Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Тимошкевич Тарас Дмитрович

УДК 519.21

ГЕОМЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЙМОВІРНІСНИХ МІР В ЛІНІЙНИХ ПРОСТОРАХ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
КУЛИК Олексій Михайлович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу теорії випадкових процесів

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
СЛИВКА-ТИЛИЩАК Ганна Іванівна,
Ужгородський національний університет
професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
АРЯСОВА Ольга Вікторівна,
Інститут геофізики імені С.І. Субботіна НАН України, старший науковий співробітник відділу тектонофізики

Захист відбудеться “27” березня 2017 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 4 Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий “25” лютого 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Моклячук М.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню та узагальненню таких геометричних характеристик міри як зоноїд, ліфт зоноїд та нарізка множин, а також новим методам доведення функціональних нерівностей, які ідейно пов'язані з вказаними вище характеристиками. Геометричні характеристики міри узагальнені на максимально можливий випадок нескінченновимірного простору з циліндричною мірою, та за допомогою них доведена теорема про зображення, однозначність представлення точок як барицентрів півпросторів. Ці характеристики вперше були запропоновані Глібом Кошевим та Карлом Мослером у статті 1997 року. Авторами було отримано однозначність представлення міри через ліфт зоноїд, введено відстань та частковий порядок на ліфт зоноїдах, а, отже, і на мірах, теорему про представлення точок через барицентри, без однозначності, та введено поняття глибини точок. Спираючись на зоноїдні характеристики, зручно узагальнювати класичні граничні теореми, зокрема 2014 році була опублікована стаття I. Molchanov, M. Schmutz, K. Stucki, в якій узагальнена ергодична теорема для інваріантних відносно перестановок послідовностей і границя характеризується. В 2009 році опублікована стаття C. Borell, в якій наводиться застосування зоноїдів, індукованих гауссовою мірою у фінансовій математиці. В 4 розділі дисертації, в якому розглядаються функціональні нерівності, класичним результатом є критерій Bakry-Emeri 1984 року, в якому накладаються умови на другу похідну щільності міри. Більш сучасним є результат 1999 року С. Бобкова, в основному для одновимірного випадку наводиться інтегральна умова на хвости розподілу. Група французьких вчених E. Boissard, P. Cattiaux, A. Guillin, L.Miclo в статті 2013 року досліджували можливі узагальнення цих функціональних нерівностей, зокрема нерівності Пуанкаре. Якщо втрачається випуклість логарифмічної похідної міри, то з'являються цікаві ефекти, і ця теорія важлива і досі не розвинута. В дисертації є суттєві просування в цьому напрямку, запропоновано критерії, які не потребують випуклості логарифмічної похідної та поліпшують оцінки, які отримано в 2013 році, що робить роботу дійсно актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана в рамках державної бюджетної науково-дослідної теми № 11БФ038-02 «Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей» (номер державної реєстрації 0111U006561) і №16БФ038-02 «Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем» (номер державної реєстрації 0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета і задачі дослідження

дисертації є дослідження геометричних характеристик міри таких як зоноїд, ліфт зоноїд і нарізка множин, та застосування одержаних результатів у доведенні функціональних нерівностей.

Це передбачає розв'язання таких задач:

• доведення властивостей зоноїдів і ліфт зоноїдів для циліндричних мір;

• барицентричне представлення точок;

• запропонувати умови на узагальнену обернену логарифмічну нерівність Соболєва в термінах узагальнених ліфт зоноїдів (узагальнена нерівність руху та узагальнена допоміжна функціональна нерівність);

• пряма логарифмічна нерівність Соболєва, доведення нерівності Пуанкаре для сферично цензурованої багатовимірної гауссової міри та логарифмічної нерівності Соболєва для проекції цієї міри на пряму;

• мартингальним методом встановлюється границя ентропії ймовірнісної міри в $\mathbb{R}^d$, як наслідок, одержуємо логарифмічну нерівність Соболєва на $\mathbb{R}$; так само встановлюється границя варіації ймовірнісної міри в $\mathbb{R}^d$, як наслідок, одержуємо критерій Макенхаупта для нерівності Пуанкаре на $\mathbb{R}$ та зважену нерівність Пуанкаре з хорошим інтегральним ядром.

Об'єктом дослідження

є геометричні характеристики міри такі як зоноїд, ліфт зоноїд, нарізки множин, функціональні нерівності Пуанкаре, нерівності зсуву, логарифмічна нерівність Соболєва, пряма та обернена.

Предметом дослідження

є властивості ліфт зоноїдів в нескінченновимірному просторі з циліндричною мірою, теорема про зображення, оцінки в функціональних нерівностях, та залежність між функціональними нерівностями та геометричними характеристиками.

Методи дослідження.

Основними *методами* дослідження є методи багатовимірного аналізу, теорії міри, мартингальні методи, понятійний апарат і методи геометричної теорії міри.

Наукова новизна одержаних результатів.

• досліджені властивості ліфт зоноїдів для максимально узагальненого випадку циліндричної міри в банаховому нескінченновимірному просторі;
• встановлено властивість однозначного представлення точок внутрішності випуклої замкненої оболонки носія міри як барицентра півпростору;
• введене поняття узагальненого ліфт зоноїда та досліджено його основні властивості;
• в термінах узагальнених ліфт зоноїдів отримана достатня умова для виконання узагальненої оберненої логарифмічної нерівністі Соболєва;
• отримана нова сім'я достатніх умов, за яких ймовірнісна міра на дійсній прямій задовольняє пряму логарифмічну нерівність Соболєва;
• для класу цензурованих гауссових мір в R^d отримано поліноміальні оцінки сталої в нерівності Пуанкаре;
• запропоновані загальні мартингальні оцінки для ентропії та варіації, для величин на R^d з фіксованою нарізкою множин;
• для зважених логарифмічної нерівності Соболєва та Пуанкаре на прямій отримано аналоги критеріїв Макенхаупта та Бобкова-Гьотце.

Практичне значення отриманих результатів.

Отримані в роботі результати мають теоретичне значення при вивченні геометричної теорії ймовірностей та стохастичної геометрії, зокрема при дослідженні зв'язку між геометричними характеристиками мір та функціональними нерівностями, у цих результатах зроблено узагальнення для найбільш широкого можливого випадку нескінно-вимірного простору з циліндричною мірою. Крім того, з таких функціональних нерівностей, як логарифмічна нерівність Соболєва та Пуанкаре, випливають нерівності концентрації, які мають практичне застосування у побудові довірчих інтервалів у статистичному оцінювані і при наведенні неасимптотичних оцінок похибок в задачах моделювання.

Особистий внесок здобувача.

Всі основні результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. Зі спільних з науковим керівником О. М. Куликом статей до основної частини дисертаційної роботи включені лише ті результати, які належать здобувачу.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертаційної роботи доповідались на наукових семінарах кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, відділу випадкових процесів Інституту математики НАН України, Forschungsseminar Institut fur Mathematik Universitet Potsdam (Potsdam, Germany), відділу наукових досліджень операцій Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України ”Київський політехнічний інститут”; на міжнародних конференціях: ”Modern stochastics: theory and applications III” (Kyiv, 2012), ”International conference Stochastic Analysis and Random Dynamical Systems” (Lviv, Ukraine, 2009), International conference of students and young scientists ”Lomonosov-2009” (Moscow, 2009), ”XIV International Scientific Mykhailo Kravchuk conference” (Kyiv, 2012).

Публікації.

За результатами дисертаційної роботи опубліковано 5 статей у фахових виданнях [4-7, 9] та 5 тез доповідей на конференціях [1-3, 8].

Структура та обсяг дисертації.

Дисертаційна робота складається зі вступу, п’яти розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел. Обсяг дисертації становить 139 сторінок машинописного тексту, список використаних джерел налічує 104 найменування і займає 12 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та методи досліджень, описується наукова новизна одержаних результатів та наводяться форми їх апробації, охарактеризовано зміст кожного розділу дисертації.

Перший розділ містить історичний огляд літератури за тематикою дисертації та висвітлює сучасний стан вивчення проблем, схожих до тих, що розглядаються в дисертаційній роботі.

У **другому** розділі наводяться деякі означення та твердження про геометричні властивості мір та функціональні нерівності, що мають безпосереднє відношення до змісту дисертаційної роботи, зокрема: зоноїди, ліфт зоноїди та нарізка множин, побудованих за мірою:

Означення 2.1.1. *Зоноїд* $Z(\mu)$ *міри* μ *– це множина всіх точок в* $\mathbb{R}^d$ *наступного виду*

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) x \mu(dx) \qquad (1)$$

для довільної вимірної $g:\mathbb{R}^d \to [0,1]$.

Означення 2.1.2. *Ліфт зоноїд* $\hat{Z}(\mu)$ *визначається як зоноїд міри* $\delta_1 \times \mu$ *в* R^{d+1}, *тобто*

$$\left(\int_{\mathrm{R}^d} g(x)\mu(dx), \int_{\mathrm{R}^d} g(x)x\mu(dx)\right)$$

для довільної вимірної $g : \mathrm{R}^d \to [0,1]$.

Зауваження 2.1.1. *Якщо* X *– випадковий вектор з розподілом* μ, *тоді зоноїд* $Z(\mu)$ *і ліфт зоноїд* $\hat{Z}(\mu)$ *– це множини точок наступної форми*

(2)

відповідно. Зоноїд $Z(\mu)$ (відповідно, ліфт зоноїд $\hat{Z}(\mu)$) є випуклою компактною множиною в R^d (відповідно, R^{d+1}), симетричною відносно точки $(1/2)EX$ (відповідно, точки $((1/2),(1/2)EX)$).

Означення 2.1.3. *Для* $\alpha \in (0,1]$ *зоноїдна* α*-нарізка множин* $D_\alpha(\mu)$ *– це множина всіх точок в* R^d *вигляду*

$$1\alpha E[\eta X],$$

де випадкова величина $\eta : \Omega \to [0,1]$, пробігає всі випадкові величини такі, що $E\eta = \alpha$.

Твердження, яке дає нам можливість говорити про те, що ліфт зоноїд це характеристика міри.

Твердження 2.1.1. *Ліфт зоноїди двох мір збігаються тоді і тільки тоді, коли співпадають самі міри. Тобто*

$$\hat{Z}(\mu) = \hat{Z}(\lambda) \Leftrightarrow \mu = \lambda.$$

У підрозділі 2.2. наводяться функціональні нерівності Пуанкаре та логарифмічна нерівність Соболєва.

Наведемо необхідні попередні відомості. Нехай μ – ймовірнісна міра на R^n, абсолютно неперервна відносно міри Лебега. Далі ми використовуємо позначення

$$\mathbf{E}_\mu f = \int f d\mu$$

$$Var_\mu f = \int f^2 d\mu - \left(\int f d\mu\right)^2.$$

для математичного сподівання та дисперсії функції f відносно міри μ відповідно. Для невід'ємної функції f також позначатимемо ентропію функції f відносно міри μ:

$$\mathbf{Ent}_\mu f = \int f \ln f d\mu - \int f d\mu \int \ln f d\mu$$

За означенням, для міри μ виконується логарифмічна нерівність Соболєва зі сталою $c>0$, якщо для будь-якої абсолютно неперервної функції f такої, що f і ∇f квадратично-інтегровні відносно міри μ, виконується:

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \le 2cE_\mu\|\nabla f\|^2.$$

Для міри μ виконується нерівність Пуанкаре, зі сталою $c>0$, якщо для будь-якої абсолютно неперервної функції f такої, що f і ∇f квадратично інтегровні відносно міри μ, виконується

$$Var_\mu f \le cE_\mu\|\nabla f\|^2$$

У **третьому** розділі всі характеристики міри як зоноіди, ліфт зоноіди, нарізка множин узагальнюються на максимально можливий випадок нескінченновимірного простору з циліндричною мірою і доводяться всі відповідні властивості. Також доводиться теорема про зображення, яка є новим результатом не тільки в нескінченновимірному просторі, але і у скінченновимірному випадку. Для узагальнення на нескінченновимірний простір, треба ввести наступні означення:

Означення 2.1.4. *Нехай $\mathcal{X}$ – рефлексивний сепарабельний банахів простір. Позначимо через $\mathcal{C}$ його циліндричну алгебру – це сім'я підмножин в $\mathcal{X}$ вигляду*

$$\{x\in\mathcal{X} : (\langle x, x_1^*\rangle, \ldots \langle x, x_m^*\rangle)\in B\},$$

$$m\ge 1,\quad x_1^*,\ldots,x_m^*\in\mathcal{X}^*,\quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m),$$

тут і надалі $\mathcal{X}^*$ позначає спряжений простір до $\mathcal{X}$, і $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначає спряження між $\mathcal{X}$ і $\mathcal{X}^*$.

Означення 2.1.5. *Циліндрична ймовірнісна міра μ, задана на $\mathcal{C}$ першого типу – це адитивна функція $\mu:\mathcal{C}\to[0,1]$ така, що*

- для будь-якого $m\ge 1$, $x_1^*,\ldots,x_m^*\in\mathcal{X}^*$ звуження μ до σ-алгебри

$$\mathcal{C}_{x_1^*,\ldots,x_m^*} := \{\{x : (\langle x, x_1^*\rangle, \ldots \langle x, x_m^*\rangle)\in B\}, B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\} =$$

$$\sigma(\langle\cdot, x_1^*\rangle, \ldots, \langle\cdot, x_m^*\rangle)$$

– це ймовірнісна міра;

- існує $C_\mu>0$ таке, що

$$\int_{\mathcal{X}} |\langle x, x^*\rangle|\,\mu(dx)\le C_\mu\|x^*\|_{\mathcal{X}^*},\quad x^*\in\mathcal{X}^*. \tag{3}$$

Зауваження 2.1.3. *Циліндрична ймовірнісна міра не обов'язково σ-адитивна. В цьому розділі, щоб уникнути непорозуміння, ми будемо писати "σ-адитивна ймовірнісна міра" замість звичайного "ймовірнісна міра".*

Зауваження 2.1.4. *Циліндричну міру μ можна природним чином інтерпретувати, як "розподіл" узагальненого випадкового елемента X в X з скінченним 1-им порядком, який є за означенням лінійним обмеженим оператором*

$$X:\mathsf{X}^* \to L_1(\Omega,\mathsf{F},P),$$

де (Ω,F,P) – ймовірнісний простір. Середнє значення $\int_{\mathsf{X}} x\mu(dx)$, інакше кажучи, математичне сподівання $E[X]$ добре визначене в наступному сенсі. Легко бачити, що оператор

$$T:\mathsf{X}^* \ni x^* \mapsto \int_{\mathsf{X}} \langle x,x^*\rangle \mu(dx) = E\langle X,x^*\rangle \in \mathsf{R}$$

лінійний та неперервний. Оскільки X за припущенням рефлексивний, існує $x_\mu \in \mathsf{X}$ такий, що $T(x^*) = \langle x_\mu, x^*\rangle$. За означенням,

$$\int_{\mathsf{X}} x\mu(dx) = E[X] = x_\mu.$$

Помітимо, що за аналогічними міркуваннями, для будь-якої обмеженої випадкової величини η математичне сподівання $E[\eta X] \in \mathsf{X}$ добре визначене.

Означення 3.1.1. *Зоноїд $Z(\mu)$ циліндричної міри μ – це множина всіх точок в X виду $E[\eta X]$, де X – узагальнений випадковий елемент в X з розподілом μ, і $\eta:\Omega \to [0,1]$ пробігає всі $\sigma(X)$-вимірні випадкові величини.*

Ліфт зоноїд $\hat{Z}(\mu)$ – це множина всіх точок в $\mathsf{R}\times\mathsf{X}$ виду $(E\eta, E[\eta X])$, де $\eta:\Omega \to [0,1]$ пробігає всі $\sigma(X)$-вимірні випадкові величини.

Для $\alpha \in (0,1]$ *зоноїдна α-нарізка множин $D_\alpha(\mu)$* – це множина всіх точок в X виду $1\alpha E[\eta X]$, де випадкова величина $\eta:\Omega \to [0,1]$ пробігає множину F_α всіх $\sigma(X)$-вимірних випадкових величин таких, що $E\eta = \alpha$.

Означення 3.1.2. *Позначимо через $\mathsf{S}_{\mathsf{X}^*}$ одиничну сферу в X^*, і $h(C,\cdot)$ – опорна функція опуклої множини $C \subset \mathsf{X}$:*

$$h(C,x^*) = \sup\{\langle x,x^*\rangle, x \in C\}, \quad x^* \in \mathsf{S}_{\mathsf{X}^*}.$$

Розглянемо "випадковий відрізок" $[0,X]$, який узагальнений в тому сенсі, що X – узагальнений випадковий елемент в X. Відмітимо, що для будь-якого $x^* \in \mathsf{S}_{\mathsf{X}^*}$ відповідне значення опорної функції

$$h([0,X],x^*) = \langle X,x^*\rangle_+ := (\langle X,x^*\rangle \vee 0)$$

вимірне відносно C_{x^*}, обмежене випадковою величиною $|\langle X,x^*\rangle|$, а, отже, інтегроване.

Означення 3.1.3. *Визначимо математичне сподівання* $E[0,X]$ *випадкового відрізку* $[0,X]$ *як опуклу замкнену множину в* X *таку, що*

$$h(E[0,X],x^*) = Eh([0,X],x^*), \quad x^* \in \mathsf{S}_{\mathsf{X}^*}. \tag{4}$$

Твердження 3.1.1.

1. Множина $E([0,X])$ добре визначена (4), і $Z(\mu) = E([0,X])$.
2. $\hat{Z}(\mu) = E[0,(1,X)]$.

Зауваження 3.1.1. *(a) Якщо* X *– випадковий вектор в* R^d*, тоді будь-яка* $\sigma(X)$*-вимірна випадкова величина* η *має вигляд* $\eta = g(X)$ *з борелівською вимірною функцією* $g:\mathsf{R}^d \to \mathsf{R}$. *Таким чином, наведене вище означення є прямим узагальненням скінченновимірних означень зоноїда і ліфт зоноїда.*

(b) Будь-який $\eta \in F_1$ дорівнює 1 майже напевне, отже, $D_1(\mu)$ – одноточкова множина $\{x_\mu\}$.

Наступна теорема є узагальненням відомих властивостей вказаних раніше геометричних характеристик на нескінченновимірний випадок. Позначимо

$$D_0(\mu) = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} D_\alpha(\mu).$$

Теорема 3.1.1. *Нехай* μ *– циліндрична ймовірнісна міра порядку 1, і* X *буде відповідним узагальненим випадковим елементом.*

Тоді виконуються наступні властивості.

a) $Z(\mu)$ і $\hat{Z}(\mu)$ – замкнуті і опуклі множини в X і $\mathsf{R}\times\mathsf{X}$ відповідно.

b) $Z(\mu)$ і $\hat{Z}(\mu)$ симетричні відносно точок $(1/2)E[X]$ і $((1/2),(1/2)E[X])$ відповідно.

c) $\hat{Z}(\mu)$ визначає μ однозначно.

d) Кожна $D_\alpha(\mu), \alpha\in(0,1]$ – це обмежена замкнена множина в X.

e) $D_\alpha(\mu) \supset D_\beta(\mu)$ для будь-якого $\alpha < \beta$.

f) Якщо μ центрована (тобто $E[X]=0$), тоді

$$\alpha D_\alpha(\mu) = -(1-\alpha)D_{1-\alpha}(\mu), \quad \alpha\in(0,1]$$

g) Для будь-якої послідовності $\alpha_n \to \alpha \in (0,1)$

$$D_{\alpha_n}(\mu) \to D_\alpha(\mu)$$

в термінах відстані Хаусдорфа. В точці $\alpha = 1$ сім'я множин $D_\alpha(\mu), \alpha\in(0,1]$ неперервна в наступному сенсі:

$$D_1(\mu) = \bigcap_{\alpha\in(0,1)} D_\alpha(\mu).$$

h) Замикання $D_0(\mu)$ співпадає з $\mathbf{S}(\mu)$.

Умова компактності зберігається при додаткових припущеннях:

Твердження 3.1.2. *Нехай μ – ймовірнісна міра така, що відповідне сімейство випадкових величин*

$$\{\langle X, x^*\rangle, \|x^*\|_{X^*} \le 1\} \tag{5}$$

є рівномірно інтегрованим.

Тоді $Z(\mu)$, $\hat{Z}(\mu)$, і $D_\alpha(\mu), \alpha \in (0,1]$ є компактними множинами в X.

Зауваження 3.1.2. *Для рівномірної інтегрованості сім'ї (5) достатньо того, щоб міра μ мала сильний момент порядку 1:*

$$E\|X\| < \infty, \tag{6}$$

або слабкий момент порядку $p > 1$:

$$E\,|\langle X, x^*\rangle|^p < \infty, \quad x^* \in X^*. \tag{7}$$

В підрозділі 3.2. вводиться *барицентричне зображення* в X відносно даної циліндричної міри μ. Ми припускаємо, що μ *неперервна* в тому сенсі, що

$$\mu(\{x : \langle x, x^*\rangle = a\}) = 0, \quad x^* \in X \setminus \{0\}, \quad a \in R. \tag{8}$$

Для циліндричної множини A з $\mu(A) > 0$ її *барицентр* відносно μ визначається рівністю:

$$B_A(\mu) = \frac{\int_A x\mu(dx)}{\mu(A)}$$

Теорема 3.2.1. *Нехай μ – циліндрична ймовірнісна міра порядку 1. Припустимо, що:*

(і) μ задовольняє (8);

(іі) внутрішність множини $D_0(\mu)$ непорожня.

Тоді виконуються наступні твердження:

1. Множина $\mathbf{B}(\mu) = \{B_A(\mu), \mu(A) > 0\}$ всіх барицентрів відносно μ збігається з внутрішністю множини $\mathbf{S}(\mu)$.

2. Будь-яка точка $x \in \mathbf{B}(\mu)$ має зображення у формі

$$x = B_H(\mu), \quad H \in H^X, \quad \mu(H) > 0. \tag{9}$$

Це зображення однозначне в наступному розумінні: якщо $B_H(\mu) = B_G(\mu)$ для деяких $H, G \in H^X$, тоді

$$\mu(H \Delta G) = 0.$$

Зауваження 3.2.1. *Умова (ii) може бути переформульована в наступній, більш геометричній формі. Не втрачаючи загальності, ми можемо припустити, що міра μ центрована. Позначимо $\mathcal{L}(\mu)$ лінійну оболонку $D_0(\mu)$. Із тверджень (e), (f) теореми, маємо*

$$\mathcal{L}(\mu) = \bigcup_{r\in(0,\infty)} rD_{1/2}(\mu) \subset \bigcup_{r\in(0,\infty)} rZ(\mu);$$

тут ми скористались тим, що $D_{1/2}(\mu) \subset 2Z(\mu)$. З іншого боку, будь-яка точка $x \in Z(\mu)$ має зображення $x = E[\eta X]$ з деяким η зі значеннями в $[0,1]$, тому $x \in \alpha D_\alpha(\mu) \subset D_0(\mu)$ з $\alpha = E\eta$. Остаточно це дає нам наступну рівність

$$\mathcal{L}(\mu) = \bigcup_{r\in(0,\infty)} rD_{1/2}(\mu) = \bigcup_{r\in(0,\infty)} rZ(\mu). \qquad (10)$$

Тоді (ii) еквівалентне наступному твердженню:

$$\mathcal{L}(\mu) = \mathcal{X}. (ii')$$

З рівності (10) лінійний простір $\mathcal{L}(\mu)$ природним чином наділяється нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ рівною функціоналу Мінковського для множини зоноїда $Z(\mu)$; відмітимо, що $Z(\mu)$ – симетрична і опукла множина, тому що μ – центрована міра. Ми називаємо $\mathcal{L}(\mu)$ наділену нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ *оболонкою зоноїда* циліндричної міри μ, і відмітимо, що умова (ii) насправді означає, що початковий простір $\mathcal{X}$ збігається з оболонкою зоноїда міри μ.

Зауваження 3.2.2. У випадку $X = R^d$ умова (ii’) (і таким чином (ii)) очевидно *виконується: якщо (ii) не виконується, тоді міра сконцентрована на гіперплощині $\mathcal{L}(\mu)$, що суперечить (i).*

В нескінченновимірному випадку умова (ii) набагато вимогливіша. Наприклад, ця умова не виконується для будь-якої σ-адитивної ймовірнісної міри μ, на нескінченновимірному гільбертовому просторі такому, що відповідна сім’я (5) рівномірно інтегрована. У цьому випадку геометрія оболонки зоноїда $\mathcal{L}(\mu)$ обов’язково відрізняється від геометрії $\mathcal{X}$.

Це показує, що в нескінченновимірному випадку, (ii), (ii) зазвичай вимагають, щоб зоноїд $Z(\mu)$ був не компактним. Це мотивує інтерес до циліндричних ймовірнісних мір, тому що їх зоноїди не обов’язково компактні.

В підрозділі 3.3. надається версія барицентричного зображення в просторі з σ-адитивною мірою. Позначимо через $\mathcal{H}_{1,\mu}^{\mathcal{X}}$ сім’ю множин вигляду

$$\{x : h(x) \geq a\}, \quad h \in \mathcal{H}_{1,\mu}(\mathcal{X}), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3.3.1. *Припустимо, що:*

(a) для всіх $h \in \mathsf{H}_{1,\mu}(\mathsf{X}) \setminus \{0\}, a \in \mathsf{R}$

$$\mu(\{x : h(x) = a\}) = 0;$$

(b) для всіх $r > 1$, $\mathsf{H}_{1,\mu}(\mathsf{X}) = \mathsf{H}_{r,\mu}(\mathsf{X})$.

Тоді виконуються наступні твердження:

1. Множина $\mathbf{B}(\mu) = \{B_A(\mu), \mu(A) > 0\}$ всіх барицентрів відносно міри μ збігається з внутрішністю $\mathbf{S}(\mu) \cap \mathsf{L}(\mu)$ відносно топології індукованої нормою $\mathsf{P}\cdot\mathsf{P}_{\mathsf{L}}$.
2. Будь-яка точка $x \in \mathbf{B}(\mu)$ має зображення в формі

$$x = B_H(\mu), \quad H \in \mathsf{H}^{\mathsf{X}}_{1,\mu}, \quad \mu(H) > 0. \tag{11}$$

Це зображення однозначне в наступному сенсі: якщо $B_H(\mu) = B_G(\mu)$ для деякого $H, G \in \mathsf{H}^{\mathsf{X}}_{1,\mu}$, тоді

$$\mu(H \Delta G) = 0.$$

Зауваження 3.3.1. *Ключовим моментом в описаній вище конструкції є розгляд замість вихідної міри μ її “узагальненого звуження” $\tilde{\mu}$ зоноідну оболонку $\mathsf{L}(\mu)$. Тоді нова циліндрична ймовірнісна міра $\tilde{\mu}$ одразу буде задовільняти умовам (ii), (ii) теореми 3.2.1.*

Умова (b) в наведеному вище доведенні використовується, щоб гарантувати $\mathsf{L}(\mu)$ *рефлексивність* банаховому просторі. Ця умова виконується в особливо цікавому випадку, тобто для гауссівської міри μ або, в більш загальному випадку, для опуклої міри μ.

В підрозділі 3.4. пояснюється, як можна ввести барицентричні координати за допомогою масси і лінійного функціоналу, а в підрозділі 3.5. наводяться явні приклади, для гауссівської міри μ, де обрахунки максимально прості. Для прикладу нам знадобляться наступні позначення.

Нехай X – сепарабельний гільбертовий простір, μ – центрована циліндрична гауссівська міра на X з тотожним оператором коваріації. Також позначимо стандартний гауссівський одномірний розподіл і щільність:

$$\Phi(u) := \int_{-\infty}^{u} \varphi(v)dv, \quad \varphi(u) := 1\sqrt{2\pi} e^{-u^2/2},$$

$I := \varphi \mathrm{o} \Phi^{-1}$ - так звана *гауссівська ізопериметрична функція* і функція $G(u) := \varphi(u)\Phi(u);$ яка є монотонною на R.

Твердження 3.5.1. *Нехай μ – центрована циліндрична гауссівська міра в X з тотожнім коваріаційним оператором.*

Тоді виконуються наступне.

1. Кожна зоноідна α-нарізка $D_\alpha(\mu), \alpha \in (0,1)$ рівна кулі з радіусом $r(\alpha) = \alpha^{-1} I(\alpha)$.

2. Кожна точка $x \neq 0$ має однозначне зображення як барицентр відносно міри μ півпростору $H_x = \{x' : (x', \|x\|_X^{-1} x)_X \geq a(x)\}$, де скаляр $a = a(x)$ визначений відношенням $\mu(H_x) = \alpha$ з $a(x) = -G^{-1}(\|x\|_X)$.

Випадок, коли μ – центрована σ-скінченна гауссівська міра в сепарабельному банаховому просторі X, може бути зведений до випадку, розглянутого вище. Оскільки із збіжності за ймовірністю гауссівської послідовності випливає L_p-збіжність для всіх $p \geq 1$, ми маємо, що всі простори $H_{p,\mu}(X), p \geq 1$ зараз збігаються. Відповідний простір називається *відворюючим ядром простору* для гауссівскої міри μ; ми позначаємо H_μ. Оскількі, $H_\mu = H_{2,\mu}(X)$ може розглядатись як гільбертів простір, $L(\mu)$ збігається з образом H_μ при природному вкладені $J_\mu : H_\mu \to X$ (цей образ зазвичай називають *простором Камерона-Мартіна* міри μ). В цьому просторі μ породжує центровану гауссівську циліндричну міру $\tilde{\mu}$ з тотожним оператором коваріації. Застосовуючи твердження 2(`)@ до $\tilde{\mu}$, ми одержуємо наступне.

Твердження 3.5.2. *Нехай μ – це центрована σ-скінченна гауссівська міра в сепарабельному банаховому просторі X.*

Тоді виконується наступне.

1. Кожний зоноідна α-нарізка $D_\alpha(\mu), \alpha \in (0,1)$ співпадає з образом кулі в H_μ з радіусом $r(\alpha) = \alpha^{-1} I(\alpha)$ під дією природного вкладення H_μ в X.

2. Кожна точка $x \neq 0$ в просторі Камерона-Мартіна має однозначне зображення як барицентр відносно міри μ вимірного півпростору

$$H_x = \left\{ x' : \left(x', \|J_\mu^{-1} x\|_{H_\mu}^{-1} J_\mu^{-1} x \right)_{H_\mu} \geq a(x) \right\},$$

$$a(x) = -G^{-1}(\|J_\mu^{-1} x\|_{H_\mu}),$$

де $(\cdot, h)_{H_\mu}$ позначає лінійний вимірний функціонал відповідний до $h \in H_\mu$.

У **четвертому** розділі розглядається узагальнений зважений ліфт зоноід, нелійні нерівності зсуву, зважена обернена логарифмічна нерівність Соболєва.

Також доводиться пряма зважена логарифмічна нерівність Соболєва, з якої ми одержуємо як наслідок звичайну логарифмічну нерівність Соболєва, і для таких функцій, що мають необмежену знизу похідну від логарифмічної похідної міри (такі функції не задовільнять класичним критерія для логарифмічної нерівності Соболєва). Як приклад, доводяться нерівності Пуанкаре для цензурованих гауссових мір, отримуються поліноміальні оцінки на константу в нерівності.

Для формулювання теорем, нам треба ввести поняття зваженого зоноіда та ліфт зоноіда. Нехай μ – ймовірнісна міра на борелівській σ-алгебрі в $\mathbb{R}^d$, і $v:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ – вимірна функція така, що

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|v(x)\| \mu(dx) < \infty;$$

тут $\|\cdot\|$ – це Евклідова норма в $\mathbb{R}^d$. Визначаємо *зважений зоноід* $Z^v(\mu)$ з вагою v як множину всіх точок в $\mathbb{R}^d$ виду

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)v(x)\mu(dx) \qquad (12)$$

з довільною борелівською вимірною функцією $g:\mathbb{R}^d \to [0,1]$. *Зважений ліфт зоноід* $\hat{Z}^v(\mu)$ визначено як зважений зоноід міри $\delta_1 \times \mu$ в $\mathbb{R}^{d+1}$. Відповідно, зважений зоноід $Z^v(\mu)$ і зважений ліфт зоноід $\hat{Z}^v(\mu)$ – це множини точок виду

$$Eg(X)v(X) \in \mathbb{R}^d \qquad (13)$$

відповідно, де X – це довільний вектор з розподілом μ. Це означення пряме узагальнення означення зоноіду і ліфт зоноіду, де функція v має вигляд $v(x) = x$. Далі ми припускаємо, що міра μ має *логарифмічний градієнт* v_μ; де функція $v_\mu:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – інтегрована відносно міри μ і така, що для кожної гладкої $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ з компактним носієм

$$\mathbf{E}_\mu \nabla f = -\mathbf{E}_\mu (v_\mu f). \qquad (14)$$

Ця теорема демонструє зв'язок геометричних характеристик, таких як зважений ліфт зоноід, з функціональними нерівностями.

Теорема 4.1.1. *I. Наступні три твердження еквівалентні.*

- $\hat{Z}^{v_\mu}(\mu) \subset \hat{Z}(\gamma_c)$.
- Для гладкої функції $f:\mathbb{R}^d \to [0,1]$ з компактним носієм виконується нерівність

$$\|\mathbf{E}_\mu \nabla f\| \le cI(\mathbf{E}_\mu f). \qquad (15)$$

- Для будь-якого $h \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) - c\|h\|) \le \mu(A+h) \le \Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) + c\|h\|). \qquad (16)$$

II. Із умов **A - C**, випливає обернена логарифмічна нерівність Соболєва: для будь-якої гладкої функції $f:\mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ з компактним носієм

$$\|\mathbf{E}_\mu \nabla f\|^2 \le 2c\,\mathbf{Ent}_\mu f\, \mathbf{E}_\mu f. \qquad (17)$$

Зауваження 4.1.1. *За означенням, дві міри μ_1, μ_2 пов'язані ліфт зоноідним порядком (позначення: $\mu_1 \prec_{LZ} \mu_2$), якщо*

$$\hat{Z}(\mu_1) \subset \hat{Z}(\mu_2).$$

Нагадаємо, що $\overset{\bullet}{Z}^{\nu_\mu}(\mu)$ збігається з ліфт зоноідом міри $\nu_\mu := \mu \circ \nu_\mu^{-1}$; тобто, ліфт зоноідом від розподілу логарифмічного градієнта міри μ. Отже, твердження **A** може бути еквівалентно сформульоване наступним чином: розподіл ν_μ логарифмічного градієнту міри μ мажорується у сенсі ліфт зоноідного порядку канонічною гауссівською мірою в $\mathbb{R}^d$.

Основний результат підрозділу 4.1. – теорема 4.1.2., що наведена нижче, – це узагальнення теореми 4.1.1. Для формулювання теореми позначимо μ-дивергенцією функції $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, якщо вона існує, яка позначається як функція $\delta_\mu(g) \in L_1(\mathbb{R}^d, \mu)$ така, що для будь-якої гладкої функції $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ з компактним носієм:

$$\mathbf{E}_\mu (\nabla f, g)_{\mathbb{R}^d} = \mathbf{E}_\mu \, f \delta_\mu(g).$$

μ-дивергенція добре визначена, наприклад, для будь-якої функції $g \in C^1$ обмеженої разом з своїми частковими похідними; у цьому випадку:

$$\delta_\mu(g) = -\sum_{i=1}^{d} [v_\mu]_i g_i - \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} g_i.$$

Нехай функція $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ така, що для функції K, яка приймає значення $d \times d$-матриці:

$$v_i = \delta_\mu(K_i), \quad i = 1, \ldots, d, \tag{18}$$

де K_i позначає i-ий рядок матриці K. Тоді для будь-якої гладкої f з компактним носієм

$$\mathbf{E}_\mu (K \nabla f) = \mathbf{E}_\mu \, f v; \tag{19}$$

тут і нижче ми розглядаємо елементи $\mathbb{R}^d$ як вектор-стовпчики. Формула (19) – це просто розширення формули інтегрування по частинам (14), де градієнт ∇ змінюється на "зважений градієнт" $K\nabla$ з матричнозначною вагою K, і логарифмічний градієнт v_μ змінений на μ-дивергенцію функції K. Крім того, якщо K задовільняє деякі додаткові умови регулярності, наприклад,

$$K : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d} \quad -- \quad \chi\upsilon\varsigma \tag{20}$$

тоді для кожного $h \in \mathbb{R}^d$ існує потік розв'язків $\{\Psi_t^{K,h}(x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d\}$ задачі Коші

$$d\Psi_t(x) = (K^* h)(\Psi_t(x)) dt, \quad \Psi_0(x) = x. \tag{21}$$

Теорема 4.1.2. *I. Нехай* $\nu = (\nu_i)_{i=1}^d$ *задовільняє (18). Тоді наступні два твердження еквівалентні:*

- $\overset{\bullet}{Z}{}^{\nu}(\mu) \subset \overset{\bullet}{Z}(\gamma_c)$.
- Для будь-якої гладкої функції $f: \mathbb{R}^d \to [0,1]$ з компактним носієм виконується нерівність:

$$\|\mathbf{E}_\mu K\nabla f\| \le cI(\mathbf{E}_\mu f). \tag{22}$$

Якщо додатково матрично-значна функція K задовільняє (20), тоді **A1** і **B1** еквівалентні наступному твердженню.

- Для будь-якого $h \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) - c\|h\|) \le \mu(\left[\Psi_1^{K,h}\right]^{-1}(A)) \le \Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) + c\|h\|). \tag{23}$$

II. За умови **A1**, або еквівалетній їй **B1**, виконується наступна зважена обернена логарифмічна нерівність Соболєва: для будь-якої гладкої функції $f: \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ з компактним носієм:

$$\|\mathbf{E}_\mu K\nabla f\|^2 \le 2c^2\, \mathbf{Ent}_\mu f\, \mathbf{E}_\mu f. \tag{24}$$

Основний результат підрозділу 4.2. – теорема 4.2.1., наведена нижче:

Теорема 4.2.1. *Нехай* $d = 1$ *і функції* ν, K *пов'язані відношенням* $\nu = \delta_\mu(K)$. *Припустимо, що для деякого* $\alpha > 0$

$$K\nu' \ge \alpha. \tag{25}$$

Припустимо додатково, що функція K і

$$a := 2KK' + K^2\nu_\mu \tag{26}$$

належать до C^∞ та мають не більше ніж лінійне зростання на ∞, і їх похідні мають не більше ніж поліноміальне зростання на ∞.

Тоді для кожної гладкої функції f з компактним носієм

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \le \frac{2}{\alpha} \mathbf{E}_\mu (Kf')^2. \tag{27}$$

Як наслідок, якщо K обмежене, тоді μ задовольняє (класичній) логарифмічній нерівності Соболєва: для кожної абсолютно неперервної функції f такої, що обидві функції f і f' квадратично інтегровані відносно міри μ:

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \le \frac{2}{\alpha} (\sup_x K^2(x))\, \mathbf{E}_\mu (f')^2. \tag{28}$$

Твердження 4.2.1. *Нехай міра μ на* R *має перший абсолютний момент і має додатну неперервну щільність p_μ. Позначимо*

$$\overline{K}_\mu(x) = 1 p_\mu(x) \int_x^\infty (y - \langle\mu\rangle)\, p_\mu(y)\, dy, \quad x \in \mathrm{R}.$$

Виконуються наступні твердження:

• Якщо $\inf_x \overline{K}_\mu(x) = \alpha > 0$, тоді для будь-якої гладкої функції f з компактним носієм

$$\mathbf{Ent}_\mu\, f^2 \le \frac{2}{\alpha} \mathbf{E}_\mu (\overline{K}_\mu f')^2.$$

• Якщо, до того ж, $\sup_x \overline{K}_\mu(x) = \beta < \infty$, тоді для кожної абсолютно неперервної функції f такої, що обидві функції f і f' квадратично інтегровані відносно міри μ,

$$\mathbf{Ent}_\mu\, f^2 \le 2\overline{c}_\mu \mathbf{E}_\mu (f')^2$$

з $\overline{c}_\mu = \beta^2/\alpha.$

Твердження 4.2.2. *Нехай міра μ в* R *має додатну неперервну щільність розподілу p_μ. Позначимо*

$$\hat{K}_\mu(x) = I(F_\mu(x))\, p_\mu(x).$$

Тоді виконуються наступні твердження.

• Для будь-якої гладкої функції f з компактним носієм:

$$\mathbf{Ent}_\mu\, f^2 \le 2\mathbf{E}_\mu (\hat{K}_\mu f')^2. \tag{29}$$

• Якщо, додатково, $\hat{K}_\mu$ обмежене, тоді для будь-якої абсолютно неперервної функції f такої, що обидві функції f і f' квадратично інтегровані відносно міри μ:

$$\mathbf{Ent}_\mu\, f^2 \le 2\hat{c}_\mu \mathbf{E}_\mu (f')^2$$

де $\hat{c}_\mu = \sup_x (\hat{K}_\mu(x))^2.$

Зауваження 4.2.3. *Визначимо ізопериметричну функцію міри μ як*

$$I_\mu(p) = p_\mu(F_\mu^{-1}(p)), \quad p \in (0,1), \;\; I_\mu(0) = I_\mu(1) = 1.$$

Тоді, очевидно, функція I визначена як $I(p) := \rho_\gamma(F_\gamma^{-1}(p))$ еквівалентна $I_\gamma, \gamma : \mathrm{N}(0,1).$ Вище зазначена функція $\hat{K}_\mu(x)$ може бути виражена як відношення

$$I_\gamma(p) I_\mu(p)\big|_{p=F_\mu(x)},$$

і за припущеннями твердження 4.2.2. функція F_μ дає взаємно-однозначну відповідність між $(-\infty,\infty)$ і $(0,1)$. Отже, вище зазначена константа $\hat{c}_\mu$ може бути альтернативно визначена як

$$\hat{c}_\mu = \left(\sup_{p\in(0,1)} I_\gamma(p) I_\mu(p) \right)^2 .$$

В підрозділі 4.3. наводиться цілий клас мір, що є прикладом застосування введеного у попередньому розділі критерію для зваженої нерівності Соболєва. Нерівність Пуанкаре для сферично цензурованної багатовимірної гауссівської міри та логарифмічної нерівності Соболєва для проекції цієї міри на пряму.

гауссівська міра ротаційно інваріантна відносно центру координат, тому далі ми можемо, не порушуючи загальності, досліджувати нерівність Пуанкаре для сферично цензурованої гауссівська міри у випадку, коли центр відповідної кулі має вигляд $(a,0,0,...,0), a \ge 0$. Позначимо $\mu_n^{a,R}$ таку сферично цензуровану міру, та $\mu_{n,a,R}$ її проекцію на вісь (1, 0, 0, ..., 0). Позначимо $B_n(a,R) = \gamma_n(B((\underbrace{a,0,...,0}_{n});R)$,

$$H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} y^n e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

$$c_n = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{[0,\pi]^{n-2}} \sin(\vartheta_1)...(\sin(\vartheta_{n-2}))^{n-2} d\vartheta_1...\vartheta_{\vartheta-2} .$$

Теорема 4.3.1. *Для будь-якої абсолютно неперервної функції f такої, що f і f' квадратично інтегровані відносно міри $\mu_{n,a,R}$,*

$$\mathbf{Ent}_{\mu_{n,a,R}} f^2 \le 2c_{n,R} \mathbf{E}_{\mu_{n,a,R}} (f')^2 .$$

де $c_{\mu_{n,R}} = \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1} (\sqrt{2} R H_{n-2}(R) + \frac{4 c_n H_{n-1}(R)}{c_{n-1}(n-3)!!} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{c_{n-1}(n-3)!!})$

Зауваження 4.3.1. *Зазначимо, що H_n обмежується поліномом. Отже, як вже згадувалось, стала в нерівності Соболєва для міри $\mu_{n,a,R}$ допускає оцінку, поліноміальну за R.*

Наслідок 4.3.1. *Має місце нерівність Пуанкаре для $\mu_{n,a,R}$:*

$$Var_{\mu_{n,a,R}} f \le c_{n,R} \int |\nabla f|^2 d\mu_{n,a,R}$$

Теорема 4.3.2. *Має місце нерівність Пуанкаре для гауссівської міри з вирізаною кулею $\mu_n^{a,R}$:*

$$Var_{\mu_n^{a,R}} f \le (c_{n,R} + 1 + \frac{R^2}{n-1}) \int \|\nabla f\|^2 d\mu_n^{a,R}$$

У **п'ятому** розділі розглядаються загальні мартингальні оцінки ентропії та варіації функцій, причому фільтрація мартингалів породжується сім'єю множин побудованих по типу нарізки множин міри. Наводяться наслідки з цих оцінок у вигляді нерівності Пуанкаре та логарифмічної нерівності Соболєва в одномірному випадку.

Тут представимо тільки загальні оцінки на ентропію і варіацію і по одному наслідку з кожної загальної нерівності. Для цього нам знадобляться деякі позначення. Нехай μ – це ймовірнісна міра на R^d з борелівською σ-алгеброю $\mathsf{B}(\mathsf{R}^d)$. *Сконструюємо* фільтрацію $\{\mathsf{F}_t, t\in[0,1]\}$.

Будемо позначати через $\mathsf{N}_\mu = \{A\in\mathsf{F}: \mu(A)=0\}$ клас μ-нульових борелівських множин.

Зафіксуємо сім'ю $\{D_t, t\in[0,1]\}$ замкнених підмножин R^d таких, що:

- $D_s \subset D_t, s\le t$;
- $D_0\in\mathsf{N}_\mu$, $\mu(D_t)<1$ для $t<1$, і $D_1=\mathsf{R}^d$;
- для кожного $t>0$

$$D_t \setminus \left(\bigcup_{s<t} D_s\right) \in \mathsf{N}_\mu,$$

і для кожного $t<1$

$$D_t = \bigcap_{s>t} D_s.$$

Назвемо множини $D_t, t\in[0,1]$ *нарізкою множин*, слідуючи термінології яка часто використовується в багатовимірному аналізі. Дану сім'ю множин $\{D_t\}$ визначаємо відповідно як *нарізану фільтрацію* $\{\mathsf{F}_t\}$ за наступною умовою. Позначимо $Q_t = \mathsf{R}^d \setminus D_t$. Тоді, за означенням, множина $A\in\mathsf{F}$ належить до F_t якщо будь-яка множина $A\cap Q_t\in\mathsf{N}_\mu$, або $Q_t\setminus A\in\mathsf{N}_\mu$.

За конструкцією σ-алгебра $\mathsf{F}=\{\mathsf{F}_t\}$ – повна. Також очевидно, що за властивістю (ii) сім'ї $\{D_t\}$, σ-алгебра F_0 вироджена, і за властивістю (iii) фільтрація F є неперевною. Отже, можемо застосувати теорему 2(`)@.

Зафіксуємо борелівську вимірну функцію $g:\mathsf{R}^d\to\mathsf{R}^+$, яка є квадратично інтегрованою відносно μ. Розглянемо її як випадкову величину на $(\Omega,\mathsf{F},P)=(\mathsf{R}^d,\mathsf{B}(\mathsf{R}^d),\mu)$ і визначимо

$$g_t = \mathbf{E}_\mu[g\,|\,\mathsf{F}_t],\quad t\in[0,1].$$

Оскільки σ-алгебра має явний опис, можемо прямо порахувати кожне g_t, а саме, маємо для $t>0$ і μ-м.с. x:

$$g_t(x) = \begin{cases} g(x), & x\in D_t,\\ G_t, & x\in Q_t,\end{cases} \tag{30}$$

де

$$G_t = 1\mu(Q_t)\int_{Q_t} g(y)\mu(dy). \tag{31}$$

Позначимо

$$\tau(x) = \inf\{t : x \in D_t\}. \qquad (32)$$

Теорема 5.3.1. *Нехай* g *– борелівська вимірна функція* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, *квадратично інтегрована відносно* μ. *Нехай* $\{D_t\}$ *– це нарізка множин, яка задовольняє (i) – (iii).*

Тоді

$$\mathbf{Ent}_\mu\, g \le \int_{\mathbb{R}^d} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 G_{\tau(x)} \mu(dx),$$

де функції G і τ визначені як (31) і (32) відповідно.

Теорема 5.5.1. *Нехай* g *– борелівська вимірна функція* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, *квадратично інтегрована відносно* μ. *Нехай* $\{D_t\}$ *– це нарізка множин, яка задовольняє (i) – (iii).*

$$Var_\mu(g) = \int_{\mathbb{R}} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx)$$

де функції G і τ визначені як (31) і (32) відповідно.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена геометричній характеристиці міри як ліфт зоноід та її застосуванню у доведеннях функціональних нерівностей. У дисертації одержано такі основні результати:

• досліджені властивості ліфт зоноідів для максимально узагальненого випадку циліндричної міри в банаховому нескінченновимірному просторі;
• доведена теорема про однозначне представлення точок внутрішності випуклої замкненої оболонки носія міри як барицентра півпростору;
• введене поняття узагальненого ліфт зоноіда;
• введена умова на обернену логарифмічну нерівність Соболєва у термінах ліфт зоноідів;
• введена умова на узагальнену обернену логарифмічну нерівність Соболєва у термінах узагальнених ліфт зоноідів;
• введено новий критерій для прямої логарифмічної нерівності Соболєва, не потребуючий другої похідної від щільності міри;
• Доведено нерівність Пуанкаре для класу цензурованих гауссівських мір в $\mathbb{R}^d$;
• Доведені мартингальні оцінки для ентропії та варіації;
• Доведені оцінки для логарифмічної нерівності Соболєва та Пуанкаре, як наслідки із мартингальних оцінок для ентропії та варіації.

СПИСОК ОПУБЛІКОАНИЙ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] *Tymoshkevych T.D.* Barycentres of sets in Banah space with a measure / T.D. Tymoshkevych // Abstracts of International conference Stochastic Analysis and Random Dynamical Systems, Lviv, Ukraine. — June 14-20, 2009.

[2] *Tymoshkevych T.D.* Barycentric code and functional inequalities / T.D. Tymoshkevych // Abstracts of International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications III”, Kyiv, Ukraine. — September 10-14, 2012, — P. 99.

[3] *Tymoshkevych T.D.* Barycenter of sets in a Banach space with a measure / T.D. Tymoshkevych // Abstracts of International conference of students and young scientists “Lomonosov-2009”, Moscow. — April 13–18, 2009.

[4] *Tymoshkevych T.D.* A martingale bound for the variation and an analogue of the Muckenhoupt criterion for a weighted Poincare inequality on $\mathbb{R}$. / Tymoshkevych T. // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka. — 2015. — Vol. 1 — P. 15-20.

[5] *Kulik A.* Lift zonoid and barycentric representation on a Banach space with a cylinder measure / Kulik M., Tymoshkevych T. // Lithuanian Mathematical Journal — 2013. — Vol. 53 — № 2 — P. 181-195.

[6] *Kulik A.* Lift zonoid order and functional inequalities / Kulik M., Tymoshkevych T. // Theor. Probability and Math. Statist. — 2013. — Vol. 89 — P. 75-90.

[7] *Kulik A.* A martingale bound for the entropy associated with a trimmed filtration on $\mathbb{R}^d$ / Kulik A., Tymoshkevych T. // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2014. — Vol. 1 — P. 151-165.

[8] *Тимошкевич Т.Д.* Барицентричне представлення і барицентричний код для міри в Евклідовому просторі / Тимошкевич Т.Д.// Тези доповідей XIV міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, Київ, Україна. — Квітень 19-21, — 2012.— P. 130.

[9] *Тимошкевич Т.Д.* Нерівність Пуанкаре та логарифмічна нерівність Соболева для сферично цензурованої гауссової міри / Тимошкевич Т.Д. // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2014. — №. 91 — С. 164-173.

АНОТАЦІЯ

Тимошкевич Т. Д. Геометричні властивості ймовірнісних мір в лінійних просторах та функціональні нерівності. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерство освіти і науки України, Київ, 2016.

Дисертаційну роботу присвячено геометричним характеристикам міри таким як зоноїд і ліфт зоноїд, доведенню функціональних нерівностей, та зв'язку між ними. Введено узагальнення зоноїда, ліфт зоноїда та нарізки множин у максимальній загальності, тобто для нескінченновимірного простору з циліндричною мірою. Для (циліндричних) мір у нескінченновимірних просторах були отримані повні аналоги всіх основних властивостей ліфт зоноїдів та відповідних нарізок множин, включно із властивістю повної ідентифікації міри.

Отримано результат про барицентричне зображення точок, аналог теореми Крейна-Мільмана, але із властивістю однозначності зображення.

Показано, що обернена зважена логарифмічна нерівність Соболєва еквівалентна до того, що відповідний зважений ліфт зоноїд (дуальність між вагами вказана явно) вкладається у ліфт зоноїд для стандартної гауссової міри. Цей результат природно інтерпретується так, що (зважений) ліфт зоноїд є не тільки повним ідентифікатором міри, але й прямо стосується її властивостей концентрації.

Отримано низку нових достатніх умов для виконання зважених версій нерівності Пуанкаре та логарифмічної нерівності Соболєва. Одна з достатніх умов роботи дозволила розв'язати задачу, про поліноміальну асимптотику сталої Пуанкаре для гауссової міри, обмеженої на зовнішність кулі радіусу $R \to \infty$.

Ключові слова: зоноїд, обернена логарифмічна нерівність Соболєва, логарифмічна нерівність Соболєва, нерівність Пуанкаре, нерівність зсуву, цензурована гауссова міра, критерій Макенхаупта.

АННОТАЦИЯ

Тимошкевич Т. Д. Геометрические свойства вероятносных мер в линейных пространствах и функциональные неравенства. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. — Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Министерство образования и науки Украины, Киев, 2016.

Диссертационная работа посвящена геометрическим характеристикам меры таким как зоноид и лифт зоноид, доказательству функциональных неравенств, и связи между ними. Введено обобщение зоноида, лифт зоноида и нарезки множеств в максимальной общности, то есть для бесконечномерного пространства с цилиндрической мерой. Для (цилиндрических) мер в бесконечномерных пространствах были получены полные аналоги всех основных свойств лифт зоноидив и соответствующих нарезок множеств, включая свойство полной идентификации степени.

Получен результат о барицентричного представления точек, аналог теоремы Крейна-Мильмана, но со свойством однозначности представления.

Показано, что обратное взвешенное логарифмическое неравенство Соболева эквивалентно тому, что соответствующий взвешенный лифт зоноид (дуальность между весами указана явно) укладывается в лифт зоноид для стандартной гауссовой меры. Этот результат естественно интерпретируется так, что (взвешенный) лифт зоноид является не только полным идентификатором меры, но и прямо касается ее свойств концентрации.

Получен ряд новых достаточных условий для выполнения взвешенных версий неравенства Пуанкаре и логарифмической неравенства Соболева. Одно из достаточных условий работы позволило решить задачу, о полиномиальной асимптотике постоянной Пуанкаре для гауссовой меры, ограниченной на внешность шара радиуса $R \to \infty$.

Ключевые слова: зоноид, обратное логарифмическое неравенство Соболева, логарифмическое неравенство Соболева, неравенство Пуанкаре, неравенство сдвига, цензурированая гауссовская мера, критерий Макенхаупта.

ABSTRACT

Tymoshkevych. T. D. Geometric properties of probability measures in linear spaces and functional inequalities. — Manuscript.

PhD Thesis in the speciality 01.01.05 — probability theory and mathematical statistics. — Taras Shevchenko National University of Kyiv of the MES of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to geometric characteristics such as zonoid and lift zonoid, proof of functional inequalities, and the connection between them. Introduced generalizations of zonoid, lift zonoid and trimmed regions with maximum generality, for infinite-dimensional space with cylindrical measure. For (cylindrical) measures in infinite-dimensional spaces were obtained full analogues of all basic properties of lift zonoids and trimmed regions, including complete identification of measures.

Obtained barycentric representation theorem, analogue of Krein-Milman theorem, but with the uniqueness of the image property.

It is shown that the weighted inverse logarithmic Sobolev inequality is equivalent to that corresponding weighted lift zonoid (duality between the weights indicated clearly)

embedded in a lift zonoid for standard Gaussian measure. This result is naturally interpreted so that the (weighted) lift zonoid is not only fully identify measure, but is directly related to its concentration properties.

Obtained some new sufficient conditions for the implementation of weighted versions of the Poincaré inequality and logarithmic Sobolev inequalities. One of the sufficient conditions of thesis helped to solve the problem of polynomial asymptotic behavior of the Poincaré constant for Gaussian measures, limited to the exterior of a sphere of radius $R \to \infty$.

Keywords: zonoid, inverse logarithmic Sobolev inequality, logarithmic Sobolev inequality, Poincaré inequality, shift inequality, censored Gaussian measure, Muckenhoupt criterion.