конечных множествах булевыми функциями / Н. П. Адаменко // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. — 2006. — №1.— С. 5-8.
2. Adamenko N. The investigation of some topologies on finite sets [Электронный ресурс] / N. Adamenko I. Velichko // Applied Sciences (APPS). — 2006. — Vol. 8, No. 1. — pp. 8–12. — Режим доступа к статье: http://www.mathem.pub.ro/apps/v8/a8.htm.
3. Адаменко Н.П. Классификация топологий на конечных множествах с помощью графов / Н.П. Адаменко, И.Г. Величко // Український математичний журнал. — Київ, 2008. — т.60, №7. — С. 992–996.
4. Башова Н.П. Обобщение теоремы Стенли о топологиях на конечных множествах / Н.П. Башова, И.Г. Величко, П.Г. Стеганцева // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. — 2009 — №1. — С. 22–26.
5. Величко И.Г. Перечисление топологий близких к дискретной на конечных множествах / И.Г. Величко, П.Г. Стеганцева, Н.П. Башова // Известия вузов. Математика. — 2015. — № 11. — С. 23-31.
6. Башова Н. П. 2-КНФ булевых функций, задающих топологии на конечном множестве / Н.П. Башова, Е.В. Стеганцев // Вестник ХНТУ. — 2015. — № 3 (54). — С. 16–20.

Тези наукових доповідей

7. Адаменко Н.П. О некоторых классах топологий на конечных множествах / Н.П. Адаменко, П.Г. Стеганцева // Геометрия в Одессе-2005. Дифференциальная геометрия и её применение: междунар. семинар: тез. докл. — Одесса, 2005. – С. 3–4.
8. Адаменко Н.П. Использование свойств булевых функций для описания и подсчета топологий на конечных множествах / Н.П. Адаменко // Геометрия в Одессе-2006: междунар. семинар: тез. докл. — Одесса, 2006. – С. 19–21.
9. Адаменко Н.П. Топологическая интерпретация чисел Моргана / Н.П. Адаменко, П.Г. Стеганцева // Междунар. школа-семинар по геом. и анализу памяти Н.В. Ефимова, 5-11 сент., 2006г. труды участ. — Ростов-на-Дону, 2006. — С. 16−17.
10. Адаменко Н.П. Обобщение теорем Шарпа, Стефана и Стэнли о топологиях на конечных множествах / Н.П. Адаменко, П.Г. Стеганцева // Геометрия в Одессе-2007: междунар. семинар: тез. докл. — Одесса, 2007. — С. 37–38.

11. Адаменко Н.П. Подсчет количества топологий специального вида на конечных множествах / Н.П. Адаменко, И.Г. Величко // 7-я Международная конференция по геометрии и топологии: тез. докл. — Черкассы: ЧДТУ, 2007. — С.3.

12. Адаменко Н.П. Моделирование топологических структур на конечных множествах ориентированными графами / Н.П. Адаменко, П.Г. Стеганцева // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: п'ята міжнар. наук.-практ. конф. 14−16 лист. 2007 р. — Дніпропетровськ, 2007. — С. 6–7.

13. Адаменко Н.П. Використання сагайдаків для вивчення структури топологій / Н.П. Адаменко, П.Г. Стєганцева // Геометрия в Астрахани – 2007. Симметрии: теоретические и методические аспекты: междунар. семинар, 11−14 сент. 2007 г.: тез. докл. — Изд. дом «Астраханский университет», 2007. — С. 68−69.

14. Башова Н.П. Классификация топологий на конечных множествах с помощью графов / Н.П. Башова, И.Г. Величко // Международная конференция «Геометрия в Одессе-2008»: тез. докл. — Благотворительный фонд «Наука», Одесса, 2008. — С. 66−67.

15. Башова Н.П. Критерий существования топологий с заданным числом элементов в терминах двоичных чисел / Н.П. Башова, И.Г. Величко // Матеріали Десятого Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 15-16 жовтня 2010. — Кіровоград, 2010. — С. 10–11.

16. Величко И.Г. Вектор топологии и его свойства / И.Г. Величко, П.Г. Стеганцева, Н.П. Башова // «Комбінаторні конфігурації та їх застосування»: матер. міжвуз. наук.-практ. семінару, 15-16 квітня 2011 р. — Кіровоград, 2011. — С. 32–34.

17. Башова Н.П. Описание структуры близких к дискретной топологий на конечном множестве / Н.П. Башова, П.Г. Стеганцева, И.Г. Величко // Дискретна математика та її застосування у економіко-математичному моделюванні та інформаційних технологіях: міжнарод. наук. семінар, 11-13 жовтня 2012р.: збірка наукових тез. — Запоріжжя, 2012. — С. 13−14.

18. Величко И.Г. Моделирование топологий на конечных множествах биюнктивными булевыми функциями / И.Г. Величко, П.Г. Стеганцева, Н.П. Башова // Інформатика та системні науки (ІСН-2015): матеріали VI Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю, м. Полтава, 19–21 берез. 2015 р. — Полтава: ПУЕТ, 2015. — Режим доступа к тезисам http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/2465.

19. Башова Н.П. Существование и строение топологий близких к дискретной на конечном множестве / Н.П. Башова, И.Г. Величко, П.Г. Стеганцева // Комбінаторні конфігурації та їх застосування: 17 міжвузів. наук.-практ. семінар. 17−18 квітня 2015р.: матеріали семінару. — Кіровоград, 2015. — С. 13−15.

20. Башова Н.П. Вид 2-КНФ булевых функций, задающих топологии на конечном множестве / Н.П. Башова, А.В. Скрябіна // Алгебра, топологія,

аналіз: X літня школа, 3 – 15 серпня 2015р., Одеса, Україна: тези допов. — Київ: Інститут математики НАН України, 2015. — С. 42.

АНОТАЦІЯ

Башова Н. П. *Класифікація та підрахунок кількості топологій на скінченних множинах.* − Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.08 – математична логіка, теорія алгоритмів і дискретна математика. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, МОН України, Київ, 2016.

Дисертаційна робота присвячена класифікації топологій на скінченних множинах та їх підрахунку в окремих класах за допомогою скінченних орієнтованих графів та булевих функцій.

Встановлена відповідність між сукупністю топологій на n-елементній множині та сукупністю орієнтованих графів певного виду (T-сагайдаків). Досліджено властивості T-сагайдаків T_0-топологій. Для доведення теореми про існування і будову топологій у m-класах при $2^{n-1} < m \leq 2^n$ побудовано наступний апарат: уведені поняття індексу елемента топології, вектора топології та глибини множини; розроблена методика оцінки числа елементів топології в залежності від її вектора.

Встановлена відповідність між топологіями на n-елементній множині та булевими функціями від n змінних. Доведено, що булева функція, яка відповідає топології на скінченній множині, є біюнктивною 0-здійсненою та 1-здійсненою булевою функцією з 2-КНФ певного вигляду.

Ключові слова: топологія, скінченна множина, класи топологій, мінімальний окіл елемента, T_0-топологія, сагайдак, булева функція, 2-КНФ булевої функції, істотна та неістотна змінні.

АННОТАЦИЯ

Башова Н. П. *Классификация и подсчет числа топологий на конечных множествах.* − Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.08 – математическая логика, теория алгоритмов и дискретная математика. Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, МОН Украины, Киев, 2016.

Диссертационная работа посвящена классификации топологий на конечных множествах и их подсчету в отдельных классах. Исследование

топологий проводится с помощью конечных ориентированных графов и булевых функций.

В работе топологии на конечных множествах классифицированы по числу открытых множеств. Среди всех топологий выделен особый вид топологий − топологии-матрёшки. С помощью комбинаторных методов исследуются топологии-матрёшки и подсчитывается число всех топологий и негомеоморфных топологий в 3-, 4-, 5-классах. Введено понятие максимального множества в топологии и понятие согласованных топологий. Сформулирована и доказана теорема о восстановлении топологий на объемлющем множестве, согласованных с топологией, заданной на подмножестве этого множества.

Установлено соответствие между множеством топологий на n-элементном множестве и множеством ориентированных графов особого вида (T-колчанов). Предложен алгоритм построения T-колчанов на произвольном конечном множестве. Исследованы свойства T-колчанов T_0-топологий и сформулирован критерий T_0-топологии в терминах T-колчанов. С помощью T-колчанов описана структура и получены формулы для общего числа топологий в некоторых классах, найден новый класс топологий.

Для исследования топологий на конечных множествах построен следующий аппарат: введены понятия индекса элемента топологии, вектора топологии и глубины множества. Используя введенный аппарат, была разработана методика оценки числа элементов топологии на конечном множестве в зависимости от её вектора и доказана теорема о существовании и строении топологий в m-классах при $2^{n-1} < m \le 2^n$.

Установлено соответствие между топологиями на n-элементном множестве и булевыми функциями от n переменных. Исследована связь булевых функций, задающих топологии, с основными замкнутыми классами булевых функций и с классами Шефера. Доказано, что булевы функции, которые задают топологии на конечных множествах, принадлежат пересечению классов биюнктивных слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций и имеют 2-КНФ, каждая дизъюнкция которых имеет вид $x \vee \bar{y}$.

Ключевые слова: топология, конечное множество, классы топологий, минимальная окрестность, T_0-топология, колчан, булева функция, 2-КНФ булевой функции, существенная и несущественная переменные.

ANNOTATION

N.P. Bashova *The classification and the calculation of the number of the topologies on the finite sets.* – Manuscript.

The thesis for the Candidate of physical and mathematical sciences degree on specialty 01.01.08 – the mathematical logic, the discrete mathematics and the

theory of the algorithms – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2016.

The dissertation deals with the classification of the topologies on the finite sets and with the calculation of the topologies in some of the classes with the help of the finite directed graphs and Boolean functions.

The correspondence between the set of the topologies on the n-element set and the set of the directed graphs of the special kind (T-quivers) has been set up. The properties of the T-quivers of the T_0-topologies have been studied. The following apparatus has been developed for the prove the theorem, connected with the existence and the structure of the topologies in m-classes when $2^{n-1} < m \leq 2^n$: the concepts of the index of the element of the topology, the vector of the topology and the depth of the set have been proposed; the method of the estimation of the number of the elements of the topology depending on its vector has been given.

The correspondence between the topologies on the n-element set and the Boolean functions of n variables has been set up. It has been proved that the Boolean function, which defines the topology on the finite set, is bijunctive, 0-satisfiable and 1-satisfiable Boolean function with 2-conjunctive normal form of the certain kind.

Key words: topology, finite set, classes of the topologies, minimum neighborhood, T_0-topology, quiver, Boolean function, 2-conjunctive normal form of the Boolean function, essential variable and dummy variable.