УДК 51-76
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.10

Колянова Т.В., к.ф.-м. н.

Вплив керування на поведінку ізольованої логістичної популяції

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: tania.kolianova@gmail.com

T.V. Kolianova, PhD assistant

The impact of management on the behavior of an isolated logistics population

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: tania.kolianova@gmail.com

В статті розглядається ізольована популяція, що описується логістичним рівнянням, та вивчається вплив керування на зміну її чисельності. В залежності від значення параметру керування виникає три різних випадки поведінки ізольованої популяції. Досліджено стаціонарні точки на стійкість в усіх трьох випадках та представлені графіки поведінки популяції в залежності від різних початкових умов.

Ключові слова: логістична популяція, диференціальне рівняння, стаціонарна точка, стійкість, керування.

The article considers the isolated population described by the logistic equation and studies the influence of management on the change of its number. Depending on the value of the control parameter, there are three different cases of behavior of an isolated population. In the first case, when the quota is equal to the corresponding value, depending on the initial value, the population either goes to a stationary value, or dies out. In the second case, when the quota does not exceed the established value, depending on the initial population size, the population either goes to the largest stationary point, or dies out. And in the third case, when the quota exceeds the established value, regardless of the initial population size, the population dies out. Stationary points for stability in all three cases are studied and graphs of population behavior depending on different initial conditions are presented.

Key words: logistic population, differential equation, stationary point, stability, management.

Логістичне рівняння, також відоме як рівняння Ферхюльста (Верхюльста, 1838), спершу з’явилось при розгляді моделі зростання чисельності населення [1]. Зараз це рівняння широко застосовується для опису багатьох фізичних, хімічних, економічних та біологічних процесів тощо.

Нагадаємо логістичне рівняння [1]

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{q}\right), \quad x(0) = x_0, \qquad (1)$$

де r – темп росту популяції, q – ємність середовища.

Стаціонарні точки цього рівняння

$$x_1 = 0, \ x_2 = q.$$

Розв’язок рівняння (1) відомий та матиме вигляд:

$$x(t) = \frac{q}{1 - \left(\frac{x_0}{x_0 - q}\right)e^{-rt}} \qquad (2)$$

З розв’язку (2) видно, що при $t \to +\infty$ $x(t) \to q = x_2$.

Таким чином, маємо стійкий стан рівноваги при довільному початковому значенні $x_0 > 0$.

Пропонується розглянути логістичне рівняння для ізольованої популяції та ввести деякий параметр керування $u > 0, u = const$.

Тоді вихідна модель матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{q}\right) - u, \quad x(0) = x_0 \qquad (3)$$

Дану модель (3) з параметром керування можна використовувати для розв’язання прикладних задач: у замкненому середовищі проводити розведення деяких біологічних видів, наприклад, на продаж. Це може бути популяції харчових сортів риби, тварини хутряних порід, птахи тощо. За допомогою параметру керування та початкової чисельності популяції з’ясувати – яку кількість особин із популяції можна

© Колянова Т.В., 2021

вилучити, щоб популяція не вимирала і залишалась на певному сталому рівні.

Отже, знайдемо стаціонарні точки [2] для (3):

$$x_{1,2} = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4\frac{qu}{r}}}{2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q}{r}u} \qquad (4)$$

Все буде залежати від знаку підкореневого виразу. Позначимо його $D = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q}{r}u}$:

Отже, маємо три випадки

1) $D = 0 <=> u = {}^{rq}/_{4}$, тоді стаціонарна точка $x_{1,2} = {}^{q}/_{2}$.

2) $D > 0 <=> u < {}^{rq}/_{4}$, нехай $(u = {}^{rq}/_{4} - \varepsilon^2, \varepsilon > 0)$, тоді $x_{1,2} = \frac{q}{2} \pm \varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}$

3) $D < 0 <=> u > {}^{rq}/_{4}$, нехай $(u = {}^{rq}/_{4} - \varepsilon^2, \varepsilon > 0)$, тоді дійсних стаціонарних точок немає.

Розглянемо всі наші випадки.

1) Нехай $u = {}^{rq}/_{4}$, тоді $x_{1,2} = {}^{q}/_{2}$.

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{q}\right) - \frac{rq}{4}, \quad x(0) = x_0 \qquad (5)$$

Перепишемо в іншому вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{q}\left(x - \frac{q}{2}\right)^2, \quad x(0) = x_0 \qquad (6)$$

Розв'язавши рівняння (6), знайдемо, що

$$\frac{1}{x - \frac{q}{2}} = \frac{r}{q}t + C$$

Константа $C = \frac{1}{x_0 - \frac{q}{2}}, \quad x_0 \neq \frac{q}{2}$.

Отже, розв'язок має вигляд

$$x(t) = \frac{q}{2} + \frac{1}{\frac{r}{q}t + \frac{1}{x_0 - \frac{q}{2}}}, \qquad x_0 \neq \frac{1}{2} \qquad (7)$$

При $x_0 > {}^{q}/_{2}$ $\quad x(t) \to {}^{q}/_{2}$ при $t \to +\infty$.

При $x_0 < {}^{q}/_{2}$ $\quad x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

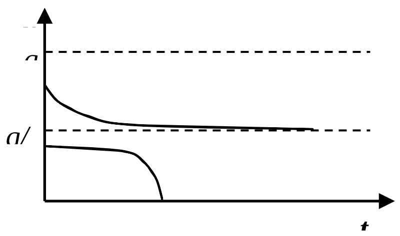


Рис.1. Поведінка ізольованої логістичної популяції при керуванні $u = {}^{rq}/_{4}$.

2) Нехай параметр керування $u < {}^{rq}/_{4}$.

Можемо нерівність перетворити у рівність наступним чином

$$u = {}^{rq}/_{4} - \varepsilon^2, \qquad (\varepsilon > 0),$$

тоді стаціонарні точки матимуть вигляд

$$x_{1,2} = \frac{rq}{2} \pm \varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}.$$

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{q}\right) - \frac{rq}{4} + \varepsilon^2, \; x(0) = x_0 \quad (8)$$

Перепишемо в іншому вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{q}\left(\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q}{r}\varepsilon^2\right), x(0) = x_0 \quad (9)$$

Рівняння (9) – це табличний інтеграл.

Отже,

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon} ln\left|\frac{x - \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon}{x - \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon}\right| = -\frac{r}{q}t + lnC \quad (10)$$

Все залежить від початкового значення x_0, а це в свою чергу визначає з яким знаком розкривається модуль.

Перепишем рівняння (10)

$$\left|\frac{x - \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right)}{x - \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right)}\right| = Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{r}{q}}t} \qquad (11)$$

Константа має вигляд

$$C = \left|\frac{x_0 - \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right)}{x_0 - \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right)}\right|$$

Нехай

$$x_0 < \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon.$$

Тоді розкриваємо модуль зі знаком «+»:

$$x - \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right) = Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}\left(x - \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right)\right).$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon + \frac{2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}}{1 - Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}}. \quad (12)$$

До якого значення буде прямувати $x(t)$ при $t \to +\infty$. Для цього розглянемо поведінку похідної (9) на проміжку $\left(0; q/2 - \sqrt{q/r}\,\varepsilon\right)$

Припустимо, що

$$x_0 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon - a \; (a > 0).$$

Підставимо в похідну (9), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{q}\left(\frac{q}{r}\varepsilon^2 + 2a\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}} + a^2 - \frac{q}{r}\varepsilon^2\right) < 0$$

Отже, похідна (9) на проміжку $\left(0; {}^{q}/_{2} - \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon\right)$ спадає, тому розв'язок (12) при $t \to +\infty$ $x(t) \to 0$. Таким чином популяція не встигає відновлюватись, та поступово вимирає.

Нехай

$$\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon < x_0 < \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon.$$

Тоді розкриваємо модуль зі знаком «-»:

$$x - \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right) = -Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}\left(x - \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon\right)\right)$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon - \frac{2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}}{1 + Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}}. \quad (13)$$

До якого значення буде прямувати $x(t)$ при $t \to +\infty$. Для цього розглянемо поведінку похідної (9) на проміжку $\left({}^{q}/_{2} - \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon; {}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon\right)$

Припустимо, що

$$x_0 = \frac{q}{2}.$$

Підставимо в похідну (9), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{q}\left(-\frac{q}{r}\varepsilon^2\right) = \varepsilon^2 > 0$$

Отже, похідна (9) на проміжку $\left({}^{q}/_{2} - \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon; {}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon\right)$ зростає, тому розв'язок (13) при $t \to +\infty$ $x(t) \to {}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon$ знизу.

Нехай

$$x_0 > \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon.$$

Тоді модуль розкривається зі знаком «+». Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon - \frac{2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}}{1 - Ce^{-2\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}t}}. \quad (14)$$

До якого значення буде прямувати $x(t)$ при $t \to +\infty$. Для цього розглянемо поведінку похідної (9) на проміжку $\left({}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon; q\right)$

Припустимо, що

$$x_0 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{r}}\varepsilon + a \ (a > 0).$$

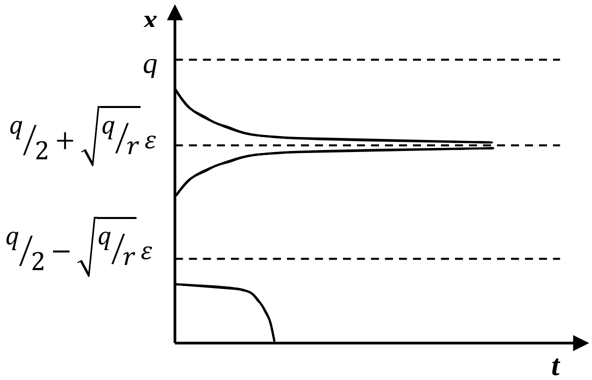
Підставимо в похідну (9), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} == -\frac{r}{q}\left(\frac{q}{r}\varepsilon^2 + 2a\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}} + a^2 - \frac{q}{r}\varepsilon^2\right) < 0$$

Отже, похідна (9) на проміжку $\left({}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon; q\right)$ спадає, тому розв'язок (14) при $t \to +\infty$ $x(t) \to {}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon$ зверху.

Рис. 2. Поведінка ізольованої логістичної популяції при керуванні $u < {}^{rq}/_{4}$.

Таким чином, у нас тільки одна стійка стаціонарна точка x_2, до якої прямують траєкторії розв'язку. Отже, якщо початкова чисельність популяції належить проміжку



$\left({}^{q}/_{2} - \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon; q\right)$ при параметрі керування $u < {}^{rq}/_{4}$ $x(t) \to {}^{q}/_{2} + \sqrt{{}^{q}/_{r}}\,\varepsilon$, в протилежному випадку популяція буде поступово вимирати.

3) Нехай $u > {}^{rq}/_{4}$ $(u = {}^{rq}/_{4} + \varepsilon^2, \varepsilon > 0)$, $x_{1,2}$ *не є дійсними*.

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{q}\right) - \frac{rq}{4} - \varepsilon^2, \quad x(0) = x_0 \quad (15)$$

Перепишемо в іншому вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{q}\left(\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{q}{r}\varepsilon^2\right), \quad x(0) = x_0 \quad (16)$$

Рівняння (16) – це табличний інтеграл.

Тоді, маємо

$$\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{r}{q}}\,arctg\frac{x-\frac{q}{2}}{\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}}=-\frac{r}{q}t+C$$

Константа має вигляд

$$C=\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{r}{q}}\ arctg\frac{x_0-\frac{q}{2}}{\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}}.$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t)=\frac{q}{2}+\varepsilon\sqrt{\frac{q}{r}}tg(-\varepsilon\sqrt{\frac{r}{q}}t+C_1) \qquad (17)$$

Маємо наступний графік динаміки

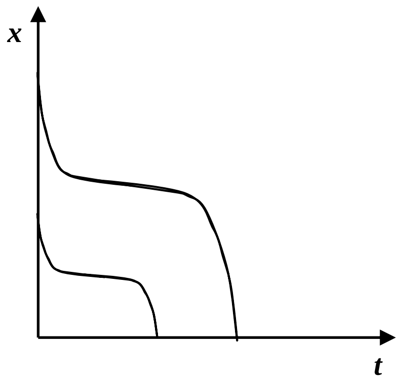


Рис. 3. Поведінка ізольованої логістичної популяції при керуванні $u > {}^{rq}/_{4}$.

В даному випадку якою б не була початкова чисельність при параметрі керування $u > {}^{rq}/_{4}$ популяція не встигатиме відновлюватись і буде вимирати, але чим більше початкова чисельність до ємності середовища, тим повільніше буде відбуватись вимирання.

Список використаних джерел

1. Verhulst, PF, Recherches Mathmatiques sur La Loi D'Accroissement de la Population, *Nouveaux Mmoires de l'Acadmie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles,* 18, Art. 1, 1-45, 1845 (Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase)
2. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – Київ: «Либідь», – 2003. – 600 с.

References

1. VERHULST (1845), PF, Recherches Mathmatiques sur La Loi D'Accroissement de la Population, *Nouveaux Mmoires de l'Acadmie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles,* 18, Art. 1, 1-45 (Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase)
2. SAMOYLENKO A.M., PERESTYUK M.O., PARASYUK I.O. (2003) Dyferensialni rivniannia. – Kyiv: “Lybid”, p.600

Надійшла до редколегії 22.04.20