Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2023, № 1 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.85

MSC 37C75, 65K05

THE REGULARIZED OPERATOR EXTRAPOLATION ALGORITHM

V. V. Semenov, O. S. Kharkov

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: {volodya.semenov, olehharek}@gmail.com

РЕГУЛЯРИЗОВАНИЙ АЛГОРИТМ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ

В. В. Семенов, О. С. Харьков

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: {volodya.semenov, olehharek}@gmail.com

Abstract. This work is devoted to the study of new algorithm for solving variational inequalities in Hilbert spaces. The proposed algorithm is a variant of the operator extrapolation method regularized using the Halpern scheme. The algorithm has an advantage over the Korpelevich extragradient method and the method of extrapolation from the past in terms of the amount of calculations required for the iterative step. For variational inequalities with monotone, Lipschitz continuous operators acting in Hilbert space, a theorem on strong convergence of the method is proved.
Keywords: variational inequality, monotone operator, operator extrapolation algorithm, Halpern method.

Анотація. Робота присвячена дослідженню нового ітераційного алгоритму для розв'язання варіаційних нерівностей в гільбертових просторах. Запропонований алгоритм є регуляризованим за допомогою схеми Гальперна варіантом методу операторної екстраполяції. За об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень алгоритм має перевагу над екстаградієнтним методом Корпелевич та методом екстраполяції з минулого. Для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють в гільбертовому просторі, доведено теорему про сильну збіжність методу.
Ключові слова: варіаційна нерівність, монотонний оператор, алгоритм операторної екстраполяції, метод Гальперна.

Вступ

Варіаційні нерівності дають універсальний засіб формулювання багатьох актуальних задач математичної фізики, оптимального керування та дослідження операцій $[1,2]$. Створення та дослідження алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей та близьких задач є напрямом прикладного нелінійного аналізу, що активно розвивається [3–7].

Зауважимо, що часто негладкі задачі опуклої оптимізації можуть ефективно розв'язуватися, якщо їх переформулювати у вигляді сідлових задач і застосувати алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей [8].

Нещодавно був розвинутий такий варіант побудови швидких алгоритмів для задач опуклого програмування: за допомогою теорії двоїстості переходимо до деякої опукло-угнутої сідлової задачі (гра Фенхеля) та застосовуємо екстраградієнтні алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей [9].

З появою генеруючих змагальних нейронних мереж (generative adversarial network, GAN) та інших моделей змагального навчання стійкий інтерес до алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей виник і в середовищі спеціалістів в галузі машинного навчання [10].

Найпростішим методом розв'язання варіаційних нерівностей є аналог методу градієнтного спуску, що у випадку сідлової задачі відомий як метод градієнтного спуску–підйому [7]. Але даний метод може не збігатися для нерівностей з монотонним оператором. Відомою модифікацією методу градієнтного спуску з проєктуванням для варіаційних нерівностей є екстраградієнтний метод Корпелевич [11–14], ітерація якого вимагає двох обчислень значення оператора задачі та двох метричних проєктувань на допустиму множину. «Обчислювально дешеві» варіанти екстраградієнтного алгоритму з одним метричним проєктуванням на допустиму множину пропонувались у роботах [15–17]. Варіанти, у тому числі адаптивні, екстраградієнтного методу Корпелевич досліджені в роботах [18, 19].

У роботі [20] запропонована відмінна від екстраградієнтного алгоритму модифікація методу градієнтного спуску–підйому для пошуку сідлових точок опукло–угнутих функцій. Ітерація даного алгоритму дешевша за ітерацію екстраградієнтного алгоритму за кількістю обчислень значень оператора: одне проти двох. Даний алгоритм Попова для варіаційних нерівностей став відомим серед спеціалістів з машинного навчання під назвою «Extrapolation from the Past» [10]. Принципові результати, пов'язані з даним алгоритмом, отримано у роботах [21–26]. Зокрема, його адаптивні модифікації запропоновано у роботах [21–23].

Подальший розвиток даного кола ідей та спроби зменшити складність виконання ітерації з збереженням характеру збіжності призвели до появи нового «forward–reflected–backward algorithm» для розв'язання операторних включень [27]. За об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень алгоритм має перевагу над екстаградієнтним методом Корпелевич та методом екстраполяції з минулого. Дана схема відома під назвою «optimistic gradient descent ascent» [10] та «алгоритм операторної екстраполяції» [28].

Актуальною є задача розробки сильно збіжного варіанту алгоритму операторної екстраполяції Для екстраградієнтного алгоритму та алгоритму екстраполяції з минулого сильно збіжні модифікації досліджувались в роботах [13, 22].

Останнім часом отримано багато результатів для алгоритмів розв'язання варіаційних задач в банахових просторах [28–32]. Зокрема, побудовані та теоретично обґрунтовані аналоги алгоритмів Корпелевич, Tseng'а та Попова для задач в рівномірно опуклих банахових просторах. У роботах [28, 29] досліджено адаптивний варіант «forward–reflected–backward algorithm» для варіаційних нерівностей в 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому банаховому просторі.

Дана робота продовжує цикл статей [21–23, 28, 29], що присвячений розробці обчислювально ефективних та адаптивних алгоритмів для варіаційних нерівностей та задач про рівновагу. В даній статті запропоновано та досліджено новий алгоритм для розв'язання варіаційних нерівностей в гільбертових просторах. Запропонований алгоритм є регуляризованим за допомогою схеми відомої Гальперна [33] варіантом методу операторної екстраполяції — «forward–reflected–backward algorithm» з [27]. Для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють в гільбертовому просторі, отримано теорему про сильну збіжність методу.

Постановка задачі

Розглянемо варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C : \ \langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{1}$$

де C — непорожня підмножина гільбертового простору H, A — оператор, що діє з простору H в H. Множину розв'язків (1) позначимо S.

Припустимо, що виконані такі умови:

– множина $C \subseteq E$ – опукла та замкнена;
– оператор $A : H \to H$ – монотонний на C, тобто

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0 \qquad \forall x, y \in C,$$

та ліпшицевий на C (з константою $L > 0$), тобто

$$\|Ax - Ay\| \leq L \|x - y\| \qquad \forall x, y \in C;$$

– множина S непорожня.

Розглянемо дуальну варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C : \ \langle Ay, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C. \tag{2}$$

Множину розв'язків варіаційної нерівності (2) позначимо S^d. Відомо, що множина S^d опукла та замкнена [2]. Нерівність (2) називають слабким або дуальним формулюванням варіаційної нерівності (1) (або нерівністю типу Мінті), а розв'язки нерівності (2) — слабкими розв'язками варіаційної нерівності (1). Для монотонних операторів A завжди маємо $S \subseteq S^d$. В наших умовах (коли оператор ще й неперервний) маємо $S^d = S$ [2].

Нехай K — непорожня замкнена та опукла підмножина гільбертового простору H. Відомо, що для кожного $x \in H$ існує єдиний елемент $z \in K$ такий, що

$$\|z - x\| = \inf_{y \in K} \|y - x\|.$$

Цей елемент z позначають $P_K x$, а відповідний оператор $P_K : E \to K$ називають проєкцією H на K (метричною проєкцією) [2, 7]. Проєкція характеризується таким чином [2, 7]:

$$z = P_K x \quad \Leftrightarrow \quad z \in K \quad \text{та} \quad \langle z - x, y - z \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Остання нерівність рівносильна такій [2, 7]:

$$\|y - P_K x\|^2 \leq \|y - x\|^2 - \|P_K x - x\|^2 \quad \forall y \in K.$$

Варіаційну нерівність (1) можна сформулювати як задачу пошуку нерухомої точки [2, 7]:

$$x = P_C (x - \lambda A x), \tag{3}$$

де $\lambda > 0$.

Формулювання (3) корисне, оскільки веде до ітераційної схеми

$$x_{n+1} = P_C (x_n - \lambda A x_n), \tag{4}$$

яка слабко збіжна для обернено сильно монотонних (ко-коерцитивних) операторів $A : H \to H$ [6,7]. Але для ліпшицевих монотонних операторів схема (4) в загальному випадку не збігається.

Найвідомішою модифікацією схеми (4) є екстраградієнтний метод Корпелевич [11]

$$x_{n+1} = P_C (x_n - \lambda A P_C (x_n - \lambda A x_n)),$$

ітерація якого вимагає двох обчислень значення оператора задачі та двох метричнх проєктувань на допустиму множину.

«Обчислювально дешеві» варіанти екстраградієнтного алгоритму з одним метричним проєктуванням на допустиму множину пропонувались у роботах [15–17].

Подальші спроби зменшити складність виконання ітерації з збереженням характеру збіжності призвели до появи нового «forward—reflected–backward algorithm» [27]

$$x_{n+1} = P_C (x_n - 2\lambda A x_n + \lambda A x_{n-1}). \tag{5}$$

Дана схема відома під назвою «optimistic gradient descent ascent» [10] та «алгоритм операторної екстраполяції» [28]. Слабка збіжність алгоритму (5) доведена в [27].

Задача даної статті — отримати сильно збіжний варіант алгоритму операторної екстраполяції. Для цього регуляризуємо алгоритм (5) за допомогою схеми відомої Гальперна [7, 33]

$$y_{n+1} = \alpha_n y + (1 - \alpha_n) T y_n, \tag{6}$$

де $T : H \to H$ — нерозтягуючий оператор, $y \in H$.

Якщо множина нерухомих точок $F(T) = \{x \in H : \ x = Tx\}$ непорожня та $\alpha_n \in (0, 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, то схема (6) сильно збіжна:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| y_n - P_{F(T)} y \right\| = 0.$$

Зауваження 1. Ітераційна схема Гальперна (6) співпадає з схемою ітеративної регуляризації Бакушинського [3] для методу послідовних наближень $x_{n+1} = T x_n$ апроксимації нерухомих точок оператора T.

Нагадаємо дві відомі леми про рекурентні числові нерівності.

Лема 1. *Нехай послідовність невід'ємних чисел* (ξ_n) *задовольняє рекурентній нерівності*

$$\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)\, \xi_n + \alpha_n \beta_n, \quad n \geq 1,$$

де послідовності (α_n) *та* (β_n) *мають властивості:* $\alpha_n \in (0,1)$ *та* $\beta_n \leq \beta$, *де* $\beta \geq 0$. *Тоді*

$$\xi_n \leq e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k} \xi_1 + \beta.$$

Лема 2. *Нехай послідовність невід'ємних чисел* (ξ_n) *задовольняє рекурентній нерівності*

$$\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)\, \xi_n + \alpha_n \beta_n, \quad n \geq 1,$$

де послідовності (α_n) *та* (β_n) *мають властивості:*

1) $\alpha_n \in (0,1)$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$;
3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \beta_n \leq 0$.

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

Лема 3 (Mainge P.-E., [34])**.** *Нехай числова послідовність* (a_n) *має підпослідовність* (a_{n_k}) *з властивістю* $a_{n_k} < a_{n_k+1}$ *для всіх* $k \geq 1$. *Тоді існує така неспадна послідовність* (m_k) *натуральних чисел, що*

$$m_k \to +\infty$$

та

$$a_{m_k} \leq a_{m_k+1}, \quad a_k \leq a_{m_k+1}$$

для всіх $k \geq n_1$.

Регуляризований алгоритм операторної екстраполяції

В роботі [27] для розв'язання варіаційної нерівності (1) запропоновано такий алгоритм операторної екстраполяції («forward–reflected–backward algorithm»)

$$\begin{aligned} x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda_n A x_n - \lambda_{n-1}\left(A x_n - A x_{n-1}\right)\right) = \\ = P_C\left(x_n - \left(\lambda_n + \lambda_{n-1}\right) A x_n + \lambda_{n-1} A x_{n-1}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

де параметри λ_n задовольняють умову

$$0 < \inf_n \lambda_n \leq \sup_n \lambda_n < \frac{1}{2L}.$$

Зауваження 2. Модифікації з проєкцією Брегмана та узагальненою проєкцією Альбера досліджені в [23, 28, 29].

За об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень даний алгоритм має перевагу над екстаградієнтним методом Корпелевич

$$\begin{cases} y_n = P_C\left(x_n - \lambda_n A x_n\right), \\ x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda_n A y_n\right), \end{cases}$$

та методом екстраполяції з минулого (методом Попова)

$$\begin{cases} y_n = P_C\left(x_n - \lambda_n A y_{n-1}\right), \\ x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda_n A y_n\right). \end{cases}$$

Відомо, що для варіаційних нерівностей (1) з монотонними та ліпшицевими операторами, які діють в гільбертовому просторі, алгоритм (7) слабко збігається з $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$-оцінкою ефективності в термінах функції зазору [28].

Спираючись на відомий метод Гальперна апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів [7,33] побудуємо такий регуляризований варіант алгоритму (7).

Алгоритм 1. Регуляризований алгоритм операторної екстраполяції.

- **Ініціалізація.** Задаємо елементи $y \in H$, x_0, $x_1 \in C$, послідовність додатніх чисел (λ_n) та таку послідовність (α_n), що

$$\alpha_n \in (0,1), \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty.$$

- **Ітерації.** Генеруємо послідовність (x_n) за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = P_C\left(\alpha_n y + (1-\alpha_n)\, x_n - \lambda_n A x_n - (1-\alpha_n)\, \lambda_{n-1}\left(A x_n - A x_{n-1}\right)\right).$$

Відносно додатніх параметрів λ_n припустимо виконання такої умови:

$$0 < \inf_n \lambda_n \le \sup_n \lambda_n < \frac{1}{2L}. \tag{8}$$

У наступному розділі доведемо, що послідовність (x_n), що породжена алгоритмом 1, сильно збігається до проєкції точки y на множину S. Отже, для пошуку нормального розв'язку (розв'язку з найменшою нормою) варіаційної нерівності (1) можна використати схему

$$x_{n+1} = P_C\left((1-\alpha_n)\, x_n - \lambda_n A x_n - (1-\alpha_n)\, \lambda_{n-1}\left(A x_n - A x_{n-1}\right)\right).$$

Перейдемо до доведення сильної збіжності алгоритму 1.

Теорема про сильну збіжність

Спочатку доведемо дві допоміжні нерівності, що дозволять використати леми 1 та 2 для доведення збіжності алгоритму 1.

Лема 4. *Для послідовності* (x_n)*, що породжена алгоритмом 1, виконується нерівність*

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-z\|^2+2\lambda_n\left\langle Ax_n-Ax_{n+1},x_{n+1}-z\right\rangle+\frac{1}{2}\|x_{n+1}-x_n\|^2\le\\
&\le(1-\alpha_n)\left(\|x_n-z\|^2+2\lambda_{n-1}\left\langle Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\right\rangle+\frac{1}{2}\|x_n-x_{n-1}\|^2\right)+\\
&\qquad+\alpha_n\|y-z\|^2-\alpha_n\|y-x_{n+1}\|^2-\\
&\qquad-\left(\frac{1}{2}-\alpha_n-(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L\right)\|x_{n+1}-x_n\|^2-\\
&\qquad-(1-\alpha_n)\left(\frac{1}{2}-\lambda_{n-1}L\right)\|x_n-x_{n-1}\|^2, \qquad (9)
\end{aligned}
$$

де $z\in S$.

Доведення. Нехай $z\in S$. Маємо

$$
\begin{aligned}
&\langle x_{n+1}-\alpha_n y-(1-\alpha_n)x_n+\lambda_n Ax_n+\\
&\qquad+(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}(Ax_n-Ax_{n-1}),z-x_{n+1}\rangle\ge0. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Монотонність оператора A та включення $z\in S$ дає

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\lambda_n Ax_n+(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}(Ax_n-Ax_{n-1}),z-x_{n+1}\right\rangle=\\
&\qquad=\lambda_n\left\langle Ax_n-Ax_{n+1},z-x_{n+1}\right\rangle+\\
&\qquad+(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}\left\langle Ax_n-Ax_{n-1},z-x_{n+1}\right\rangle+\underbrace{\lambda_n\left\langle Ax_{n+1},z-x_{n+1}\right\rangle}_{\le0}\le\\
&\qquad\le\lambda_n\left\langle Ax_n-Ax_{n+1},z-x_{n+1}\right\rangle+\\
&\qquad+(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}\left\langle Ax_n-Ax_{n-1},z-x_n\right\rangle+\\
&\qquad+(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}\left\langle Ax_n-Ax_{n-1},x_n-x_{n+1}\right\rangle. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Використавши (11) в (10), отримаємо

$$
\begin{aligned}
&0\le2\left\langle x_{n+1}-\alpha_n y-(1-\alpha_n)x_n,z-x_{n+1}\right\rangle+\\
&\qquad+2\lambda_n\left\langle Ax_n-Ax_{n+1},z-x_{n+1}\right\rangle+\\
&\qquad+2(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}\left\langle Ax_n-Ax_{n-1},z-x_n\right\rangle+\\
&\qquad+2(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}\left\langle Ax_n-Ax_{n-1},x_n-x_{n+1}\right\rangle. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Оцінимо зверху доданок $2\lambda_{n-1}\left\langle Ax_n-Ax_{n-1},x_n-x_{n+1}\right\rangle$ в (12). Маємо

$$
\begin{aligned}
&2\lambda_{n-1}\left\langle Ax_n-Ax_{n-1},x_n-x_{n+1}\right\rangle\le2\lambda_{n-1}\|Ax_n-Ax_{n-1}\|\cdot\|x_n-x_{n+1}\|\le\\
&\qquad\le2\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n-1}\|\cdot\|x_{n+1}-x_n\|\le\\
&\qquad\le\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n-1}\|^2+\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n+1}\|^2.
\end{aligned}
$$

Перетворимо доданок $2\langle x_{n+1}-\alpha_n y-(1-\alpha_n)x_n, z-x_{n+1}\rangle$ в (12). Маємо

$$2\langle x_{n+1}-\alpha_n y-(1-\alpha_n)x_n, z-x_{n+1}\rangle = \|\alpha_n y+(1-\alpha_n)x_n-z\|^2 - \\ - \|x_{n+1}-z\|^2 - \|x_{n+1}-\alpha_n y-(1-\alpha_n)x_n\|^2. \quad (13)$$

Для перетворення різниці

$$\|\alpha_n y+(1-\alpha_n)x_n-z\|^2 - \|\alpha_n y+(1-\alpha_n)x_n-x_{n+1}\|^2$$

в (13) використаємо таку тотожність

$$\|\alpha u+(1-\alpha)v-w\|^2 = \|v-w-\alpha(v-u)\|^2 = \\ = \|v-w\|^2 - 2\alpha\langle v-w, v-u\rangle + \alpha^2\|v-u\|^2 = \\ = \|v-w\|^2 - \alpha\|v-u\|^2 - \alpha\|v-w\|^2 + \alpha\|u-w\|^2 + \alpha^2\|v-u\|^2,$$

де u, v, $w \in H$, $\alpha > 0$. Отримаємо рівність

$$\|\alpha_n y+(1-\alpha_n)x_n-z\|^2 - \|\alpha_n y+(1-\alpha_n)x_n-x_{n+1}\|^2 = \\ = \|x_n-z\|^2 - \alpha_n\|x_n-y\|^2 - \alpha_n\|x_n-z\|^2 + \\ + \alpha_n\|y-z\|^2 + \alpha_n^2\|x_n-y\|^2 - \\ - \|x_n-x_{n+1}\|^2 + \alpha_n\|x_n-y\|^2 + \alpha_n\|x_n-x_{n+1}\|^2 - \\ - \alpha_n\|y-x_{n+1}\|^2 - \alpha_n^2\|x_n-y\|^2 = \\ = (1-\alpha_n)\|x_n-z\|^2 - (1-\alpha_n)\|x_n-x_{n+1}\|^2 + \\ + \alpha_n\|y-z\|^2 - \alpha_n\|y-x_{n+1}\|^2.$$

Прийшли до нерівності

$$0 \le (1-\alpha_n)\|x_n-z\|^2 - (1-\alpha_n)\|x_n-x_{n+1}\|^2 + \\ + \alpha_n\|y-z\|^2 - \alpha_n\|y-x_{n+1}\|^2 - \|x_{n+1}-z\|^2 + \\ + 2\lambda_n\langle Ax_n - Ax_{n+1}, z-x_{n+1}\rangle + \\ + 2(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}\langle Ax_n - Ax_{n-1}, z-x_n\rangle + \\ + (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n-1}\|^2 + (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L\|x_n-x_{n+1}\|^2. \quad (14)$$

Перегрупуємо члени в (14) та отримаємо

$$\|x_{n+1}-z\|^2 + 2\lambda_n\langle Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1}-z\rangle + \frac{1}{2}\|x_{n+1}-x_n\|^2 \le \\ \le (1-\alpha_n)\left(\|x_n-z\|^2 + 2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1}-Ax_n, x_n-z\rangle + \frac{1}{2}\|x_n-x_{n-1}\|^2\right) + \\ + \alpha_n\|y-z\|^2 - \alpha_n\|y-x_{n+1}\|^2 - \left(\frac{1}{2} - \alpha_n - (1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L\right)\|x_{n+1}-x_n\|^2 - \\ - (1-\alpha_n)\left(\frac{1}{2} - \lambda_{n-1}L\right)\|x_n-x_{n-1}\|^2,$$

що й потрібно було довести. □

Лема 5. *Для послідовності* (x_n)*, що породжена алгоритмом 1, виконується нерівність*

$$\|x_{n+1}-z\|^2+2\lambda_n\left\langle Ax_n-Ax_{n+1},x_{n+1}-z\right\rangle+\frac{1}{2}\|x_{n+1}-x_n\|^2\le$$
$$\le(1-\alpha_n)\left(\|x_n-z\|^2+2\lambda_{n-1}\left\langle Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\right\rangle+\frac{1}{2}\|x_n-x_{n-1}\|^2\right)+$$
$$+2\alpha_n\left\langle y-z,x_{n+1}-z\right\rangle-\left(\frac{1}{2}-\alpha_n-(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L\right)\|x_{n+1}-x_n\|^2-$$
$$-(1-\alpha_n)\left(\frac{1}{2}-\lambda_{n-1}L\right)\|x_n-x_{n-1}\|^2, \quad (15)$$

де $z\in S$.

Доведення. Застосуємо елементарну нерівність

$$\|a+b\|^2\le\|a\|^2+2\left\langle b,a+b\right\rangle.$$

Маємо

$$\|y-z\|^2=\|y-x_{n+1}+x_{n+1}-z\|^2\le$$
$$\le\|y-x_{n+1}\|^2+2\left\langle y-z,x_{n+1}-z\right\rangle. \quad (16)$$

Використавши (16) в (9), отримаємо (15), що і потрібно було довести. □

Доведемо обмеженість послідовності (x_n).

Лема 6. *Нехай виконана умова* (8)*. Тоді породжена алгоритмом 1 послідовність* (x_n) *є обмеженою.*

Доведення. Оскільки

$$0<\inf_n\lambda_n\le\sup_n\lambda_n<\tfrac{1}{2L},\quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,$$

то існує такий номер $n_0\ge1$, що

$$\frac{1}{2}-\alpha_n-(1-\alpha_n)\lambda_{n-1}L=\frac{1}{2}-\lambda_{n-1}L-\alpha_n(1-\lambda_{n-1}L)>0 \quad (17)$$

та

$$(1-\alpha_n)\left(\frac{1}{2}-\lambda_{n-1}L\right)>0. \quad (18)$$

З (9) та (17), (18) випливає, що для $n\ge n_0$ виконується нерівність

$$\xi_{n+1}\le(1-\alpha_n)\xi_n+\alpha_n\|y-z\|^2, \quad (19)$$

де

$$\xi_n=\|x_n-z\|^2+2\lambda_{n-1}\left\langle Ax_{n-1}-Ax_n,x_n-z\right\rangle+\frac{1}{2}\|x_n-x_{n-1}\|^2,\quad z\in S.$$

Оцінимо знизу ξ_n. Маємо

$$\xi_n = \|x_n - z\|^2 + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z\rangle + \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|^2 \geq$$
$$\geq \|x_n - z\|^2 - 2\lambda_{n-1}\|Ax_{n-1} - Ax_n\|\|x_n - z\| + \frac{1}{2}\|x_{n-1} - x_n\|^2 \geq$$
$$\geq \|x_n - z\|^2 - 2\lambda_{n-1}L\|x_{n-1} - x_n\|\|x_n - z\| + \frac{1}{2}\|x_{n-1} - x_n\|^2 \geq$$
$$\geq (1 - \lambda_{n-1}L)\|x_n - z\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \lambda_{n-1}L\right)\|x_n - x_{n-1}\|^2 \geq 0. \quad (20)$$

З нерівностей (19), (20) та леми 1 випливає обмеженість послідовностей (ξ_n) та (x_n), що і потрібно було довести. □

Сформулюємо основний результат.

Теорема 1. *Нехай C — непорожня опукла та замкнена підмножина гільбертового простору H, $A : H \to H$ — монотонний та ліпшицевий на множині C оператор, $S \neq \emptyset$, $y \in H$, виконується умова* (8). *Тоді послідовність (x_n), що породжена алгоритмом 1, сильно збігається до точки $z = P_S y$.*

Доведення. Доведення спирається на леми 2, 3, 5, 6 та подібне до міркувань, що наведені в [7] (див. розділ 4 вказаної монографії). □

Заключні зауваження

В роботі запропоновано та досліджено новий алгоритм для розв'язання варіаційних нерівностей в гільбертових просторах. Запропонований алгоритм є регуляризованим за допомогою схеми Гальперна [33] варіантом методу операторної екстраполяції — «forward–reflected–backward algorithm» з [27].

Для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють в гільбертовому просторі, доведено теорему про сильну збіжність методу.

Важливим питанням є дослідження асимптотичної поведінки алгоритму 1 у ситуації $C = H$:

$$x_{n+1} = \alpha_n y + (1 - \alpha_n) x_n - \lambda_n Ax_n - (1 - \alpha_n) \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}).$$

А саме, питання про поведінку норми $\|Ax_n\|$. На нашу думку повинна виконуватись оцінка

$$\|Ax_n\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Зауважимо, що в роботі [35] для екстраградієнтного методу отримана оцінка

$$\|Ax_n\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

а в роботі [36] отримана оцінка

$$\|Ax_n\| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

для екстраградієнтного методу з регуляризацією Гальперна

$$\begin{cases} y_n = x_n + \frac{1}{n+2}(x_0 - x_n) - \frac{1}{8L} A x_n, \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n+2}(x_0 - x_n) - \frac{1}{8L} A y_n. \end{cases}$$

Параметри λ_n алгоритму 1 задавалась виходячи з умови

$$0 < \inf_n \lambda_n \le \sup_n \lambda_n < \frac{1}{2L}.$$

Тобто, явно використовувалась інформація про константи ліпшицевості оператора A. Алгоритм 1 та схема з статей [28, 29] дозволяє побудувати алгоритм з адаптивним вибором величини λ_n, що не вимагає знання ліпшицевих констант операторів та процедур типу лінійного пошуку.

Крім того, відштовхуючись від результатів робіт [28, 29] можна отримати аналог алгоритму 1 з узагальненою проєкцію Альбера для розв'язання варіаційних нерівностей в рівномірно опуклих та рівномірно гладких банахових просторах.

Робота виконана за фінансової підритмки МОН України (проєкт «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони», 0122U002026).

Література

1. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p.
2. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. Москва: Мир, 1983. 256 с.
3. Bakushinskii A. B., Goncharskii A. V. Iterative Methods for Solving Ill-Posed Problems. Moscow: Nauka, 1989. 126 p.
4. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarily Problem. V. 2. New York: Springer, 2003. 666 p.
5. Alber Y., Ryazantseva I. Nonlinear Ill Posed Problems of Monotone Type. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.
6. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2011. 408 p.
7. Семенов В. В. Варіаційні нерівності: теорія та алгоритми. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2021. 167 с.
8. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/T) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM J. on Optim.* 2004. Vol. 15. P. 229–251.
9. Wang J.-K., Abernethy J., Levy K. Y. No-Regret Dynamics in the Fenchel Game: A Unified Framework for Algorithmic Convex Optimization. *arXiv preprint arXiv:2111.11309.* 2021.
10. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A Variational Inequality Perspective on Generative Adversarial Networks. *preprint arXiv:1802.10551.* 2018.

11. Korpelevich G. M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon.* 1976. Vol. 12. No. 4. P. 747–756.
12. Nadezhkina N., Takahashi W. Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 2006. Vol. 128. P. 191–201.
13. Verlan D. A., Semenov V. V., Chabak L. M. A Strongly Convergent Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2015. Vol. 47. Issue 7. P. 31–46. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40.
14. Denisov S. V., Nomirovskii D. A., Rublyov B. V., Semenov V. V. Convergence of Extragradient Algorithm with Monotone Step Size Strategy for Variational Inequalities and Operator Equations. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51. Iss. 6. P. 12–24. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.20.
15. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 2000. Vol. 38. P. 431–446.
16. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 2011. Vol. 148. P. 318–335. https://doi.org/10.1007/s10957-010-9757-3.
17. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2011. V. 47. Iss. 4. P. 631–639. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9343-1.
18. Semenov V. V. Modified Extragradient Method with Bregman Divergence for Variational Inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50. Issue 8. P. 26–37. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.
19. Bach F., Levy K. Y. A Universal Algorithm for Variational Inequalities Adaptive to Smoothness and Noise. *arXiv preprint arXiv*:1902.01637. 2019.
20. Popov L. D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR.* 1980. Vol. 28. Issue 5. P. 845–848.
21. Vedel Y. I., Sandrakov G. V., Semenov V. V. An Adaptive Two-Stage Proximal Algorithm for Equilibrium Problems in Hadamard Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56. Issue 6. P. 978–989. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00318-6.
22. Vedel Y. I., Denisov S. V., Semenov V. V. An Adaptive Algorithm for the Variational Inequality Over the Set of Solutions of the Equilibrium Problem. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57. Issue 1. P. 91–100. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00332-2.
23. Semenov V. V., Denisov S. V., Kravets A. V. Adaptive Two-Stage Bregman Method for Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57. Issue 6. P. 959–967. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00421-2.
24. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An Extragradient Algorithm for Monotone Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50. Issue 2. P. 271–277. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9614-8.
25. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A New Non-Euclidean Proximal Method for Equilibrium Problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds.) Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. Advances in

Intelligent Systems and Computing, vol. 836. Springer, Cham, 2019. P. 50–58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6.

26. Vedel Y. I., Sandrakov G. V., Semenov V. V., Chabak L. M. Convergence of a Two-Stage Proximal Algorithm for the Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. V. 56. Iss. 5. P. 784–792. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00299-6.
27. Malitsky Y., Tam M. K. A Forward-Backward Splitting Method for Monotone Inclusions Without Cocoercivity. *SIAM J. on Optim.* 2020. Vol. 30. P. 1451–1472. https://doi.org/10.1137/18M1207260.
28. Semenov V. V., Denisov S. V., Sandrakov G. V., Kharkov O. S. Convergence of the Operator Extrapolation Method for Variational Inequalities in Banach Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58. Issue 6. P. 740–753. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00507-5.
29. Vedel Y., Semenov V., Denisov S. A Novel Algorithm with Self-adaptive Technique for Solving Variational Inequalities in Banach Spaces. In: Olenev N. N., Evtushenko Y. G., Jaćimović M., Khachay M., Malkova V. (eds.) Advances in Optimization and Applications. OPTIMA 2021. Communications in Computer and Information Science, vol 1514. Springer, Cham, 2021. P. 50–64.
30. Iiduka H., Takahashi W. Weak convergence of a projection algorithm for variational inequalities in a Banach space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2008. Vol. 339. No. 1. P. 668–679. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.07.019.
31. Shehu Y. Single projection algorithm for variational inequalities in Banach spaces with application to contact problem. *Acta Math. Sci.* 2020. 40. P. 1045–1063. https://doi.org/10.1007/s10473-020-0412-2.
32. Yang J., Cholamjiak P., Sunthrayuth P. Modified Tseng's splitting algorithms for the sum of two monotone operators in Banach spaces. *AIMS Mathematics*. 2021. Vol. 6. Iss. 5. P. 4873–4900. https://doi.org/10.3934/math.2021286.
33. Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. Vol. 73. P. 957–961.
34. Mainge P.-E. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization. *Set-Valued Analysis*. 2008. Vol. 16. P. 899–912.
35. Gorbunov E., Loizou N., Gidel G. Extragradient Method: $O(1/K)$ Last-Iterate Convergence for Monotone Variational Inequalities and Connections With Cocoercivity. *arXiv preprint arXiv: 2110.04261*. 2021.
36. Yoon T., Ryu E. K. Accelerated algorithms for smooth convex-concave minimax problems with $O\left(1/k^2\right)$ rate on squared gradient norm. Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning. Proceedings of Machine Learning Research. 2021. Vol. 139. P. 12098–12109.

Надійшла: 14.03.2023 / Прийнята: 10.05.2023