

**ЧАСОВА ЗАТРИМКА КРИТИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ТОЧКОВОГО ДЖЕРЕЛА ПОБЛИЗУ  
КАУСТИКИ-СКЛАДКИ ГРАВІТАЦІЙНО-ЛІНЗОВОЇ СИСТЕМИ**

*В рамках аналітичної теорії гравітаційного лінзування ми виводимо асимптотичну формулу для часової затримки критичних зображень точкового джерела, що знаходиться поблизу каустики-складки. Ми знаходимо поправки першого і другого порядків за степенями параметра, який характеризує близькість джерела до каустики. Ці поправки уточнюють раніше знайдену формулу нульового наближення [1]. Зокрема, ми підтвердили висунуту в [1] гіпотезу, що поправки першого порядку не дають вкладу у відносну затримку двох критичних зображень. Роль знайдених поправок проілюстровано на модельному прикладі шляхом порівняння аналітичних розрахунків з точними значеннями, визначеними чисельними методами.*

В гравітаційно-лінзовій системі (ГЛС) випромінювання поширюється від джерела до спостерігача різними шляхами, створюючи в загальному випадку декілька зображень. Для двох зображень різницю у часі поширення світла від джерела до спостерігача називають відносною часовою затримкою. Її вимірювання можливе внаслідок власної змінності джерела. При так званому макролінзуванні, коли лінзою є галактика або скупчення галактик, спостережуваними характеристиками ГЛС є червоні зміщення лінзи і джерела, взаємні координати зображень, відношення їх блиску і взаємні часові затримки. Значення цих характеристик створюють основу для побудови моделі конкретної ГЛС.

В роботі досліджується час затримки між двома критичними зображеннями точкового джерела біля каустики-складки. Застосовано метод наближень за степенями параметра близькості до каустики. Шукаються поправки першого та другого порядку до раніше знайденого в [1] нульового наближення. На прикладі лінзи Чанг-Рефсдала [2, 3] проведено порівняння розрахунків за наближеними формулами для часу затримки з точними значеннями. Показано, що врахування поправки другого порядку дозволяє значно розширити область застосовності аналітичної формули.

**1. Вихідні положення теорії гравітаційного лінзування.** У добре знаному наближенні пласкої тонкої гравітаційної лінзи рівняння лінзування має такий вид (див. напр. [1,3]):

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Тут вектори  $\mathbf{y}$  і  $\mathbf{x}$  – кутові положення точкового джерела і його зображення на небесній сфері. Вважаємо, що рівняння (1) сформульовано в одиницях так званого кута Ейнштейна-Хвольсона  $\theta_0 = \sqrt{\frac{4MG D_{LS}}{c^2 D_L D_S}}$ , де  $M$  – маса лінзи,

$G$  – гравітаційна стала;  $D_L$ ,  $D_S$ ,  $D_{LS}$  – відповідно відстані від спостерігача до лінзи, від спостерігача до джерела та від лінзи до джерела. З іншого боку  $\mathbf{x}$  можна інтерпретувати як вектор у площині лінзи, вимірюваний у радіусах Ейнштейна  $R_E = D_L \theta_0$ ,  $\mathbf{y}$  – вектор в площині джерела в одиницях  $D_S \theta_0$ . Кут відхилення  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  визначається формулою

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{4G D_{LS} D_L}{c^2 D_S} \iint \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \Sigma(\mathbf{x}') d^2 \mathbf{x}'. \quad (2)$$

Тут  $\Sigma(\mathbf{x})$  – поверхнева густина маси в гравітаційній лінзі, інтегрування здійснюється по її площі. Так звана критична густина визначається формулою  $\Sigma_{cr} = \frac{c^2 D_S}{4\pi G D_{LS} D_L}$ ; також вводиться нормована густина  $k(\mathbf{x}) = \Sigma(\mathbf{x})/\Sigma_{cr}$ . Тепер

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \iint k(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d^2 \mathbf{x}'. \quad (3)$$

Поле  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$  є потенціальним:  $\boldsymbol{\alpha} = \nabla \Psi$ , де

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \iint k(\mathbf{x}') \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d^2 \mathbf{x}'. \quad (4)$$

З рівняння (4) випливає, що

$$\Delta \Psi = 2k. \quad (5)$$

Отже, властивості ГЛС у нормованих змінних визначаються лінзовим потенціалом  $\Psi(\mathbf{x})$ .

Час поширення світлового сигналу від джерела до спостерігача у присутності гравітаційної лінзи відрізняється від такого ж у вільному просторі на величину, яка з точністю до адитивної константи дається формулою [3, 4]:

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tau_0 \left[ \frac{1}{2} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 - \Psi(\mathbf{x}) \right]. \quad (6)$$

Тут  $\tau_0 = \frac{1+z_L}{c} \frac{D_L D_S}{D_{LS}} \theta_0^2$ ,  $z_L$  – параметр червоного зміщення лінзи. Для отримання часу затримки між двома зображеннями достатньо знайти різницю двох відповідних виразів (6). Для величини нормованого часу затримки введемо таке позначення  $T_N = T(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\tau_0$ . Скориставшись рівнянням (1) та виразом для кута відхилення, отримуємо вираз для часу затримки як функції координат зображення

$$T_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2 - \Psi. \quad (7)$$

**2. Критичні криві і каустики.** Під час математичного аналізу рівняння (1) можна тимчасово забути про інтерпретацію координат і розглядати (1) як відображення  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  площини зображень на площину джерел. У загальному випадку одному положенню  $\mathbf{y}$  точкового джерела відповідає декілька зображень  $\mathbf{x}_{(i)}$  – розв'язків рівняння (1). Коефіцієнт підсилення  $i$ -го зображення визначається через якобіан лінзового відображення [3]:

$$K_{(i)} = \left| J \right|_{\mathbf{x}_{(i)}}^{-1}, \quad J(\mathbf{x}) = \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)}. \quad (8)$$

Точки  $\mathbf{x}$ , в яких  $J(\mathbf{x}) = 0$  називають критичними, а відповідні їм точки площини джерел – каустичними. Добре відомо, що стійкі критичні точки гладких відображень двовимірних многовидів бувають лише двох видів: складки і зборки. При цьому складки утворюють гладку криву, а зборки – її точки повертання. Каустичні криві відокремлюють області площини джерел, які мають різну кількість зображень. Коли точкове джерело наближається до складки з того боку, якому відповідає більша кількість зображень, два зображення прямують до відповідної критичної точки, їх коефіцієнти підсилення зростають до нескінченності. А після того, як джерело перетне каустику, ці два зображення зникають. Такі зображення називають критичними. Якщо ж шлях джерела перетинає каустику в точці зборки, то вже три критичних зображення зустрічаються у відповідній критичній точці, їх підсилення також стають нескінченними, але після перетину джерелом каустики одне із цих зображень виживає. В теорії гравітаційного лінзування зборки називають каспами.

Властивості ГЛС в околі каустики можна досліджувати не задаючи точного виду лінзового потенціалу, а моделюючи його відтинком степеневого розкладу. У низці робіт [5–10] були отримані аналітичні формули, які уточнюють раніше відомі асимптотичні вирази для координат критичних зображень та їх підсилення [3]. Поправки першого порядку за степенями параметра близькості до каустики-складки були знайдені в [5, 6], другого порядку за умови  $k(\mathbf{x}) = \text{const.}$  в [7, 8], у загальному випадку в [9, 10].

Формули для часової затримки між критичними зображеннями у нульовому наближенні були отримані в [1]. Також в [1] на основі чисельного дослідження конкретної лінзової моделі були висунуті певні гіпотези стосовно двох наступних наближень.

Метою цієї роботи є отримання першого та другого наближень для часу затримки між критичними зображеннями в околі складки і порівняння наближених та точного виразів на конкретному прикладі.

**3. Моделювання околу критичної кривої і затримка критичних зображень.** Розкладаючи лінзовий потенціал в степеневий ряд біля заданої точки, можемо отримати апроксимаційні формули для часу затримки, які мають вид поліномів за степенями різниць координат в площині зображень. Скориставшись наближеними виразами для координат зображень, можна їх переформулювати через координати джерела.

Розглянемо це більш детально. Нехай  $\mathbf{x}_0$  – точка на площині зображень, окіл якої досліджується;  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(\mathbf{x}_0)$  – відповідне положення джерела. Розклад потенціалу біля точки  $\mathbf{x}_0$  представимо символічно таким виразом:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_L, \quad (9)$$

де  $\Psi_0 = \Psi(\mathbf{x}_0)$ ,  $\Psi_1 = \nabla\Psi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  – лінійні складові; символом  $\Psi_L$  позначені складові другого і більш високих порядків. Беручи різницю рівнянь (1) у двох точках, знаходимо:

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \nabla\Psi_L(\mathbf{x}). \quad (10)$$

Отже перехід до локальних координат  $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  і  $\mathbf{Y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$  в рівнянні лінзи має наслідком перехід до потенціалу  $\Psi_L$ .

Тепер розглянемо різницю  $\Delta T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = T_N(\mathbf{x}) - T_N(\mathbf{x}_0)$  часів поширення світла до двох точок площини зображень. Застосовуючи формули (7) і (9), а також рівняння (1) отримуємо

$$\Delta T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \Delta_1 T + \Delta_L T. \quad (11)$$

Тут де  $\Delta_L T(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}(\nabla\Psi_L)^2 - \Psi_L$  – величина, що визначається такою самою формулою як (7), але за потенціалом  $\Psi_L$ . Величину  $\Delta_1 T$  будемо називати локальним часом затримки.

Для  $\Delta_1 T$  знаходимо

$$\Delta_1 T = -\nabla\Psi(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{Y}. \quad (12)$$

Формула (11) дає затримку зображення в точці  $\mathbf{x}$  відносно зображення в опорній точці  $\mathbf{x}_0$ . Часова затримка між зображеннями в точках  $\mathbf{x}_1$  і  $\mathbf{x}_2$  дорівнює різниці  $\Delta T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0) - \Delta T(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_0)$ . З формул (11,12) випливає наступне твердження. Якщо точки  $\mathbf{x}_1$  і  $\mathbf{x}_2$  суть два зображення однієї точки (що має локальні координати  $\mathbf{Y}$ ), то доданки  $\Delta_1 T$  в виразі для відносної затримки скорочуються. При цьому затримка визначається лише доданками  $\Delta_L T$ . Але якщо розглядати затримку між зображеннями двох одночасних подій, що мали місце в різних точках (наприклад, протяжного джерела), то лінійні доданки (12) дають суттєвий вклад, який необхідно враховувати.

Будемо розглядати розклад лінзового потенціалу та рівняння (1) в околі критичної точки. Далі вважаємо, що в цій точці знаходиться початок координат площини зображень, а початок координат площини джерел лежить у відповідній каустичній точці. Звертаючись до членів другого порядку в розкладі лінзового потенціалу  $\Psi_L$  в околі критичної точки, треба взяти до уваги умову  $J(\mathbf{0}) = 0$ , а також рівності:  $\Psi_{,11} + \Psi_{,22} = 2k$ ,  $\Psi_{,11} - \Psi_{,22} = 2\gamma_1$ ,  $\Psi_{,12} = \gamma_2$ . Тут  $\gamma_1, \gamma_2$  – дійсна і уявна частини так званого комплексного зсуву; його модуль  $\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$  – це просто зсув. Матриця Якобі лінзового відображення має вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 - \Psi_{,11} & -\Psi_{,12} \\ -\Psi_{,21} & 1 - \Psi_{,22} \end{pmatrix}.$$

Осі системи координат доцільно спрямувати вздовж власних векторів цієї матриці на початку координат. Тоді  $\Psi_{,12} = \gamma_2 = 0$ , а власні значення дорівнюють  $\lambda_{1,2} = 1 - k \pm \gamma$ . З умови  $J(\mathbf{0}) = 0$  випливає, що одне з власних значень дорівнює нулю, а інше – сліду матриці. За рахунок вибору координат завжди можна покласти  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_1 = 2(1 - k)$ . Для подальшого зручно ввести позначення  $\sigma = 1 - k(\mathbf{0})$ . При цьому  $\Psi_{,11} = 1 - 2\sigma$ ,  $\Psi_{,22} = 1$ .

Тепер розклад лінзового потенціалу з потрібною точністю можна записати так:

$$\begin{aligned} \Psi_L = & + \frac{1}{2}(1 - 2\sigma)x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{3}a_1x_1^3 - b_2x_1^2x_2 + a_2x_1x_2^2 + \frac{1}{3}b_1x_2^3 - \\ & - \frac{1}{4}c_3x_1^4 - d_2x_1^3x_2 + \frac{3}{2}c_1x_1^2x_2^2 + d_1x_1x_2^3 - \frac{1}{4}c_2x_2^4 - \frac{1}{5}g_3x_1^5 - \\ & - f_2x_1^4x_2 + 2g_2x_1^3x_2^2 + 2f_1x_1^2x_2^3 - g_1x_1x_2^4 - \frac{1}{5}f_3x_2^5 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Де введені такі скорочені позначення:

$$\begin{aligned} a_1 = -\frac{1}{2}\Psi_{,111}; \quad a_2 = \frac{1}{2}\Psi_{,122}; \quad b_1 = \frac{1}{2}\Psi_{,222}; \quad b_2 = -\frac{1}{2}\Psi_{,112}; \quad c_1 = \frac{1}{6}\Psi_{,1122}; \\ c_2 = -\frac{1}{6}\Psi_{,2222}; \quad c_3 = -\frac{1}{6}\Psi_{,1111}; \quad d_1 = \frac{1}{6}\Psi_{,1222}; \quad d_2 = -\frac{1}{6}\Psi_{,1112}; \\ g_1 = -\frac{1}{24}\Psi_{,12222}; \quad g_2 = \frac{1}{24}\Psi_{,11122}; \quad g_3 = -\frac{1}{24}\Psi_{,11111}; \quad f_1 = \frac{1}{24}\Psi_{,11222}; \\ f_2 = -\frac{1}{24}\Psi_{,11112}; \quad f_3 = -\frac{1}{24}\Psi_{,22222}. \end{aligned} \quad (14)$$

Позначення введені так, що при постійному  $k = k(\mathbf{0})$   $a_1 = a_2$ ,  $b_1 = b_2$ ,  $c_1 = c_2 = c_3$ ,  $d_1 = d_2$ ,  $g_1 = g_2 = g_3$ ,  $f_1 = f_2 = f_3$ . Умова того, що критична точка не є каспом, це  $b_1 \neq 0$ .

Формулювання відповідного розкладу рівняння (10) не містить жодних труднощів, і ми його не наводимо. Докладне обґрунтування підходу побудови наближених розв'язків за степенями параметра  $t$  близькості до каустики складки міститься в [8]. Локальні координати джерела задаються у вигляді  $Y_i = \tilde{y}_i t^2$ ,  $\tilde{y}_i = \text{const}$ ; координати критичних зображень шукаються у вигляді  $X_1 = t^2(x_{10} + x_{11}t + x_{12}t^2)$ ,  $X_2 = t(x_{20} + x_{21}t + x_{22}t^2)$ .

Формули нульового і першого наближень мають вид [9, 10]:

$$x_{10} = \frac{1}{2\sigma}(\tilde{y}_1 - a_2\tilde{y}_2/b_1), \quad x_{20} = \varepsilon\sqrt{\tilde{y}_2/|b_1|}, \quad \varepsilon = \pm 1; \quad (15)$$

$$x_{11} = -\frac{\varepsilon}{2b_1^2\sigma^2}\sqrt{\tilde{y}_2/|b_1|}\{b_1R^2\tilde{y}_1 - [a_2R^2 - (b_1d_1 + a_2c_2)\sigma]\tilde{y}_2\}, \quad R^2 = a_2^2 + b_1b_2, \quad (16)$$

$$x_{21} = \frac{-a_2b_1\tilde{y}_1 + (a_2^2 - c_2\sigma)\tilde{y}_2}{2b_1^2\sigma}. \quad (17)$$

Два знаки коефіцієнта  $\varepsilon$  відповідають двом критичним зображенням.

Доданки другого наближення мають таку структуру:

$$x_{12} = \frac{M_1\tilde{y}_1^2 + M_2\tilde{y}_1\tilde{y}_2 + M_3\tilde{y}_2^2}{8b_1^4\sigma^3}, \quad x_{22} = \varepsilon\sqrt{\tilde{y}_2/|b_1|}\frac{N_1\tilde{y}_2 + N_2\tilde{y}_1 + N_3\tilde{y}_1^2/\tilde{y}_2}{8b_1^3\sigma^2}. \quad (18)$$

Ми не наводимо тут явний вигляд коефіцієнтів  $M_k, N_k$ , поданих в [10]; лише зауважимо, що у виразах обох координат чергуються доданки цілих степенів координат, однакові для обох розв'язків, та півцілих, які відрізняються знаками. Не всі параметри (14) входять до формул (15–18), лише  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, g_1, f_3$ .

Підставляючи знайдені вирази для координат зображень в формулу для  $\Delta T_L(\mathbf{x}, 0)$ , знаходимо

$$\Delta_L T = \left( \Delta_L T_{(0)} + \Delta_L T_{(1)} t + \Delta_L T_{(2)} t^2 \right) t^3, \quad (19)$$

$$\Delta_L T_{(0)} = \frac{2}{3} \varepsilon \tilde{y}_2 \sqrt{-\frac{\tilde{y}_2}{b_1}}, \quad (20)$$

$$\Delta_L T_{(1)} = \frac{2\sigma b_1^2 - a_2^2 + \sigma c_2}{4\sigma b_1^2} \tilde{y}_2^2 + \frac{a_2}{2\sigma b_1} \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 - \frac{1-2\sigma}{4\sigma} \tilde{y}_1^2, \quad (21)$$

$$\Delta_L T_{(2)} = \frac{\varepsilon}{2b_1 \sigma^2} \sqrt{-\frac{\tilde{y}_2}{b_1}} \left( \frac{Q_1}{10b_1^2} \tilde{y}_2^2 + \frac{Q_2}{b_1} \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 + \frac{R^2}{2} \tilde{y}_1^2 \right), \quad (22)$$

$$Q_1 = 5a_2^4 + 5a_2^2 (b_1 b_2 - 2\sigma c_2) - 10\sigma a_2 b_1 d_1 + \sigma^2 (5c_2^2 + 4b_1 f_3), \quad (23)$$

$$Q_2 = -[a_2^3 + a_2 (b_1 b_2 - \sigma c_2) - \sigma b_1 d_1]. \quad (24)$$

Формула нульового наближення (20) була знайдена в роботі [1]. Для двох критичних зображень одного точкового джерела доданки  $\Delta_L T_{(0)}$ ,  $\Delta_L T_{(2)}$  однакові за величиною і мають різні знаки, а доданки  $\Delta_L T_{(1)}$  – однакові. Отже, у виразі для відносної часової затримки між двома критичними зображеннями доданки  $\Delta_L T_{(0)}$ ,  $\Delta_L T_{(2)}$  подвоюються, а складові  $\Delta_L T_{(1)}$  знищуються. Це доводить гіпотезу, висловлену в [1] на основі розгляду чисельних прикладів.

Підкреслимо, що отримані формули (19–24) разом із (12) дають більше ніж відносну затримку двох зображень однієї події, дозволяючи знаходити затримки між критичними зображеннями подій, що мали місце в різних точках площини джерел.

**4. Приклад: лінза Чанг-Рефсдала.** Проілюструємо знайдені формули на прикладі простої моделі – так званої гравітаційної лінзи Чанг-Рефсдала. Ця лінза утворена точковою масою, розташованою на початку координат, та зовнішнім припливним гравітаційним впливом, що характеризується параметром зсуву  $\bar{\gamma}$  [2, 3]. Відповідний лінзовий потенціал дається таким виразом

$$\Psi = -\frac{\bar{\gamma}}{2} (x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2). \quad (25)$$

Векторне рівняння (1) приймає вигляд системи

$$y_1 = (1 + \bar{\gamma}) x_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}; \quad (26)$$

$$y_2 = (1 - \bar{\gamma}) x_2 - \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (27)$$

Для прикладу ми обрали значення  $\bar{\gamma} = 0.5$  і траєкторію джерела, що перетинає каустику під скінченним кутом не близько до каспу. На рис. 1 справа зображено половину каустики лінзи Чанг-Рефсдала і положення точкового джерела (позначені світлими кружками), які відповідають послідовним значенням параметра  $t$ ; ліворуч – половину критичної кривої і траєкторії критичних зображень. Точні положення зображень, які визначені чисельними методами, позначені кружками; відповідні положення, визначені за формулами нульового наближення, позначені ромбами; а за формулами другого наближення – зірочками.

Видно, що формули другого наближення добре описують положення зображень навіть коли джерело віддаляється від точки перетину каустики майже на половину її ширини.

На рис. 2 показані локальні затримки критичних зображень, які відповідають їх точним положенням на рис. 1. (позначені кружками), а також їх наближені оцінки за формулами (20) – ромби та (19) – зірочки.

Рис. 3 ілюструє відносну часову затримку між двома критичними зображеннями. Коли відстані між зображеннями малі (тобто джерело знаходиться близько до каустики) і можна користуватися формулою нульового наближення (20), то відносна затримка пропорційна кубу відстані [1]. При збільшенні відстані вона зростає більш стрімко. Врахування поправки другого порядку (22) дозволяє значно розширити область застосовності аналітичної формули.

**Подяки.** Публікація містить результати досліджень, проведених при грантовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень за конкурсним проектом Ф64/45-2016.

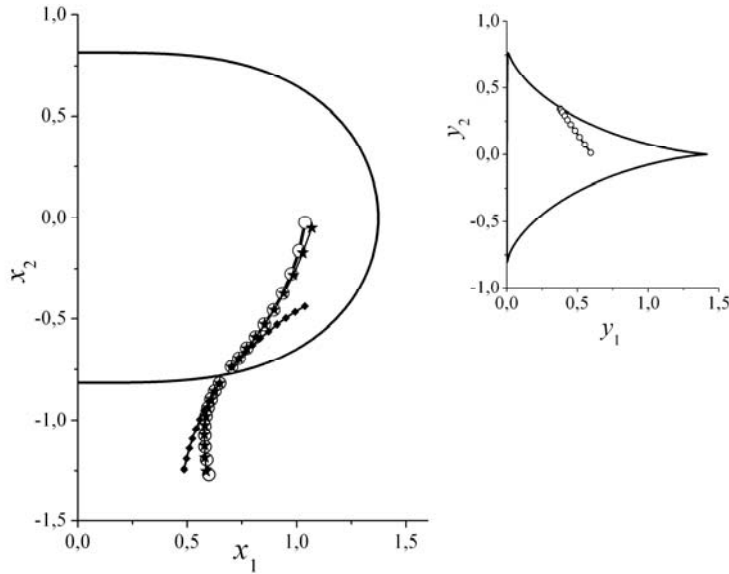


Рис. 1. Траскторії джерела і критичних зображень

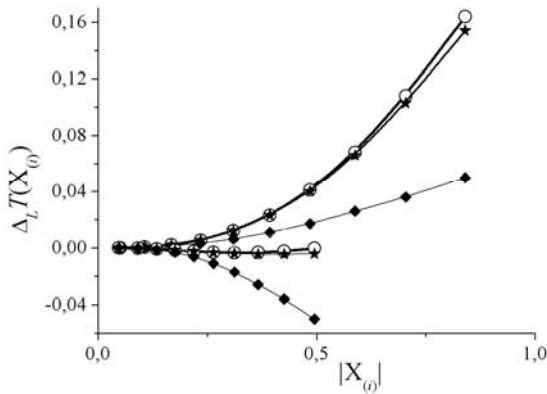


Рис. 2. Локальний час затримки критичних зображень

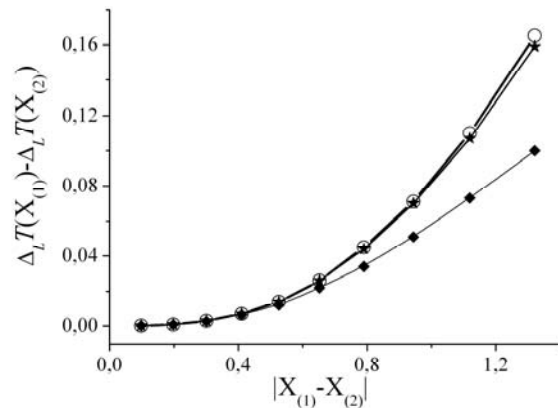


Рис. 3. Відносна затримка критичних зображень як функція відстані між ними

**Список використаних джерел**

1. Congdon A.B., Keeton C.R., Nordgren C.E. Analytic relations for magnification and time delays in gravitational lenses with fold and cusp configurations // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2008. – Vol. 389. – P. 398–406.
2. Chang K., Refsdal S. Flux variations of QSO 0957 + 561 A, B and image splitting by stars near the light path // Nature. – 1979. – Vol. 282. – 561–564.
3. Schneider P., Ehlers J., Falco E. E. Gravitational Lenses. – Berlin: Springer, 1992.
4. Congdon A.B., Keeton C.R., Nordgren C.E. Identifying anomalies in gravitational lens time delays // Astrophys. J. – 2010. – Vol. 709. – P. 552–571.
5. Александров О.М., Жданов В.І., Федорова О.В. Аналітичні співвідношення для гравітаційно-лінзового відображення в околі критичної кривої // Вісник Київ. Ун-ту. Астрономія. – 2003. – Вип. 39–40. – С. 52–59.
6. Keeton C.R., Gaudi B.S., Petters A.O. Identifying lenses with small-scale structure. II. Fold lenses // Astrophys. J. – 2005. – Vol. 635. – P. 35–59.
7. Alexandrov A.N., Zhdanov V.I., Fedorova E.V. Asymptotic formulas for the magnification of a gravitational lens system near a fold caustic // Astronomy Letters. – 2010. – Vol. 36, № 5. – P. 329–337.
8. Alexandrov A.N., Zhdanov V.I. Asymptotic expansions and amplification of a gravitational lens near a fold caustic // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2011. – Vol. 417. – P. 541–554.
9. Александров О., Жданов В., Коваль С. Асимптотичні формули для подій сильного мікролінзування з урахуванням темної матерії // Вісник Київ. Ун-ту. Астрономія. – 2012. – Вип. 49. – С. 17–20.
10. Alexandrov A.N., Koval S.M., Zhdanov V.I. Gravitational lens equation: critical solutions and magnification near folds and cusps // Advances in Astronomy and Space Physics. – 2012. – Vol. 2, Issue 2. – P. 184–187.

А. Н. Александров, канд. физ.-мат. наук,  
 В. И. Жданов, д-р физ.-мат. наук  
 Астрономическая обсерватория Киевского университета имени Тараса Шевченко

**ВРЕМЕННАЯ ЗАДЕРЖКА КРИТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА  
 ВБЛИЗИ КАУСТИКИ-СКЛАДКИ ГРАВИТАЦИОННО-ЛИНЗОВОЙ СИСТЕМЫ**

В рамках аналитической теории гравитационного линзирования мы выводим асимптотическую формулу для временной задержки критических изображений точечного источника, который находится вблизи каустики-складки. Мы находим поправки первого и второго порядков по степеням параметра, который характеризует близость источника к каустике. Эти поправки уточняют ранее найденную формулу нулевого приближения [1]. Кроме того, мы подтвердили выдвинутую в [1] гипотезу, что поправки первого порядка не делают вклада в относительную задержку двух критических изображений. Роль найденных поправок показана на модельном примере путем сравнения аналитических расчетов с точными значениями, определенными чисельными методами.