МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ТИЩУК Тетяна Володимирівна

УДК 517.9

Співіснування періодичних кусково-сталих розв'язків нелінійних крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

01.01.02 —диференціальні рівняння

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник

Самойленко Валерій Григорович,

доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2016

ЗМІСТ

Вступ

Актуальність теми

У даний час науковці-математики та спеціалісти з інших галузей знань приділяють значну увагу дослідженню моделей об’єктів, функціонування яких пов’язано з передачею (отриманням) чи зберіганням інформації у цифровому вигляді. Часто в якості феноменологічних моделей таких об’єктів використовуються диференціальні рівняння з частинними похідними і нелінійними крайовими умовами [76].

Такі нелінійні крайові задачі у випадку лінійних диференціальних рівнянь спеціальним чином редукуються до (нелінійних) різницевих рівнянь з неперервним часом, вивчення яких проводиться за допомогою методів теорії одновимірних динамічних систем, що дає можливість дослідити властивості розглядуваних реальних динамічних процесів, від зовсім простих, до хаотичних і навіть турбулентних, і тим самим отримати важливу інформацію про їх властивості.

На важливості дослідження подібних задач наголошує академік НАН України Шарковський О.М., який зазначив таке: “Сведение краевых задач к разностным уравнениям позволяет осмыслить важные особенности пространственно-временной эволюции реальных систем, в частности, понять, как зарождается и развивается каскадный процесс образования когерентных структур убывающих масштабов, почему в системе осуществляется переход к состоянию хаотического перемешивания, как со временем может происходить стохастизация полностью детерминированной системы.” (передмова до книги Романенко Е.Ю. Разностные уравнения с непрерывным аргументом. – Киев: Институт математики НАН Украины,

2014. – 347 с. [13]).

Крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними та нелінійними крайовими умовами плідно досліджуються у відділі теорії динамічних систем Інституту математики НАН України, де отримано низку фундаментальних результатів у цій галузі. Так, Шарковський О.М. і Романенко О.Ю. показали, що траєкторії розв'язків нелінійних крайових задач (у загальному випадку) можуть демонструвати дуже складну поведінку, наприклад, володіти властивістю автостохастичності. Шарковський О.М. і Сівак А.Г. розглянули класи нелінійних крайових задач, періодичні розв'язки яких мають ті ж самі якісні та кількісні універсальні біфуркаційні властивості, що й траєкторії відповідних одновимірних динамічних систем.

При цьому в якості початкових функцій у випадку згаданих крайових задач розглядалися неперервно диференційовні функції. Природно виникає питання про вивчення властивостей розв'язків нелінійних крайових задач зі сталими початковими умовами, наприклад, для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зауважимо, що такі задачі досі не досліджувалися, можливо тому, що не мають, взагалі кажучи, класичних розв'язків. Природно в якості їх розв'язків розглядати узагальнені розв'язки.

Тому дослідження нелінійних крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є актуальною задачею, тим більше, що подібні крайові задачі можуть використовуватися в якості феноменологічних моделей широкосмугових генераторів цифрових періодичних сигналів, які (математично) описуються кусково-сталими функціями [76]. Широкосмуговість згаданих генераторів вимагає від крайової задачі наявності у неї нескінченної множини "несхожих" один на одного періодичних розв'язків, що для багатьох класів динамічних систем є ознакою хаотичності системи, а отже певний інтерес становить задача про співіснування узагальнених періодичних розв'язків згаданих вище нелінійних крайових задач.

Як зазначено вище, при дослідженні нелінійних крайових задач суттєво використовується теорія одновимірних динамічних систем і, зокрема, комбінаторна динаміка, які активно розвиваються з 60-их років XX-го століття. Фактично зародження комбінаторної динаміки, як розділу теорії динамічних систем, почалося з праць Шарковського О.М., який запропонував розглядати новий тип взаємозв'язку між траєкторіями динамічної системи – їх співіснування.

Одним з перших фундаментальних результатів в комбінаторній динаміці стала теорема, яка опублікована в 1964 році і яка в даний час широко відома як теорема Шарковського, про співіснування циклів різних періодів для неперервних відображень відрізка в себе [37]. З моменту опублікування цієї теореми інтерес до неї не згасає, про що свідчать численні публікації різних авторів, якими запропоновано нові варіанти її доведення, а також аналоги та узагальнення даної теореми для різних класів відображень, фазових просторів і навіть для складніших структур, ніж цикл відображення відрізка в себе.

У теоремі Шарковського цикли неперервного відображення класифікуються за періодами. Але, як відомо, відображення може мати різні цикли деякого фіксованого періоду, а тому такої класифікації, взагалі кажучи, недостатньо. Природно, крім класифікації циклів за періодами, розглядати їх класифікацію за типами (циклічними перестановками). Хоча у цьому напрямі отримано цілу низки вагомих результатів у працях Шарковського О.М., Федоренка В.В., Alsedà L., Baldwin S., Llibre J., Misiurewicz M. та інших, але питання про класифікацію циклів (деякого фіксованого періоду) неперервного відображення за їх типами є актуальним. Саме питання про співіснування циклів неперервного відображення відрізка в себе не за періодом (як у теоремі Шарковського), а за запропонованим у дисертаційній роботі новим поняттям моделі типу циклу розглядається у даній дисертації. Отримані результати щодо класифікації таких циклів суттєво використовуються у даній дисертації при вивченні питання про співіснування узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках державної бюджетної наукової теми № 11 БФ 038-04 "Варіаційні та асимптотичні методи в задачах механіки суцільних середовищ" (номер державної реєстрації 0111U004956).

Мета і задачі дослідження

Основною метою роботи є дослідження питання про співіснування узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами.

Об'єктом дослідження є крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними.

Предметом дослідження є періодичні кусково-сталі розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами.

Методи дослідження

У дисертації використано результати і методи теорії одновимірних динамічних систем, комбінаторної динаміки, диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Наукова новизна одержаних результатів

Всі результати дисертаційної роботи є новими. У ній вперше:

– запропоновано поняття моделі типу циклу і поняття ваги моделі типу циклу для неперервного відображення відрізка в себе, за допомогою яких описано множину типів циклів, що має довільне неперервне відображення відрізку в себе з L-схемою, і встановлено співіснування унімодальних циклів неперервного відображення відрізка в себе;

– запропоновано поняття узагальненого кусково-сталого періодичного розв’язку нелінійної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами;

– запропоновано поняття типу узагальненого кусково-сталого n-періодичного розв’язку нелінійної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку;

– для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку (одного рівняння, системи двох рівнянь і систем $2n$ рівнянь) з нелінійними крайовими умовами встановлено співіснування (за типами) їх узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків.

Практичне значення одержаних результатів

Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути використані для побудови феноменологічних моделей широкосмугових генераторів цифрових сигналів. Вони також можуть використовуватися при читанні спеціальних курсів з теорії диференціальних рівнянь, зокрема, теорії одновимірних динамічних систем.

Особистий внесок здобувача

Всі наукові результати дисертації, які виносяться на захист, отримані здобувачем особисто. При формулюванні означення 2.3.1 і леми 2.4.1 використано результати статті Федоренка В.В. “Канонические периодические траектории одномерных динамических систем” // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений, К.: Ин-т математики АН УРСР, 1983, с. 106–109. У працях, які опубліковано спільно з науковим керівником доктором фіз.-мат. наук, професором Самойленком В.Г., кандидатом фіз.-мат. наук, старшим науковим співробітником Федоренком В.В. і асистентом Федоренко Ю.В., Самойленку В.Г. належить визначення напрямку дослідження і постановка задач, а Федоренку В.В. та Федоренко Ю.В. – постійна участь у обговореннях отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації

Результати дисертації неодноразово доповідалися на науковому семінарі "Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики" кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники: професор Мельник Т.А., професор Самойленко В.Г.; м. Київ, 2013, 2014, 2015), науковому семінарі кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники: академік НАН України Самойленко А.М., академік НАН України Перестюк М.О.; м. Київ, 2015) та на міжнародних і всеукраїнських наукових конференціях:

– Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Г.М. (Київ, 2014).

– П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2014).

– Четверта міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 2014).

– Сьома міжнародна конференція імені Ляшка І.І. (Київ, 2014).

– Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів" (Рівне, 2015).

– Third International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Melnik V.S. "Nonlinear analysis and applications" (Kyiv, 2015).

– Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2015).

Публікації

Основні результати роботи опубліковано в 6 статтях у виданнях, що входять до переліку наукових фахових видань МОН України, серед яких 1 стаття в зарубіжному виданні, та 7 тезах доповідей міжнародних конференцій.

Структура дисертації

Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та переліку використаних джерел. Обсяг дисертаційної роботи становить 129 сторінок машинописного тексту, список використаних джерел містить 86 найменувань і займає 10 сторінок.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету і завдання дослідження, наведено результати, які визначають наукову новизну роботи, викладено основні результати та описано структуру дисертаційної роботи.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячено огляду літератури за темою дисертації. Розкрито історію питань, пов’язаних з тематикою роботи, та подано огляд основних праць з теми дисертації.

Другий розділ дисертаційного дослідження присвячено вивченню унімодальних циклів неперервних відображень інтервалу в себе. Тут запропоновано класифікацію унімодальних циклів одновимірних неперервних відображень відрізка в себе за моделлю типу циклу. Дано означення моделі типу циклу та ваги моделі типу циклу, які використовуються для опису унімодальних циклів неперервного відображення. Визначено множину типів циклів, яку має будь-яке неперервне відображення відрізка в себе, що містить L-схему. На множині опуклих циклічних перестановок описано відношення лінійного порядку, що індукується вагою опуклої циклічної перестановки.

Отримані результати щодо класифікації унімодальних циклів суттєво використовуються у даній дисертації при вивченні питання про співіснування узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами.

У третьому розділі розглянуто нелінійні крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними та досліджено питання про співіснування їх узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків.

Дослідження таких узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків здійснено шляхом зведення крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними до відповідного різницевого рівняння з неперервним часом, причому крайові умови та початкові дані забезпечують редукцію отриманого різницевого рівняння до неперервного відображення інтервалу.

Співіснування узагальнених періодичних розв’язків крайових задач встановлено не за періодами, як у теоремі Шарковського при вивченні питання про співіснування циклів одновимірного відображення відрізка в себе, а за спеціальним чином вибраними типами цих узагальнених періодичних розв’язків.

Для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку, для системи двох лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку та для систем $2n$ лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, встановлено співіснування (за типами) їх узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків.

Після кожного з розділів дисертаційної роботи сформульовано висновки, а наприкінці основного тексту дисертації – висновки до дисертаційного дослідження в цілому.

Автор щиро вдячна академіку НАН України Шарковському Олександру

Миколайовичу за формулювання проблем, що пов'язані з вивченням нелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними методами теорії одновимірних динамічних систем, та своєму науковому керівникові доктору фізико-математичних наук, професору Самойленку Валерію Григоровичу за постійну увагу, поради та підтримку при роботі над дисертацією.

РОЗДІЛ 1
Огляд літератури

Одним з важливих розділів теорії диференціальних рівнянь є теорія динамічних систем, яка в даний час інтенсивно розвивається і широко використовується при математичному описі різноманітних процесів у техніці, суспільстві, та явищ природи.

При вивченні динамічних систем значна увага приділяється так званим дискретним динамічним системам, тобто системам, коли не залежна змінна (параметр) набуває лише дискретних значень. Саме дискретні динамічні системи частіше всього використовуються при математичному описові чисельності біологічних популяцій. У зв’язку з цим можна згадати про відому модель чисельності популяції кроликів, яку розглядав знаменитий італійський дослідник Фібоначчі (Леонардо із міста Пізи) у XII сторіччі і яка є відомою завдяки так званим числам Фібоначчі. Як згадана модель Фібоначчі, так і багато інших математичних моделей чисельності біологічних популяцій природним чином приводять до різницевих рівнянь з дискретним аргументом, адже чисельність популяцій реєструється через певні проміжки часу [58].

Як відомо, різницеве рівняння з дискретним аргументом породжує одновимірну динамічну систему. Ітерації неперервного відображення відрізка в себе слугують одним з найпростіших прикладів одновимірної динамічної системи. При цьому динаміка таких динамічних систем, незважаючи на їх зовнішню простоту, є нетривіальною, як цього можна було б очікувати. Якщо ж динамічна система, що породжена ітераціями неперервного відображення, залежить від контрольованого параметра, то це суттєво ускладнює її дослідження, оскільки додатково вимагає встановлення взаємозв'язку між поведінкою траєкторій такої системи при різних значеннях параметрів. Ітерації неперервного відображення були об'єктом детального вивчення у працях [62] та [67], які написано ще на початку XX сторіччя.

На перший погляд може здаватися, що вибір одновимірної динамічної системи у якості моделі певного явища чи процесу не є достатнім для адекватного опису його динаміки, але це справедливо лише в тому сенсі, що багатовимірні системи демонструють ефекти, які просто не можуть виникнути в одновимірному випадку суто у зв'язку з обмеженням фазового простору. Крім того, лінійне впорядкування чисел на числовій прямій має глибокий комбінаторний вплив на поведінку ітерацій неперервного відображення відрізка в себе. З іншого боку, деякі результати, що мають місце для одновимірних динамічних систем, з мінімальними змінами справедливі і у багатовимірному випадку.

Теорія одновимірних динамічних систем ще 40 років тому вважалася не достатньо цікавою частиною загальної теорії динамічних систем, що призвело до того, що більшість математиків, які мали відношення до теорії динамічних систем, а також фізики і дослідники з інших спеціальностей, які мали б користуватися цією теорією, не вважали динамічні системи на дійсній прямій чимось, що заслуговує на їхню увагу [3].

Причинами цьому були хибне уявлення про те, що одновимірні динамічні системи влаштовані дуже просто, а також, про те, що такі системи не мають природних багатовимірних узагальнень. Обидва ці твердження були спростованими, а сучасна теорія одновимірних динамічних систем допомагає зрозуміти загальні закономірності виникнення і розвитку реальних динамічних процесів, від зовсім простих, до хаотичних і навіть турбулентних.

Одновимірні динамічні системи почали активно досліджуватися математиками з середини 1970-их років. Теорія одновимірних динамічних систем зацікавила математиків з багатьох причин. З одного боку, вивчення одновимірних динамічних систем, як простіших аналогів багатовимірних систем, було багатообіцяючим з точки зору використання отриманих результатів у багатовимірному випадку. Було досліджено, зокрема, що динамічна система, визначена неперервним відображенням відрізку в себе, може демонструвати хаотичну динаміку.

Ще однією причиною популярності одновимірних динамічних систем було те, що комп'ютерні розрахунки для моделювання одновимірних систем виконувалися швидше, ніж розрахунки для багатовимірних систем, а отримані результати можна було графічно зобразити на площині.

Теорія одновимірних динамічних систем розвивалася у багатьох напрямках. Зокрема, питання співіснування періодичних траєкторій одновимірних динамічних систем зумовило створення нового напрямку теорії динамічних систем – комбінаторної динаміки. Проте це питання виникало і задовго до створення комбінаторної динаміки.

Так, твердження про існування нерухомої точки неперервного відображення інтервалу, що має цикл періоду два, яке є наслідком теореми про проміжне значення з математичного аналізу, було використане Пуанкаре щоб довести, що звичайне диференціальне рівняння другого порядку має точку рівноваги в області, обмеженій замкненим циклом [10]. Наступним кроком було доведення твердження про те, що з наявності циклу періоду $n > 2$ неперервного відображення випливає наявність циклу періоду два цього відображення.

У праці [59] доведено твердження про збіжність ітерацій неперервного відображення інтервалу, яке немає циклу періоду два. Аналогічний результат було отримано у праці [75] за сильніших припущень, а саме твердження про збіжність ітерацій неперервного відображення інтервалу, яке немає нерухомих точок.

Математики А.Д. Мышкис і А.Я. Лепин у праці [7] дослідили умови існування циклу періоду два.

Ці результати давали теоретичне обґрунтування збіжності всіх розв’язків різницевих рівнянь першого порядку, що використовувалися для моделювання фізичних систем за допомогою електронно-обчислювальних пристроїв. Також, вони є одними з перших тверджень, які можна віднести до комбінаторної динаміки.

Фактично зародження комбінаторної динаміки, як напрямку теорії динамічних систем, почалося з робіт О.М. Шарковського, який запропонував розглядати тип взаємозв’язку між траєкторіями – їх співіснування. Зокрема, одним із результатів, отриманих у статті [34] був наслідок про те, що з існування у неперервного відображення відрізку циклу періоду більшого за два випливає існування у нього циклу періоду два. У праці [35] було доведено, що неперервне відображення відрізка в себе, яке має цикл періоду, що не дорівнює степеню двійки, має цикли будь-якого періоду 2^i, де $i \geq 0$.

Фундаментальним результатом є теорема Шарковського про співіснування циклів різних періодів для неперервних відображень відрізка в себе [37]. Для того, аби навести формулювання цієї теореми визначимо поняття, які в ній використовуються.

Тут і надалі вважатимемо, що відображення $f : I \to I$, де I – замкнений обмежений інтервал дійсної прямої $\mathbb{R}$, є неперервним, тобто $f \in C^0(I;I)$. При цьому позначатимемо f^i, де $i \in \mathbb{N}$, i-ту ітерацію відображення f, а f^0 – тотожне відображення. Якщо для точки $x \in I$ існує число i таке, що $f^i(x) = x$, то точка x називається періодичною відображення f. При цьому число $n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid f^i(x) = x\}$, де $x \in I$ – періодична точка відображення f, називається періодом точки x. Множину всіх періодичних точок відображення f

позначатимемо $Per(f)$. Послідовність $(f^i(x),\ i \geq 0)$, де $x \in Per(f)$ – періодична точка періоду n, називається періодичною траєкторією відображення f, а множина точок $\{f^i(x),\ i \geq 0\}$, де $x \in Per(f)$ називається циклом періоду n відображення f.

Теорема *Якщо $f \in C^0(I,I)$ має цикл періоду n, то воно має також і цикл періоду $n^{'}$ такого, що $n^{'} < n$, де*

$$1 < 2 < 2^2 < 2^3 < \ldots < 2^2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 3 < \ldots < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 3 < \ldots < 9 < 7 < 5 < 3.$$

Більше того, для будь-якого n існує неперервне відображення, що має цикл періоду n і немає циклу періоду $n^{''}$, якщо $n < n^{''}$.

Теорема Шарковського з різними формулюваннями була доведена у літературі кілька разів. Крім оригінального доведення, що міститься у праці [37], у якому використовувалися неперервні відображення, що містять L-схему, та його перекладу англійською мовою [84], у якому P. Stefan вніс авторські деталі у доведення, існує також доведення, що виконане J. Guckenheimer [65] та доведення, яке міститься у праці [58]. Відома теорема авторства T.Y. Li та J.A. Yorke [69] також є одним із варіантів теореми Шарковського.

Важливі результати були отримані у праці математика О. В. Ширяєвої [39], у якій було запропоновано алгоритм знаходження циклів та їх кількості для кусково-лінійного відображення відрізку у себе, що складається з двох частин, кожна з яких відображається на весь відрізок.

З моменту опублікування теореми [37] інтерес до неї не згасає, про що свідчать численні публікації, в яких запропоновані нові варіанти доведення цієї теореми і її аналоги та узагальнення для різних класів відображень, фазових просторів та навіть для складніших структур, ніж цикл відображення.

Тут варто зауважити, що внаслідок історичних обставин, термінологія закордонних математиків, що працювали і працюють над проблемами комбінаторної динаміки, та їх радянських колег відрізняються, тому надалі при описові основних результатів робіт за необхідності буде вживатися англійська термінологія.

Так, наприклад, у праці [42] теорему Шарковського узагальнено для класу неперервних відображень з простору $Y = \{z \in \mathbb{C} : z^3 \in [0;1]\}$ в себе, для яких виконується рівність $f(0) = 0$, використовуючи поняття циклів мінімального типу (автори цієї праці замість терміну “цикл мінімального типу”, використовують термін “primary orbit”).

У праці [85] доведено, що порядок співіснування циклів для спеціального класу не неперервних відображень відповідає порядку Шарковського. J. Andres з колегами запропонували узагальнення теореми для багатозначних відображень [47], а також розглянули можливість розширити теорему для випадкових відображень [48].

Використовуючи теорему Шарковського, низкою авторів отримано результати стосовно співіснування циклів відображення кола [5], [41], [55]. Оскільки кожному циклу неперервного відображення відрізка в себе або ж неперервного відображення кола на себе можна поставити у відповідність граф накриттів, то постає питання про співіснування циклів такого відображення за їх графами накриттів. Такі дослідження містяться, зокрема, у праці [41].

У праці [43] автори доводять, що критерій того складним чи простим (тобто з додатним чи нульовим значенням ентропії) є відображення відрізка в себе, в тих же термінах може бути отриманий і для неперервного відображення кола на себе.

Для довільного неперервного відображення, що має цикл періоду n, теорема Шарковського стверджує, що існує принаймні один цикл кожного періоду $n^{'}$, де $n^{'}$ знаходиться лівіше у порядку Шарковського натуральних чисел, проте кількість кожного з таких циклів є невідомою. Це питання вивчалося у працях [61],

[70], [83]. У праці [71] було досліджено, яку найменшу кількість циклів кожного з періодів, що співіснують за теоремою Шарковського, неперервне відображення може мати, якщо значення періоду є степенем двійки, а також було розглянуто взаємне розташування точок всіх циклів таких періодів.

У загальному випадку, тобто коли значення періоду є довільним числом, питання взаєморозташування точок всіх циклів було розглянуто у праці [31]. Подібні результати стосовно мінімальної кількості циклів кожного періоду залежно від існування циклу з певними властивостями отримано у працях [56], [64] і [66].

Числове значення періодів циклів, що співіснують за теоремою Шарковського, не дає змогу отримати інформацію ані про взаєморозташування точок цих циклів, ані про їх геометричну форму, тому окремим етапом досліджень в комбінаторній динаміці стало дослідження питання про співіснування циклів не за періодами, як у теоремі Шарковського, а за їх типами.

Однією із перших праць, у якій було доведено, що співіснування циклів мінімального типу непарного періоду (автор цієї праці замість терміну “цикл мінімального типу” використовує термін “minimal orbit”) може бути встановленим за циклічними перестановками, що відповідають цим циклам, була праця [84]. Ця праця є відомою іще тому, що у ній міститься перший переклад англійською мовою теореми Шарковського про співіснування циклів неперервного відображення відрізка в себе.

Праця [52] присвячена дослідженню циклів, типом яких є спеціальні перестановки, а значення періоду дорівнює степеню двійки. У цій праці доведено існування часткового порядку на вказаній підмножині циклічних перестановок та досліджено питання стосовно кількості критичних точок.

Поняття типу циклу (автори замість терміну “тип циклу” використовують термін “orbit type”), співіснування циклів за типами (автори праці [42] замість терміну “співіснування” використовують термін “forcing”) та мінімального циклу (автори праці [42] замість терміну “мінімальний цикл” використовують термін “primary orbit”) було незалежно запропоновано у працях [42] і [49]. Зокрема, у останній праці автор встановлює відношення часткового порядку на множині типів циклів, яке є відношенням лінійного порядку на множині унімодальних типів циклів.

У праці [68] питання співіснування циклів неперервного відображення відрізка за типами досліджується, використовуючи, зокрема, теорію нідинг-послідовностей. Варто зазначити, що питанню співіснування циклів неперервного відображення відрізка за типами присвячено також праці [53], [54], [74].

Цікавими є дослідження, що були проведені авторами праці [44], які дослідили заборонені типи циклів кусково-монотонних відображень відрізка в себе, тобто такі циклічні перестановки, які не є типами циклів цього класу відображень. У працях [44], [46] заборонені циклічні перестановки було використано для побудови нестатистичного тесту для того, щоб розрізнити хаотичну поведінку системи від випадкової.

Незалежно подібні питання вивчалися і у київській школі з одновимірних динамічних систем. Зокрема, поняття типу циклу та співіснування типів циклів розглядалося у працях [28], [29], [30], [31].

У праці [28] було запропоновано поняття опуклої циклічної перестановки та встановлено відношення лінійного порядку на множині таких перестановок. Використовуючи встановлене відношення лінійного порядку було досліджено питання співіснування циклів неперервного відображення відрізка в себе за їх типами. Твердження про існування лише часткового порядку на множині циклічних перестановок було доведено у праці [31].

В теоремі Шарковського цикли неперервного відображення класифікуються за періодами, але відображення може мати різні цикли деякого фіксованого періоду, тому такої класифікації недостатньо. Це слугує іще однією причиною, чому крім класифікації циклів за періодами, варто розглядати їх класифікацію за типами – циклічними перестановками.

Дійсно, обмеження відображення на цикл є циклічною перестановкою, тобто f взаємно однозначно відображає на себе скінченну множину точок циклу, яка не містить власних інваріантних підмножин. Крім того, цикл відображення – лінійно впорядкована підмножина інтервалу, що дає нам змогу, на відміну від звичайного поняття циклічної перестановки розглядати циклічні перестановки лінійно впорядкованих множин в якості типу та зображати їх графічно в прямокутній декартовій системі координат.

Тоді постає питання про співіснування циклів різних типів, тобто циклічних перестановок, які відповідають цим циклам. Якщо на множині циклічних перестановок ввести відношення порядку “π”, таке, що перестановки π і π' знаходяться у відношенні “π”, ($\pi \, \pi \, \pi'$) у випадку, коли довільне відображення $f \in C^0(I,I)$, яке має цикл типу π, має також цикл типу π', то множина циклічних перестановок з так визначеним порядком є лише частково впорядкованою множиною [31], [49].

Визначення типу циклу як циклічної перестановки є незручними для узагальнення поняття типу циклу багатовимірного відображення. В праці [63] запропоновано характеризувати цикл не за відповідною йому циклічною перестановкою, а за її циклічним зображенням. Крім того, класифікація циклів одновимірного відображення за циклічними перестановками ускладнена відсутністю лінійного порядку на всій множині циклічних перестановок.

Проте в цій частково впорядкованій множині є лінійно впорядковані підмножини циклічних перестановок. Ці спеціальні підмножини були об’єктом дослідження в працях [28], [33], [36], але залишилось, зокрема, питання щодо знаходження класу відображень, типи всіх циклів якого є елементами цієї спеціальної підмножини.

Для багатьох класів відображень існує необхідність класифікувати цикли більш детально, ніж за типами, в розумінні циклічного зображення відповідної перестановки. Наведемо приклад, який пояснює необхідність такого уточнення класифікації за типами. Відображення “тент”, яке визначено наступним чином:

$$x \mapsto \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

має два цикли періоду 3: цикл $B_1 = \{\frac{2}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\}$ і цикл $B_2 = \{\frac{2}{7}; \frac{4}{7}; \frac{6}{7}\}$. Хоча вони мають однаковий тип $(1,2,3)$, але точки циклів B_1 і B_2 по-різному розташовані на гілках монотонності відображення f.

Одновимірним динамічним системам, теорія яких є одним з найбільш ефективних інструментів нелінійної динаміки, з одного боку, властивий широкий спектр динамічної поведінки траєкторій, зокрема, система може мати багато різноманітних циклів одночасно, а з іншого боку, властивості таких систем можуть бути детально досліджені [33].

Дослідженнями крайових задач для лінійних рівнянь з частинними похідними та нелінійними крайовими умовами шляхом їх редукції до різницевих рівнянь з неперервним аргументом вже багато років займаються в Інституті математики НАН України [36], [38], [82]. Особливих успіхів досягнуто для рівнянь гіперболічного типу, що пояснюється існуванням формули Д’Аламбера та методу характеристик отримання загального розв’язку рівняння.

Різницеві рівняння з неперервним аргументом, що отримані в результаті редукції крайових задач, демонструють подекуди дуже складну поведінку траєкторій, зокрема, автостохастичність [12]. Знайдено класи крайових задач, для яких мають місце ті ж самі якісні і кількісні універсальні властивості біфуркацій розв’язків, що й для відповідних одновимірних динамічних систем [81].

Подібними до сучасних підходів у теорії одновимірних динамічних систем користувався А. А. Вітт у праці [2], де побудовано модель реальної фізичної системи і досліджено її розв'язки за допомогою методів теорії функціональних рівнянь.

Одним з найвідоміших застосувань техніки редукції крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними і нелінійними крайовими умовами до різницевого рівняння з неперервним аргументом з метою вивчення у подальшому динаміки відповідного одновимірного відображення є дослідження, що присвячені електричній схемі Чуа, яка є однією з перших і найбільш широко відомих електричних схем, що демонструють хаотичну поведінку.

Застосовуючи методи теорії динамічних систем, у працях [77], [79], [80] було досліджено розвиток каскадного процесу народження просторових структур нескінченно спадаючих масштабів і формування з часом фрактальних та випадкових структур, що демонструють явище автостохастичності. У працях [72], [78], [80], що стосуються дослідження електромагнітних полів, детально досліджено явище ідеальної турбулентності, тобто турбулентності в середовищах без внутрішнього опору, вивчення математичних механізмів якої дозволяє зробити суттєвий крок до розуміння загальних закономірностей реальних турбулентних процесів.

Цікавим напрямком досліджень є питання, що стосуються того, чи можуть математичні моделі, побудовані на основі крайових задач (без будь-яких додаткових умов чи припущень), дослідження яких редукується до різницевих рівнянь з неперервним аргументом, правильно описувати поведінку реальних фізичних об'єктів, коли час спостереження за такими фізичними об'єктами досить великий.

Проведені у працях [38], [50], [51] дослідження показують, що можна знайти деякі паралелі між динамікою реальних об'єктів і динамікою, що спостерігається при комп'ютерних дослідженнях математичних моделей об'єктів (коли за необхідністю використовується дискретизація простору і часу).

Підсумовуючи сказане вище, відмітимо, що теорія одновимірних динамічних систем, незважаючи на те, що її активний розвиток розпочався лише близько 50 років, на даний час цікавить широке коло математиків та спеціалістів в інших галузях знань. Багато результатів, що були отримані в теорії одновимірних динамічних систем, вже стали класичними математичними теоремами, зокрема, всесвітньо відомою є теорема керівника київської школи дослідників теорії одновимірних динамічних систем – теорема Шарковського. У зв’язку молодим віком теорії одновимірних динамічних систем, у ній існує іще багато відкритих питань.

1.1 Висновки до першого розділу

У першому розділі детально описано основні напрямки досліджень в теорії одновимірних динамічних систем та їх застосування для моделювання фізичних явищ і процесів. Зокрема, продемонстровано важливість дослідження співіснування циклів неперервних відображень за їх типами, а також опису типів циклів, які мають неперервні відображення, що містять L-схему.

Вивчення цих питань є, безперечно, актуальним, адже результати такого дослідження могли б заповнити існуючі прогалини у теорії одновимірних динамічних систем та бути використаними для дослідження співіснування узагальнених періодичних розв’язків нелінійних крайових задач, які методом редукції зводяться до різницевих рівнянь з дискретним аргументом.

РОЗДІЛ 2
УНІМОДАЛЬНІ ЦИКЛИ НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ІНТЕРВАЛУ

Найбільш відомим результатом стосовно впорядкування циклів одновимірних динамічних систем, що породжені неперервним відображенням відрізка в себе, є теорема Шарковського, що дозволяє впорядкувати цикли за значенням їх періоду. З іншого боку, задане відображення відрізка в себе може мати декілька циклів одного й того самого (фіксованого) періоду. Тому класифікації циклів неперервного відображення за їх періодами недостатньо, оскільки існує необхідність розрізняти цикли з однаковими значеннями періодів.

Природно крім класифікації циклів за періодами, розглянути їх класифікацію за типами, тобто за циклічними перестановками. Дійсно, обмеження відображення f на цикл є циклічною перестановкою, тобто f взаємно однозначно відображає на себе скінченну множину точок циклу, яка не містить власних інваріантних підмножин. Крім того, цикл відображення – це лінійно впорядкована підмножина інтервалу.

Це спостереження дає нам змогу, на відміну від звичайного поняття циклічної перестановки, розглядати циклічні перестановки лінійно впорядкованих множин в якості типу таких множин та зображати їх графічно в прямокутній декартовій системі координат. Далі природно виникає питання про співіснування циклів різних типів, тобто циклічних перестановок, які відповідають цим циклам. Для цього, на множині циклічних перестановок можна визначити відношення порядку “π” наступним чином: перестановки π і $\pi^{'}$ знаходяться у відношенні “π” (використовується позначення $\pi \, \pi \, \pi^{'}$), якщо деяке відображення $f \in C^0(I, I)$, яке має цикл типу π, має також і цикл типу $\pi^{'}$.

Множина циклічних перестановок з так визначеним порядком є лише частково впорядкованою множиною [31], [49], що ускладнює класифікацію циклів одновимірного відображення за циклічними перестановками. Проте в цій частково впорядкованій множині є лінійно впорядковані підмножини циклічних перестановок. Ці спеціальні підмножини були об’єктом дослідження в працях [31], [33], [36], але залишились нез’ясованими деякі важливі питання, зокрема, питання про знаходження класу відображень, типи всіх циклів якого є елементами цієї спеціальної підмножини.

У даному розділі досліджено цикли спеціального класу неперервних відображень відрізка в себе, графік яких схожий на символ “Λ”, та питання їх співіснування (строге визначення Λ-відображення дано далі). Такі відображення мають лише дві гілки монотонності і в певному сенсі є найпростішими неперервними відображеннями, хоча мають властивості, які притаманні “багатогілковим” відображенням (але не навпаки !). Цей клас відображень було обрано в якості найпростішого класу серед “багатогілкових” відображень ще й тому, що неперервні відображення з однією гілкою монотонності мають лише одну нерухому точку або ж цикл періоду два.

Крім того того, доведено, що довільне неперервне відображення відрізку, яке містить L-схему, має і цикл кожного типу, який має так зване тент-відображення

$$x \;\; \alpha \;\; \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \le 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Оскільки відображення, що містять L-схему, посідають важливе місце у комбінаторній динаміці, зокрема, використовуються при доведенні теореми Шарковського, то окремим питанням, що розглянуто у даному розділі, є опис множини типів циклів, які має кожне неперервне відображення, що містить L-схему.

Доведено твердження про те, що довільний елемент із спеціальним чином визначеної лінійно впорядкованої підмножини циклічних перестановок є типом циклу будь-якого неперервного відображення відрізка, яке містить L-схему. Крім того, встановлюється співіснування циклів неперервного відображення відрізка в себе, типами яких є циклічні перестановки із описаної вище лінійно впорядкованої підмножини циклічних перестановок.

2.1 Моделі опуклої циклічної перестановки

Оскільки у кількох наступних підрозділах йтиметься про побудову нового типу циклу, що відмінний від циклічної перестановки, який дасть можливість розрізняти цикли неперервного відображення відрізку в себе не лише за значенням періоду, а й за їх геометричною структурою, тут варто навести основний результат статті [37], а саме, теорему Шарковського. З цією метою сформулюємо необхідні означення.

Нехай $f \in C^0(I,I)$ – неперервне відображення замкненого інтервалу $I=[0;1]$ в себе. Позначимо через f^i, $i \in \mathrm{N}$, i-ту ітерацію відображення f, а f^0 – тотожне відображення. Точка $x \in I$ називається періодичною відображення f, якщо існує число i таке, що $f^i(x)=x$.

Число $n=\min\{i \in \mathrm{N} \mid f^i(x)=x\}$ називається періодом точки x.

Множина всіх періодичних точок відображення f позначається $Per(f)$.

Послідовність $(f^i(x),\ i \geq 0)$, де $x \in Per(f)$ – періодична точка періоду n, називається періодичною траєкторією відображення f, а множина точок $\{f^i(x),\ i \geq 0\}$ – циклом періоду n відображення f.

Теорема 1.1 *(Теорема Шарковського [37].) Якщо $f \in C^0(I,I)$ має цикл періоду n, то воно має також і цикл періоду n' такого, що $n' < n$, де*

$$1 < 2 < 2^2 < 2^3 < \ldots < 2^2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 3 < \ldots < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 3 < \ldots < 9 < 7 < 5 < 3. \qquad (2)$$

Більше того, для будь-якого n існує неперервне відображення, що має цикл періоду n і немає циклу періоду n'', якщо $n < n''$.

Однією з основних частин оригінального доведення теореми Шарковського була наступна лема, для формулювання якої використовується поняття L-схеми.

Означення 1.1 *Відображення $f \in C^0(I,I)$ містить L-схему, якщо існують три точки $a,b,c \in I$, де $a < b < c$, для яких виконуються наступні рівності $a = f(a)$, $f(b) = c$, $f(c) = a$.*

Лема 1.1 *Якщо відображення $f \in C^0(I,I)$ містить L-схему, то воно має цикл будь-якого періоду [37].*

Прикладом неперервного відображення, що містить L-схему, є тент-відображення (1).

Очевидно, що відображення $f \in C^0(I,I)$, що містить L-схему, може мати цикл будь-якого типу. Тому важливо визначити, яку множину типів має кожне відображення, що містить L-схему. Для початку визначимо, яку множину типів має тент-відображення (1).

Оскільки неперервне відображення може мати різні цикли деякого фіксованого періоду, то розглянемо класифікацію циклів за їх типами – циклічними перестановками. Для цього сформулюємо означення типу циклу [17], [19], [63].

Означення 1.2 *Нехай* $B=\{\beta,\ f(\beta),...,\ f^{n-1}(\beta)\}$ *– цикл періоду* n *відображення* $f\in C^0(I,I)$*, де* $\beta=\min\limits_{1\le i\le n} f^{i-1}(\beta)$ *та* $f^n(\beta)=\beta$*. Впорядкований набір чисел* $r=(r_1,...,r_i,...,r_n)$*, кожен елемент якого визначається за формулою* $r_i=\#\{k\,|\,1\le k\le n,\ f^{k-1}(\beta)\le f^{i-1}(\beta)\}$*, де "* $\# A$ *" означає кількість елементів множини* A*, називається типом циклу* B *.*

З означення 1.2 випливає, що $r_1=1$ та для будь-яких різних номерів $1\le i\le n, 1\le j\le n$ виконується нерівність: $r_i\ne r_j$.

Будь-якому циклу B одновимірного відображення можна поставити у відповідність деяку циклічну перестановку. Дійсно, якщо точки циклу B позначимо так: $\beta_1,...,\beta_i,\beta_{i+1},...,\beta_n$, де $\beta_1<...<\beta_i<\beta_{i+1}<...<\beta_n$ і при цьому $f(\beta_i)=\beta_{j_i}$, $1\le j_i\le n$, $1\le i\le n$, то відповідну циклу B циклічну перестановку можна записати наступним чином $\pi=(2..n\ \ j_1 j_2 ... j_n\ )$.

Циклічне зображення перестановки π має вигляд $(1,\pi(1),...,\pi^{i-1}(1),...,\pi^{n-1}(1))$. Оскільки $B=\{\beta,\ f(\beta),...,\ f^{n-1}(\beta)\}$, то для всіх $1\le i\le n$ маємо $r_i=\pi^{i-1}(1)$. Тобто означення типу циклу через відповідну циклічну перестановку та впорядкований набір $(r_1,...,r_i,...,r_n)$ еквівалентні. Таким чином, цей впорядкований набір співпадає із циклічним зображенням перестановки π циклу B .

Враховуючи еквівалентність понять циклічної перестановки π , що відповідає циклу B , і типу циклу B як рядка $(r_1,...,r_i,...,r_n)$, надалі під типом циклу ми будемо розуміти один з цих об’єктів, залежно від контексту.

Сформулюємо наступні означення, що знадобляться нам для опису множини всіх циклічних перестановок, які можуть бути типами циклів тент-відображення (1).

Означення 1.3 *Циклічна перестановка* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$ *називається опуклою вгору [17], [28], [33], якщо виконуються нерівності* $j_i < j_{i+1}$ *при* $1 \le i < \hat{i}$ *та* $j_i > j_{i+1}$ *при* $\hat{i} \le i < n$*, де* $2 \le \hat{i} \le n-1$ *та* $\pi(\hat{i}) = n$.

Аналогічно, циклічна перестановка $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$ називається опуклою вниз, якщо виконуються нерівності $j_i > j_{i+1}$ при $1 \le i < \check{i}$ та $j_i < j_{i+1}$ при $\check{i} \le i < n$, де $2 \le \check{i} \le n-1$ та $\pi(\check{i}) = 1$.

Означення 1.4 *Унімодальним циклом називається цикл, тип якого є опуклою вгору або опуклою вниз перестановкою.*

Нехай відображення $f \in C^0(I, I)$ топологічно спряжене відображенню $g \in C^0(I, I)$, яке визначається рівністю $g = h^{-1} \circ f \circ h$, де $h(x) = 1 - x$. Якщо відображення f має цикл, якому відповідає опукла вгору циклічна перестановка $\hat{\pi}$, то відображення g має цикл, якому відповідає опукла вниз циклічна перестановка $\check{\pi}$. При цьому $\check{\pi}(i) = n + 1 - \hat{\pi}(n + 1 - i)$ для всіх $1 \le i \le n$.

Отже, достатньо розглядати властивості лише опуклих вгору циклічних перестановок, адже властивості опуклих вниз циклічних перестановок встановлюються автоматично, використовуючи їх зв'язок з опуклими вгору циклічними перестановками. Тому у подальшому достатньо розглядати лише відображення, що мають унімодальні цикли, яким відповідають опуклі вгору циклічні перестановки. Такі перестановки називатимемо опуклими циклічними перестановками.

Множину всіх опуклих циклічних перестановок позначимо Π, а множину опуклих циклічних перестановок порядку n за допомогою Π_n.

Множину, що складається з циклічних перестановок довжин 1 і 2 (які не є опуклими) та всіх опуклих циклічних перестановок позначимо Σ.

Легко бачити, що множина Σ містить циклічні перестановки вигляду:

$$(..i..n-1n\ 2..i+1..n1\ )$$

для довільного $n>2$ і цикли саме таких типів будувались в [37], що було достатньо для доведення леми 1.1.

Крім циклів такого типу, тент-відображення (1) має також багато циклів періоду n інших типів. Наприклад, якщо $n>3$ і є простим числом, то тент-відображення (1), що містить L-схему, має $\frac{2^n-2}{n}$ різних циклів періоду n, а не один, як це гарантується лемою 1.1.

Одним з головних питань, що досліджується у даному розділі, є доведення того, що будь-яка перестановка з множини Σ є типом деякого циклу тент-відображення (1).

Має місце наступне твердження, яке доведено у підрозділі 2.5.

Твердження 1.1 *Наступні твердження еквівалентні:*

1) $\pi \in \Sigma$;

2) π є типом деякого циклу тент-відображення (1).

З опуклими циклічними перестановками тісно пов’язані цикли унімодальних неперервних відображень. Сформулюємо означення унімодального відображення.

Означення 1.5 *Відображення* $f \in C^0(I,I)$ *називається унімодальним, якщо існує таке значення* $c \in (0;1)$*, що* f *монотонно не спадає (монотонно не зростає) на відрізку* $[0;c]$ *і монотонно не зростає (монотонно не спадає) на відрізку* $[c;1]$*.*

Тобто унімодальне відображення має лише дві гілки монотонності.

У подальшому розглядається унімодальне відображення f, яке є опуклим вгору. Міркування для випадку, коли f – унімодальне опукле вниз відображення, аналогічні міркуванням для випадку унімодального опуклого вгору відображення.

З означення 1.5 випливає, що тент-відображення (1) є унімодальним відображенням.

Визначимо тепер клас відображень, до якого належить тент-відображення і представники якого мають ті ж самі типи циклів, що і тент-відображення.

Означення 1.6 *Відображення* $g \in C^0(I,I)$ *називається* Λ*-відображенням, якщо виконуються наступні умови:*

1) $g(0) = g(1) = 0$;

2) існує точка a, де $0 < a < 1$, така, що $g(a) = 1$;

3) функція $g(x)$ монотонно не спадає на відрізку $[0;a]$ і монотонно не зростає на відрізку $[a;1]$.

Зауважимо, що для Λ-відображення точки 0, a і 1 утворюють L-схему. Крім того, з означення 1.5 випливає, що Λ-відображення є унімодальним відображенням.

Має місце наступне твердження, яке доведено у підрозділі 2.5.

Твердження 1.2 *Наступні твердження еквівалентні:*

1) π є типом деякого циклу Λ-відображення;

2) π є типом деякого циклу тент-відображення (1).

Об'єднаємо твердження 1.1, 1.2 в зручній для їх доведення формі. Має місце наступна теорема, яку доведено у підрозділі 2.5.

Теорема 1.2 *Наступні твердження еквівалентні:*

1) $\pi \in \Sigma$;

2) π є типом деякого циклу тент-відображення (1);

3) π є типом деякого циклу Λ-відображення.

Тепер дослідимо питання опису типів циклів, які має відображення, що містить L-схему.

Очевидно, що відображення $f \in C^0(I,I)$, яке містить L-схему, може мати цикл будь-якого типу. Тому питання можна поставити ще так: яку множину типів має кожне відображення, що містить L-схему?

Відповіддю на це питання є наступне твердження, яке доведено у підрозділі 2.6.

Твердження 1.3 *Якщо відображення* $f \in C^0(I, I)$ *містить* L*-схему, то воно має цикл кожного типу, який має тент-відображення (1).*

Розпочнемо міркування, які необхідні для доведення сформульованих вище тверджень та теореми.

Оскільки обмеження неперервного відображення на цикл є циклічною перестановкою, то всі цикли унімодального відображення є унімодальними. Але можливий випадок, коли двом різним унімодальним циклам одного періоду унімодального опуклого вгору відображення відповідає одна й та сама опукла циклічна перестановка. Для того, аби розрізняти унімодальні цикли у такому випадку, проведемо наступні міркування.

Оскільки $r_n = n$ – максимальне число серед чисел $1, r_2, ..., r_n$, що утворюють тип $(1, r_2, ..., r_n)$ циклу, якому відповідає опукла циклічна перестановка π, а число r_{n-1} є прообразом елемента r_n, то послідовно порівняємо кожне число $1, r_2, ..., r_n$ з числом r_{n-1} і розіб'ємо цей тип $(1, r_2, ..., r_n)$ на блоки (упорядковані ланцюжки чисел, з дотриманням уже встановленого в типові порядку) за наступним правилом: кожен блок містить елементи, які або всі менші за число r_{n-1}, або ж всі не менші за r_{n-1}. Очевидно, що блоки з непарними номерами містять лише числа, що менші за r_{n-1}, а блоки з парними номерами – лише ті числа, що не менші за r_{n-1}. Тоді тип $(1, r_2, ..., r_n)$ перестановки π можна записати наступним чином:

$$\begin{gathered}\left(1, \ldots, r_{m_1} \middle| r_{m_1+1}, \ldots, r_{m_1+l_1} \middle| \ldots \middle| r_{m_1+l_1+\ldots+l_{s-1}+1}, \ldots, \right. \\ \left. r_{m_1+l_1+\ldots+m_s} \middle| r_{m_1+l_1+\ldots+m_s+1}, \ldots, r_{m_1+l_1+\ldots+m_s+l_s} \middle| \right), \end{gathered} \tag{3}$$

де символ $|$ розділяє сусідні блоки.

Числа m_i, l_i, $1 \le i \le s$, визначаються наступним чином. Нехай β – найменша точка циклу типу r унімодального відображення f. Тоді m_1 – це кількість точок в послідовності $(\beta, f(\beta), \ldots, f^{n-1}(\beta))$, що належать інтервалу $[0;c)$, тобто $f^{i-1}(\beta) \in [0;c)$, де $1 \le i \le m_1$; l_1 – це кількість точок в послідовності $(\beta, f(\beta), \ldots, f^{n-1}(\beta))$, починаючи з $f^{m_1}(\beta)$, що належать інтервалу $[c;1]$, тобто $f^{i-1}(\beta) \in [c;1]$, де $m_1 + 1 \le i \le m_1 + l_1$; m_2 – це кількість точок в послідовності $(\beta, f(\beta), \ldots, f^{n-1}(\beta))$, починаючи з $f^{m_1+l_1}(\beta)$, що належать $[0;c)$, тобто $f^{i-1}(\beta) \in [0;c)$, де $m_1 + l_1 + 1 \le i \le m_1 + l_1 + m_2$, і т.д.

Аналогічно, тип $(1, r_2, \ldots, r_n)$ перестановки π можна записати так:

$$\Big(|1, \ldots, r_{m_1'} | r_{m_1'+1}, \ldots, r_{m_1'+l_1'} | \ldots | r_{m_1'+l_1'+\ldots+l_{s'-1}'+1}, \ldots,$$

$$r_{m_1'+l_1'+\ldots+m_{s'}'} | r_{m_1'+l_1'+\ldots+m_{s'}'+1}, \ldots, r_{m_1'+l_1'+\ldots+m_{s'}'+l_{s'}'} | \Big), \tag{4}$$

де блоки з непарними номерами містять лише числа, що не більші за r_{n-1}, а блоки з парними номерами – лише ті числа, що більші за r_{n-1}.

Зв’язок чисел m_i', l_i', $1 \le i \le s'$, з розташуванням точок циклу унімодального відображення f на його гілках монотонності, такий самий як і чисел m_i, l_i, де $1 \le i \le s$.

Кількість блоків у рядках (3) та (4) є парною, адже $r_n = n > r_{n-1}$, тобто кожен з рядків (3), (4) закінчується блоком з парним номером $2s$ та $2s'$ відповідно. При цьому виконуються наступні рівності:

$$\sum_{i=1}^{s} (m_i + l_i) = n, \qquad \sum_{i=1}^{s'} (m_i' + l_i') = n.$$

З чисел m_1, m_2, $\ldots$, m_s, l_1, l_2, $\ldots$, l_s, m_1', m_2', $\ldots$, $m_{s'}'$, l_1', l_2', $\ldots$, $l_{s'}'$, які фігурують в (3) і (4), утворимо числові набори вигляду:

$$(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_{s-1}, l_{s-1}, m_s, l_s), \tag{5}$$

$$(m_1^{'}, l_1^{'}, m_2^{'}, l_2^{'}, \ldots, m_{s^{'}-1}^{'}, l_{s^{'}-1}^{'}, m_{s^{'}}^{'}, 1), \qquad (6)$$

де (5) відповідає рядку (3), а (6) – рядку (4).

З побудови числового набору (5) випливає, що $l_s > 1$, а з побудови числового набору (6) слідує рівність $l_{s^{'}}^{'} = 1$.

Наступні дві леми встановлюють зв'язок між елементами числових наборів (5) і (6).

Лема 1.2 *Нехай* $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_{s-1}, l_{s-1}, m_s, l_s)$ *– числовий набір вигляду (5) для перестановки* $\pi \in \Pi_n$*. Тоді числовий набір вигляду (6) для цієї ж перестановки наступний:*

1) $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_{s-1}, l_{s-1}, m_s + 1, 1)$, якщо $l_s = 2$;

2) $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_{s-1}, l_{s-1}, m_s, l_s - 2, 1, 1)$, якщо $l_s > 2$.

Доведення леми 1.2. Побудуємо числовий набір (6) за відомим числовим набором (5).

Розглянемо спочатку випадок, коли $s > 1$. Оскільки числові набори (5) і (6) побудовані для однієї й тієї ж перестановки, то довжини блоків у відповідних їм рядках (3) і (4) з номерами від 1 до $s-1$ однакові. Звідси випливає, що $m_i^{'} = m_i$, $l_i^{'} = l_i$, де $1 \le i \le s-1$.

Якщо $l_s = 2$, то має місце нерівність $r_{n-2} < r_{n-1}$. Тоді, враховуючи рівність $r_n = n$, при побудові числового набору (6) мають місце нерівності $r_{n-2} < r_{n-1}$, $r_{n-1} \le r_{n-1}$, $r_n > r_{n-1}$, тобто побудований за відомим числовим набором (5), числовий набір (6) можна записати у вигляді

$$(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_{s-1}, l_{s-1}, m_s + 1, 1).$$

З останнього, зокрема, випливає рівність $s^{'} = s$.

Якщо ж $l_s > 2$, то має місце нерівність $r_{n-2} > r_{n-1}$. Враховуючи рівність $r_n = n$, знаходимо, що при побудові числового набору (6) мають місце нерівності $r_{n-2} > r_{n-1}$,

$r_{n-1} \le r_{n-1}$, $r_n > r_{n-1}$, тобто побудований за відомим числовим набором (5), числовий набір (6) можна записати у вигляді

$$(m_1, l_1, m_2, l_2, .., m_{s-1}, l_{s-1}, m_s, l_s - 2, 1, 1).$$

З останнього, зокрема, випливає рівність $s^{'} = s + 1$.

Розглянемо тепер випадок, коли $s = 1$. Якщо $l_1 = 2$, то має місце нерівність $r_{n-2} < r_{n-1}$. Тоді виконуються ті самі співвідношення між r_{n-2}, r_{n-1} та r_n, що й для випадку $s > 1$, отже, побудований за відомим числовим набором (5), числовий набір (6) можна записати у вигляді $(m_1 + 1, 1)$. З останнього, зокрема, випливає, що виконується рівність $s^{'} = 1$.

Якщо ж $l_1 > 2$, то має місце нерівність $r_{n-2} \ge r_{n-1}$. Тоді виконуються ті самі співвідношення між r_{n-2}, r_{n-1} та r_n, що й для випадку $s > 1$, отже, побудований за відомим числовим набором (5), числовий набір (6) можна записати у вигляді $(m_1, l_1 - 2, 1, 1)$. З останнього, зокрема, випливає рівність $s^{'} = 2$.

Лему 1.2 доведено.

Має місце аналогічне лемі 1.2 твердження стосовно числового набору (6).

Лема 1.3 *Нехай* $(m_1^{'}, l_1^{'}, m_2^{'}, l_2^{'}, ..., m_{s^{'}-1}^{'}, l_{s^{'}-1}^{'}, m_{s^{'}}^{'}, 1)$ *– числовий набір вигляду (6) для перестановки* $\pi \in \Pi_n$. *Тоді числовий набір вигляду (5) для цієї ж перестановки наступний:*

1) $(m_1^{'}, l_1^{'}, m_2^{'}, l_2^{'}, ..., m_{s^{'}-1}^{'}, l_{s^{'}-1}^{'} + 2)$, якщо $m_{s^{'}}^{'} = 1$;

2) $(m_1^{'}, l_1^{'}, m_2^{'}, l_2^{'}, ..., m_{s^{'}-1}^{'}, l_{s^{'}-1}^{'}, m_{s^{'}}^{'} - 1, 2)$, якщо $m_{s^{'}}^{'} > 1$.

Доведення леми 1.3. Побудуємо числовий набір (5) за відомим числовим набором (6).

Розглянемо спочатку випадок, коли $s > 1$. Оскільки числові набори (5) і (6) побудовані для однієї й тієї ж перестановки, то довжини блоків у відповідних їм рядках (3) і (4) з номерами від 1 до $s - 2$ однакові. Звідси випливає, що $m_i^{'} = m_i$,

$l_i^{'} = l_i$, де $1 \le i \le s-2$.

Якщо $m_{s'}^{'} = 1$, то має місце нерівність $r_{n-2} > r_{n-1}$. Тоді, враховуючи рівність $r_n = n$, при побудові числового набору (5) мають місце нерівності $r_{n-2} > r_{n-1}$, $r_{n-1} \ge r_{n-1}$, $r_n > r_{n-1}$, тобто побудований за відомим числовим набором (6), числовий набір (5) можна записати у вигляді

$$(m_1^{'}, l_1^{'}, m_2^{'}, l_2^{'}, \ldots, m_{s'-1}^{'}, l_{s'-1}^{'} + 2).$$

З останнього, зокрема, випливає рівність $s = s^{'} - 1$.

Якщо ж $m_{s'}^{'} > 1$, то має місце нерівність $r_{n-2} < r_{n-1}$. Враховуючи рівність $r_n = n$, знаходимо, що при побудові числового набору (5) мають місце нерівності $r_{n-2} < r_{n-1}$, $r_{n-1} \ge r_{n-1}$, $r_n > r_{n-1}$, тобто побудований за відомим числовим набором (6), числовий набір (5) можна записати у вигляді

$$(m_1^{'}, l_1^{'}, m_2^{'}, l_2^{'}, \ldots, m_{s'-1}^{'}, l_{s'-1}^{'}, m_{s'}^{'} - 1, 2).$$

З останнього, зокрема, випливає рівність $s = s^{'}$.

Розглянемо тепер випадок, коли $s = 1$. Якщо $m_{s'}^{'} = 1$, то числовий набір (6) має вигляд (1, 1) і відповідного йому числового набору вигляду (5) для циклу унімодального відображення не існує, що детально пояснено у прикладі 1.1.

Якщо ж $m_{s'}^{'} > 1$, то має місце нерівність $r_{n-2} < r_{n-1}$. Тоді виконуються ті самі співвідношення між r_{n-2}, r_{n-1} та r_n, що й для випадку $s > 1$, отже, побудований за відомим числовим набором (6), числовий набір (5) можна записати у вигляді $(m_{s'}^{'} - 1, 2)$. З останнього, зокрема, випливає рівність $s = 1$.

Лему 1.3 доведено.

Означення 1.7 *Скінченна послідовність символів*

$$B_n = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, \beta_n)$$

називається періодичною, якщо існує таке натуральне число s, що її можна записати у вигляді

$$B_n = (\underbrace{B_s, B_s, \ldots B_s, B_s}_{p}), \tag{7}$$

де $B_s = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{s-1}, \beta_s)$, $n = ps$.

Означення 1.8 *Якщо числовий набір (5), що побудований за опуклою циклічною перестановкою* π*, не є періодичним, то (5) називається м-моделлю перестановки* π*. Аналогічно, якщо числовий набір (6), що побудований за опуклою циклічною перестановкою* π*, не є періодичним, то (6) називається р-моделлю перестановки* π*.*

Умова неперіодичності в означенні 1.8 є суттєвою. Для того, щоб це пояснити, розглянемо декілька прикладів. Почнемо з найпростішого.

Приклад 1.1 *Нехай* c*,* $\alpha_i \in I$*, де* $1 \le i \le 4$*,* $i \in \mathbb{N}$*, – довільні фіксовані числа для яких виконуються нерівності*

$$0 < \alpha_1 < c < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < 1.$$

Побудуємо кусково-лінійне неперервне відображення $g_1 \in C^0(I, I)$, що є лінійним на кожному з інтервалів, кінцями яких є сусідні точки, і дія якого на фіксованих точках інтервалу I здійснювалася за правилом:

$$g_1|_{\{c, \alpha_i, 1 \le i \le 4\}} = \begin{pmatrix} c & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Так побудоване відображення g_1 має два цикли періоду 2 однакового типу: $A_1 = \{\alpha_1, \alpha_4\}$ і $A_2 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$. Цикли вигляду A_2 властиві монотонним відображенням і не обов'язково реалізуються для унімодального відображення, зокрема, для тент-відображення (1), бо точки циклу розташовані на інтервалі монотонності відображення g_1. Крім того, друга ітерація цього відображення g_1^2 має інтервал нерухомих точок $[\alpha_2; \alpha_3]$, тоді як у тент-відображення немає інтервалів нерухомих чи періодичних точок.

Приклад 1.2 *Нехай* c, $\beta_i \in I$, *де* $1 \le i \le 8$, $i \in \mathrm{N}$, *– довільні числа для яких виконуються нерівності*

$$0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < c < \beta_4 < \beta_5 < \beta_6 < \beta_7 < \beta_8 < 1.$$

Побудуємо кусково-лінійне Λ-відображення $g_2 \in C^0(I, I)$, що є лінійним на кожному з інтервалів, кінцями яких є сусідні точки, дія якого на фіксованих точках інтервалу I здійснювалася за правилом:

$$g_2 |_{\{c,\beta_i,1\le i\le 8\}} == ({}_1\beta_2\beta_3 c\beta_4\beta_5\beta_6\beta_7\beta_8\beta_5\beta_6\beta_7 1\beta_8\beta_4\beta_3\beta_2\beta_1).$$

Так побудоване відображення g_2 має два цикли періоду 4 однакового типу з циклічним зображенням $(1,3,2,4)$: $B_1 = \{\beta_1, \beta_5, \beta_4, \beta_8\}$ і $B_2 = \{\beta_2, \beta_6, \beta_3, \beta_7\}$.

м-модель типу циклу для циклу B_1 має вигляд $(1,3)$.

Числовий набір $(1,1,1,1)$, який побудовано з використанням правила “менше або дорівнює”, не є р-моделлю жодного з циклів B_1 чи B_2, у зв’язку з властивістю його періодичності.

Числовий набір $(1,1,1,1)$ відповідає за розташування точок циклу B_2 відносно точки c. Циклу такого вигляду немає у тент-відображення, бо четверта ітерація цього відображення g_2^4 має інтервали нерухомих точок $[\beta_2; \beta_3]$ і $[\beta_6; \beta_7]$.

Числовий набір $(1,1,1,1)$ не є р-моделлю типу циклу з міркувань символьної динаміки. Дійсно, в символьній динаміці елементи траєкторії точки x кодуються наступним чином: точці $g_2^i(x)$ ставиться у відповідність 0, якщо $g_2^i(x) \in [0; c]$, і 1, якщо $g_2^i(x) \in [c; 1]$. Тому точці β_2 циклу B_2 відповідає символьна послідовність $(0101\ldots01\ldots)$, в той же час як ця символьна послідовність відповідає періодичній точці періоду 2, що знаходиться на інтервалі $(\beta_2; \beta_3)$.

Приклад 1.3 *У попередньому прикладі опукла вгору циклічна перестановка*

$$(2343421)$$

мала м-модель, але не мала р-моделі. Навпаки, опукла вгору циклічна перестановка

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&8&7&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

з циклічним зображенням $(1,5,4,7,2,6,3,8)$ не має м-моделі і має р-модель: $(1,3,1,1,1,1)$.

Приклад 1.4 *Опукла вгору циклічна перестановка*

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

одночасно має і м-модель – $(1,2)$, і р-модель – $(2,1)$.

Приклади 1.2–1.4, зокрема, демонструють, що опукла вгору циклічна перестановка може мати або тільки м-модель, або тільки р-модель, або одночасно м-модель та р-модель.

2.2 Існування моделі опуклої циклічної перестановки

Щоб довести, що перестановка $\pi \in \Pi_n$ має хоча б одну модель, достатньо, використовуючи леми 1.2 і 1.3 про зв'язок між числовими наборами (5) і (6) для перестановки π, показати наступне:

1) якщо числовий набір (5) є періодичною послідовністю в розумінні означення 1.7, то числовий набір (6) не є періодичною послідовністю;

2) якщо числовий набір (6) є періодичною послідовністю, то числовий набір (5) не є періодичною послідовністю.

Ці два твердження описують властивості специфічних періодичних послідовностей і тому їх можна розглядати окремо від властивостей опуклих перестановок, а саме: як комбінаторні властивості періодичних послідовностей.

Доповнимо поняття періодичної послідовності (означення 1.7) поняттям періоду цієї послідовності.

Означення 2.1 *Послідовність чисел*

$$B_n = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}, \beta_n)$$

називається періодичною, якщо виконуються наступні умови:

1) існує таке число $s > 1$, де $s \in \mathrm{N}$ – дільник числа n і $n = ps$, що для довільних чисел $1 \le i \le s$, $1 \le k \le p-1$ має місце рівність $\beta_{sk+i} = \beta_i$;

2) для довільного числа $s_1 < s$, де $s_1 \in \mathrm{N}$, існують такі числа i_0, k_0, де $1 \le i_0 \le s_1$, $1 \le k_0 \le p_1 - 1$, що виконується нерівність $\beta_{s_1 k_0 + i_0} \ne \beta_{i_0}$.

Число s називається періодом послідовності B_n.

З означення 2.1, зокрема, випливає, що послідовність B_n є неперіодичною, якщо для довільного числа s' – дільника числа n існують такі числа $1 \le i_0 \le s'$ і $1 \le j_0 \le p' - 1$, де $n = s'p'$, що виконується нерівність $\beta_{s' j_0 + i_0} \ne \beta_{i_0}$.

Мають місце наступні леми.

Лема 2.1 *Якщо послідовність*

$$B_n = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-2}, \beta_{n-1}, 2)$$

є періодичною, то послідовність

$$B_n' = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-2}, \beta_{n-1} + 1, 1)$$

не є періодичною.

Доведення леми 2.1. Для довільного дільника s' числа n доведемо, що числова послідовність B_n' не є періодичною з періодом s'.

Оскільки послідовність B_n є періодичною, то існує такий період цієї послідовності $s \in \mathrm{N}$, де $n = sp$, що її можна записати у вигляді (7), де $B_s = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{s-1}, 2)$.

Використовуючи зображення (7) послідовності B_n, її можна записати у вигляді таблиці

$$B_n = \begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_{s-1}, & 2, \\ \beta_{s+1}, & \beta_{s+2}, & \ldots, & \beta_{s+s-1}, & 2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{s(p-2)+1}, & \beta_{s(p-2)+2}, & \ldots, & \beta_{s(p-2)+s-1}, & 2, \\ \beta_{s(p-1)+1}, & \beta_{s(p-1)+2}, & \ldots, & \beta_{s(p-1)+s-1}, & 2 \end{pmatrix},$$

де s – кількість стовпців таблиці, а p – кількість рядків таблиці, причому елементи кожного стовпця таблиці рівні між собою, тобто виконуються рівності $\beta_{sk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le s$, $0 \le k \le p-1$.

Доведемо, що послідовність $B_n^{'} = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-2}, \beta_{n-1} + 1, 1)$ не є періодичною.

Скористаємося методом доведення від супротивного і припустимо, що $B_n^{'}$ – періодична послідовність.

Розглянемо два випадки залежно від того: число n просте чи складене.

Якщо число n просте, то для елементів періодичної послідовності B_n мають місце рівності $\beta_i = 2$, де $1 \le i \le n-1$, оскільки $\beta_n = 2$.

З іншого боку, для періодичної послідовності $B_n^{'}$, використовуючи рівність $\beta_n = 1$, отримуємо рівності $\beta_i = 1$, де $1 \le i \le n-2$, і $\beta_{n-1} = 0$.

Отже, одержали суперечність, тобто якщо n просте число, то послідовність $B_n^{'}$ неперіодична.

Розглянемо тепер випадок, коли число n складене. Нехай $s^{'}$ – довільний дільник числа n такий, що $s^{'} p^{'} = n$, є періодом періодичної числової послідовності $B_n^{'}$.

Розіб'ємо доведення на три частини залежно від того, яке з наступних співвідношень має місце:

1) $s^{'} < s$;

2) $s^{'} = s$;

3) $s^{'} > s$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $s^{'} < s$ і покажемо, що довільний дільник $s^{'}$ числа $n+2$, для якого виконується нерівність $s^{'} < s$, не є періодом числової послідовності $B_n^{'}$.

Позначимо $s^{'} = q$ – довільний дільник числа n, для якого виконується нерівність $s^{'} < s$, і q є періодом періодичної послідовності $B_n^{'}$. Тоді число s можна записати у вигляді $s = qm + l$, де $1 \le l \le q$, $0 \le m \le p^{'} - 1$.

Розглянемо два випадки залежно від значення числа l, а саме випадок $1 \le l < q$ та $l = q$.

Нехай спочатку виконується нерівність $1 \le l < q$. Тоді оскільки послідовність B_n періодична з періодом s, то має місце, зокрема, рівність $\beta_{s(p-1)+s-q} = \beta_{s(p-2)+s-q}$. З іншого боку, якщо $s^{'} = q$ – період послідовності $B_n^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le q$, $0 \le k \le p^{'} - 1$, окрім пари значень $k = p^{'} - 1$ та $i = q - 1$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p^{'}-1)+q-1} + 1 = \beta_{q-1}$.

Оскільки виконуються рівності $s = qm + l$, $qp^{'} = n$, то отримуємо, що рівність $\beta_{s(p-1)+s-q} = \beta_{s(p-2)+s-q}$ еквівалентна наступній рівності $\beta_{q(p^{'}-1)} = \beta_{q(p^{'}-m-1)-l}$.

Але згідно з властивістю періодичності $B_n^{'}$ виконуються рівності $\beta_{q(p^{'}-1)} = 1$, $\beta_{q(p^{'}-m-1)-l} = 2$. Отже, маємо суперечність, тобто послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, де $s^{'} < s$, $s = s^{'}m + l$, $1 \le l < s^{'}$.

Нехай $l = q$. Якщо $s^{'} = q$ – період послідовності $B_n^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le q$, $0 \le k \le p^{'} - 1$, окрім пари значень $k = p^{'} - 1$ та $i = q - 1$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p^{'}-1)+q-1} + 1 = \beta_{q-1}$. Зокрема, мають місце наступні співвідношення $\beta_{qp^{'}} = 1$, $\beta_{q(p^{'}-m)} = 2$.

Але згідно з властивістю періодичності $B_n^{'}$ виконується рівність $\beta_{qp^{'}} = \beta_{q(p^{'}-m)}$. Отже, одержали суперечність, тобто послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, де $s^{'} < s$, $s = s^{'}(m+1)$.

Використовуючи попередні викладки, маємо, що послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, для якого виконується нерівність $s^{'} < s$.

Розглянемо тепер випадок, коли $s^{'} = s$. Тоді послідовність $B_n^{'}$ можна записати у вигляді таблиці:

$$B_n^{'}=\begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2, & \dots, & \beta_{s-1}, & 2, \\ \beta_{s+1}, & \beta_{s+2}, & \dots, & \beta_{s+s-1}, & 2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{s(p-2)+1}, & \beta_{s(p-2)+2}, & \dots, & \beta_{s(p-2)+s-1}, & 2, \\ \beta_{s(p-1)+1}, & \beta_{s(p-1)+2}, & \dots, & \beta_{s(p-1)+s-1}+1, & 1 \end{pmatrix},$$

де $s=s^{'}$ – кількість стовпців таблиці, а $p=p^{'}$ – кількість рядків таблиці.

Оскільки послідовність $B_n^{'}$ періодична з періодом $s^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{s^{'}k+i}=\beta_i$, де $1\le i\le s^{'}$, $0\le k\le p^{'}-1$, окрім пари значень $k=p^{'}-1$ та $i=s^{'}k-1$, для яких має місце рівність $\beta_{s^{'}k(p^{'}-1)+s^{'}k-1}+1=\beta_{s^{'}k-1}$. Зокрема, виконуються співвідношення $\beta_{s^{'}p^{'}}=1$, $\beta_{s^{'}(p^{'}-1)}=2$.

Таким чином, маємо суперечність, тобто послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}=s$.

Розглянемо нарешті останній випадок, коли $s^{'}>s$. Аналогічно попереднім міркуванням доведемо, що довільний дільник $s^{'}$ числа n, для якого виконується нерівність $s^{'}>s$, не є періодом числової послідовності $B_n^{'}$.

Дійсно, припустимо супротивне, тобто нехай $s^{'}=q$ – довільний дільник числа n, для якого виконується нерівність $q>s$, і q є періодом періодичної послідовності $B_n^{'}$. Тоді число q можна записати у вигляді $q=sm+l$, де $1\le l\le s$, $0\le m\le p-1$. Розглянемо два випадки залежно від значення числа l, а саме: випадок $1\le l<s$ та $l=s$.

Нехай спочатку виконується нерівність $1\le l<s$. Тоді оскільки послідовність B_n періодична з періодом s, то має місце, зокрема, рівність $\beta_{s(p-1)+s-q}=\beta_{s(p-2)+s-q}$. З іншого боку, якщо $s^{'}=q$ – період послідовності $B_n^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i}=\beta_i$, де $1\le i\le q$, $0\le k\le p^{'}-1$, окрім пари значень $k=p^{'}-1$ та $i=q-1$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p^{'}-1)+q-1}+1=\beta_{q-1}$. Оскільки виконуються рівності $q=sm+l$, $qp^{'}=n$, то отримуємо, що рівність $\beta_{s(p-1)+s-q}=\beta_{s(p-2)+s-q}$ еквівалентна такій

$\beta_{q(p^{'}-1)} = \beta_{q(p^{'}-1)-s}$.

Але згідно з властивістю періодичності $B_n^{'}$ виконуються рівності $\beta_{q(p^{'}-1)} = 1$, $\beta_{q(p^{'}-1)-s} = 2$. Отже, маємо суперечність, тобто послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, де $s^{'} > s$, $s^{'} = sm + l$, $1 \le l < s$.

Нехай тепер $l = s$. Якщо $s^{'} = q$ – період послідовності $B_n^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le q$, $0 \le k \le p^{'} - 1$, окрім пари значень $k = p^{'} - 1$ та $i = q - 1$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p^{'}-1)+q-1} + 1 = \beta_{q-1}$. Зокрема, мають місце наступні співвідношення $\beta_{qp^{'}} = 1$, $\beta_{q(p^{'}-1)} = 2$.

Але згідно з властивістю періодичності $B_n^{'}$ виконується рівність $\beta_{qp^{'}} == \beta_{q(p^{'}-1)}$. Отже, маємо суперечність, тобто послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, де $s^{'} > s$, $s^{'} = s(m+1)$.

Таким чином, послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з довільним періодом $s^{'}$, для якого виконується нерівність $s^{'} > s$.

Лему 2.1 доведено.

Лема 2.2 *Якщо послідовність*

$$B_n = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-2}, \beta_{n-1}, \beta_n)$$

де $\beta_n > 2$, є періодичною, то послідовність

$$B_{n+2}^{'} = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-2}, \beta_{n-1}, \beta_n - 2, 1, 1)$$

не є періодичною.

Доведення леми 2.2. Для довільного дільника $s^{'}$ числа $n+2$ доведемо, що числова послідовність $B_{n+2}^{'}$ не є періодичною з періодом $s^{'}$.

Оскільки послідовність B_n періодична, то існує такий період цієї послідовності $s \in \mathrm{N}$, де $n = ps$, що її можна записати у вигляді (7), де $B_s = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{s-1}, \beta_s)$, $\beta_s > 2$.

Використовуючи зображення (7) послідовності B_n, її можна записати у вигляді таблиці

$$B_n = \begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2, & \dots, & \beta_{s-1}, & \beta_s, \\ \beta_{s+1}, & \beta_{s+2}, & \dots, & \beta_{s+s-1}, & \beta_s, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{s(p-2)+1}, & \beta_{s(p-2)+2}, & \dots, & \beta_{s(p-2)+s-1}, & \beta_s, \\ \beta_{s(p-1)+1}, & \beta_{s(p-1)+2}, & \dots, & \beta_{s(p-1)+s-1}, & \beta_s \end{pmatrix},$$

де s – кількість стовпців таблиці, p – кількість рядків таблиці, а $\beta_s > 2$, причому елементи кожного стовпця таблиці рівні між собою, тобто виконуються рівності $\beta_{sk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le s$, $0 \le k \le p-1$.

Покажемо, що послідовність $B'_{n+2} = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-2}, \beta_{n-1}, \beta_n - 2, 1, 1)$ не є періодичною. Для цього скористаємося методом доведення від супротивного, припустивши, що B'_{n+2} – періодична послідовність.

Розглянемо два випадки, залежно від того: число $n+2$ просте чи складене.

Якщо число $n+2$ просте, то для елементів періодичної послідовності B'_{n+2} мають місце рівності $\beta_i = 1$, де $1 \le i \le n-1$, і $\beta_n = 3$, оскільки $\beta_{n+1} = \beta_{n+2} = 1$. З іншого боку, для періодичної послідовності B_n, використовуючи рівність $\beta_n = 3$, отримаємо рівності $\beta_{sk+s} = 3$, де $0 \le k \le p-1$. Отже, маємо суперечність, тобто якщо $n+2$ просте число, то послідовність B'_{n+2} неперіодична.

Розглянемо тепер випадок, коли число $n+2$ складене. Нехай s' – довільний дільник числа $n+2$, такий, що $s'p' = n+2$, є періодом періодичної числової послідовності B'_{n+2}. Розіб'ємо доведення на дві частини, залежно від того, яке з наступних співвідношень має місце:

1) $s' \ne s$;

2) $s' = s$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $s' \ne s$ і покажемо, що довільний дільник s' числа $n+2$, для якого виконується нерівність $s' \ne s$, не є періодом числової послідовності B'_{n+2}.

Позначимо $s' = q$ – довільний дільник числа $n+2$, для якого $s' \ne s$, і q є періодом періодичної послідовності B'_{n+2}. Оскільки послідовність B_n періодична з періодом s, то має місце, зокрема, рівність $\beta_{s(p-1)+s-q} = \beta_{s(p-2)+s-q}$. З іншого боку, якщо $s^{'} = q$ – період послідовності $B^{'}_{n+2}$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le q$, $0 \le k \le p^{'} - 1$, окрім пари значень $k = p^{'} - 1$ та $i = q-2$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p^{'}-1)+q-2} - 2 = \beta_{q-2}$.

Оскільки виконуються рівності $sp = n$, $qp^{'} = n+2$, то отримуємо, що рівність $\beta_{s(p-1)+s-q} = \beta_{s(p-2)+s-q}$ еквівалентна такій $\beta_{q(p^{'}-1)-2} = \beta_{q(p^{'}-1)-s-2}$. Але згідно з властивістю періодичності $B^{'}_n$ виконуються рівності

$$\beta_{q(p^{'}-1)-2} = \beta_{qp^{'}-2} = \beta_{n-2} + 2, \beta_{q(p^{'}-1)-s-2} = \beta_{qp^{'}-s-2} = \beta_{n-s-2} = \beta_{n-2}.$$

Отже, маємо суперечність, тобто послідовність $B^{'}_{n+2}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, для якого виконується нерівність $s^{'} \ne s$.

Розглянемо тепер випадок, коли $s^{'} = s$. З рівностей $sp = n$, $s^{'}p^{'} = n+2$, отримуємо, що $s^{'} = s = 2$. Тоді для послідовності $B^{'}_{n+2}$ мають місце рівності $\beta_i = 1$, де $1 \le i \le n-1$, і $\beta_n = 3$, оскільки $\beta_{n+1} = \beta_{n+2} = 1$. З іншого боку, для періодичної послідовності B_n, використовуючи рівність $\beta_n = 3$, отримуємо рівності $\beta_{sk+s} = 3$, де $0 \le k \le p-1$. Отже, знову маємо суперечність, тобто послідовність $B^{'}_n$ неперіодична з періодом $s^{'}$, для якого виконується рівність $s^{'} = s$.

Лему 2.2 доведено.

Лема 2.3 *Якщо послідовність*

$$B_n = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-2}, \beta_{n-1}, 1),$$

де $\beta_{n-1} > 1$, є періодичною, то послідовність

$$B^{'}_n = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-2}, \beta_{n-1} - 1, 2)$$

не є періодичною.

Доведення леми 2.3. Для довільного дільника $s^{'}$ числа n доведемо, що числова послідовність $B^{'}_n$ не є періодичною з періодом $s^{'}$.

Оскільки послідовність B_n є періодичною, то існує такий період цієї послідовності $s \in \mathrm{N}$, де $n = sp$, що її можна зобразити у вигляді (7), де $B_s = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{s-1}, 1)$.

Використовуючи зображення (7) послідовності B_n, її можна записати у вигляді таблиці

$$B_n = \begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2, & ..., & \beta_{s-1}, & 1, \\ \beta_{s+1}, & \beta_{s+2}, & ..., & \beta_{s+s-1}, & 1, \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \beta_{s(p-2)+1}, & \beta_{s(p-2)+2}, & ..., & \beta_{s(p-2)+s-1}, & 1, \\ \beta_{s(p-1)+1}, & \beta_{s(p-1)+2}, & ..., & \beta_{s(p-1)+s-1}, & 1 \end{pmatrix},$$

де s – кількість стовпців таблиці, а p – кількість рядків таблиці, причому елементи кожного стовпця таблиці рівні між собою, тобто виконуються рівності $\beta_{sk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le s$, $0 \le k \le p-1$.

Доведемо, що послідовність $B_n^{'} = (\beta_1, \beta_2, ... \beta_{n-2}, \beta_{n-1} - 1, 2)$ не є періодичною. Скористаємося методом доведення від супротивного і припустимо, що $B_n^{'}$ – періодична послідовність.

Розглянемо два випадки залежно від того: число n просте чи складене.

Якщо число n просте, то для елементів періодичної послідовності B_n мають місце рівності $\beta_i = 1$, де $1 \le i \le n-1$, оскільки $\beta_n = 1$.

З іншого боку, для періодичної послідовності $B_n^{'}$, використовуючи рівність $\beta_n = 2$, отримуємо рівності $\beta_i = 2$, де $1 \le i \le n-2$, і $\beta_{n-1} = 3$.

Отже, одержали суперечність, тобто якщо n просте число, то послідовність $B_n^{'}$ неперіодична.

Розглянемо тепер випадок, коли число n складене. Нехай $s^{'}$ – довільний дільник числа n такий, що $s^{'} p^{'} = n$, є періодом періодичної числової послідовності $B_n^{'}$.

Розіб’ємо доведення на три частини залежно від того, яке з наступних співвідношень має місце:

1) $s^{'} < s$;

2) $s^{'} = s$;

3) $s^{'} > s$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $s^{'} < s$ і покажемо, що довільний дільник $s^{'}$ числа $n+2$, для якого виконується нерівність $s^{'} < s$, не є періодом числової послідовності $B_n^{'}$.

Позначимо $s^{'} = q$ – довільний дільник числа n, для якого виконується нерівність $s^{'} < s$, і q є періодом періодичної послідовності $B_n^{'}$. Тоді число s можна записати у вигляді $s = qm + l$, де $1 \le l \le q$, $0 \le m \le p^{'} - 1$. Розглянемо два випадки залежно від значення числа l, а саме випадок $1 \le l < q$ та $l = q$.

Нехай спочатку виконується нерівність $1 \le l < q$. Тоді оскільки послідовність B_n періодична з періодом s, то має місце, зокрема, рівність $\beta_{s(p-1)+s-q} = \beta_{s(p-2)+s-q}$. З іншого боку, якщо $s^{'} = q$ – період послідовності $B_n^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le q$, $0 \le k \le p^{'} - 1$, окрім пари значень $k = p^{'} - 1$ та $i = q - 1$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p^{'}-1)+q-1} - 1 = \beta_{q-1}$.

Оскільки виконуються рівності $s = qm + l$, $qp^{'} = n$, то отримуємо, що рівність $\beta_{s(p-1)+s-q} = \beta_{s(p-2)+s-q}$ еквівалентна наступній рівності $\beta_{q(p^{'}-1)} = \beta_{q(p^{'}-m-1)-l}$.

Але згідно з властивістю періодичності $B_n^{'}$ виконуються рівності $\beta_{q(p^{'}-1)} = 2$, $\beta_{q(p^{'}-m-1)-l} = 1$. Отже, маємо суперечність, тобто послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, де $s^{'} < s$, $s = s^{'}m + l$, $1 \le l < s^{'}$.

Нехай $l = q$. Якщо $s^{'} = q$ – період послідовності $B_n^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le q$, $0 \le k \le p^{'} - 1$, окрім пари значень $k = p^{'} - 1$ та $i = q - 1$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p^{'}-1)+q-1} - 1 = \beta_{q-1}$. Зокрема, мають місце наступні співвідношення $\beta_{qp^{'}} = 2$, $\beta_{q(p^{'}-m)} = 1$.

Але згідно з властивістю періодичності $B_n^{'}$ виконується рівність $\beta_{qp^{'}} = \beta_{q(p^{'}-m)}$. Отже, одержали суперечність, тобто послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, де $s^{'} < s$, $s = s^{'}(m+1)$.

Використовуючи міркування, що викладені вище, маємо, що послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, для якого виконується нерівність $s^{'} < s$.

Розглянемо тепер випадок, коли $s^{'}=s$. Тоді послідовність $B_n^{'}$ можна зобразити у вигляді таблиці:

$$B_n^{'}=\begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_{s-1}, & 1, \\ \beta_{s+1}, & \beta_{s+2}, & \ldots, & \beta_{s+s-1}, & 1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{s(p-2)+1}, & \beta_{s(p-2)+2}, & \ldots, & \beta_{s(p-2)+s-1}, & 1, \\ \beta_{s(p-1)+1}, & \beta_{s(p-1)+2}, & \ldots, & \beta_{s(p-1)+s-1}-1, & 2 \end{pmatrix},$$

де $s=s^{'}$ – кількість стовпців таблиці, а $p=p^{'}$ – кількість рядків таблиці.

Оскільки послідовність $B_n^{'}$ періодична з періодом $s^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{s^{'}k+i}=\beta_i$, де $1\le i\le s^{'}$, $0\le k\le p^{'}-1$, окрім пари значень $k=p^{'}-1$ та $i=s^{'}k-1$, для яких має місце рівність $\beta_{s^{'}(p^{'}-1)+s^{'}k-1}-1=\beta_{s^{'}k-1}$. Зокрема, виконуються співвідношення $\beta_{s^{'}p^{'}}=2$, $\beta_{s^{'}(p^{'}-1)}=1$.

Таким чином, маємо суперечність, тобто послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}=s$.

Розглянемо нарешті останній випадок, коли $s^{'}>s$. Аналогічно попереднім міркуванням доведемо, що довільний дільник $s^{'}$ числа n, для якого виконується нерівність $s^{'}>s$, не є періодом числової послідовності $B_n^{'}$.

Дійсно, припустимо супротивне, тобто нехай $s^{'}=q$ – довільний дільник числа n, для якого виконується нерівність $q>s$, і q є періодом періодичної послідовності $B_n^{'}$. Тоді число q можна записати у вигляді $q=sm+l$, де $1\le l\le s$, $0\le m\le p-1$. Розглянемо два випадки залежно від значення числа l, а саме: випадок $1\le l<s$ та $l=s$.

Нехай спочатку виконується нерівність $1\le l<s$. Тоді оскільки послідовність B_n періодична з періодом s, то має місце, зокрема, рівність $\beta_{s(p-1)+s-q}=\beta_{s(p-2)+s-q}$. З іншого боку, якщо $s^{'}=q$ – період послідовності $B_n^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i}=\beta_i$, де $1\le i\le q$, $0\le k\le p^{'}-1$, окрім пари значень $k=p^{'}-1$ та $i=q-1$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p^{'}-1)+q-1}-1=\beta_{q-1}$. Оскільки виконуються рівності $q=sm+l$,

$qp^{'}=n$, то отримуємо, що рівність $\beta_{s(p-1)+s-q}=\beta_{s(p-2)+s-q}$ еквівалентна такій $\beta_{q(p^{'}-1)}=\beta_{q(p^{'}-1)-s}$.

Але згідно з властивістю періодичності $B_n^{'}$ виконуються рівності $\beta_{q(p^{'}-1)}=2$, $\beta_{q(p^{'}-1)-s}=1$.

Отже, маємо суперечність, тобто послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, де $s^{'}>s$, $s^{'}=sm+l$, $1\le l<s$.

Нехай тепер $l=s$. Якщо $s^{'}=q$ – період послідовності $B_n^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i}=\beta_i$, де $1\le i\le q$, $0\le k\le p^{'}-1$, окрім пари значень $k=p^{'}-1$ та $i=q-1$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p^{'}-1)+q-1}-1=\beta_{q-1}$. Зокрема, мають місце наступні співвідношення $\beta_{qp^{'}}=2$, $\beta_{q(p^{'}-1)}=1$.

Але згідно з властивістю періодичності $B_n^{'}$ виконується рівність $\beta_{qp^{'}}=\beta_{q(p^{'}-1)}$. Отже, маємо суперечність, тобто послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, де $s^{'}>s$, $s^{'}=s(m+1)$.

Таким чином, послідовність $B_n^{'}$ неперіодична з довільним періодом $s^{'}$, для якого виконується нерівність $s^{'}>s$.

Лему 2.3 доведено.

Лема 2.4 *Якщо послідовність*

$$B_n=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{n-3},\beta_{n-2},1,1),$$

де $n>2$, є періодичною, то послідовність

$$B_{n-2}^{'}=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{n-3},\beta_{n-2}+2)$$

не є періодичною.

Доведення леми 2.4. Для довільного дільника $s^{'}$ числа $n-2$ доведемо, що числова послідовність $B_{n-2}^{'}$ не є періодичною з періодом $s^{'}$.

Оскільки послідовність B_n періодична, то існує такий період цієї послідовності $s\in\mathrm{N}$, де $n=ps$, що її можна записати у вигляді (7), де $B_s=(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_{s-2},1,1)$, $s>2$.

Використовуючи зображення (7) послідовності B_n, її можна зобразити у вигляді таблиці

$$B_n = \begin{pmatrix} \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_{s-2}, & 1, & 1, \\ \beta_{s+1}, & \beta_{s+2}, & \ldots, & \beta_{s+s-1}, & 1, & 1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{s(p-2)+1}, & \beta_{s(p-2)+2}, & \ldots, & \beta_{s(p-2)+s-1}, & 1, & 1, \\ \beta_{s(p-1)+1}, & \beta_{s(p-1)+2}, & \ldots, & \beta_{s(p-1)+s-1}, & 1, & 1 \end{pmatrix},$$

де $s > 2$ – кількість стовпців таблиці, p – кількість рядків таблиці, причому елементи кожного стовпця таблиці рівні між собою, тобто виконуються рівності $\beta_{sk+i} = \beta_i$, де $1 \le i \le s$, $0 \le k \le p-1$.

Покажемо, що послідовність $B'_{n-2} = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2} + 2)$ не є періодичною. Для цього скористаємося методом доведення від супротивного, припустивши, що B'_{n-2} – періодична послідовність.

Розглянемо два випадки, залежно від того: число $n-2$ просте чи складене.

Якщо число $n-2$ просте, то для елементів періодичної послідовності B'_{n-2} мають місце рівності $\beta_1 = \beta_i$, де $1 \le i \le n-3$ і $\beta_{n-2} = \beta_1 - 2$. З іншого боку, для періодичної послідовності B_n, використовуючи рівності $\beta_{sk} = \beta_{sk-1} = 1$, де $0 \le k \le p-1$, отримаємо рівність $\beta_{n-2} = 1$. Отже, маємо суперечність, тобто якщо $n-2$ просте число, то послідовність B'_{n-2} неперіодична.

Розглянемо тепер випадок, коли число $n-2$ складене. Нехай s' – довільний дільник числа $n-2$, такий, що $s'p' = n-2$, є періодом періодичної числової послідовності B'_{n-2}. Розіб'ємо доведення на дві частини, залежно від того, яке з наступних співвідношень має місце:

1) $s' \ne s$;

2) $s' = s$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $s' \ne s$ і покажемо, що довільний дільник s' числа $n-2$, для якого виконується нерівність $s' \ne s$, не є періодом числової послідовності B'_{n-2}.

Позначимо $s^{'} = q$ – довільний дільник числа $n-2$, для якого $s^{'} \neq s$, і q є періодом періодичної послідовності $B_{n-2}^{'}$. Оскільки послідовність B_n періодична з періодом s, то має місце, зокрема, рівність $\beta_{s(p-1)+s-q-2} = \beta_{s(p-2)+s-q-2}$.

З іншого боку, якщо $s^{'} = q$ – період послідовності $B_{n-2}^{'}$, то виконуються рівності $\beta_{qk+i} = \beta_i$, де $1 \leq i \leq q$, $0 \leq k \leq p^{'} - 1$, окрім пари значень $k = p^{'} - 1$ та $i = q$, для яких має місце рівність $\beta_{q(p^{'}-1)+q} + 2 = \beta_q$.

Оскільки виконуються рівності $sp = n$, $qp^{'} = n-2$, то отримуємо, що рівність $\beta_{s(p-1)+s-q-2} = \beta_{s(p-2)+s-q-2}$ еквівалентна такій $\beta_{q(p^{'}-1)} = \beta_{q(p^{'}-1)-s}$. Але згідно з властивістю періодичності $B_n^{'}$ виконуються рівності

$$\beta_{q(p^{'}-1)} = \beta_{qp^{'}} = \beta_{n-2} + 2, \beta_{q(p^{'}-1)-s} = \beta_{qp^{'}-s} = \beta_{n-2-s} = \beta_{n-2}.$$

Отже, маємо суперечність, тобто послідовність $B_{n-2}^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, для якого виконується нерівність $s^{'} \neq s$.

Розглянемо тепер випадок, коли $s^{'} = s$. З рівностей $sp = n$, $s^{'}p^{'} = n-2$, отримуємо, що $s^{'} = s = 2$. Тоді для послідовності B_n мають місце рівності $\beta_i = 1$, де $1 \leq i \leq n$, оскільки $\beta_{n-1} = \beta_n = 1$. З іншого боку, для періодичної послідовності $B_{n-2}^{'}$, використовуючи рівність $\beta_{n-2} = 1$, отримуємо рівності $\beta_i = 3$, де $1 \leq i \leq n-3$. Отже, знову маємо суперечність, тобто послідовність $B_{n-2}^{'}$ неперіодична з періодом $s^{'}$, для якого виконується рівність $s^{'} = s$.

Лему 2.4 доведено.

З властивостей періодичних послідовностей, які описано в лемах 2.1 – 2.4, випливає наступна властивість опуклих вгору циклічних перестановок.

Твердження 2.1 *Числові набори (5) і (6) для опуклої вгору циклічної перестановки одночасно не є періодичними послідовностями.*

Доведення твердження 2.1. Припустимо, що числовий набір вигляду (5) є періодичною послідовністю. Використовуючи лему 1.2, розглянемо два випадки, залежно від значення елемента l_s.

Якщо $l_s = 2$, то числовий набір вигляду (6) записується наступним чином

$(m_1, l_1, m_2, l_2, \dots, m_{s-1}, l_{s-1}, m_s + 1, 1)$. Тоді за лемою 2.1 такий числовий набір вигляду (6) не є періодичним.

Якщо $l_s > 2$, то числовий набір вигляду (6) записується наступним чином $(m_1, l_1, m_2, l_2, \dots, m_{s-1}, l_{s-1}, m_s, l_s - 2, 1, 1)$. Тоді за лемою 2.2 такий числовий набір вигляду (6) не є періодичним.

Припустимо, що числовий набір вигляду (6) є періодичною послідовністю. Використовуючи лему 1.3, розглянемо два випадки, залежно від значення елемента $m'_{s'}$.

Якщо $m'_{s'} = 1$, то числовий набір вигляду (5) записується наступним чином $(m'_1, l'_1, m'_2, l'_2, \dots, m'_{s'-1}, l'_{s'-1} + 2)$. Тоді за лемою 2.4 такий числовий набір вигляду (5) не є періодичним.

Якщо $m'_{s'} > 1$, то числовий набір вигляду (5) записується наступним чином $(m'_1, l'_1, m'_2, l'_2, \dots, m'_{s'-1}, l'_{s'-1}, m'_{s'} - 1, 2)$. Тоді за лемою 2.3 такий числовий набір вигляду (5) не є періодичним.

Твердження 2.1 доведено.

3 Вага опуклої циклічної перестановки

У подальшому використовується поняття моделі і ваги опуклої циклічної перестановки.

Означення 3.1 *Вагою числового набору*

$$(m_1, l_1, m_2, l_2, \dots, m_s, l_s)$$

називається число

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{s} (-2)^{\sum_{j=i+1}^{s} l_j} 2^{\sum_{j=i+1}^{s} m_j} (1 - (-2)^{l_i})}{1 - (-2)^{\sum_{i=1}^{s} l_i} 2^{\sum_{i=1}^{s} m_i}}. \tag{8}$$

Формула (8) була отримана Федоренком В.В. у праці [28], яка присвячена дослідженню типів періодичних траєкторій відображення “тент”.

Наступна лема обґрунтовує необхідність неперіодичності числового набору в означенні 3.2 моделі опуклої циклічної перестановки.

Лема 3.1 *Ваги числових наборів*

$$B_k = (m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_k, l_k)$$

та

$$B_s = (\underbrace{B_k, B_k, \ldots B_k, B_k}_{p}),$$

де $s = kp$, рівні.

Доведення леми 3.1. З побудови числового набору B_s випливає, що для його елементів виконується наступна умова: для довільних чисел $1 \le i \le k$, $1 \le j \le p-1$ мають місце рівності $m_{jk+i} = m_i$, $l_{jk+i} = l_i$.

Згідно означення (8) вага числового B_s набору визначається за його елементами формулою

$$\sigma(B_s) = \frac{\sum_{i=1}^{s} (-2)^{\sum_{j=i+1}^{s} l_j} 2^{\sum_{j=i+1}^{s} m_j} (1-(-2)^{l_i})}{1-(-2)^{\sum_{i=1}^{s} l_i} 2^{\sum_{i=1}^{s} m_i}}.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{s} l_i = p\sum_{i=1}^{k} l_i$ і $\sum_{i=1}^{s} m_i = p\sum_{i=1}^{k} m_i$, то знаменник у формулі для $\sigma(B_s)$ можна записати таким чином:

$$1-(-2)^{\sum_{i=1}^{s} l_i} 2^{\sum_{i=1}^{s} m_i} = 1-\left((-2)^{\sum_{i=1}^{k} l_i} 2^{\sum_{i=1}^{k} m_i} \right)^p =$$

$$= \left(1-(-2)^{\sum_{i=1}^{k} l_i} 2^{\sum_{i=1}^{k} m_i} \right) \left(\sum_{i=1}^{p} \left((-2)^{\sum_{j=1}^{k} l_j} 2^{\sum_{j=1}^{k} m_j} \right)^{p-i} \right).$$

Аналогічно, скориставшись тепер тим, що $s = kp$ та виконуються рівності $m_{jk+i} = m_i$ і $l_{jk+i} = l_i$ при $1 \le i \le k$ та $1 \le j \le p-1$ розкладемо чисельник в формулі для $\sigma(B_s)$ на множники наступним чином:

$$\sum_{i=1}^{s}(-2)^{\sum_{j=i+1}^{s} l_j} 2^{\sum_{j=i+1}^{s} m_j}(1-(-2)^{l_i}) = ((-2)^{\sum_{j=1}^{k} l_j} 2^{\sum_{j=1}^{k} m_j})^{p-1} \times$$

$$\times((-2)^{\sum_{j=2}^{k} l_j} 2^{\sum_{j=2}^{k} m_j}(1-(-2)^{l_1}) + (-2)^{\sum_{j=3}^{k} l_j} 2^{\sum_{j=3}^{k} m_j}(1-(-2)^{l_2}) + \ldots +.$$

$$+.(-2)^{l_k} 2^{m_k}(1-(-2)^{l_{k-1}}) + (1-(-2)^{l_k})) + ((-2)^{\sum_{j=1}^{k} l_j} 2^{\sum_{j=1}^{k} m_j})^{p-2} \times$$

$$\times((-2)^{\sum_{j=2}^{k} l_j} 2^{\sum_{j=2}^{k} m_j}(1-(-2)^{l_1}) + \ldots + (1-(-2)^{l_k})) + \ldots +$$

$$+((-2)^{\sum_{j=2}^{k} l_j} 2^{\sum_{j=2}^{k} m_j}(1-(-2)^{l_1}) + \ldots + (-2)^{l_s} 2^{m_k}(1-(-2)^{l_{k-1}}) +.$$

$$+.(1-(-2)^{l_k})) = \left(\sum_{i=1}^{k}(-2)^{\sum_{j=i+1}^{k} l_j} 2^{\sum_{j=i+1}^{k} m_j}(1-(-2)^{l_i})\right) \times$$

$$\times(\sum_{i=1}^{p}\left((-2)^{\sum_{j=1}^{k} l_j} 2^{\sum_{j=1}^{k} m_j}\right)^{p-i}).$$

Скоротивши чисельник і знаменник дробу, з якого визначається $\sigma(B_s)$, на вираз $\sum_{i=1}^{p}\left((-2)^{\sum_{j=1}^{k} l_j} 2^{\sum_{j=1}^{k} m_j}\right)^{p-i}$, отримаємо, що має місце наступна рівність:

$$\sigma(B_s)=\sigma(B_k)=\frac{\sum_{i=1}^{k}(-2)^{\sum_{j=i+1}^{k} l_j}\, 2^{\sum_{j=i+1}^{k} m_j}\,(1-(-2)^{l_i}))}{1-(-2)^{\sum_{i=1}^{k} l_i}\, 2^{\sum_{i=1}^{k} m_i}}.$$

Лему 3.1 доведено.

В означенні 1.8 визначено поняття м-моделі та р-моделі опуклої циклічної перестановки. Оскільки м-модель і р-модель – це числові неперіодичні набори, то для них можна визначити поняття ваги моделі та поставити у відповідність опуклій циклічній перестановці тільки одну модель.

Означення 3.2 *Моделлю опуклої циклічної перестановки називається та модель з м-моделі або р-моделі, яка має більшу вагу. Відповідно, вага цієї моделі називається вагою перестановки.*

Вага опуклої циклічної перестановки π позначається σ_π.

Скористаємося отриманими властивостями опуклих вгору циклічних перестановок для дослідження циклів неперервних відображень інтервалу.

2.4 Інтерпретація поняття ваги опуклої циклічної перестановки з точки зору одновимірної динаміки

Геометричний зміст поняття ваги опуклої циклічної перестановки пояснює наступна лема.

Лема 4.1 *Нехай* $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s)$ *– модель деякої опуклої циклічної перестановки* π*. Тент-відображення має цикл типу* π*, мінімальна точка* α *якого визначається за рівністю:*

$$\alpha=\frac{2}{3}\frac{\sum_{i=1}^{s}\left((-2)^{\sum_{j=i+1}^{s} l_j}\, 2^{\sum_{j=i+1}^{s} m_j}\,(1-(-2)^{l_i})\right)}{1-(-2)^{\sum_{i=1}^{s} l_i}\, 2^{\sum_{i=1}^{s} m_i}}.$$

Доведення леми 4.1. Запишемо тент-відображення у наступному вигляді:

$$x\,\alpha \quad \begin{cases} f_1 = 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ f_2 = -2x + 2, & 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

Це відображення має наступні властивості:

1) $f_1([0;\frac{1}{2}]) = [0;1] = f_2([\frac{1}{2};1])$;

2) інтервал $[0;1]$ можна подати у вигляді об’єднання інтервалів наступного вигляду: $M_m = [\frac{1}{2^{m+1}};\frac{1}{2^m}]$, $m = 0,1,2,\ldots$, де $f_1^m(M_m) = [\frac{1}{2};1]$;

3) інтервал $[0;1]$ можна записати у вигляді об’єднання інтервалів наступного вигляду: $L_l, l = 0,1,2,\ldots$, де $L_l = [x_l; x_{l+2}]$ при парних значеннях l та $L_l = [x_{l+2}; x_l]$ при непарних значеннях l, де $x_l = \frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^l)$, і при цьому $f_2^l(L_l) = [0;\frac{1}{2}]$.

Тут за допомогою $f(M)$ позначено образ множини M при відображенні $x \to f(x)$.

З властивостей 1)–3) тент-відображення випливає, що для будь-якого набору натуральних чисел $(m_1^{'}, l_1^{'}, m_2^{'}, l_2^{'}, \ldots, m_{s^{'}}^{'}, l_{s^{'}}^{'})$ існує така точка $x^{'} \in [0;\frac{1}{2}]$, що її координату для $n^{'}$-ої ітерації тент-відображення, де $n^{'} = \sum_{i=1}^{s^{'}}(m_{i^{'}} + l_i^{'})$, можна записати наступним чином:

$$f_2^{l_{s^{'}}^{'}}(f_1^{m_{s^{'}}^{'}}(\ldots(f_2^{l_2^{'}}(f_1^{m_2^{'}}(f_2^{l_1^{'}}(f_1^{m_1^{'}}(x^{'})))))\ldots)) \tag{9}$$

Дійсно, розглянемо інтервал $M_{m_1^{'}}$. З властивостей 2), 3) отримаємо, що мають місце наступні рівності $f_1^{m_1^{'}}(M_{m_1^{'}}) = [\frac{1}{2};1] = \mathrm{Y}_{l=1}^{\infty} L_l$. Звідси, враховуючи лінійність

f_1, знаходимо, що існує єдиний замкнений підінтервал інтервалу $M_{m_1'}$, який позначимо $M_{m_1' l_1'}$, для якого виконується умова $f_1^{m_1'}(M_{m_1' l_1'}) = L_{l_1'}$.

З властивостей 2)–3) отримаємо, що виконуються наступні рівності

$$f_2^{l_1'} \circ f_1^{m_1'}(M_{m_1' l_1'}) = [0;\frac{1}{2}] = \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m.$$

Звідси випливає існування єдиного замкненого підінтервалу інтервалу $M_{m_1' l_1'}$, який позначимо $M_{m_1' l_1' m_2'}$, для якого виконується умова $f_2^{l_1'} \circ f_1^{m_1'}(M_{m_1' l_1' m_2'}) = M_{m_2'}$.

Повторюючи міркування для інтервалу $M_{m_1' l_1' m_2'}$ аналогічні тим, які проведено вище стосовно інтервалу $M_{m_1'}$, показуємо існування такого замкненого інтервалу, для кожної точки x' цього інтервалу має місце зображення у вигляді (9).

Перетворимо формулу (9), використовуючи аналітичні формули відображень f_1 і f_2. Очевидно, що для довільних m' і l' мають місце наступні рівності:

$$f_1^{m'}(x) = 2^{m'} x, \quad f_2^{l'}(x) = (-2)^{l'} x + \frac{2}{3}(1-(-2)^{l'}). \tag{10}$$

З (10) випливає, що (9) записується наступним чином:

$$f_2^{l_s'}(f_1^{m_s'}(\ldots(f_2^{l_2'}(f_1^{m_2'}(f_2^{l_1'}(f_1^{m_1'}(x')))))\ldots))=$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{s'}(-2)^{\sum_{j=i+1}^{s'} l_j'}\, 2^{\sum_{j=i+1}^{s'} m_j'}\,(1-(-2)^{l_i'}) + (-2)^{\sum_{i=1}^{s'} l_i'}\, 2^{\sum_{i=1}^{s'} m_i'}\, x'. \tag{11}$$

З (11) випливає, що точка x', значення якої визначається з наступної рівності

$$x' = \frac{2}{3}\,\frac{\sum_{i=1}^{s'}(-2)^{\sum_{j=i+1}^{s'} l'_j}\, 2^{\sum_{j=i+1}^{s'} m'_j}\,(1-(-2)^{l'_i})}{1-(-2)^{\sum_{i=1}^{s'} l'_i}\, 2^{\sum_{i=1}^{s'} m'_i}},$$

є періодичною точкою тент-відображення, причому єдиною точкою, що відповідає довільному числовому набору $(m'_1, l'_1, m'_2, l'_2, \ldots, m'_{s'}, l'_{s'})$, бо рівняння для її знаходження, складене на основі формули (11), є лінійним.

Період цієї точки є дільником числа n', а інші точки циклу, якому вона належить, містяться на інтервалах $M_{m'}$ і $L_{l'}$ з відповідними індексами, які визначаються елементами числового набору $(m'_1, l'_1, m'_2, l'_2, \ldots, m'_{s'}, l'_{s'})$.

Нехай $(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s)$ – модель опуклої циклічної перестановки π, а $n = \sum_{i=1}^{s}(m_i + l_i)$. Згідно з означенням 1.3 для перестановки $\pi = (2..i..n\ \ j_1 j_2 ... j_i ... j_n)$ виконуються нерівності $j_i < j_{i+1}$ при $1 \le i < \hat{i}$ та $j_i > j_{i+1}$ при $\hat{i} \le i < n$, при цьому $n > 2$, $2 \le \hat{i} \le n-1$ та $\pi(\hat{i}) = n$.

Не втрачаючи загальності, припустимо, що модель

$$(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s)$$

опуклої циклічної перестановки π є м-моделлю (доведення для випадку р -моделі проводиться аналогічно). Позначимо π_1 – обмеження відображення π на множину $\{1, 2, ..., \hat{i}-1\}$, а π_2 – обмеження відображення π на множину $\{\hat{i}, \hat{i}+1, ..., n\}$.

Якщо модель опуклої циклічної перестановки π є р-моделлю, то через π_1 позначимо обмеження перестановки π на множину $\{1, 2, ..., \hat{i}\}$, а через π_2 – обмеження перестановки π на множину $\{\hat{i}+1, \hat{i}+2, ..., n\}$.

З властивостей опуклої циклічної перестановки π випливає, що π_1 – монотонно зростаюче відображення, а π_2 – монотонно спадне відображення.

Використовуючи відображення π_1 і π_2 та означення м-моделі, циклічне зображення перестановки π можна записати у наступному вигляді:

$$\{\pi_1(1),\ldots,\pi_1^{m_1}(1),\pi_2(\pi_1^{m_1}(1)),\ldots,\pi_2^{l_1}(\pi_1^{m_1}(1)),\ldots,$$
$$\pi_2^{l_s}(\pi_1^{m_s}(..\pi_2^{l_1}(\pi_1^{m_1}(1))\ldots))\}$$

Вище доведено, що для будь-якого числового набору, а отже, і для числового набору $(m_1,l_1,m_2,l_2,\ldots,m_s,l_s)$, який є м-моделлю опуклої циклічної перестановки π, існує така періодична точка $\alpha\in[0;\frac{1}{2}]$ тент-відображення, що її значення визначається з наступної рівності

$$\alpha=\frac{2}{3}\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{s}\left((-2)^{\sum\limits_{j=i+1}^{s}l_j}\,2^{\sum\limits_{j=i+1}^{s}m_j}\,(1-(-2)^{l_i})\right)}{1-(-2)^{\sum\limits_{i=1}^{s}l_i}\,2^{\sum\limits_{i=1}^{s}m_i}},$$

а цикл, якому вона належить, є наступною множиною

$$\{f_1(\alpha),\ldots,f_1^{m_1}(\alpha),f_2(f_1^{m_1}(\alpha)),\ldots,f_2^{l_1}(f_1^{m_1}(\alpha)),\ldots,$$
$$f_2^{l_s}(f_1^{m_s}(\ldots f_2^{l_1}(f_1^{m_1}(\alpha))\ldots))\}, \qquad (12)$$

яку позначимо B.

Обмеження тент-відображення на цикл B – це опукла циклічна перестановка, що визначена на множині B. Позначимо цю опуклу циклічну перестановку π'. Оскільки з означення 3.2 моделі опуклої циклічної перестановки випливає, що м-модель перестановки π є неперіодичною послідовністю, то множина B складається з n різних елементів, тобто α є періодичною точкою періоду n.

Будь-який цикл тент-відображення періоду більшого, ніж 2, має точки як на інтервалі $[0;\frac{1}{2}]$, так і на інтервалі $[\frac{1}{2};1]$. Тому на всі елементи перестановки π', які менші за точку $\frac{1}{2}$, діє монотонно зростаюче відображення f_1, а на всі інші – монотонно спадне відображення f_2.

Отже, перестановка π' є опуклою вгору перестановкою, а послідовність з формули (12) є її циклічним зображенням.

Крім того, кожному елементу $\pi^i(1), i=1,2,...,n$, перестановки π можна взаємно однозначно поставити у відповідність елемент $(\pi')^i(\alpha)$ перестановки π'.

Звідси випливає, що α є найменшою точкою циклу B.

Лему 4.1 доведено.

Зауваження 4.1 *Варто відмітити, що не будь-який неперіодичний числовий набір може бути моделлю опуклої циклічної перестановки.*

Доведення теореми 2.1.2

Нагадаємо, що необхідно довести еквівалентність наступних тверджень:

1) $\pi \in \Sigma$;

2) π є типом деякого циклу тент-відображення;

3) π є типом деякого циклу Λ-відображення.

Очевидно, що тент-відображення є Λ-відображенням. Тому для доведення теореми 1.2 достатньо довести еквівалентність тверджень 1) і 3). Твердження 2) включено в формулювання теореми 1.2, бо тент-відображення детально вивчено в теорії динамічних систем.

Доведемо, що з твердження 1) теореми 1 випливає твердження 3). Нехай $\pi \in \Sigma$. Множина Σ складається з циклічних перестановок довжин 1 і 2 та всіх опуклих вгору циклічних перестановок.

Розглянемо неперервне Λ-відображення g. Використовуючи означення 1.6, отримаємо, що для Λ-відображення g виконуються наступні умови:

1) $g(0) = g(1) = 0$;

2) існує така точка a, де $0 < a < 1$, що $g(a) = 1$;

3) $g(x)$ монотонно не спадає на відрізку $[0;a]$ і монотонно не зростає на відрізку $[a;1]$.

Доведемо, що відображення g має цикл, типом якого є будь-яка перестановка $\pi \in \Sigma$.

Використовуючи умову 1) означення 1.6 отримаємо, що Λ-відображення g має нерухому точку 0, тобто цикл наступного типу (1).

З записаних вище умов 1) і 2) означення Λ-відображення випливає, що мають місце наступні рівності:

$$g([0;a]) = [0;1] = g([a;1]). \tag{13}$$

Оскільки відображення g є неперервним, то використовуючи рівності (13), отримаємо, що відображення g має циклу періоду 2, типом якого є наступна перестановка (21).

Доведемо, що відображення g має цикл, типом якого є довільна опукла циклічна перестановка.

Наступні викладки повторюють міркування при доведенні леми 4.1 з незначними змінами. Відмінність полягає лише в побудові аналогів інтервалів $M_m, m = 0,1,2,...,$ і $L_l, l = 0,1,2,...,$ з леми 4.1, у якій їх кінцеві точки були записані в аналітичному вигляді. Тому опишемо лише цю відмінність і не будемо деталізувати доведення далі.

Обмеження відображення g на інтервалі $[0;a]$ позначимо g_1, а обмеження відображення g на інтервалі $[a;1]$ позначимо g_2.

Оскільки $g_1(x)$ монотонно не спадає на відрізку $[0;a]$ і $g_1([0;a]) = [0;1]$, то існують такі точки $a_m, m = 0,1,2,...$ що $0 < a_{m+1} < a_m$ і $a_{m+1} = \min\{x \in [0;a] \mid g_1(x) = a_m\}, m = 0,1,2,...,$ де $a_0 = 1$. Границю монотонно спадної послідовності $(a_m, m = 0,1,2,...)$, позначимо a_∞. Оскільки відображення g_1 є неперервним, то ця точка є нерухомою точкою відображення g_1 і при цьому $a_\infty \geq 0$.

Інтервал $[a_\infty;1]$ можна подати як об'єднання інтервалів вигляду $A_m == [a_{m+1}; a_m]$, $m = 0,1,2,...$, для яких виконуються умови $g_1^m(A_m) = [a_1;1]$.

Побудуємо аналоги інтервалів $L_l, l = 0,1,2,...$, з леми 4.1. Оскільки $g_2(x)$ монотонно не зростає на відрізку $[a;1]$ і $g_2([a;1])=[0;1]$, то існують такі точки $b_l, l = 0,1,2,...$, що при будь-якому $k = 0,1,2,...$ виконуються наступні умови:

1) $b_0 = a_\infty$;

2) $b_0 < b_2 < ... < b_{2k} < b_{2k+2} < ... < b_{2k+3} < b_{2k+1} < ... < b_3 < b_1$;

3) $b_{2k+1} = \min\{x \in [a;1] | g_2(x) = b_{2k}\}$;

4) $b_{2k+2} = \max\{x \in [a;1] | g_2(x) = b_{2k+1}\}$.

Інтервал $[a_\infty; b_1]$ можна зобразити у вигляді об'єднання наступних інтервалів: $B_l = [\min\{b_l; b_{l+2}\}, \max\{b_l; b_{l+2}\}], l = 0,1,2,...$, при чому мають місце наступні рівності $g_2^l(B_l) = [b_0; b_2], l = 0,1,2,...$.

Для побудованих точок виконуються нерівності $a_\infty = b_0 < a_1 \leq a < b_2 < b_1 \leq a_0 = 1$ з яких випливають наступні співвідношення

$$A_0 \supset \bigcup_{l>1} B_l, \quad B_0 \supset \bigcup_{m>1} A_m.$$

За допомогою міркувань для інтервалів $A_m, m = 0,1,2,...$, та $B_l, 0,1,2,...$, які аналогічні тим, що були проведені стосовно інтервалів $M_m, m = 0,1,2,...$, і $L_l, l = 0,1,2,...$, з леми 4.1, доводимо, що з твердження 1) теореми 1.2 випливає твердження 3).

Доведемо тепер, що з твердження 3) теореми 1.2 випливає твердження 1). Дійсно, оскільки Λ-відображення g має нерухому точку 0 та цикл періоду 2 (бо $g([0;a]) = [0;1] = g([a;1])$), то це відображення має також і цикли типів $\langle 1 \rangle$ та $\langle 221 \rangle$.

Будь-який інший цикл відображення g, тобто цикл періоду більшого, ніж 2, має тип, що задається опуклою вгору циклічною перестановкою, оскільки точки цього циклу розташовані як на інтервалі $[0;a]$, так і на інтервалі $[a;1]$, при цьому на інтервалі $[0;a]$ діє монотонно неспадне відображення g_1, а на інтервалі $[a;1]$ діє монотонно незростаюче відображення g_2.

Теорему 1.2 доведено.

6 Доведення твердження 1.3

З доведеної вище теореми 1.2 випливає, що для доведення твердження 1.3 потрібно довести, що тип будь-якого циклу відображення $f \in C^0(I,I)$, яке містить L-схему, належить множині Σ.

Доведення твердження 1.3 аналогічно доведенню теореми 1.2: спочатку потрібно показати існування циклів періодів 1 і 2, а потім побудувати аналоги інтервалів $M_m, m = 0,1,2,...,$ і $L_l, l = 0,1,2,...,$ з леми 4.1.

Використовуючи означення L-схеми, отримаємо, що для відображення f, яке містить L-схему, виконується наступна умова: $f([a;b]) \cap f([b;c]) \supseteq [a;c]$. Згідно властивості неперервності відображення ця умова гарантує існування нерухомої точки та періодичної точки періоду 2 на кожному з інтервалів $[a;b]$ і $[b;c]$.

Оскільки нерухома точка a відображення f належить інтервалу $[0;b]$, то множина $\{x \in [0;b] \mid f(x) = x\}$ непорожня, а згідно властивості неперервності відображення, ця множина є замкненою.

Позначимо $x_1 = \max\{x \in [0;b] \mid f(x) = x\}$. З означення L-схеми випливає, що $f([b;c]) \supseteq [a;c] \ni x_1$, тому існує точка $\min\{x \in [b;c] \mid f(x) = x_1\}$, яку позначимо x_2. Аналогічно доводиться існування точок $x_3 = \max\{x \in [b;c] \mid f(x) = x_2\}$ і $x_4 = \min\{x \in [x_1;b] \mid f(x) = x_2\}$.

За побудовою точки $x_i, i = 1,2,3,4$; мають наступні властивості:

1) $x_1 < x_4 \le x_3 < x_2$;

2) $x_1 = f(x_1) = f(x_2)$;

3) $x_2 = f(x_3) = f(x_4)$;

4) $x_1 < f(x) < x_2$ при $x \in (x_1; x_4) \cup (x_3; x_2)$.

Побудуємо аналоги інтервалів $M_m, m = 0, 1, 2, ...,$ з леми 4.1 на інтервалі $[x_1; x_4]$. З властивостей 1) – 3) випливає, що $f([x_1; x_4]) \supset [x_1; x_4] \cup [x_3; x_2]$. Звідси отримаємо, що існує монотонно спадна послідовність точок $c_m, m = 0, 1, 2, ...,$ для елементів якої виконуються рівності $c_{m+1} = \max\{x \in [x_1; c_m] \mid f(x) = c_m\}$, де $m > 0$, $c_0 = x_2$, $c_1 = x_4$.

Отримавши послідовність $c_m, m = 0, 1, 2, ...,$ побудуємо ще одну монотонно спадну послідовність точок $c'_m, m = 0, 1, 2, ...,$ для елементів якої виконуються рівності $c'_{m+1} = \max\{x \in [c_{m+2}; c_{m+1}] \mid f(x) = c'_m\}$, де $c'_0 = x_3$. Інтервал $[c'_m; c_m]$ позначимо C_m. За побудовою при кожному $m = 0, 1, 2, ...$ отримаємо, що для довільного значення $x \in [c'_m; c_m]$ має місце нерівність $[c'_{m+1} < f(x) < c_{m+1}$ і $f^m(C_m) = [c'_0; c_0]$.

Побудуємо тепер аналоги інтервалів $L_l, l = 0, 1, 2, ...,$ з леми 4.1 на інтервалі $[x_3; x_2]$. З властивостей 1) – 3) випливає, що мають місце наступні співвідношення $f([x_3; x_2]) \supset [x_1; x_4] \cup [x_3; x_2]$. Звідси випливає, що існує послідовність точок $d_l, l = 0, 1, 2, ...,$ для елементів якої при довільному значенні $k = 0, 1, 2, ...$ виконуються наступні умови:

1) $d_0 = x_1$;

2) $d_0 < d_2 < ... < d_{2k} < d_{2k+2} < ... < d_{2k+3} < d_{2k+1} < ... < d_3 < d_1$;

3) $d_{2k+1} = \max\{x \in [x_3; x_2] \mid f(x) = d_{2k}\}$;

4) $d_{2k+2} = \min\{x \in [x_3; x_2] \mid f(x) = d_{2k+1}\}$.

Властивості 1) – 3) точок $x_i, i = 1, 2, 3, 4$, дозволяють побудувати також таку послідовність точок $d'_l, l = 0, 1, 2, ...,$ для елементів якої при довільному значенні $k = 0, 1, 2, ...$ виконуються наступні умови:

1) $d'_0 = x_4$;

2) $d'_0 < d'_2 < ... < d'_{2k} < d'_{2k+2} < ... < d'_{2k+3} < d'_{2k+1} < ... < d'_3 < d'_1$;

3) $d'_{2k+1} = \max\{x \in [d_{2k+3}; d_{2k+1}] \mid f(x) = d'_{2k}\}$;

4) $d'_{2k+2} = \min\{x \in [d_{2k+2}; d_{2k+4}] \mid f(x) = d'_{2k+1}\}$.

Інтервал $[\min\{d_l^{'};d_l\},\max\{d_l^{'};d_l\}]$ позначимо $D_l, l=0,1,\ldots$. За побудовою на кожному з цих інтервалів для довільного значення $x\in[\min\{d_{l+1}^{'};d_{l+1}\},\max\{d_{l+1}^{'};d_{l+1}\}]$ виконується нерівність $\min\{d_l^{'};d_l\}<f(x)<\max\{d_l^{'};d_l\}$, а отже $f^l(D_l)=[d_0;d_0^{'}]$. Крім того, отримаємо, що виконуються наступні співвідношення $f(C_0)\supset\bigcup_l D_l$ і $f(D_0)\supset\bigcup_m C_m$.

Повторюючи міркування для інтервалів C_m і $D_l, m,l=0,1,\ldots$ аналогічні тим, що проведені вище для інтервалів M_m $L_l, m,l=0,1,\ldots$ при доведені леми 4.1, отримуємо, що дане відображення має цикл, типом якого є будь-яка опукла вгору циклічна перестановка.

Твердження 1.3 доведено.

2.7 Відношення лінійного порядку на множині опуклих циклічних перестановок

На множині опуклих циклічних перестановок Π введемо відношення порядку наступним чином: дві довільні опуклі циклічні перестановки $\pi^{'}$ і $\pi^{''}$ знаходяться у відношенні , тобто $\pi^{'}$ $\pi^{''}$, якщо $\sigma_{\pi^{'}}\le\sigma_{\pi^{''}}$.

Із визначення відношення порядку   випливає, що   є відношенням лінійного порядку на множині опуклих циклічних перестановок Π.

Теорема 7.1 *Якщо неперервне відображення $g\in C^0(I,I)$ має цикл типу $\pi_1\in\Pi$, то це відображення має також цикл типу $\pi_2\in\Pi$, де π_1 π_2.*

Доведення теореми 7.1. Нехай $\pi_1\in\Pi$ – опукла циклічна перестановка періоду n, що є типом циклу $B=\{\beta, g(\beta),\ldots,g^{n-1}(\beta)\}$ неперервного відображення $g\in C^0(I;I)$. Оскільки $\pi_1\in\Pi$, то згідно теореми 1.2 опукла циклічна перестановка π_1 є типом циклу тент-відображення, тобто існує деякий цикл $A=\{\alpha, f(\alpha),\ldots,f^{n-1}(\alpha)\}$ періоду n тент-відображення, що π_1 є його типом.

За функцією f побудуємо функцію $\overline{f}$, що не спадає на інтервалі $[0;f^{n-2}(\alpha)]$ та не зростає на інтервалі $[f^{n-2}(\alpha);1]$. Нехай $a=\min\{f^{n-2}(\alpha),1-f^{n-2}(\alpha)\}$, $b=1-a$, $c=\alpha$,

$d = f^{n-1}(\alpha)$. Визначимо функцію $\overline{f}$ наступним чином:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(\alpha), & 0 \le x < c, \\ 2x, & c \le x < a, \\ f^{n-1}(\alpha), & a \le x < b, \\ 2(1-x), & b \le x < d, \\ \alpha, & d \le x \le 1. \end{cases} \tag{14}$$

За побудовою відображення $\overline{f}$ має цикл A типу π_1. Покажемо, що $\pi_2 \in \Pi$ також є типом деякого циклу відображення $\overline{f}$. За умовою теореми 7.1 для опуклих циклічних перестановок π_1 і π_2 виконується співвідношення $\pi_1 \;\; \pi_2$, що еквівалентно лінійній вкладеності носіїв відповідних циклів, тобто носій циклу типу π_2 лежить у носії циклу типу π_1.

Нехай $C = \{\gamma, \overline{f}(\gamma), ..., \overline{f}^{m-1}(\gamma)\}$ – цикл типу π_2 відображення $\overline{f}$. Використовуючи зв'язок між вагою опуклої циклічної перестановки та мінімальною точкою циклу, типом якого вона є, отримаємо, що мінімальна точка циклу типу π_1 менша мінімальної точки циклу типу π_2, тобто виконується нерівність $\alpha \le \gamma$. Це співвідношення виконується тоді і лише тоді, коли максимальна точка циклу типу π_1 більша максимальної точки циклу типу π_2, тобто виконується нерівність $\overline{f}^{n-1}(\alpha) \ge \overline{f}^{m-1}(\gamma)$.

Доведемо останню нерівність. Припустимо, що це не так і має місце співвідношення $\overline{f}^{n-1}(\alpha) < \overline{f}^{m-1}(\gamma)$. Оскільки α є мінімальною точкою циклу періоду n, то $\overline{f}^{n}(\alpha) = \alpha$. Аналогічно, оскільки γ є мінімальною точкою циклу періоду m, то $\overline{f}^{m}(\gamma) = \gamma$. Образи точок α і γ належать монотонно не спадній гілці відображення $\overline{f}$, а образи точок $\overline{f}^{n-1}(\alpha)$ і $\overline{f}^{m-1}(\gamma)$ монотонно не зростаючій гілці, тому має місце нерівність $\alpha > \gamma$.

Таким чином ми прийшли до суперечності, тобто з того, що мінімальна точка циклу типу π_1 менша мінімальної точки циклу типу π_2 випливає, що максимальна точка циклу типу π_1 більша максимальної точки циклу типу π_2.

Твердження про те, що якщо максимальна точка циклу типу π_1 більша максимальної точки циклу типу π_2, то мінімальна точка циклу типу π_1 менша мінімальної точки циклу типу π_2, доводиться аналогічно.

Отже, C – цикл типу π_2 відображення $\overline{f}$, для точок якого виконуються нерівності $\alpha \le \overline{f}^{\,i}(\gamma) \le \overline{f}^{\,n-1}(\alpha)$, де $0 \le i \le m-1$.

Побудуємо орієнтований граф накриття, шо відповідає циклу A відображення $\overline{f}$. Для цього позначимо точки циклу A символами $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$, де $\alpha_1 < \ldots < \alpha_i < \alpha_{i+1} < \ldots < \alpha_n$. Нехай $f(\alpha_i) = \alpha_{s_i}$, де $1 \le s_i \le n$, $1 \le i \le n$. Тоді циклічну перестановку π_1 можна записати наступним чином:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ s_1 & s_2 \ldots & s_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки відображення $\overline{f}$ є неперервним, то на інтервалах $J_i = [\alpha_i; \alpha_{i+1}]$, $1 \le i \le n-1$, відображення $\overline{f}$, володіє властивістю

$$\overline{f}(J_i) \supseteq \begin{cases} J_{s_i} \cup \ldots \cup J_{s_{i+1}-1}, s_i < s_{i+1}, \\ J_{s_{i+1}} \cup \ldots \cup J_{s_i-1}, s_i > s_{i+1}. \end{cases} \qquad (15)$$

Поставимо у відповідність циклу типу π_1 відображення $\overline{f}$ орієнтований граф накриття $G_{\pi_1}^{\overline{f}}$ з вершинами J_1, J_2, …, J_{n-1} і орієнтованими ребрами, що з'єднують вершини J_i та J_s, якщо $\overline{f}(J_i) \supset J_s$. Позначимо множину вершин графа $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}\}$.

Використовуючи орієнтований граф накриття $G_{\pi_1}^{\overline{f}}$ циклу типу π_1 відображення $\overline{f}$, побудуємо орієнтований граф накриття циклу типу π_2 відображення $\overline{f}$. Оскільки носій циклу C вкладений у носій циклу A, то серед інтервалів $J_i \in J$, $1 \le i \le n-1$, існує такий інтервал $J_{i_1^*} \in J$, $1 \le i_1^* \le m-1$, що $\sigma_{\pi_2} \in J_{i_1^*}$, тобто мінімальна точка γ циклу C належить інтервалу $J_{i_1^*}$.

Аналогічно, для довільної точки $f^k(\gamma)$ циклу C, $1 \le k \le m-1$, існує інтервал $J_{i_k^*} \in J$, якому вона належить. Отже орієнтованим графом накриття $G_{\pi_2}^{\overline{f}}$ циклу C типу π_2 є граф з вершинами $J_{i_1^*}$, $J_{i_2^*}$, …, $J_{i_{m-1}^*}$ і орієнтованими ребрами $J_i \to J_s$, які з'єднують вершини J_i і J_s, $i, s \in \{i_1^*, i_2^*, ..., i_{m-1}^*\}$, якщо $\pi_2(i) = s$.

Таким чином побудований граф $J_{i_1^*} \to J_{i_2^*} \to ... \to J_{i_{m-1}^*}$ є орієнтованим графом накриття $G_{\pi_2}^{\bar{f}}$ циклу C типу π_2.

Позначимо тепер точки циклу B так: $\beta_1, ..., \beta_i, \beta_{i+1}, ..., \beta_n$, де $\beta_1 < ... < \beta_i < \beta_{i+1} < ... < \beta_n$. Нехай $\hat{i}$, де $1 \le \hat{i} \le n-1$, таке, що має місце рівність $g(\beta_{\hat{i}}) = \beta_n$.

За функцією g побудуємо неперервну функцію $\bar{g}$, що не спадає на інтервалі $[0; \beta_{\hat{i}}]$ і не зростає на інтервалі $[\beta_{\hat{i}}; 1]$. Покладемо $\bar{g}(x) = g(\beta_1)$, якщо $x \in [0; \beta_1]$, та

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} \min\{g(\beta_{i+1}), \max\limits_{\beta_i \le y \le x} g(y)\}, 1 \le i < \hat{i}, \\ \max\{g(\beta_{i+1}), \min\limits_{\beta_i \le y \le x} g(y)\}, \hat{i} \le i < n, \end{cases}$$

якщо $x \in [\beta_i; \beta_{i+1}]$, і $\bar{g}(x) = \beta_1$, якщо $x \in [\beta_n; 1]$.

За побудовою відображення $\bar{g}$ має цикл B типу π_1.

Аналогічно як для циклу A відображення $\bar{f}$, побудуємо орієнтований граф накриття $G_{\pi_1}^{\bar{g}}$, що відповідає циклу B типу π_1 відображення $\bar{g}$.

Поставимо у відповідність циклу B типу π_1 відображення $\bar{g}$ орієнтований граф накриття $G_{\pi_1}^{\bar{g}}$ з вершинами I_1, I_2, ..., I_{n-1} і орієнтованими ребрами, що з'єднують вершини I_j та I_s, якщо $\bar{g}(I_j) \supset I_s$. Позначимо множину вершин графа $I = \{I_1, I_2, ..., I_{n-1}\}$. Використовуючи співвідношення вигляду (15) для відображення $\bar{g}$, отримаємо, що вкладення $\bar{g}(I_j) \supset I_s$ має місце для всіх s таких, що $\pi_1(i) \le s \le \pi_1(i+1) - 1$, якщо $\pi_1(i) < \pi_1(i+1)$, і для всіх s таких, що $\pi_1(i+1) \le s \le \pi_1(i) - 1$, якщо $\pi_1(i) > \pi_1(i+1)$.

Оскільки аналогічні співвідношення мають місце і для орієнтованих ребер відображення $\bar{f}$, то графи $G_{\pi_1}^{\bar{f}}$ і $G_{\pi_1}^{\bar{g}}$ співпадають як орієнтовані графи накриття, що побудовані для циклів одного типу π_1 унімодальних відображень.

З останньої властивості випливає, що орієнтованому графу накриття $G_{\pi_2}^{\overline{f}}$ циклу типу π_2 відображення $\overline{f}$ відповідає орієнтований граф накриття $G_{\pi_2}^{\overline{g}}$, вершинами якого є інтервали з множини I, а ребра відповідають ребрам $G_{\pi_2}^{\overline{f}}$.

Для того, щоб довести, що відображення $\overline{g}$ має цикл типу π_2, за графами $G_{\pi_2}^{\overline{f}}$ і $G_{\pi_2}^{\overline{g}}$ побудуємо графи $\overline{G}_{\pi_2}^{\overline{f}}$ і $\overline{G}_{\pi_2}^{\overline{g}}$ і встановимо взаємно однозначну відповідність між ними.

Нехай $J_{i^*} \in J$, $1 \le i^* \le n-1$, – інтервал, якому належить мінімальна точка циклу C, тобто $\sigma(\pi_2) \in J_{i^*}$. Побудуємо m послідовних прообразів цього інтервалу на різних гілках монотонності відображення $\overline{f}$ керуючись наступним алгоритмом. Якщо a з (14) таке, що $a = f^{n-2}(\alpha)$, то інтервал з J лівим кінцем якого є точка a, вважатимемо таким, що відповідає монотонно не зростаючій гілці відображення $\overline{f}$, а якщо $a = 1 - f^{n-2}(\alpha)$, то інтервал, лівим кінцем якого є точка a, вважатимемо таким, що відповідає монотонно не спадаючій гілці відображення $\overline{f}$. Решта інтервалів відповідають тій гілці відображення $\overline{f}$, якій належить їх образ.

Будуватимемо m послідовних прообразів інтервалу J_{i^*} наступним чином: першим прообразом інтервалу J_{i^*} оберемо інтервал $\overline{J}_{m-1}$, образ якого належить тій гілці відображення $\overline{f}$, якій відповідає інтервал $J_{i^*_{m-1}}$.

Прообразом інтервалу $\overline{J}_{m-1}$ оберемо інтервал $\overline{J}_{m-2}$ такий, що його образ належить тій же гілці відображення $\overline{f}$, якій відповідає інтервал $J_{i^*_{m-2}}$.

Повторивши цю процедуру $m-2$ рази, на останньому кроці оберемо прообразом інтервалу $\overline{J}_2$ інтервал $\overline{J}_1$, образ якого належить тій же гілці відображення $\overline{f}$, якій відповідає інтервал $J_{i^*_1}$.

В результаті отримали $m-1$ попарно неперетинних інтервалів $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$, ..., $\overline{J}_{m-1}$, які оберемо вершинами графа $\overline{G}_{\pi_2}^{\overline{f}}$, орієнтовані ребра якого утворені за правилом виду (15).

Таким чином побудований граф накриває цикл C типу π_2 відображення $\overline{f}$, причому так, що в кожному з інтервалів $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$, ..., $\overline{J}_{m-1}$ міститься по одній точці циклу C.

Аналогічно побудуємо граф $\overline{G}_{\pi_2}^{\overline{g}}$. Вершинами цього графа є взаємно неперетинні інтервали $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, ..., $\overline{I}_{m-1}$, а ребра утворені за правилом виду(15). Алгоритм побудови інтервалів $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, ..., $\overline{I}_{m-1}$ такий самий, як і алгоритм побудови інтервалів $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$, ..., $\overline{J}_{m-1}$, відмінним є лише спосіб визначення гілки монотонності відображення $\overline{g}$, що відповідає інтервалу, одним з кінців якого є точка $\overline{g}^{n-2}(\gamma)$.

Якщо точка $\overline{g}^{n-2}(\gamma)$ є одним із кінців інтервалу і цей інтервал такий, що йому належить точка x, для якої виконується рівність $g(x) = \max\limits_{x\in[0;1]} g(x)$, то цей інтервал вважатимемо таким, що відповідає монотонно не спадаючій гілці відображення $\overline{g}$, якщо $x < \overline{g}^{n-2}(\gamma)$, і таким, що відповідає монотонно не зростаючій гілці відображення $\overline{g}$, якщо $x > \overline{g}^{n-2}(\gamma)$.

За побудовою порядок розташування інтервалів $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, ..., $\overline{I}_{m-1}$ такий самий, як порядок розташування інтервалів $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$, ..., $\overline{J}_{m-1}$. Оскільки $\overline{G}_{\pi_2}^{\overline{f}}$ є графом накриття циклу типу π_2 відображення $\overline{f}$, то $\overline{G}_{\pi_2}^{\overline{g}}$ є графом накриття циклу типу π_2 відображення $\overline{g}$. Отже, відображення $\overline{g}$ має цикл типу π_2.

З останнього випливає, що початкове відображення g має цикл типу π_2.

Теорему 7.1 доведено.

2.8 Висновки до другого розділу

У теоремі Шарковського цикли неперервного відображення класифікуються за періодами, але відображення може мати різні цикли деякого фіксованого періоду. Тому, крім класифікації циклів за періодами, природно розглянути їх більш детальну класифікацію, а саме, за типами – циклічними перестановками.

У другому розділі дисертації запропоновано класифікацію циклів одновимірних неперервних відображень відрізка в себе за моделлю типу циклу. Дано означення моделі типу циклу, ваги моделі типу циклу, доведено існування моделі типу циклу та пояснено її зв'язок з динамікою неперервного відображення. Враховуючи відомий факт про те, що неперервне відображення відрізку, яке містить L-схему, може мати цикл будь-якого типу, у другому розділі дисертації досліджено питання про множину типів циклів, що має кожне відображення, яке містить L-схему.

Одним з основних питань, які досліджено у цьому розділі, є доведення того, що будь-яка перестановка з множини Σ, яка складається з циклічних перестановок довжин 1 і 2 (які не є опуклими вгору) та всіх опуклих вгору циклічних перестановок, є типом деякого циклу тент-відображення.

На множині опуклих циклічних перестановок описано відношення лінійного порядку, що індукується вагою опуклої циклічної перестановки. Доведено теорему про лінійний порядок (співіснування) циклічних перестановок як типів унімодальних циклів неперервного відображення.

Результати цього розділу опубліковано в статтях [16], [17], [19] і тезах доповідей в матеріалах праць міжнародних конференцій [20], [22], [24], [86].

РОЗДІЛ 3

ПЕРІОДИЧНІ КУСКОВО-СТАЛІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

У даному розділі розглядаються нелінійні крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними з хаотичною поведінкою розв'язків, які допускають широкий спектр кусково-сталих періодичних розв'язків. Оскільки кусково-стала функція не є диференційовною, то для кожної з розглядуваних крайових задач введено поняття узагальненого кусково-сталого n-періодичного розв'язку з дуже "рідкою" множиною точок розриву.

Дослідження таких узагальнених кусково-сталих n-періодичних розв'язків відбувається шляхом зведення відповідної крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними до різницевого рівняння з неперервним часом, а крайові умови та початкові дані забезпечують редукцію отриманого різницевого рівняння до неперервного відображення інтервалу в себе.

Відмітимо, що застосований метод дає змогу отримати розв'язок деяких класів крайових задач у аналітичному вигляді. На відміну від асимптотичної стійкості за Ляпуновим, при якій спектр розв'язків є вузьким, адже всі розв'язки з певного околу мають однакові асимптотичні властивості, побудовані розв'язки мають різні асимптотичні властивості навіть у випадку близькості початкових умов, що пов'язано з хаотичністю системи.

Зауважимо, що співіснування узагальнених періодичних розв'язків досліджуваних крайових задач розуміється не за періодом, як співіснування циклів одновимірного неперервного відображення відрізка в себе згідно теореми Шарковського [34], а за спеціальним чином побудованою моделлю типу циклу.

З-поміж розглянутих у даному розділі нелінійних крайових задач для лінійного диференціального рівняння першого порядку з частинними похідними та симетричних гіперболічних систем рівнянь з частинними похідними, також розглянуто нелінійну крайову задачу, що вивчалася в статті А. А. Вітта [2], у якій було побудовано модель реальної фізичної системи і досліджено властивості її розв’язки за допомогою методів теорії функціональних рівнянь [36].

Вивчення таких нелінійних крайових задач є актуальним питанням у зв’язку з використанням цифрових сигналів у різноманітних засобах зв’язку. На сьогоднішній день основними типами сигналів, що генеруються, передаються та приймаються різноманітними засобами зв’язку, є аналогові та цифрові (digital) сигнали.

Якщо наприкінці XIX сторіччя для передачі інформації застосовувався лише аналоговий сигнал, то з 70-их років XX сторіччя для цієї мети все частіше використовують цифровий сигнал. Це ж стосується і засобів збереження інформації. Основна відмінність між аналоговим та цифровим сигналами полягає в структурі сигнального потоку [76]. Якщо аналоговий сигнал можна зобразити у вигляді неперервної хвилі, то графіком цифрового сигналу є кусково-стала функція.

У зв’язку зі значним поширенням цифрових сигналів набуває важливого значення задача побудови широкосмугових генераторів таких сигналів, причому найпростіших як із інженерної точки зору, так і з точки зору можливості повного дослідження математичних моделей цих генераторів.

Природно обмежити клас розглядуваних кусково-сталих функцій періодичними. Тоді функції з цього класу можна охарактеризувати підстановками, за допомогою яких можна класифікувати періодичні кусково-сталі функції.

Класифікація дискретних періодичних функцій за допомогою перестановок широко використовується в теорії одновимірних динамічних систем, зокрема, для вивчення співіснування циклів одновимірних неперервних відображень [33]. Хоча періодичні кусково-сталі функції визначені на дійсній осі, а дискретні періодичні функції визначені на множині натуральних чисел, проте як і для першого, так і для другого класу функцій придатна класифікація за циклічними перестановками.

Оскільки традиційними моделями генераторів сигналів є диференціальні рівняння, то феноменологічні моделі генераторів цифрових сигналів доцільно шукати в класі диференціальних рівнянь, які редукуються [2], [4], [36], [38] до вивчення властивостей одновимірних динамічних систем. Але при цьому, оскільки кусково-сталі функції розривні, то їх треба розглядати не як класичний розв’язок диференціальних рівнянь, а на кшталт узагальнених розв’язків рівнянь.

Добре відомо, що існують класи крайових задач для рівнянь з частинними похідними, які редукуються до різницевих рівнянь першого порядку з неперервним аргументом, а властивості розв’язків останніх визначаються динамічною системою, що породжена одновимірним неперервним відображенням [2], [4], [12], [36], [81].

Одновимірним динамічним системам, теорія яких є одним з найбільш ефективних інструментів нелінійної динаміки, з одного боку, властивий широкий спектр динамічної поведінки траєкторій, зокрема, система може мати багато різноманітних циклів одночасно, а з іншого боку, властивості таких систем можуть бути детально досліджені [33]. Саме ці особливості одновимірних динамічних систем дозволяють використовувати їх для побудови найпростіших феноменологічних моделей генераторів цифрових сигналів [76].

Кожна з розглядуваних у даному розділі нелінійних крайових задач може бути використана у якості феноменологічної моделі генератора цифрових сигналів, оскільки основними вимогами, яким повинна задовольняти побудована феноменологічна модель, є сталість початкових умов та можливість зведення отриманої крайової задачі до певної одновимірної динамічної системи, бо останнє дає змогу суттєво деталізувати аналіз узагальнених періодичних розв’язків вихідної нелінійної крайової задачі.

3.1. Попередні зауваження з приводу розривних розв'язків деяких початкових задач

Дослідження різницевих та диференціально-різницевих рівнянь є природнім наслідком при вивченні крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Перехід від диференціального рівняння з частинними похідними до різницевого чи диференціально-різницевого рівняння при проведенні досліджень містить ряд переваг, зокрема, у Pinney E. з цього приводу знаходимо наступне [9]: "Во-первых, современные цифровые вычислительные машины оперируют разностями, а не производными. Во-вторых, многие сложные физические задачи, описываемые уравнениями с частными производными, можно аппроксимировать более простыми задачами, описываемыми дифференциально-разностными уравнениями. " (передмова до книги Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. – М.: Изд. иностр. лит., 1961. – 248 с. [9]).

Типовою проблемою, з якою стикаються дослідники при вивченні розв'язків різницевих, диференціально-різницевих рівнянь та диференціальних рівнянь з імпульсною взаємодією, є постановка такої початкової задачі для цих рівнянь, щоб її розв'язок визначав функцію на всій множині визначення. Дійсно, у кожній із цих задач має місце неоднозначність функції-розв'язку на певній підмножині з її області визначення. Цю проблему "некоректності" постановки початкової задачі кожен із авторів вирішує на свій розсуд (див., наприклад, [1, 8, 9, 13, 14, 32, 40]).

Так, у монографії Романенко О.Ю. [13] постановка початкової задачі для різницевого рівняння має наступний вигляд: розглядається різницеве рівняння

$$x(t+1) = f(x(t)), \tag{16}$$

де $t \in \mathbb{R}^{+}$, $f \in C(I, I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ – замкнений інтервал, з початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \tag{17}$$

де $\varphi : [0;1) \rightarrow I$, $t \in [0;1)$.

Розв'язки такого різницевого рівняння породжуються початковою умовою, а саме, кожна початкова умова визначає єдиний розв'язок $x_{\varphi} : \mathbb{R}^{+} \rightarrow I$, який можна отримати, наприклад, за допомогою методу кроків. Іншими словами, розв'язок однозначно визначається своїми значеннями на початковому інтервалі $[0;1)$.

Очевидно, що неперервність функцій f, φ іще не гарантує неперервності розв'язків початкової задачі для різницевого рівняння, більше того, навіть у випадку їх неперервності розв'язок $x_{\varphi}(t)$ може бути розривним при значеннях $t = 1, 2, \ldots$, а тому для існування неперервних розв'язків початкової задачі (16), (17) додатково (крім неперервності) для функцій f, φ вимагають виконання умови узгодженості, тобто умови вигляду:

$$\varphi(1-0) = f(\varphi(0)). \tag{18}$$

Зрозуміло, що у випадку, коли для початкової задачі (16), (17) умова узгодженості (18) не виконується, то в якості розв'язків цієї задачі доводиться розглядати розривні розв'язки. Іншими словами, в якості розв'язків початкової задачі (16), (17) розглядаються функції [13], які записуються за допомогою формули

$$x_{\varphi}(t) = f^{n}(\varphi(t-n)), t \in [n; n+1), n \in \mathbb{N}.$$

При цьому цей розв'язок визначений для всіх значень $t \geq 0$.

Що стосується диференціально-різницевих рівнянь, то потрібно згадати класичну монографію [32], де розглядається початкова задача для лінійного диференціально-різницевого рівняння з запізненням вигляду:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + f(t), \tag{19}$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-r;0]. \quad (20)$$

Тут x – скаляр, A, B, r – сталі, $r > 0$, $f \in C(\mathrm{R},\mathrm{R})$, $\varphi \in C([-r;0],\mathrm{R})$.

Доведено наступну теорему про існування та єдиність розв'язку початкової задачі (19), (20).

Теорема *Якщо φ – задана неперервна функція на $[-r;0]$, то існує єдина функція $x(\varphi, f)$, визначена на $[-r;\infty)$, що співпадає з φ на $[-r;0]$ і задовольняє рівняння (19) для всіх значень $t \geq 0$. Зрозуміло, що при $t = 0$ похідна в рівнянні (19) є значенням похідної справа у цій точці.*

Хоча в умові задачі функція f є неперервною, проте автор наголошує, що ця теорема виконується і у випадку, коли функція f є локально інтегровною, але не є неперервною. У цьому випадку під розв'язком розуміється функція, яка задовольняє рівняння (19) майже скрізь і є абсолютно неперервною [32].

Ця пропозиція, що сформульована Hale J. є класичним способом вирішення проблеми неоднозначного визначення розв'язку початкової задачі для різницевих і диференціально-різницевих рівнянь та диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Так, наприклад, у монографії [14] досліджується система диференціальних рівнянь з імпульсною дією вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \ \ t \neq \tau_i, \quad (21)$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x) \quad (22)$$

де $\{\tau_i\}$ – задана послідовність (скінченна або нескінченна) моментів часу.

Розв'язком задачі (21), (22) називається така кусково-неперервна функція $x = \varphi(t)$ з розривами першого при $t = \tau_i$, яка при всіх $t \neq \tau_i$ задовольняє рівняння (21), а при $t = \tau_i$ задовольняє умові стрибка:

$$\varphi(t)|_{t=\tau_i} = \varphi(\tau_i + 0) - \varphi(\tau_i - 0) = I_i(\varphi(\tau_i - 0)).$$

При цьому вважають, що функція $\varphi(t)$ неперервна зліва у точці $t = \tau_i$, тобто задовольняє умову:

$$\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_i - 0) = \lim_{t \to \tau_i - 0} \varphi(t).$$

Варто навести також приклад, який ілюструє підхід до вирішення проблеми побудови неперервних розв'язків нелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У працях [13, 38] розглядається нелінійна крайова задача для лінійного диференціального рівняння першого порядку з частинними похідними:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x},\ x \in [0;1],\ t \in \mathrm{R}^+, \tag{23}$$

з нелінійною крайовою умовою:

$$w(1;t) = f(w(0;t)), \tag{24}$$

і початковою умовою:

$$u(x;0) = \varphi(x),\ x \in [0;1]. \tag{25}$$

Тут $f \in C^1(I,I)$, $\varphi \in C^1(I,I)$.

Для існування гладкого розв'язку крайової задачі (23)–(25) додатково (крім гладкості) для функцій f, φ вимагають виконання умов узгодженості, тобто умов вигляду:

$$\varphi(1) = f(\varphi(0)), \varphi'(1) = f'(\varphi(0))\varphi'(0). \tag{26}$$

Умови вигляду (26) є типовими умовами при побудові неперервних розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку і називаються умовами C^1-гладкого узгодження.

Всі згадані вище задачі об'єднує те, що для кожної з них існує множина точок розриву, у яких значення розв'язку розглядуваної задачі, взагалі кажучи, визначається неоднозначно, але для кожної з цих задач поняття розв'язку можна визначити таким чином, що розв'язок однозначно визначений при всіх $t \geq t_0$, де t_0 – початковий момент часу.

3.2. Співіснування узагальнених періодичних розв'язків крайової задачі для лінійного диференціального рівняння першого порядку з частинними похідними і нелінійною крайовою умовою

Розглянемо нелінійну крайову задачу для лінійного диференціального рівняння першого порядку з частинними похідними:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\ x \in (0;1),\ t \in \mathrm{R}^+, \tag{27}$$

з нелінійною крайовою умовою:

$$u(1;t) = f(u(0;t)), t \in \mathrm{R}_0^+, \tag{28}$$

і початковою умовою:

$$u(x;0) = \varphi(x),\ x \in [0;1]. \tag{29}$$

Тут $f \in C^0(I,I)$, а її перша похідна є кусково неперервною, $\varphi(x) = \varphi \in \mathrm{R}$, якщо $x \in [0;1),\ \varphi(1) = f(\varphi)$, $\mathrm{R}_0^+ = \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$.

Оскільки загальний розв'язок рівняння (27) можна записати за допомогою формули типу Д'Аламбера, то, обравши функцію $\varphi(x)$ в умові (29) спеціальним чином кусково-сталою, дослідження розв'язку крайової задачі (27)–(29) можна звести до вивчення динаміки одновимірного неперервного відображення f з крайової умови (28). Це дає змогу вивчати періодичні розв'язки крайової задачі (27)–(29), досліджуючи періодичні траєкторії динамічної системи, що породжена неперервним відображенням f. У такому випадку функції, що задовольняють рівності (27)–(29), є періодичними кусково-сталими функціями з розривами першого роду вздовж характеристик рівняння (27).

Зауважимо, що крайова задача (27)–(29), у якій функція $\varphi(x)$ з початкової умови (29) є кусково-сталою, може бути використана у якості феноменологічної моделі генератора цифрових сигналів.

Прямі $x+t=const$ є характеристиками рівняння (27), проте з крайової умови (28) випливає, що поведінку розв'язків крайової задачі (27)–(29) визначають прямі $t=-x+i$, де $i \in \mathrm{N}$. Враховуючи, що крайова задача (27)–(29) визначена на множині $\{(x,t) \in \mathrm{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, t \ge 0\}$, замість прямих $t=-x+i$ розглянемо множини вигляду

$$P_i = \{(x,t) \in \mathrm{R}^2 \mid 0 < x \le 1, t = -x+i\},$$

де $i \in \mathrm{N}$.

Сформулюємо необхідні означення.

Означення 2.1 *Узагальненим розв'язком крайової задачі (27)–(29) називається функція* $u:[0;1]\times\mathrm{R}_0^+ \to \mathrm{R}$*, яка має такі властивості:*

1) є неперервно диференційовною в кожній області D_i, $i \in \mathrm{N}$, вигляду:

$$D_i = \{(x,t) \in [0;1]\times\mathrm{R}_0^+ \mid i-1 < t+x < i\}$$

і задовольняє у ній рівняння (27);

2) є неперервною на кожній множині $D_{i+1} \cup P_i$;

3) задовольняє крайову умову (28) для всіх $t \in \mathrm{R}_0^+$;

4) задовольняє початкову умову (29) для довільних значень $x \in [0;1]$.

Означення 2.2 *Узагальненим кусково-сталим розв'язком крайової задачі (27)–(29) називається її узагальнений розв'язок* $u(x,t)$ *такий, що функція* $u(x,t)$ *приймає лише скінченну множину значень, тобто* $u:[0;1]\times\mathrm{R}_0^+ \to \Theta_1$*, де* Θ_1 *є скінченною підмножиною множини* R *.*

Означення 2.3 *Узагальненим кусково-сталим* n*-періодичним розв'язком крайової задачі (27)–(29) називається її узагальнений кусково-сталий розв'язок*

$u(x,t)$ *такий, що для будь-яких довільних значень* $(x,t)\in[0;1]\times R^{+}$ *має місце рівність* $u(x,t+n)=u(x,t)$*, і при цьому* $n\in N$ *є найменшим серед чисел, для яких виконується остання рівність.*

Відповідь на питання співіснування узагальнених кусково-сталих n-періодичних розв'язків крайової задачі (27)–(29) дає наступна теорема, яка є аналогом теореми Шарковського про співіснування циклів неперервного відображення [37].

Теорема 2.1 *Нехай функція* $f\in C^{0}(I,I)$ *і має кусково неперервну першу похідну, а початкова функція* $\varphi(x)=\varphi\in R$*, якщо* $x\in[0;1)$*, і* $\varphi(1)=f(\varphi)$*. Якщо крайова задача (27)–(29) має узагальнений кусково-сталий* n*-періодичний розв'язок, то крайова задача (27), (28) має узагальнений кусково-сталий* n'*-періодичний розв'язок такий, що* $n'<n$*, де*

$$1<2<2^{2}<2^{3}<\ldots<2^{2}\cdot 5<2^{2}\cdot 3<<\ldots<2\cdot 5<2\cdot 3<\ldots<9<7<5<3-$$

порядок Шарковського (2) на множині натуральних чисел.

Доведення теореми 2.1. Використовуючи метод характеристик для знаходження розв'язків крайової задачі (27)–(29), зведемо її до різницевого рівняння з неперервним аргументом [11].

Загальний розв'язок рівняння (27) можна записати за допомогою формули Д'Аламбера:

$$u(x,t)=v(x+t), \tag{30}$$

де $v\in C^{1}(R_{0}^{+},R)$ – довільна функція.

Отримавши розв'язок рівняння (27) у вигляді (30), зведемо крайову задачу (27)–(29) до різницевого рівняння з неперервним часом. Підставляючи (30) у крайову умову (28), одержимо автономне різницеве рівняння з неперервним аргументом:

$$v(\tau+1)=f(v(\tau)), \tag{31}$$

де $\tau \in R_0^+$.

Використовуючи (30) та (29), отримаємо початкову умову для різницевого рівняння (31):

$$v(\tau) = \varphi(\tau), \tag{32}$$

де $\varphi(\tau) = \varphi \in R$, якщо $\tau \in [0;1)$, $\varphi(1) = f(\varphi)$.

Рівняння (31) з початковою умовою (32) має загальний розв’язок, який можна записати наступним чином:

$$v(\tau) = f^n(\varphi(\{\tau\})), \tag{33}$$

де $\tau \in [n; n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Використовуючи формулу (30), що пов’язує розв’язок крайової задачі (27)–(29) і різницевого рівняння з неперервним аргументом (31) з початковою умовою (32), з (33) отримаємо загальний розв’язок задачі (27)–(29):

$$u(x,t) = f^{[x+t]}(\varphi(\{x+t\})), \tag{34}$$

де $x \in [0;1]$, $t \in R_0^+$.

Оскільки функція φ з початкової умови (29) є кусково-сталою, а саме: для будь-якого $x \in [0;1)$ має місце рівність $\varphi(x) = \varphi$, де $\varphi \in R$ – фіксоване число, а $\varphi(1) = f(\varphi)$, то різницеве рівняння з неперервним аргументом (31) з початковою умовою (32) визначається дискретним різницевим рівнянням вигляду:

$$v(n+1) = f(v(n)), \tag{35}$$

де $n \in N \cup \{0\}$, з початковою умовою:

$$v(0) = \varphi. \tag{36}$$

Для неперервної функції f з правої частини рівняння (35) виконується теорема Шарковського про співіснування циклів [37], згідно якої з наявності у неперервного відображення відрізку циклу порядку n випливає наявність циклу періоду n' такого, що $n' < n$, де $<$ задає порядок Шарковського (2) вигляду

$$1 < 2 < 2^2 < 2^3 < \ldots < 2^2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 3 < \ldots < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 3 < \ldots < 9 < 7 < 5 < 3$$

на множині натуральних чисел.

Оскільки різницеве рівняння з дискретним аргументом (35) та початковим значенням (36) визначає різницеве рівняння з неперервним аргументом (31) та початковою функцією (32), які є результатами редукції крайової задачі (27)–(29), то з існування циклу періоду $n^{'}$, де $n^{'} < n$, для дискретного відображення слідує існування узагальненого кусково-сталого $n^{'}$-періодичного розв'язку крайової задачі (27)–(29), де $n^{'} < n$.

Теорему 2.1 доведено.

Для подальшого аналізу узагальнених кусково-сталих n-періодичних розв'язків крайової задачі (27)–(29) треба, окрім класифікації таких розв'язків за періодами, додатково запропонувати більш детальну класифікацію узагальнених кусково-сталих n-періодичних розв'язків крайової задачі (27)–(29). Ця задача рівносильна класифікації циклів відображення f, тому для подальшого дослідження скористаємося означеннями та твердженнями з другого розділу дисертації.

Розглянемо узагальнений кусково-сталий n-періодичний розв'язок $u(x,t)$ крайової задачі (27)–(29). Сталу φ з початкової умови (29) вибираємо так, щоб φ була періодичною точкою відображення f з крайової умови (28).

Визначимо множини D_{i+kn}, де $i,k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathrm{N}$, $0 \le i \le n-1$, наступним чином: $D_{i+kn} = \{(x,t) \in [0;1] \times \mathrm{R}_0^+ \mid x+t = \alpha + i + kn, \alpha \in [0;1)\}$. З початкової умови (29) випливає, зокрема, рівність $u(0;0) = \varphi$, з якої, використовуючи зображення розв'язку (34), одержуємо аналітичне зображення узагальненого n-періодичного розв'язку крайової задачі (27)–(29)

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi, & (x,t) \in D_{kn}; \\ f(\varphi), & (x,t) \in D_{1+kn}; \\ \dots \\ f^{i}(\varphi), & (x,t) \in D_{i+kn}; \\ \dots \\ f^{n-1}(\varphi), & (x,t) \in D_{n-1+kn}. \end{cases} \qquad (37)$$

Означення 2.4 *Типом узагальненого кусково-сталого n-періодичного розв’язку крайової задачі (27)–(29) називається тип періодичної точки φ одновимірної динамічної системи, що породжена неперервним відображенням f з крайової умови (28).*

З означення 2.4 випливає, що аналітичне зображення (37) узагальненого кусково-сталого n-періодичного розв’язку крайової задачі (27)–(29) має тип, що дорівнює типу періодичної точки φ з початкової умови (29).

Використовуючи відношення лінійного на множині опуклих циклічних перестановок Π, отримаємо, що має місце наступна теорема.

Теорема 2.2 *Нехай функція $f \in C^0(I,I)$ і має кусково неперервну першу похідну, а початкова функція $\varphi(x) = \varphi \in \mathrm{R}$, якщо $x \in [0;1)$, і $\varphi(1) = f(\varphi)$. Якщо значення φ є періодичною точкою типу $\pi_1 \in \Pi$ відображення f, то крайова задача (27), (28) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв’язок типу $\pi_2 \in \Pi$, де $\pi_1 \quad \pi_2$.*

Доведення теореми 2.2. Нехай $u(x,t)$ – узагальнений кусково-сталий періодичний розв’язок крайової задачі (27), (28) з початковою умовою (29), такою, що $\varphi(x) = \varphi_1$, якщо $x \in [0;1)$, $\varphi(1) = f(\varphi_1)$, де φ_1 є періодичною точкою типу $\pi_1 \in \Pi$ відображення f. Аналогічно доведенню теореми 2.1, використовуючи формулу Д’Аламбера та кусково-сталість функції у початковій умові (29), крайову задачу (27)–(29) зведемо до різницевого рівняння з дискретним аргументом (35) та початковою умовою умовою (36), такою, що $v(0) = \varphi_1$, де φ_1 – стала з початкової умови (29).

Оскільки π_1 – тип узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку крайової задачі (27)–(29), то внаслідок редукції до різницевого рівняння (35), (36), π_1 є типом циклу неперервного відображення f.

Використаємо теорему 7.1, у якій йдеться, про те, що у випадку, коли неперервне відображення відрізка має цикл типу опуклої циклічної перестановки, то воно також має цикл більшого типу згідно відношення порядку на множині опуклих циклічних перестановок. Враховуючи, що $\pi_1 \in \Pi$, $f \in C^0(I,I)$ і має кусково неперервну першу похідну, отримаємо, що відображення f також має цикл типу $\pi_2 \in \Pi$, де $\pi_1 \quad \pi_2$.

Знову використаємо зв'язок розглядуваної крайової задачі з динамікою відображення f. Оскільки f має цикл типу π_2, то різницеве рівняння з дискретним аргументом (35) та початковою умовою $v(0) = \varphi_2$, де φ_2 – періодична точка типу π_2 відображення f, відповідає крайовій задачі (27), (28) з початковою умовою $\varphi(x) = \varphi_2$, де φ_2 – періодична точка типу π_2 відображення f.

З останнього випливає, що крайова задача (27), (28) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi_2 \in \Pi$, де $\pi_1 \quad \pi_2$.

Теорему 2.2 доведено.

Має місце наступний наслідок з теореми 2.2.

Наслідок 2.1 *Якщо (додатково до припущень теореми 2.2) функція* f *задає тент-відображення вигляду (1), то крайова задача (27), (28) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу* $\pi_2 \in \Pi$*, де* $\pi_1 \quad \pi_2$*,* *вигляду:*

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{2}{3}\sigma_{\pi_2}, & (x,t) \in D_{kn_2}; \\ f(\frac{2}{3}\sigma_{\pi_2}), & (x,t) \in D_{1+kn_2}; \\ \ldots & \\ f^{i}(\frac{2}{3}\sigma_{\pi_2}), & (x,t) \in D_{i+kn_2}; \\ \ldots & \\ f^{n_2-1}(\frac{2}{3}\sigma_{\pi_2}), & (x,t) \in D_{n-1+kn_2}. \end{cases} \qquad (38)$$

Доведення наслідку 2.1. Оскільки відображення (1) є неперервним і має кусково неперервну першу похідну, то для крайової задачі (27), (28), де f – відображення вигляду (1), з початковою умовою (29), де стала є періодичною точкою типу $\pi_1 \in \Pi$ відображення f, виконується теорема 2.2.

З останнього випливає, що крайова задача (27)–(29) має узагальнений кусково-сталий n_2-періодичний розв'язок типу $\pi_2 \in \Pi$, де $\pi_1 \quad \pi_2$.

Використовуючи лему 4.1 отримаємо, що координата мінімальної точки циклу будь-якого типу тент-відображення дорівнює вазі цього циклу, що помножена на коефіцієнт $\frac{2}{3}$. Тоді, використовуючи формулу (37), узагальнений кусково-сталий n_2-періодичний розв'язок типу π_2 крайової задачі (27)–(29) можна записати у вигляді (38).

Наслідок 2.1 доведено.

Для формулювання ще одного наслідку з теореми 2.2, нам знадобляться наступні означення.

Означення 2.5 *Мінімальним циклом називається цикл, тип якого є мінімальною циклічною перестановкою або симетричною їй перестановкою.*

Означення 2.6 *Циклічні перестановки π_1 і π_2 періоду n називаються симетричними, якщо для довільного $1 \le i \le n$, де $n \in \mathrm{N}$, виконується* *співвідношення* $\pi_2(i) = n+1-\pi_1(n+1-i)$.

Мінімальні перестановки довільного періоду описані в [33]. Зауважимо лише, що мінімальними циклічними перестановками непарного періоду $n = 2k+1$, де $k > 1$, є, зокрема, наступні циклічні перестановки:

$$\pi_{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k+1 & k+2 & \dots & 2k & 2k+1 \\ k+1 & 2k+1 & 2k & \dots & k+2 & k & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (39)$$

а при $k = 1$:

$$\pi_3 = (23231). \qquad (40)$$

Використовуючи означення 1.3 отримаємо, що мінімальні перестановки, які задані формулами (39) і (40), є опуклими вгору циклічними перестановками.

Доведемо наступний наслідок з теореми 2.2.

Наслідок 2.2 *Нехай функція* $f \in C^0(I, I)$ *і має кусково неперервну першу похідну, а початкова функція* $\varphi(x) = \varphi \in \mathrm{R}$*, якщо* $x \in [0;1)$*,* $\varphi(1) = f(\varphi)$*. Якщо значення* φ *є* $(2k+1)$*–періодичною точкою типу* π *відображення* f*, де* $k \in \mathrm{N}$*, то крайова задача (27), (28) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу* $\pi_{2k'+1}$*, де* $k' \geq k$*, крім того, якщо* $\pi \in \Pi$*, то ця крайова задача має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу* $\pi' \in \Pi$ *такого, що*

$$\sigma_{\pi'} \geq \frac{1-(-2)^{2k}}{1+(-2)^{2k+1}}.$$

Доведення наслідку 2.2. Використовуючи теорему Шарковського, отримаємо, що з існування у відображення $f \in C^0(I, I)$ циклу періоду $2k+1$, випливає існування циклу періоду $2k'+1$, де $k' \geq k$. Використовуючи твердження про те, що з наявності у відображення $g \in C^0(I, I)$ циклу періоду n, випливає існування у цього відображення циклу мінімального типу періоду n [33], отримаємо, що розглядуване відображення має мінімальний цикл періоду $2k'+1$, де $k' \geq k$. Оскільки мінімальні цикли непарного періоду мають вигляд (39), (40) [33], то відображення $f \in C^0(I,I)$ має цикл типу $\pi_{2k^{'}+1}$, де $k^{'} \geq k$.

Якщо $\pi \in \Pi$, то з опуклості вгору типу циклу відображення f випливає, що можна побудувати таке унімодальне відображення таке, що будь-який цикл побудованого відображення є циклом вихідного відображення, і яке має цикл типу мінімальної циклічної перестановки періоду $2k+1$.

З унімодальності побудованого відображення випливає, що тип кожного циклу опуклий вгору. Отже, мінімальна циклічна перестановка періоду $2k+1$ є опуклою вгору, тобто має вигляд π_{2k+1}. Нескладно перевірити, що вага цієї мінімальної циклічної перестановки для відповідного k дорівнює

$$\frac{1-(-2)^{2k}}{1+(-2)^{2k+1}}.$$

Використовуючи теорему 2.2, отримаємо, що крайова задача (27), (28) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi^{'} \in \Pi$, де

$$\frac{1-(-2)^{2k}}{1+(-2)^{2k+1}} \leq \sigma_{\pi^{'}}.$$

Наслідок 2.2 доведено.

3.3. Співіснування узагальнених періодичних розв'язків крайової задачі для симетричної гіперболічної системи двох рівнянь з частинними похідними

Розглянемо нелінійну крайову задачу для симетричної гіперболічної системи двох рівнянь з частинними похідними, що складається з лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0,\ x \in (0;1),\ t \in \mathrm{R}^{+}, \tag{41}$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0,\ x \in (0;1),\ t \in \mathrm{R}^{+}, \tag{42}$$

крайових умов:

$$u(0,t) = v(0,t), t \in \mathrm{R}_0^+, \tag{43}$$

$$v(1,t) = f(u(1,t)), t \in \mathrm{R}_0^+, \tag{44}$$

та початкових умов:

$$u(x,0) = \varphi(x), x \in [0;1], \tag{45}$$

$$v(x,0) = \psi(x), x \in [0;1]. \tag{46}$$

Тут $f \in C^0(I,I)$, а її перша похідна є кусково неперервною, $\varphi(x) = \varphi \in \mathrm{R}$, якщо $x \in (0;1]$, $\varphi(0) = \psi \in \mathrm{R}$, $\psi(x) = \psi$, якщо $x \in [0;1)$, $\psi(1) = f(\varphi)$, $\mathrm{R}_0^+ = \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$.

Оскільки загальний розв'язок диференціальних рівнянь з частинними похідними (41), (42) записується за допомогою формули типу Д'Аламбера, то, обравши функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ з початкових умов (45), (46) спеціальним чином кусково-сталими, дослідження розв'язку цієї крайової задачі можна звести до вивчення динаміки одновимірного неперервного відображення f з крайової умови (44). У цьому випадку пара функцій, що задовольняють рівності (41)–(46), є періодичними кусково-сталими функціями з розривами першого роду вздовж характеристик рівняння (41), або рівняння (42), відповідно.

Зауважимо, що крайова задача (41)–(46), у якій функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ з початкових умов (45), (46) є кусково-сталими, може бути використана у якості феноменологічної моделі генератора цифрових сигналів.

З крайових умов (43), (44) випливає, що поведінку розв'язків крайової задачі (41)–(46) визначають прямі $t = x + j$, $t = -x + j$, де $j \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, які паралельні характеристикам рівнянь (41), (42). Оскільки крайова задача (41)–(46) визначена на множині $\{(x,t) \in \mathrm{R}^2 | 0 \le x \le 1, t \ge 0\}$, то замість прямих $t = x + j$, $t = -x + j$ доцільно розглядати множини вигляду

$$\underline{P_j} = \{(x,t) \in \mathrm{R}^2 | 0 < x \le 1, t = x + j\}, \tag{47}$$

$$\overline{P_j} = \{(x,t) \in \mathrm{R}^2 | 0 < x \le 1, t = -x + j\}, \tag{48}$$

де $j \in \mathrm{N}_0$.

Сформулюємо необхідні означення.

Означення 3.1 *Узагальненим розв'язком крайової задачі (41)–(46) називається вектор-функція довжини* 2 *вигляду* $(u;v)$*, де функції* $u:[0;1]\times\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$*,* $v:[0;1]\times\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ *мають такі властивості:*

1) функція u є неперервно диференційовною в кожній області $\underline{D_j}$, $j\in\mathbb{N}$, вигляду:

$$\underline{D_j}=\{(x,t)\in[0;1]\times\mathbb{R}_0^+ \mid j-1<t-x<j\} \tag{49}$$

і задовольняє у ній рівняння (41), а функція v є неперервно диференційовною в кожній області $\overline{D_j}$, $j\in\mathbb{N}$, вигляду:

$$\overline{D_j}=\{(x,t)\in[0;1]\times\mathbb{R}_0^+ \mid j-1<t+x<j\} \tag{50}$$

і задовольняє у ній рівняння (42);

2) функція u є неперервною на кожній множині $\underline{D_{j+1}}\cup\underline{P_j}$, а функція v є неперервною на кожній множині $\overline{D_{j+1}}\cup\overline{P_j}$;

3) функції u, v задовольняють крайові умови (43), (44) для всіх $t\in\mathbb{R}_0^+$;

4) функції u, v задовольняють початкові умови (45), (46) для довільних значень $x\in[0;1]$.

Означення 3.2 *Узагальненим кусково-сталим розв'язком крайової задачі (41)–(46) називається її узагальнений розв'язок* $(u;v)$ *такий, що вектор-функція* $(u;v)$ *приймає лише скінченну множину значень, тобто* $(u;v):([0;1]\times\mathbb{R}_0^+;[0;1]\times\mathbb{R}_0^+)\to\Theta_2$*, де* Θ_2 *є скінченною підмножиною множини* $\mathbb{R}^2$*.*

Означення 3.3 *Узагальненим кусково-сталим* k*-періодичним за Шарковським розв'язком крайової задачі (41)–(46) називається її узагальнений кусково-сталий розв'язок* $(u;v)$ *такий, що для будь-яких довільних значень* $(x,t)\in[0;1]\times\mathbb{R}^+$ *мають місце рівності* $u(x,t+k^1)=u(x,t)$*,* $v(x,t+k^2)=v(x,t)$ *і при цьому* k^1*,* k^2 *є найменшими серед чисел, для яких виконується відповідна рівність,* *та має місце співвідношення* $k = \max_{(}\{k^1, k^2\}$*, де символ “* $<$ *” визначає порядок Шарковського на множині натуральних чисел:*

$$1 < 2 < 2^2 < 2^3 < \ldots < 2^2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 3 < \ldots < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 3 < \ldots < 9 < 7 < 5 < 3.$$

Надалі узагальнені кусково-сталі k-періодичні за Шарковським розв’язки крайової задачі (41)–(46) називатимемо узагальненими кусково-сталими k-періодичними розв’язками крайової задачі (41)–(46).

Відповідь на питання співіснування узагальнених кусково-сталих k-періодичних за Шарковським розв’язків крайової задачі (41)–(46) дає наступна теорема, яка є аналогом теореми Шарковського про співіснування циклів неперервного відображення [37].

Теорема 3.1 *Нехай функція* $f \in C^0(I, I)$ *і має кусково неперервну першу похідну, а початкові функції* $\varphi(x) = \varphi \in$ R*, якщо* $x \in (0;1]$*,* $\varphi(0) = \psi \in$ R*,* $\psi(x) = \psi$*, якщо* $x \in [0;1)$*,* $\psi(1) = f(\varphi)$*. Якщо крайова задача (41)–(46) має узагальнений кусково-сталий* k*-періодичний за Шарковським розв’язок, то крайова задача (41)–(44) має узагальнений кусково-сталий* k'*-періодичний за Шарковським розв’язок такий, що* $k' < k$*, де символ* "<" *визначає порядок Шарковського на множині натуральних чисел (2).*

Доведення теореми 3.1. Використовуючи метод характеристик для знаходження розв’язків крайової задачі (41)–(46), зведемо її до різницевого рівняння з неперервним аргументом.

Загальний розв’язок рівняння (41) можна записати за допомогою формули типу Д’Аламбера:

$$u(x,t) = y_1(t - x), \tag{51}$$

де $y_1 \in C^1([-1;+\infty),R)$ – довільна функція, а загальний розв’язок рівняння (42) у наступному вигляді:

$$v(x,t) = y_2(t + x), \tag{52}$$

де $y_2 \in C^1(\mathrm{R}_0^+;\mathrm{R})$ – довільна функція.

Підставляючи (51) і (52) у крайову умову (43) отримаємо наступну рівність:

$$y_1(t) = y_2(t),$$

де $t \in \mathrm{R}_0^+$.

Отже, рівності (51) і (52) можна переписати у наступному вигляді:

$$u(x,t) = y(t-x), \tag{53}$$

$$v(x,t) = y(t+x), \tag{54}$$

де $y \in C^1(\mathrm{R}_0^+;\mathrm{R})$ – довільна функція така, що для довільного $t \in \mathrm{R}_0^+$ виконуються рівності $y(t) = y_1(t) = y_2(t)$.

Отримавши розв'язок рівнянь (41), (42) у вигляді (53), (54) зведемо крайову задачу (41)–(46) до різницевого рівняння з неперервним часом. Підставляючи (53), (54) у крайову умову (44) та використовуючи властивість характеристик рівнянь (41), (42), одержимо автономне різницеве рівняння з неперервним аргументом:

$$y(\tau+2) = f(y(\tau)), \tag{55}$$

де $\tau \in [-1;+\infty)$.

Використовуючи (53), (54) та (45), (46), отримаємо початкову умову для різницевого рівняння (55):

$$y(\tau) = \begin{cases} \varphi(-\tau), & \tau \in [-1;0); \\ \psi(\tau), & \tau \in [0;1]. \end{cases} \tag{56}$$

Рівняння (55) з початковою умовою (56) має загальний розв'язок, який можна записати наступним чином:

$$y(\tau) = \begin{cases} f^n(\varphi(\{|\tau|\})), & \tau \in [2n-1;2n); \\ f^n(\psi(\{\tau\})), & \tau \in [2n;2n+1). \end{cases} \tag{57}$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$.

Використовуючи формули (53) і (54), що пов'язують розв'язок крайової задачі (41)–(46) і різницевого рівняння з неперервним аргументом (55) з початковою умовою (56), з (57) отримаємо загальний розв'язок задачі (41)–(46):

$$u(x,t) = \begin{cases} f^{[|t-x|]}(\varphi(\{|t-x|\})), & (x,t) \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} A_i; \\ f^{[t-x]}(\psi(\{t-x\})), & (x,t) \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} B_i, \end{cases} \tag{58}$$

$$v(x,t) = \begin{cases} f^{[t+x]}(\varphi(\{t+x\})), & (x,t) \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} C_i; \\ f^{[t+x]}(\psi(\{t+x\})), & (x,t) \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}} D_i, \end{cases} \tag{59}$$

де

$$A_i = \{(x,t) \in [0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \mid t - x = \alpha + 2i - 1\},$$

$$B_i = \{(x,t) \in [0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \mid t - x = \alpha + 2i\},$$

$$C_i = \{(x,t) \in [0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \mid t + x = \alpha + 2i + 1\},$$

$$D_i = \{(x,t) \in [0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \mid t + x = \alpha + 2i\},$$

$\alpha \in [0;1)$, для довільного дійсного числа $x \in \mathbb{R}$ вираз $[x]$ означає цілу числа x, а вираз $\{x\}$ – дробову частину числа x.

Оскільки функції φ і ψ з початкових умов (45) і (46) є кусково-сталими, а саме: $\varphi(x) = \varphi \in \mathbb{R}$, якщо $x \in (0;1]$ і $\varphi(0) = \psi \in \mathbb{R}$, де φ, ψ – фіксовані дійсні числа, $\psi(x) = \psi$, якщо $x \in [0;1)$ і $\psi(1) = f(\varphi)$, то різницеве рівняння з неперервним аргументом (55) з початковою умовою (56) визначається дискретним різницевим рівнянням вигляду:

$$y(n+2) = f(y(n)), \tag{60}$$

де $n \geq -1$, $n \in \mathbb{Z}$, з початковими умовами:

$$v(-1) = \varphi, \tag{61}$$

$$v(0) = \psi. \tag{62}$$

Для неперервної функції f з правої частини рівняння (60) виконується теорема Шарковського про співіснування циклів [37], згідно з якою з наявності у неперервного відображення відрізку циклу порядку k випливає наявність циклу періоду k' такого, що $k' < k$, де символ "$<$" задає порядок вигляду $1 < 2 < 2^2 < 2^3 < \ldots < 2^2 \cdot 5 < 2^2 \cdot 3 < \ldots < 2 \cdot 5 < 2 \cdot 3 < \ldots < 9 < 7 < 5 < 3$ на множині натуральних чисел.

Якщо відображення f має цикли періодів k^1 і k^2, то воно також має цикл довільного періоду k' такого, що $k' < \max\{k^1;k^2\}$.

Оскільки різницеве рівняння з дискретним аргументом (60) та початковими значеннями (61), (62) визначає різницеве рівняння з неперервним аргументом (55) та початковою функцією (56), які є результатами редукції крайової задачі (41)–(46), то, використовуючи означення 3.3 періодичності вектор-функції за Шарковським, отримаємо, що з існування циклу періоду k', де $k' < n$, для дискретного відображення слідує існування узагальненого кусково-сталого k'-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (41)–(46), де $n' < n$.

Теорему 3.1 доведено.

Для того, щоб отримати аналітичний вигляд узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків крайової задачі (41)–(46), крім означення 3.3 періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (41)–(46), сформулюємо означення періодичного у геометричному сенсі розв'язку крайової задачі (41)–(46).

Означення 3.4 *Узагальненим кусково-сталим $2n$-періодичним у геометричному сенсі розв'язком крайової задачі (41)–(46) називається її узагальнений кусково-сталий розв'язок $(u;v)$ такий, що для будь-яких довільних значень $(x,t) \in [0;1] \times \mathrm{R}^+$ мають місце рівності $u(x,t+k^1) = u(x,t)$, $v(x,t+k^2) = v(x,t)$ і при цьому k^1, k^2 є найменшими серед чисел, для яких виконується відповідна рівність, та має місце співвідношення $2n = \gamma\zeta\square$.*

Тут використано скорочення НСК – найменше спільне кратне.

Зауваження 3.1 *У означеннях 3.3 і 3.4 періодичного розв'язку крайової задачі (41)–(46) кожна з компонент вектор-функції розв'язку повинна бути періодичною функцією за другим аргументом, але значення періоду у кожному з цих означень обчислюється по-різному.*

Запишемо узагальнений періодичний розв'язок крайової задачі (41)–(46) у аналітичному вигляді.

Розглянемо узагальнений кусково-сталий $2n$-періодичний у геометричному сенсі розв'язок $(u;v)$ крайової задачі (41)–(46). Сталі φ, ψ з початкових умов (45) і (46) є періодичними точками відображення f з крайової умови (44).

Визначимо множини $\underline{D_{i+2nk}}$, $\overline{D_{i+2nk}}$ де $i,k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, $0 \le i \le 2n-1$, наступним чином:

$$\underline{D_{i+2nk}} = \{(x,t) \in [0;1] \times \mathrm{R}_0^+ \mid t - x = \alpha + i - 1 + 2nk, \alpha \in [0;1)\},$$

$$\overline{D_{i+2nk}} = \{(x,t) \in [0;1] \times \mathrm{R}_0^+ \mid t + x = \alpha + i + 2nk, \alpha \in [0;1)\}.$$

З початкових умов (45), (46) випливають, зокрема, рівності $u(0;0) = v(0;0) = \psi$, з яких, використовуючи зображення розв'язку (58), (59), одержуємо аналітичне зображення узагальненого $2n$-періодичного у геометричному сенсі розв'язку крайової задачі (41)–(46).

$$
u(x,t) = \begin{cases}
\varphi, & (x,t) \in \underline{D_{2nk}}; \\
\psi, & (x,t) \in \underline{D_{1+2nk}}; \\
f(\varphi), & (x,t) \in \underline{D_{2+2nk}}; \\
f(\psi), & (x,t) \in \underline{D_{3+2nk}}; \\
\ldots & \\
f^{i}(\varphi), & (x,t) \in \underline{D_{2i+2nk}}; \\
f^{i}(\psi), & (x,t) \in \underline{D_{2i+1+2nk}}; \\
\ldots & \\
f^{n-1}(\varphi), & (x,t) \in \underline{D_{2n-2+2nk}}, \\
f^{n-1}(\psi), & (x,t) \in \underline{D_{2n-1+2nk}},
\end{cases} \tag{63}
$$

$$
v(x,t) = \begin{cases}
\psi, & (x,t) \in \overline{D_{2nk}}; \\
f(\varphi), & (x,t) \in \overline{D_{1+2nk}}; \\
f(\psi), & (x,t) \in \overline{D_{2+2nk}}; \\
f^{2}(\varphi), & (x,t) \in \overline{D_{3+2nk}}; \\
\ldots & \\
f^{i}(\psi), & (x,t) \in \overline{D_{2i+2nk}}; \\
f^{i+1}(\varphi), & (x,t) \in \overline{D_{2i+1+2nk}}; \\
\ldots & \\
f^{n-1}(\psi), & (x,t) \in \overline{D_{2n-2+2nk}}, \\
\varphi, & (x,t) \in \overline{D_{2n-1+2nk}},
\end{cases} \tag{64}
$$

Співіснування за періодами узагальнених k-періодичних за Шарковським кусково-сталих розв’язків крайової задачі (41)–(46), встановлене у теоремі 3.1 є надто загальним і не дає змоги зрозуміти, які саме розв’язки співіснують.

Аналогічно поняттям типу, моделі типу та ваги моделі типу узагальненого періодичного розв’язку крайової задачі (27)–(29), сформулюємо означення поняття типу, моделі типу та ваги моделі типу узагальненого періодичного розв’язку крайової задачі (41)–(46).

Означення 3.5 *Типом узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (41)–(46) називається тип тієї періодичної точки відображення f з крайової умови (44) серед φ, ψ, період якої дорівнює k.*

З означення 3.5 випливає, що аналітичне зображення (63), (64) узагальненого $2n$–періодичного у геометричному сенсі розв'язку крайової задачі (41)–(46) має тип, що дорівнює типу тієї періодичної точки серед φ, ψ, період якої співпадає зі значенням періоду за Шарковським цього узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку крайової задачі (41)–(46).

Означення 3.6 *Моделлю типу узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (41)–(46) називається модель типу циклу, якому відповідає опукла циклічна перестановка, період якої дорівнює k. Якщо ця перестановка має дві моделі типу циклу, то обирається та з них, вага якої більша.*

Означення 3.7 *Вагою моделі типу узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (41)–(46) називається вага моделі типу цього розв'язку.*

Використовуючи відношення лінійного на множині опуклих циклічних перестановок Π, отримаємо, що має місце наступна теорема.

Теорема 3.2 *Нехай функція $f \in C^0(I,I)$ і має кусково неперервну першу похідну, а початкові функції $\varphi(x) = \varphi \in \mathrm{R}$, якщо $x \in (0;1]$, $\varphi(0) = \psi \in \mathrm{R}$, $\psi(x) = \psi$, якщо $x \in [0;1)$, $\psi(1) = f(\varphi)$. Якщо крайова задача (41)–(46) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi_1 \in \Pi$, то крайова задача (41)–(44)*

має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi_2 \in \Pi$*, де* $\pi_1 \quad \pi_2$.

Доведення теореми 3.2. Нехай $(u;v)$ – узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу π_1 крайової задачі (41)–(46). З означення типу узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку випливає, що одне зі значень кусково-сталих функцій з початкових умов (45), (46) є періодичною точкою типу $\pi_1 \in \Pi$ відображення f. Не втрачаючи загальності вважатимемо, що точка φ з початкової умови (45) є періодичною точкою типу $\pi_1 \in \Pi$ відображення f. Аналогічно доведенню теореми 3.1, використовуючи формулу Д'Аламбера та кусково-сталість функції у початкових умовах (45), (46) крайову задачу (41)–(46) зведемо до різницевого рівняння з дискретним аргументом (60) та початковими умовами (61), (62), де $v(-1)=\varphi$. Тут φ – стала з початкової умови (45).

Оскільки π_1 – тип узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку крайової задачі (41)–(46), то внаслідок редукції до різницевого рівняння (60) –(62), π_1 є типом циклу неперервного відображення f. Використаємо теорему 7.1, у якій йдеться, про те, що у випадку, коли неперервне відображення відрізку має цикл типу опуклої циклічної перестановки, то воно також має цикл більшого типу згідно відношення порядку на множині опуклих циклічних перестановок. Враховуючи, що $\pi_1 \in \Pi$ і $f \in C^0(I,I)$, отримаємо, що неперервне відображення f також має цикл типу $\pi_2 \in \Pi$, де $\pi_1 \quad \pi_2$.

Знову використаємо зв'язок розглядуваної крайової задачі з динамікою відображення f. Оскільки f має цикл типу π_2, то, не втрачаючи загальності, вважатимемо, що різницеве рівняння з дискретним аргументом (60) та початковими умовами $v(-1)=\varphi'$, $v(0)=\psi'$, де φ' – періодична точка типу π_2 відображення f, а тип періодичної точки ψ' менший за лінійним порядком на множині опуклих циклічних перестановок, ніж тип точки φ', відповідає крайовій задачі (41)–(46) з початковою умовою $\varphi(x)=\varphi' \in \mathrm{R}$, якщо $x \in (0;1]$, $\varphi(0)=\psi' \in \mathrm{R}$,

$\psi(x) = \psi'$, якщо $x \in [0;1)$, $\psi(1) = f(\varphi')$.

З останнього випливає, що крайова задача (41), (42) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi_2 \in \Pi$, де $\pi_1 \quad \pi_2$.

Теорему 3.2 доведено.

Зауваження 3.2 *Згідно з означенням типу узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку крайової задачі (41)–(46) у теоремі 3.2 фактично йде мова про співіснування за типом лише однієї з компонент вектор-функції розв'язку цієї задачі. Це зроблено для того, щоб не ускладнювати формулювання цієї теореми. Що стосується типу іншої компоненти вектор-функції розв'язку крайової задачі (41)–(46), то він може бути таким, що його вага не менша за вагу компоненти, тип якої дорівнює типу цього узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку.*

Враховуючи зауваження 3.2, теорему 3.2 можна переформулювати наступним чином.

Теорема 3.3 *Нехай функція $f \in C^0(I, I)$ і має кусково неперервну першу похідну, а початкові функції $\varphi(x) = \varphi \in \mathrm{R}$, якщо $x \in (0;1]$, $\varphi(0) = \psi \in \mathrm{R}$, $\psi(x) = \psi$, якщо $x \in [0;1)$, $\psi(1) = f(\varphi)$. Якщо крайова задача (41)–(46) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi_1 \in \Pi$, то крайова задача (41)–(44) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок, кожна з компонент якого має тип, вага якого не менша за вагу типу π_1.*

Доведення теореми 3.3 проводиться аналогічно доведенню теореми 3.2.

Результати, аналогічні сформульованим у теоремах 3.1 і 3.2, можна легко застосувати для дослідження співіснування узагальнених періодичних розв'язків крайової задачі для хвильового рівняння з відповідними крайовими умовами, адже крайова задача (41)–(46) є прикладом симетричної гіперболічної системи рівнянь з частинними похідними, а такі системи є узагальненням гіперболічних рівнянь другого порядку.

3.4. Приклад узагальненого періодичного розв'язку крайової задачі для симетричної гіперболічної системи двох рівнянь з частинними похідними

Розглянемо приклад узагальненого періодичного розв'язку крайової задачі (41)–(46). Для цього оберемо функцію f з крайової умови (44) рівною тент-відображенню (1).

Динамічна система, яку породжує відображення (1) $x \to f(x)$, $x \in [0;1]$, у випадку, коли $n = p$, де p – просте число, має $(2^p - 2)/p$ різних циклів періоду p.

Як відомо, відображення (1) має цикли всіх періодів. Отже, потужність множини циклів відображення $x \to f(x)$ є достатньою для того, аби обрати функцію (1) у якості функції з крайової умови (44).

Надалі розглядається задача (41)–(46) з крайовою умовою (44), де функція f має вигляд (1), та початковими умовами (45), (46), що визначаються рівностями $\varphi(x) = \frac{2}{5}$, якщо $x \in (0;1]$, $\varphi(0) = \frac{2}{15}$, $\psi(x) = \frac{2}{15}$, якщо $x \in [0;1)$, $\psi(1) = \frac{4}{5}$.

Число $\frac{2}{5}$ є мінімальною точкою циклу періоду 2 відображення (1), що складається з точок $\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$, а число $\frac{2}{15}$ – мінімальною точкою циклу періоду 4 відображення (1), що складається з точок $\{\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{14}{15}\}$.

За допомогою формул (63), (64) узагальнений 4-періодичний за Шарковським розв'язок розглядуваної крайової задачі (41)–(46) можна записати у вигляді:

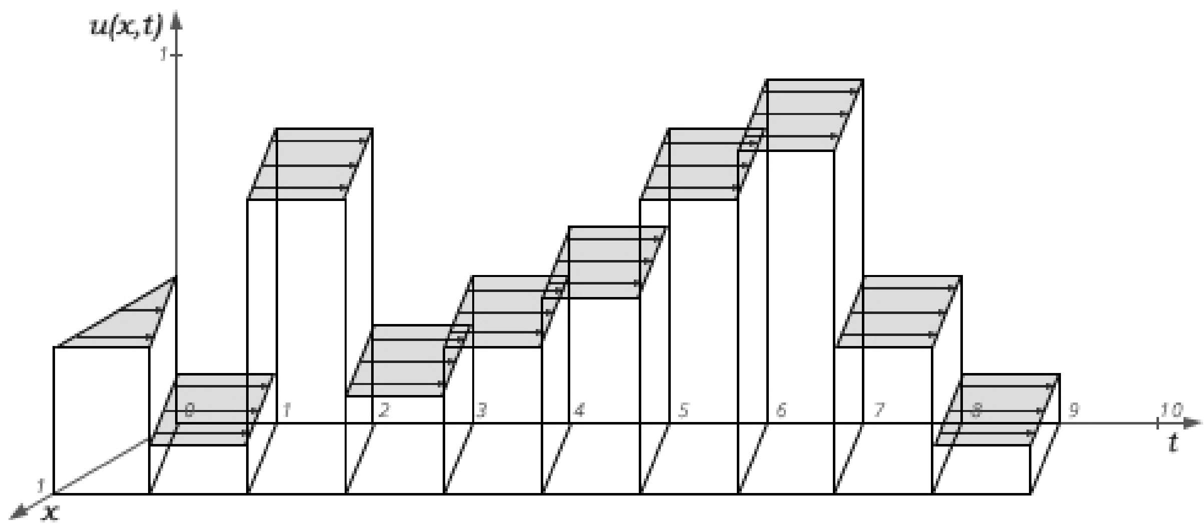
$$u(x;t)=\begin{cases}\frac{2}{5}, & (x,t)\in \underline{D_0},\\ \frac{2}{15}, & (x,t)\in \underline{D_1},\\ \frac{4}{5}, & (x,t)\in \underline{D_2},\\ \frac{4}{15}, & (x,t)\in \underline{D_3},\\ \frac{2}{5}, & (x,t)\in \underline{D_4},\\ \frac{8}{15}, & (x,t)\in \underline{D_5},\\ \frac{4}{5}, & (x,t)\in \underline{D_6},\\ \frac{14}{15}, & (x,t)\in \underline{D_7},\end{cases} \tag{65}$$

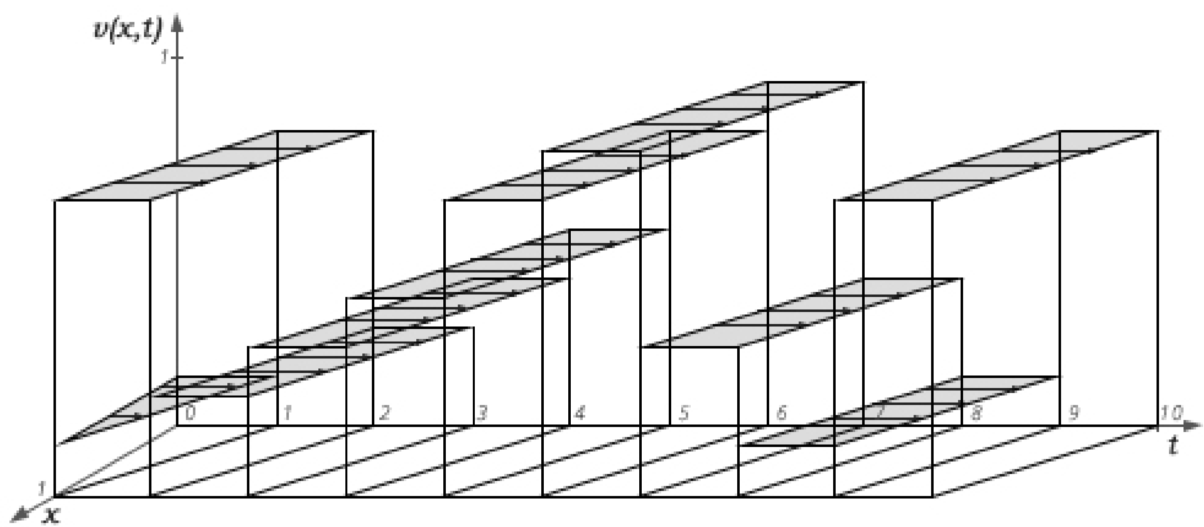
$$v(x;t)=\begin{cases}\frac{2}{15}, & (x,t)\in \overline{D_0},\\ \frac{4}{5}, & (x,t)\in \overline{D_1},\\ \frac{4}{15}, & (x,t)\in \overline{D_2},\\ \frac{2}{5}, & (x,t)\in \overline{D_3},\\ \frac{8}{15}, & (x,t)\in \overline{D_4},\\ \frac{4}{5}, & (x,t)\in \overline{D_5},\\ \frac{14}{15}, & (x,t)\in \overline{D_6},\\ \frac{2}{5}, & (x,t)\in \overline{D_7}.\end{cases} \tag{66}$$

З теореми 3.2 випливає, що крайова задача (41)–(46) має також узагальнені періодичні за Шарковським розв’язки періодів, більших ніж 4 згідно порядку (2).

Враховуючи, що відображення (1) має цикли всіх періодів, отримаємо, що крайова задача (41)–(46) має узагальнені періодичні за Шарковським розв’язки будь-якого періоду.

Використовуючи формули (65), (66), отриманий узагальнений періодичний за Шарковським розв'язок задачі (41)–(46) з визначеними вище крайовими та початковими умовами можна зобразити графічно наступним чином:





3.5. Співіснування узагальнених періодичних розв'язків крайової задачі для симетричної гіперболічної системи рівнянь з частинними похідними з однаковими функціями у нелінійних крайових умовах

Розглянемо узагальнення крайової задачі (41)–(46), де замість системи двох диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, розглядається система $2n$ рівнянь. Таке узагальнення є проміжним етапом, який необхідний для проведення міркувань у наступному підрозділі дисертації.

Отже, розглянемо нелінійну крайову задачу для симетричної гіперболічної системи $2n$ рівнянь з частинними похідними, що складається з лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними:

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x}=0,\ x\in(0;1),\ t\in \mathrm{R}^+, \tag{67}$$

$$\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x}=0,\ x\in(0;1),\ t\in \mathrm{R}^+, \tag{68}$$

крайових умов:

$$u_i(0,t)=v_i(0,t), t\in \mathrm{R}_0, \tag{69}$$

$$v_i(1,t)=f(u_i(1,t)), t\in \mathrm{R}_0, \tag{70}$$

початкових умов:

$$u_i(x,0)=\varphi_i(x),\ x\in[0;1], \tag{71}$$

$$v_i(x,0)=\psi_i(x),\ x\in[0;1]. \tag{72}$$

Тут $f\in C^0(I,I)$, а її перша похідна є кусково неперервною, $\varphi_i(x)=\varphi_i\in \mathrm{R}$, якщо $x\in(0;1]$, $\varphi_i(0)=\psi_i\in \mathrm{R}$, $\psi_i(x)=\psi_i$, якщо $x\in[0;1)$, $\psi_i(1)=f(\varphi_i)$, $1\le i\le n$, $\mathrm{R}_0^+=\mathrm{R}^+\cup\{0\}$.

Розв’язок диференціальних рівнянь з частинними похідними (67), (68) можна записати за допомогою формули типу Д’Аламбера. Тому, обравши функції $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, де $1\le i\le n$, з початкових умов (71), (72) спеціальним чином кусково-сталими, дослідження розв’язку цієї крайової задачі зведемо до вивчення динаміки одновимірного неперервного відображення f з крайових умов (70). У такому випадку вектор-функція, відповідні компоненти якої задовольняють рівності (67)–(72), складається з періодичних кусково-сталих функцій з розривами першого роду вздовж характеристик рівнянь (67), або рівнянь (68).

Зауважимо, що крайова задача (67)–(72), у якій функції $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, де $1\le i\le n$, з початкових умов (71), (72) є кусково-сталими, може бути використана у якості феноменологічної моделі генератора цифрових сигналів.

З крайових умов (69), (70) випливає, що поведінку розв'язків крайової задачі (67)–(72) визначають прямі $t = x + j$, $t = -x + j$, де $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, які паралельні характеристикам рівнянь (67), (68).

Оскільки крайова задача (67)–(72) визначена на множині $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, t \ge 0\}$, то замість прямих $t = x + j$, $t = -x + j$ доцільно розглядати множини (47), (48).

Означення 5.1 *Узагальненим розв'язком крайової задачі (67)–(72) називається вектор-функція довжини* $2n$ *вигляду*

$$(u_1; v_1; \ldots; u_i; v_i; \ldots; u_n; v_n),$$

де функції $u_i : [0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $v_i : [0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, мають такі властивості:

1) функції u_i є неперервно диференційовними в кожній області $\underline{D_j}$ (49), $j \in \mathbb{N}$, і задовольняють у ній рівняння (67), а функції v_i є неперервно диференційовними в кожній області $\overline{D_j}$ (50), $j \in \mathbb{N}$, і задовольняють у ній рівняння (68);

2) функції u_i є неперервними на кожній множині $\underline{D_{j+1}} \cup \underline{P_j}$, а функції v_i є неперервними на кожній множині $\overline{D_{j+1}} \cup \overline{P_j}$;

3) функції u_i, v_i задовольняють крайові умови (69), (70) для всіх $t \in \mathbb{R}_0^+$;

4) функції u_i, v_i задовольняють початкові умови (71), (72) для довільних значень $x \in [0;1]$.

Означення 5.2 *Узагальненим кусково-сталим розв'язком крайової задачі (67)–(72) називається її узагальнений розв'язок* $(u_1; v_1; \ldots; u_i; v_i; \ \ldots; u_n; v_n)$ *такий, що вектор-функція* $(u_1; v_1; \ldots; u_i; v_i; \ldots; u_n; v_n)$ *приймає лише скінченну множину значень з множини* $\mathbb{R}^{2n}$.

Означення 5.3 *Узагальненим кусково-сталим* k*-періодичним за Шарковським розв'язком крайової задачі (67)–(72) називається її узагальнений* *кусково-сталий розв'язок* $(u_1;v_1;\ldots;u_i;v_i;\ldots;u_n;v_n)$ *такий, що для будь-яких довільних значень* $(x,t)\in[0;1]\times\mathbb{R}^+$ *мають місце рівності* $u_i(x,t+k_i^1)=u_i(x,t)$, $v_i(x,t+k_i^2)=v_i(x,t)$, $1\le i\le n$, *і при цьому* k_i^1, k_i^2 *є найменшими серед чисел, для яких виконується відповідна рівність, та має місце співвідношення* $k=\max_{\prec}\{k_1^1,k_1^2,\ldots,k_i^1,k_i^2,\ldots,k_n^1,k_n^2\}$, *де символ "*$\prec$*" визначає порядок Шарковського на множині натуральних чисел (2).*

Надалі узагальнені кусково-сталі k-періодичні за Шарковським розв'язки крайової задачі (67)–(72) називатимемо узагальненими кусково-сталими k-періодичними розв'язками крайової задачі (67)–(72).

Відповідь на питання співіснування узагальнених кусково-сталих k-періодичних за Шарковським розв'язків крайової задачі (67)–(72) дає наступна теорема, яка є аналогом теореми Шарковського про співіснування циклів неперервного відображення [37].

Теорема 5.1 *Нехай* $f\in C^0(I,I)$ *і має кусково неперервну першу похідну,* $\varphi_i(x)=\varphi_i\in\mathbb{R}$, *якщо* $x\in(0;1]$, $\varphi_i(0)=\psi_i\in\mathbb{R}$, $\psi_i(x)=\psi_i$, *якщо* $x\in[0;1)$, $\psi_i(1)=f(\varphi_i)$, $1\le i\le n$. *Якщо крайова задача (67)–(72) має узагальнений кусково-сталий* k*-періодичний за Шарковським розв'язок, то крайова задача (67)–(70) має узагальнений кусково-сталий* k'*-періодичний за Шарковським розв'язок такий, що* $k'\prec k$, *де символ "*$\prec$*" визначає порядок Шарковського на множині натуральних чисел.*

Доведення теореми 5.1 полягає у тому, що для кожної i-ої компоненти задачі (67)–(70), що складається з двох лінійних диференціальних рівнянь, крайових та початкових умов з відповідним номером i, проводяться міркування, які аналогічні міркуванням при доведенні теореми 3.1, де розглядалася нелінійна крайова задача для системи двох рівнянь.

Для того, щоб отримати аналітичний вигляд узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків крайової задачі (67)–(72), крім означення 5.3 періодичного за Шарковським розв’язку крайової задачі (67)–(72), сформулюємо означення періодичного у геометричному сенсі розв’язку крайової задачі (67)–(72).

Означення 5.4 *Узагальненим кусково-сталим* $2n$*-періодичним у геометричному сенсі розв’язком крайової задачі (41)–(46) називається її узагальнений кусково-сталий розв’язок* $(u_1, v_1, \ldots, u_i,\ \ v_i, \ldots, u_n, v_n)$ *такий, що для будь-яких довільних значень* $(x,t) \in [0;1] \times \mathrm{R}^+$ *мають місце рівності* $u_i(x, t+k_i^1) = u_i(x,t)$, $v_i(x, t+k_i^2) = v_i(x,t)$, $1 \le i \le n$, *і при цьому* k_i^1, k_i^2 *є найменшими серед чисел, для яких виконується відповідна рівність, та має місце співвідношення* $n = \gamma\zeta\square_1^2, \ldots, k_i^1, k_i^2, \ldots, k_n^1, k_n^2)$.

Тут використано скорочення НСК – найменше спільне кратне.

Зауваження 5.1 *У обидвох означеннях 5.3 і 5.4 періодичного розв’язку крайової задачі (67)–(72) кожна з компонент вектор-функції розв’язку повинна бути періодичною функцією за другим аргументом, але значення періоду у кожному з цих означень обчислюється по-різному.*

Для узагальненого кусково-сталого $2n$-періодичного у геометричному сенсі розв’язку крайової задачі (67)–(70), що є вектор-функцією, яка складається з n пар функцій, вигляду $(u_1; v_1; \ldots; u_i; v_i; \ldots; u_n; v_n)$, для кожної пари функцій вигляду $(u_i; v_i)$ мають місце всі ті ж самі міркування стосовно множин $\underline{D_{i+2nk}}$, $\overline{D_{i+2nk}}$ де $i, k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, $0 \le i \le 2n-1$, та аналітичне зображення кожної такої пари функцій вигляду (63), (64). Таким чином можна побудувати аналітичне зображення узагальненого $2n$-періодичного розв’язку крайової задачі (67)–(70).

Співіснування за періодами узагальнених k-періодичних за Шарковським кусково-сталих розв’язків крайової задачі (67)–(72), встановлене у теоремі 5.1, є надто загальним і не дає змоги зрозуміти, які саме розв’язки співіснують.

Аналогічно поняттям типу, моделі типу та ваги моделі типу узагальненого періодичного розв’язку крайових задач (27)–(29) і (41)–(46), введено поняття типу, моделі типу та ваги моделі типу узагальненого періодичного розв’язку крайової задачі (67)–(72).

Означення 5.5 *Типом узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (67)–(72) називається тип тієї періодичної точки відображення f з крайової умови (70) серед φ_i, ψ_i, $1 \le i \le n$, період якої дорівнює k.*

З означення 5.5 випливає, що аналітичне зображення узагальненого $2n$– періодичного у геометричному сенсі розв'язку крайової задачі (67)–(72) має тип, що дорівнює типу тієї періодичної точки серед φ_i, ψ_i, період якої співпадає зі значенням періоду за Шарковським цього узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку крайової задачі (67)–(72).

Означення 5.6 *Моделлю типу узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (67)–(72) називається модель типу циклу, якому відповідає опукла циклічна перестановка, період якої дорівнює k. Якщо ця перестановка має дві моделі типу циклу, то обирається та з них, вага якої більша.*

Означення 5.7 *Вагою моделі типу узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (67)–(72) називається вага моделі типу цього розв'язку.*

Використовуючи відношення лінійного на множині опуклих циклічних перестановок Π, отримаємо, що має місце наступна теорема.

Теорема 5.2 *Нехай $f \in C^0(I,I)$ і має кусково неперервну першу похідну, $\varphi_i(x) = \varphi_i \in \mathbb{R}$, якщо $x \in (0;1]$, $\varphi_i(0) = \psi_i \in \mathbb{R}$, $\psi_i(x) = \psi_i$, якщо $x \in [0;1)$, $\psi_i(1) = f(\varphi_i)$, $1 \le i \le n$. Якщо крайова задача (67)–(72) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi_1 \in \Pi$, то крайова задача (67)–(70) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу $\pi_2 \in \Pi$, де $\pi_1 \quad \pi_2$.*

Доведення теореми 5.2 повторює доведення аналогічної теореми 3.2 для нелінійної крайової задачі для системи двох рівнянь.

Зауваження 5.2 *Згідно з означенням типу узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку крайової задачі (67)–(72) у теоремі 5.2 фактично йде мова про співіснування за типом лише однієї з компонент вектор-функції розв'язку цієї задачі. Це зроблено для того, щоб не ускладнювати формулювання цієї теореми. Що стосується типів інших компонент вектор-функції розв'язку крайової задачі (67)–(72), то вони можуть бути будь-якими такими, що їх вага не менша за вагу компоненти, тип якої дорівнює типу цього узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку.*

Враховуючи зауваження 5.2, теорему 5.2 можна переформулювати наступним чином.

Теорема 5.3 *Нехай* $f \in C^0(I,I)$ *і має кусково неперервну першу похідну,* $\varphi_i(x) = \varphi_i \in \mathrm{R}$*, якщо* $x \in (0;1]$*,* $\varphi_i(0) = \psi_i \in \mathrm{R}$*,* $\psi_i(x) = \psi_i$*, якщо* $x \in [0;1)$*,* $\psi_i(1) = f(\varphi_i)$*,* $1 \le i \le n$*. Якщо крайова задача (67)–(72) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу* $\pi_1 \in \Pi$*, то крайова задача (67)–(70) також має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок, кожна з компонент якого має тип, вага якого не менша за вагу типу* π_1*.*

Доведення теореми 5.3 аналогічне доведенню теореми 5.2.

3.6. Співіснування узагальнених періодичних розв'язків крайової задачі для симетричної гіперболічної системи рівнянь з частинними похідними з різними функціями у нелінійних крайових умовах

Розглянемо нелінійну крайову задачу для симетричної гіперболічної системи $2n$ рівнянь з частинними похідними, що складається з лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними:

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} = 0,\ x \in (0;1),\ t \in \mathrm{R}^+, \qquad (73)$$

$$\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x} = 0,\ x \in (0;1),\ t \in \mathrm{R}^+, \tag{74}$$

крайових умов:

$$u_i(0,t) = v_i(0,t), t \in \mathrm{R}_0^+, \tag{75}$$

$$v_i(1,t) = f_i(u_i(1,t)), t \in \mathrm{R}_0^+, \tag{76}$$

початкових умов:

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), x \in (0;1), \tag{77}$$

$$v_i(x,0) = \psi_i(x), x \in (0;1). \tag{78}$$

Тут $f_i \in C^0(I,I)$, $1 \le i \le n$, а їх перші похідні є кусково неперервними, $\varphi_i(x) = \varphi_i \in \mathrm{R}$, якщо $x \in (0;1]$, $\varphi_i(0) = \psi_i \in \mathrm{R}$, $\psi_i(x) = \psi_i$, якщо $x \in [0;1)$, $\psi_i(1) = f_i(\varphi_i)$, $1 \le i \le n$, $\mathrm{R}_0^+ = \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$.

Загальний розв'язок диференціальних рівнянь з частинними похідними (73), (74) можна записати за допомогою формули типу Д'Аламбера. Тому обравши функції $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, де $1 \le i \le n$, з початкових умов (77), (78) спеціальним чином кусково-сталими, дослідження розв'язку цієї крайової задачі можна звести до дослідження динаміки відповідних одновимірних неперервних відображень f_i з крайових умов (76). У такому випадку вектор-функція, відповідні компоненти якої задовольняють рівності (73)–(78), складається з періодичних кусково-сталих функцій з розривами першого роду вздовж характеристик рівнянь (73), або рівнянь (74).

Зауважимо, що крайова задача (73)–(78), у якій функції $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, де $1 \le i \le n$, з початкових умов (77), (78) є кусково-сталими, може бути використана у якості феноменологічної моделі генератора цифрових сигналів.

Нехай фіксовані дійсні числа φ_i, ψ_i, $1 \le i \le n$, з початкових умов (77), (78) є періодичними точками відповідних (за номером) відображень f_i з крайових умов (70).

З крайових умов (75), (76) випливає, що поведінку розв’язків крайової задачі (73)–(78) визначають прямі $t = x + j$, $t = -x + j$, де $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, які паралельні характеристикам системи рівнянь (73), (74). Оскільки крайова задача (73)–(78) визначена на множині $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, t \ge 0\}$, то замість прямих $t = x + j$, $t = -x + j$ доцільно розглядати множини (47), (48).

Означення 6.1 *Узагальненим розв’язком крайової задачі (73)–(78) називається вектор-функція довжини* $2n$ *вигляду*

$$(u_1; v_1; \ldots; u_i; v_i; \ldots; u_n; v_n),$$

де функції $u_i : [0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $v_i : [0;1] \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, мають такі властивості:

1) функції u_i є неперервно диференційовними в кожній області $\underline{D_j}$ (49), $j \in \mathbb{N}$, і задовольняють у ній рівняння (73), а функції v_i є неперервно диференційовними в кожній області $\overline{D_j}$ (50), $j \in \mathbb{N}$, і задовольняють у ній рівняння (74);

2) функції u_i є неперервними на кожній множині $\underline{D_{j+1}} \cup \underline{P_{j+1}}$, а функції v_i є неперервними на кожній множині $\overline{D_j} \cup \overline{P_j}$;

3) функції u_i, v_i задовольняють крайові умови (75), (76) для всіх $t \in \mathbb{R}_0^+$;

4) функції u_i, v_i задовольняють початкові умови (77), (78) для довільних значень $x \in [0;1]$.

Означення 6.2 *Узагальненим кусково-сталим розв’язком крайової задачі (73)–(78) називається її узагальнений розв’язок* $(u_1; v_1; \ldots; u_i; v_i; \ldots; u_n; v_n)$ *такий, що вектор-функція* $(u_1; v_1; \ldots; u_i; v_i; \ldots; u_n; v_n)$ *приймає лише скінченну множину значень з множини* $\mathbb{R}^{2n}$.

Означення 6.3 *Узагальненим кусково-сталим* k*-періодичним за Шарковським розв’язком крайової задачі (73)–(78), де*

$$k = (k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_n),$$

називається її узагальнений кусково-сталий розв'язок $(u_1; v_1; \ldots; u_i; v_i; \ldots;\ u_n; v_n)$ такий, що для будь-яких довільних значень $(x,t) \in [0;1] \times \mathbb{R}^+$ мають місце рівності $u_i(x, t + k_i^1) = u_i(x,t)$, $v_i(x, t + k_i^2) = v_i(x,t)$, $1 \le i \le n$, і при цьому k_i^1, k_i^2 є найменшими серед чисел, для яких виконується відповідна рівність, множини типів циклів функцій f_i, $1 \le i \le n$, не є рівними і виконуються співвідношення $k_i = \max_{(}\{k_i^1, k_i^2\}$, де символ "$<$" визначає порядок Шарковського (2) на множині натуральних чисел. Якщо серед функцій f_i, $1 \le i \le n$, є такі, що множини типів їх циклів є рівними, то значення k_i з номерами, що відповідають таким функціям, є рівними і знаходяться за аналогічними формулами, де більше згідно порядку Шарковського число знаходять з-поміж всіх значень періодів, номери яких співпадають з номерами таких функцій f_i.

Надалі узагальнені кусково-сталі k-періодичні за Шарковським розв'язки крайової задачі (73)–(78) називатимемо узагальненими кусково-сталими k-періодичними розв'язками крайової задачі (73)–(78).

Для того, щоб отримати аналітичний вигляд узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків крайової задачі (73)–(78), крім означення 6.3 періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (73)–(78), сформулюємо означення періодичного у геометричному сенсі розв'язку крайової задачі (73)–(78).

Означення 6.4 *Узагальненим кусково-сталим $2n$-періодичним у геометричному сенсі розв'язком крайової задачі (73)–(78) називається її узагальнений кусково-сталий розв'язок $(u_1, v_1, \ldots, u_i,\ \ v_i, \ldots, u_n, v_n)$ такий, що для будь-яких довільних значень $(x,t) \in [0;1] \times \mathbb{R}^+$ мають місце рівності $u_i(x, t + k_i^1) = u_i(x,t)$, $v_i(x, t + k_i^2) = v_i(x,t)$, $1 \le i \le n$, і при цьому k_i^1, k_i^2 є найменшими серед чисел, для яких виконується відповідна рівність, та має місце співвідношення $n = \gamma\zeta\square_1^2, \ldots, k_i^1, k_i^2, \ldots, k_n^1, k_n^2)$.*

Тут скорочення НСК означає найменше спільне кратне.

Зауваження 6.1 *У означеннях 6.3 і 6.4 періодичного розв'язку крайової задачі (73)–(78) кожна з компонент вектор-функції розв'язку має бути періодичною функцією за другим аргументом, але значення періоду у кожному з цих означень підраховується по-різному.*

Для узагальненого кусково-сталого $2n$-періодичного у геометричному сенсі розв'язку крайової задачі (73)–(76), що є вектор-функцією, яка складається з n пар функцій, вигляду $(u_1;v_1;\ldots;u_i;v_i;\ldots;u_n;v_n)$, для кожної пари функцій вигляду $(u_i;v_i)$ мають місце всі ті ж самі міркування стосовно множин $\underline{D_{i+2nk}}$, $\overline{D_{i+2nk}}$ де $i,k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \le i \le 2n-1$, та аналітичне зображення кожної такої пари функцій вигляду (63), (64). Таким чином можна побудувати аналітичне зображення узагальненого $2n$-періодичного розв'язку крайової задачі (73)–(76).

Аналогічно поняттям типу, моделі типу та ваги моделі типу узагальненого періодичного розв'язку крайових задач (27)–(29), (41)–(46), (67)–(72) введено поняття типу, моделі типу та ваги моделі типу узагальненого періодичного розв'язку крайової задачі (73)–(78).

Означення 6.5 *Типом узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (73)–(78) називається таблиця T_n, кожен рядок з номером i, $1 \le i \le n$, якої дорівнює типу тієї періодичної точки серед точок φ_i, ψ_i, $1 \le i \le n$, період якої дорівнює відповідній за номером компоненті k_i вектора k.*

Зауважимо, що тип узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (73)–(78) можна визначити різними способами і у означенні 6.5 запропоновано лише один з можливих варіантів такого означення.

Для дослідження співіснування узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків крайової задачі (73)–(78) за допомогою їх типів, необхідно сформулювати наступні означення.

Означення 6.6 *Моделлю типу узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (73)–(78) називається така таблиця, кожен рядок з номером i, $1 \le i \le n$, якої дорівнює моделі типу циклу, якому відповідає опукла циклічна перестановка періоду, що дорівнює компоненті k_i вектора k. Якщо ця перестановка має дві моделі типу циклу, то обирається та з них, вага якої більша.*

Означення 6.7 *Вагою моделі типу узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (73)–(78) називається вектор, що складається з ваг відповідних за номером рядків у таблиці-моделі типу цього розв'язку.*

На множині векторів-ваг моделей типу узагальненого кусково-сталого k-періодичного за Шарковським розв'язку крайової задачі (73)–(78) визначається відношення порядку наступним чином: два довільні вектори-ваги $\sigma^{'} = (\sigma_1^{'}, \ldots, \sigma_i^{'}, \ldots, \sigma_n^{'})$ і $\sigma^{''} = (\sigma_1^{''}, \ldots, \sigma_i^{''}, \ldots, \sigma_n^{''})$ знаходяться у відношенні “”, тобто $\sigma^{'} \circ \sigma^{''}$, якщо для довільного номера i, $1 \le i \le n$, виконується співвідношення $\sigma_i^{'} \ge \sigma_i^{''}$. Таким чином введене відношення є відношенням часткового порядку на множині векторів-ваг.

Використовуючи відношення часткового порядку на множині векторів-ваг, на множині типів узагальнених кусково-сталих k-періодичних за Шарковським розв'язків крайової задачі (73)–(78) можна визначити відношення порядку “ ” наступним чином: дві довільні таблиці $T_n^{'}$ і $T_n^{''}$ знаходяться у відношенні , тобто $T_n^{'} \quad T_n^{''}$, якщо $\sigma_{T_n^{'}} \circ \sigma_{T_n^{''}}$, де $\sigma_{T_n^{'}}$ – вектор ваги типу $T_n^{'}$, а $\sigma_{T_n^{''}}$ – вектор ваги типу $T_n^{''}$.

Таким чином введене відношення порядку є відношенням часткового порядку на множині типів узагальнених кусково-сталих k-періодичних за

Шарковським розв'язків крайової задачі (73)–(78).

Використовуючи відношення часткового порядку на множині типів узагальнених кусково-сталих k-періодичних за Шарковським розв'язків крайової задачі (73)–(78), отримаємо, що має місце наступна теорема.

Теорема 6.1 *Нехай* $f_i \in C^0(I,I)$, $1 \le i \le n$, *і мають кусково неперервні перші похідні,* $\varphi_i(x) = \varphi_i \in \mathrm{R}$, *якщо* $x \in (0;1]$, $\varphi_i(0) = \psi_i \in \mathrm{R}$, $\psi_i(x) = \psi_i$, *якщо* $x \in [0;1)$, $\psi_i(1) = f_i(\varphi_i)$, $1 \le i \le n$, *а значення сталих* φ_i, ψ_i *є точками опуклих циклів динамічної системи породженої відповідними відображеннями* f_i. *Якщо крайова задача (73)–(76) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу* $T_n^{'}$, *то вона також має узагальнений кусково-сталий періодичний розв'язок типу* $T_n^{''}$, *де* $\sigma_{T_n^{'}} \circ \sigma_{T_n^{''}}$.

Доведення теореми 6.1. Оскільки крайова задача (73)–(78) складається з n незалежних крайових задач для систем з двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними і нелінійною крайовою умовою, то для кожної такої задачі з відповідним номером, який дорівнює номеру функції f_i з крайової умови, з означення типу узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку крайової задачі (73)–(78) випливає, що одне зі значень кусково-сталих функцій φ_i, ψ_i з початкових умов з відповідним номером є періодичною точкою типу $\pi_i^{'} \in \Pi$ відображення f_i, де $\pi_i^{'}$ – рядок з відповідним номером i з таблиці типу $T_n^{'}$ розглядуваного узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку крайової задачі (73)–(78).

Далі, використовуючи формулу типу Д'Аламбера для загального розв'язку лінійних диференціальних рівнянь (73), (74) та кусково-сталість функцій у початкових умовах, кожну з n незалежних крайових задач для системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, що разом становлять крайову задачу (73)–(78), зведемо до різницевого рівняння з дискретним аргументом та початковими умовами, значення яких рівні значенням початкових умов відповідної крайової задачі.

Внаслідок редукції до різницевого рівняння кожен з рядків таблиці типу $T_n^{'}$ є типом циклу неперервного відображення f_i з відповідним номером.

Використовуючи теорему 7.1, про те, що у випадку, коли неперервне відображення відрізку має цикл типу опуклої циклічної перестановки, то воно також має цикл більшого типу згідно відношення порядку на множині опуклих циклічних перестановок, отримаємо, що кожне неперервне відображення f_i з відповідним номером також має цикл більшого типу, ніж $\pi_i^{'}$, за відношенням порядку на множині опуклих циклічних перестановок.

Знову використавши зв’язок кожної крайової задачі, що є компонентою крайової задачі (73)–(78), з динамікою відображення f_i з відповідним номером i, отримаємо, що крайова задача (73)–(78) має узагальнений кусково-сталий періодичний розв’язок деякого типу $T_n^{''}$, де $\sigma_{T_n^{'}} {}^{\circ} \sigma_{T_n^{''}}$.

Теорему 6.1 доведено.

3.7 Висновки до третього розділу

Розглянуто нелінійні крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними та досліджено питання про співіснування їх періодичних кусково-сталих розв’язків.

Дослідження таких періодичних кусково-сталих розв’язків здійснено шляхом зведення крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними до відповідного різницевого рівняння з неперервним часом, причому крайові умови та початкові дані забезпечують редукцію отриманого різницевого рівняння до неперервного відображення інтервалу.

Співіснування узагальнених періодичних розв’язків крайових задач встановлено не за періодами, як у теоремі Шарковського при вивченні питання про співіснування циклів одновимірного відображення відрізка в себе, а за спеціальним чином вибраними типами цих узагальнених періодичних розв’язків.

Для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку, для системи двох лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку та для систем $2n$ лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, встановлено співіснування (за типами) їх узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків.

Результати цього розділу опубліковано в статтях [15], [23], [25] і тезах доповідей в матеріалах праць міжнародних конференцій [21], [26], [27].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню періодичних кусково-сталих розв'язків нелінійних крайових задач для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку і для систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку та дослідженню питання про їх співіснування.

Запропоновано поняття моделі типу циклу і поняття ваги моделі типу циклу для неперервного відображення відрізка в себе, за допомогою яких описано множину типів циклів, що має довільне неперервне відображення відрізку в себе з L-схемою, і встановлено співіснування унімодальних циклів неперервного відображення відрізка в себе. Також запропоновано поняття узагальненого кусково-сталого періодичного розв'язку нелінійної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами та поняття типу узагальненого кусково-сталого n-періодичного розв'язку нелінійної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку, для системи двох лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку та для систем $2n$ лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, встановлено співіснування (за типами) їх узагальнених кусково-сталих періодичних розв'язків.

Доведені у дисертації твердження доповнюють і розширюють існуючі результати з якісної теорії диференціальних рівнянь і можуть бути використаними для подальшого її розвитку.

Список використаних джерел

[1] Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук // М.: Мир, 1967. – 548 с.

[2] Витт А.А. К теории скрипичной струны / А.А. Витт // Журн. тех. физики. – 1936. – Т. 6, № 9. – С. 1459–1479.

[3] Вул Е.Б. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм / Е.Б. Вул, Я.Г. Синай, К.М. Ханин // Успехи матем. наук. – 1984. – Т. 39, № 3(237). – С 3–37.

[4] Герсеванов Н.М. Итерационное исчисление и его приложения / Н.М. Герсеванов // М.: Машстройиздат, 1950. – 70 с.

[5] Ефремова Л.С. Теоремы сосуществования периодических орбит эндоморфизмов окружности / Л.С. Ефремова, Р.Г. Рахманкулов // Дифференциальные и интегральные уравнения. – 1980. – № 4. – С. 116–118.

[6] Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений / Д.И. Мартынюк // К.: Наукова думка, 1972. – 251 с.

[7] Мышкис А.Д. Существование инвариантного множества, состоящего из двух точек, при некоторых непрерывных отображениях отрезка в себя / А.Д. Мышкис, А.Я. Лепин // Учен. зап. Белорус. ун-та. Сер. физ.-мат. – 1957. – С. 29–32.

[8] Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом: некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием / С.Б. Норкин // М.: Наука, 1965. – 354 с.

[9] Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения / Э. Пинни // М.: Изд. иностр. лит., 1961. – 248 с.

[10] Пуанкаре А. Избранные труды / А. Пуанкаре // М.: Наука. – 1971–1974. – Т. 1–3.

[11] Романенко О.Ю. Динаміка розв'язків найпростіших нелінійних граничних задач / О.Ю. Романенко, О.М. Шарковський // Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51, № 6. – С. 810–826.

[12] Романенко О.Ю. Явище автостохастичності в динамічних системах, породжуваних різницевими рівняннями з неперервним аргументом / О.Ю. Романенко // Укр. матем. журн. – 2006. – Т. 58, № 7. – С. 1079–1105.

[13] Романенко Е.Ю. Разностные уравнения с непрерывным аргументом/ Е.Ю. Романенко // Киев: Ин-т математики, 2014. – 347 с.

[14] Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк // К.: Вища шк., 1987. – 288 с.

[15] Самойленко В.Г. Кусочно-постоянные решения линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка / В.Г. Самойленко, Т.В. Тищук// Веснік Брэсцкага універсітэта. Серия 4. Физика. Математика. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 41–46.

[16] Самойленко В.Г. Співіснування типів унімодальних циклів неперервного відображення відрізка в себе / В.Г. Самойленко, Т.В. Тищук, В.В. Федоренко // Буковинський матем. журнал. – 2014. – Т. 2, № 4. – С. 102–111.

[17] Самойленко В.Г. Унімодальні цикли неперервних відображень інтервалу / В.Г. Самойленко, Т.В. Тищук, В.В. Федоренко // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2014. – Т. 11, № 5. – С. 147–174.

[18] Слюсарчук В.Ю. Рівняння з істотно нестійкими розв'язками / В.Ю. Слюсарчук // Рівне: НУВГП, 2005. – 217 с.

[19] Тищук Т.В. Класифікація періодичних траєкторій неперервних унімодальних опуклих вгору відображень відрізка в себе / Т.В. Тищук // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2014. – Т. 31, № 1. – С. 41–44.

[20] Тищук Т.В. Класифікація циклів неперервних унімодальних опуклих вгору відображень відрізка в себе за ознакою взаємного розміщення точок циклу / Т.В. Тищук // Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Г.М.: Тези доповідей. – Київ, Україна, 2014. – С. 129.

[21] Тищук Т.В. Співіснування періодичних кусково-сталих розв'язків нелінійної крайової задачі для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними / Т.В. Тищук // Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Матеріали конференції. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування : Тези доповідей. – Київ, Україна, 2015. – С. 242.

[22] Тищук Т.В. Співіснування типів циклів спеціального класу неперервних відображень відрізка в себе / Т.В. Тищук // Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів": Тези доповідей. – Рівне, Україна, 2015. – С. 162–163.

[23] Тищук Т.В. Співіснування узагальнених періодичних розв'язків крайової задачі для симетричної гіперболічної системи рівнянь з частинними похідними / Т.В. Тищук, Ю.В. Федоренко // Буковинський матем. журнал. – 2015. – Т. 3, № 1. – С. 115–120.

[24] Тищук Т.В. Типи періодичних траєкторій деякого класу унімодальних відображень / Т.В. Тищук // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені

академіка Михайла Кравчука. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування: Тези доповідей. – Київ, Україна, 2014. – С. 306.

[25] Тищук Т.В. Узагальнені періодичні розв’язки нелінійної крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку гіперболічного типу / Т.В. Тищук // Буковинський матем. журнал. – 2014. – Т. 2, № 1. – С. 113–117.

[26] Тищук Т.В. Узагальнені періодичні розв’язки нелінійної крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку гіперболічного типу / Т.В. Тищук // Четверта міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана: Тези доповідей. – Чернівці, Україна, 2014. – С. 200.

[27] Тищук Т.В. “Цифрові” (digital) розв’язки нелінійної крайової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними / Т.В. Тищук // Сьома міжнародна конференція імені Ляшка І.І.: Тези доповідей. – Київ, Україна, 2014. – С. 101.

[28] Федоренко В.В. Канонические периодические траектории одномерных динамических систем / В.В. Федоренко // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. Сборник научных трудов. – К.: Ин-тут математики АН УРСР. – 1983. – С. 106–109.

[29] Федоренко В.В. Простые одномерные динамические системы / В.В. Федоренко // Дифференциальные уравнения и их применение к нелинейным краевым задачам. Сборник научных трудов. – К.: Ин-тут математики АН УРСР. – 1987. – С. 94–96.

[30] Федоренко В.В. Свойства циклических перестановок, используемые в одномерных динамических системах / В.В. Федоренко // Дифференциально-функциональные уравнения и их приложения. Сборник научных трудов. – К.: Ин-тут

математики АН УРСР. – 1985. – С. 80–86.

[31] Федоренко В.В. Частично-упорядоченное множество типов периодических траекторий одномерных динамических систем / В.В. Федоренко // Динамические системы и дифференциально-разностные уравнения. Сборник научных трудов. – К.: Ин-тут математики АН УРСР. – 1986. – С. 90–97.

[32] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл // М.: Мир, 1984. – 421 с.

[33] Шарковский А.Н. Динамика одномерных отображений / А.Н. Шарковский, А.Г. Сивак, В.В. Федоренко // К.: Наукова думка, 1989. – 216 с.

[34] Шарковский А.Н. Необходимые и достаточные условия сходимости одномерных итерационных процессов / А.Н. Шарковский // Укр. матем. журн. – 1960. – Т. 12, № 4. – С. 484–489.

[35] Шарковский А.Н. О приводимости непрерывной функции действительного переменного и структуре неподвижных точек соответствующего итерационного процесса / А.Н. Шарковский // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 139, № 5. – С. 1067–1070.

[36] Шарковский А.Н. Разностные уравнения и их приложения / А.Н. Шарковский, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко // К.: Наукова думка, 1986. – 278 с.

[37] Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя / А.Н. Шарковский // Укр. матем. журн. – 1964. – Т. 16, № 8. – С. 61–71.

[38] Шарковський О.М. Динамічні системи, породжувані крайовими задачами. Ідеальна турбулентність. Комп’ютерна турбулентність / О.М. Шарковський // Український математичний конгрес: Тези доповідей. – Київ, Україна, 2001. – С. 125–152.

[39] Ширяева Е.В. Итерационные последовательности на инвариантом

множестве с двумя отталкивающими точками / Е.В. Ширяева // Волжский матем. сборник. – 1964. – Т. 2, № 1. – С. 169–174.

[40] Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин // М.: Наука, 1971. – 296 с.

[41] Alsedà L. Combinatorial dynamics and entropy in dimension one / L. Alsedà, J. Llibre, M. Misiurewicz // Advanced Series in Nonlinear Dynamics, 2000. – 415 p.

[42] Alsedà L. Periodic orbits of maps of Y / L. Alsedà, J. Llibre, M. Misiurewicz // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – Vol. 313, no. 2. – P. 475–538.

[43] Alsedà L. Simple and complex dynamics for circle maps / L. Alsedà, V.V. Fedorenko // Publ. Mat. – 1993. – Vol. 37, no. 2. – P. 305–316.

[44] Amigó J.M. Forbidden patterns and shift systems / J.M. Amigó // J. Combin. Theory. – 2008. – Vol. 115, no. 3. – P. 485–504.

[45] Amigó J.M. Order patterns and chaos / J.M. Amigo, L. Kocarev, J. Szczepanski // Phys. Lett. – 2006. – P. 27–31.

[46] Amigó J.M. True and false forbidden patterns in deterministic and random dynamics / J.M. Amigó, S. Zambrano, M.A.F. Sanjuán // Europhys. Lett. EPL. – 2007. – Vol. 79, no. 5. – P. 1–5.

[47] Andres J. On a multivalued version of the Sharkovskii theorem and its application to differential inclusions / J. Andres, J. Fišer, L. Jüttner // Set-Valued Anal. – 2002. – Vol. 10, no. 1. – P. 1–14.

[48] Andres J. Randomization of Sharkovskii-type theorems / J. Andres // Proc. Amer. Math. Soc. – 2008. – Vol. 136, no. 4. – P. 1385–1395.

[49] Baldwin S. Generalizations of a theorem of Sarkovskii on orbits of continuous real-valued functions / S. Baldwin // Discrete Math. – 1987. – Vol. 67, no. 2. – P. 111–127.

[50] Berezovsky S.A. Computer turbulence / S.A. Berezovsky, A.N. Sharkovsky // Proc. Intern. Conf. “Self-similar systems” (Dubna, 1998). – 1999. – P. 251–259.

[51] Berezovsky S.A. Transitions of “correct-incorrect” numerical calculations for solutions of some problems. “Phase transitions” in computer turbulence / S.A. Berezovsky, A.N. Sharkovsky // Proc. 2nd Intern. Conf. “Control of Oscillations and Chaos” (COC’2000). – 2000. – P. 6–9.

[52] Bernhardt C. Simple permutations with order a power of two / C. Bernhardt // Ergodic Theory Dynam. Systems. – 1984. – Vol. 4, no. 2. – P. 179–186.

[53] Bernhardt C. The ordering on permutations induced by continuous maps of the real line / C. Bernhardt // Ergodic Theory Dynam. Systems – 1987. – Vol. 7, no. 2. – P. 155–160.

[54] Block L. Orbit types for maps of the interval / L. Block, D. Hart // Ergodic Theory Dynam. Systems. – 1987. – Vol. 7, no. 2. – P. 161–164.

[55] Block L. Periodic points and topological entropy of one-dimensional maps / L. Block, J. Guckenheimer // Global theory of dynamical systems (Proc. Internat. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1979). – 1980. – P. 18–34.

[56] Bowen R. The periodic points of maps of the disk and the interval / R. Bowen, J. Franks // Topology. – 1976. – Vol. 15, no. 4. – P. 337–342.

[57] Chua L.O. Chaos synchronization in Chua’s circuit / L.O. Chua, M. Itoh, L. Kocarev, K. Eckert // J. Circuits Systems Comput. – 1993. – Vol. 3, no. 1. – P. 93–108.

[58] Collet P. Iterated maps on the interval as dynamical systems / P. Collet, J.P. Eckmann // Progress in Physics, 1980. – 248 p.

[59] Coppel W.A. The solution of equations by iteration. / W.A. Coppel // Proc. Camb. Philos. Soc. – 1955. – P. 41–43.

[60] Devaney R.L. A first course in chaotic dynamical systems / R.L. Devaney // Addison-Wesley Studies in Nonlinearity, 1992. – 302 p.

[61] Du B.S. The minimal number of periodic orbits of periods guaranteed in Sharkovski 's theorem / B.S. Du // Bull. Austral. Math. Soc. – 1985. – Vol. 31, no. 1. – P. 89–103.

[62] Fatou P. Sur les équations fonctionnelles / P. Fatou // Bull. Soc. Math. France. – 1919. – P. 161–271.

[63] Fedorenko V.V. Homoclinic trajectories in one-dimensional dynamics / V.V. Fedorenko, A.N. Sharkovsky // J. Difference Equ. Appl. – 2012. – Vol. 18, no. 4. – P. 579–588.

[64] Franks J.M. Some smooth maps with infinitely many hyperbolic periodic points / J.M. Franks // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – P. 175–179.

[65] Guckenheimer J. Bifurcations of dynamical systems / J. Guckenheimer // Dynamical systems (C.I.M.E. Summer School, Bressanone, 1978). – 1980. – P. 115–231.

[66] Jonker L. Periodic orbits and kneading invariants / L. Jonker // Proc. London Math. Soc. – 1979. – Vol. 39, no. 3. – P. 428–450.

[67] Julia G. Mémoire sur íteration des fonctions rationnelles / G. Julia // J. de Math. Pures et Appliquées Ser. – 1918. – Vol. 8. – P. 47–245.

[68] Jungreis I. Some results on the Sarkovskii partial ordering of permutations / I. Jungreis // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – P. 319–344.

[69] Li T.Y. Period three implies chaos / T.Y. Li, J.A. Yorke // Amer. Math. Monthly. – 1975. – Vol. 82, no. 10. – P. 985–992.

[70] Llibre J. On the number of periodic orbits of continuous mappings of the interval / J. Llibre, A. Reventós // Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona. – 1981. – no. 25. – P. 97–106.

[71] Llibre J. On the structure of the set of periodic points of a continuous map of the interval with finitely many periodic points / J. Llibre, A. Reventós // Arch. Math. (Basel). – 1982. – Vol. 39, no. 4. – P. 331–334.

[72] Madan R.N. Chua's circuit: a paradigm for chaos / R.N. Madan // World Scientific Series on Nonlinear Science. Series B: Special Theme Issues and Proceedings, 1993. – 1043 p.

[73] Milnor J. On iterated maps of the interval / J. Milnor, W. Thurston // Dynamical systems (College Park, MD, 1986–87). – 1988. – P. 465–563.

[74] Misiurewicz M. Combinatorial patterns for maps of the interval / M. Misiurewicz, Z. Nitecki // Mem. Amer. Math. Soc. – 1991. – Vol. 94, no. 456. – P. 1–112.

[75] Ottaviani G. Sulla risoluzione di una equazione con il metodo di iterazione / G. Ottaviani // Scritti matematici in onore di Filippo Sibirani. – 1957. – P. 195–199.

[76] Priemer R. Introductory Signal Processing / R. Priemer // Advanced series in electrical and computer engineering, 1991. – 734 p.

[77] Severino R. Topological invariants in a model of a time-delayed Chua's circuit / R. Severino, A. Sharkovsky // Nonlinear Dynam. – 2006. – Vol. 44, no. 1-4. – P. 81–90.

[78] Sharkovsky A.N. Dry turbulence and period-adding phenomena from a 1-D map with time delay / A.N. Sharkovsky, Ph. Deregel, L.O. Chua // Thirty years after Sharkovski's theorem: new perspectives (Murcia, 1994). – 1995. – P. 21–40.

[79] Sharkovsky A.N. Ideal turbulence / A.N. Sharkovsky // Nonlinear Dynam. – 2006. – Vol. 44, no. 1-4. – P. 15–27.

[80] Sharkovsky A.N. Ideal turbulence in an idealized time-delayed Chua's circuit / A.N. Sharkovsky // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng. – 1994. – Vol. 4, no. 2. – P. 303–309.

[81] Sharkovsky A.N. Universal phenomena in solution bifurcations of some boundary value problems / A.N. Sharkovsky, A.G. Sivak // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – Vol. 1, no. 2. – P. 147–157.

[82] Sharkovsky A.N. Universal phenomena in some infinite-dimensional

dynamical systems / A.N. Sharkovsky // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng. – 1995. – Vol. 5, no. 5. – P. 1419–1425.

[83] Smale S. The qualitative analysis of a difference equation of population growth / S. Smale, R.F. Williams // J. Math. Biol. – 1976. – Vol. 3, no. 1. – P. 1–4.

[84] Štefan P. A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line / P. Štefan // Comm. Math. Phys. – 1977. – Vol. 54, no. 3. – P. 237–248.

[85] Szuca P. Sharkovski's theorem holds for some discontinuous functions / P. Szuca // Fund. Math. – 2003. – Vol. 179, no. 1. – P. 27–41.

[86] Tyshchuk T.V. Coexistence of types of unimodal cycles of a continuous map of an interval / T.V. Tyshchuk // Third International Conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine Melnik V.S. "Nonlinear analysis and applications": Book of Abstracts. – Kyiv, Ukraine, 2015. – P. 72.