МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КОЗЛОВА НАДІЯ ОЛЕКСАНДРІВНА

УДК 517.968

НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України
Бойчук Олександр Андрійович,
Інститут математики НАН України, завідувач лабораторії крайових задач теорії диференціальних рівнянь.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
Журавльов Валерій Пилипович,
Житомирський національний агроекологічний університет, завідувач кафедри вищої та прикладної математики;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Самусенко Петро Федорович,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, доцент кафедри теоретичних основ інформатики.

Захист відбудеться "19" березня 2018 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м.Київ, вул.Володимирська, 58, зал № 12.

Автореферат розісланий "14" лютого 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Моклячук М.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена знаходженню умов існування та побудові розв'язків нетерових крайових задач для лінійних та слабконелінійних інтегральних рівнянь та нетерових крайових задач для слабконелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Проблеми побудови конструктивних методів аналізу лінійних та слабконелінійних крайових задач для широкого класу систем функціонально-диференціальних рівнянь, які традиційно займають одне з центральних місць у якісній теорії диференціальних рівнянь, ґрунтовно вивчалися у роботах М.В. Азбелєва, О.А. Бойчука, А.М. Самойленка, В.П. Журавльова, Б. Ван-дер-Поля, В. Вольтерра, А.М. Ляпунова, І.Г. Малкіна, М.О. Перестюка, М.Й. Ронто, Ю.О. Рябова. Дослідженню нелінійних та сингулярних рівнянь присвячено також роботи М.О. Красносельського, Г.М. Вайнікко, П.П. Забрейка, Т. Карлемана, С.Г. Міхліна, М.І. Шкіля, П.Ф. Самусенка. Інтерес до таких задач зумовлений, перш за все, важливістю практичного застосування теорії крайових задач у різних областях знань: теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії керування; низки радіотехнічних, механічних та біологічних задач. Специфіка дослідження крайових задач для інтегральних рівнянь полягає в тому, що у більшості випадків їх лінійна частина є оператором, який у відповідних просторах не має оберненого, що не дозволяє безпосередньо застосовувати традиційні методи дослідження крайових задач, які базуються на використанні принципу нерухомої точки. Цей факт суттєво ускладнює дослідження таких задач, у зв'язку з чим вони є маловивченими.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка згідно із загальним планом досліджень у рамках держбюджетних науково-дослідних тем №11БФ038-01 "Розроблення нових математичних методів моделювання, аналізу та побудови керувань для нелінійних еволюційних систем зі складною динамікою" (номер державної реєстрації №0111U006677), №16БФ038-01 "Якісний аналіз та керування еволюційними системами складної структури" (номер державної реєстрації №0116U004752).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження умов існування та побудови розв'язків нетерових крайових задач для інтегральних рівнянь та систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Основними завданнями дослідження є:

- встановлення необхідних та достатніх умов існування розв'язків нетерових крайових задач для лінійних та слабконелінійних інтегральних рівнянь; відшукання умов біфуркації та розгалуження розв'язків для таких задач;

- знаходження умов розв’язності слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією;
- встановлення критерію розв’язності крайових задач для лінійних інтегральних рівнянь з керуванням.

Об’єктом дослідження є інтегральні рівняння і системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією та крайові задачі для них.

Предметом дослідження є необхідні та достатні умови існування та конструктивні методи побудови розв’язків крайових задач для лінійних і слабконелінійних інтегральних рівнянь та слабконелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

Методи дослідження. У роботі суттєво використовується апарат теорії псевдообернених за Муром-Пенроузом операторів, метод Вішика-Люстерника, розвинений для лінійних задач у роботах В.С. Королюка, А.Ф. Турбіна, А.М. Самойленка, О.А. Бойчука, а також методи функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну і виносяться на захист, такі:

1. встановлено критерії існування розв’язків нетерових крайових задач для лінійного інтегрального рівняння та лінійного слабкозбуреного інтегрального рівняння типу Фредгольма, ядра яких є невиродженими;
2. побудовано загальний вигляд розв’язку у вигляді частини степеневого ряду з сингулярністю за параметром, який збігається при фіксованому, достатньо малому параметрі для лінійної слабкозбуреної крайової задачі, в припущенні, що породжуюча задача є нерозв’язною;
3. встановлено необхідні та достатні умови існування розв’язків нетерової крайової задачі для слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна, побудовано рівняння для породжуючих констант, яке дає необхідну умову існування розв’язку, встановлено зв’язок між необхідними та достатніми умовами, запропоновано ітераційні схеми побудови її наближених розв’язків;
4. досліджено нетерову крайову задачу для слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу, знайдено необхідні та достатні умови існування розв’язків поставленої задачі, встановлено зв’язок між цими умовами;
5. досліджено крайову задачу для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням у випадку, коли породжуюча крайова задача без керування є нерозв’язною; встановлено умови,

при яких вводячи керування в праву частину породжуючої задачі, отримана крайова задача стає розв’язною; знайдено явний вигляд керування.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання сприяють подальшому розвитку теорії крайових задач для інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, що використовуються при моделюванні та дослідженні фізичних, економічних та біологічних процесів.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, які виносяться на захист одержані автором самостійно. Визначення загального плану дослідження належить науковому керівнику – О.А. Бойчуку. У спільних роботах співавторам належать обговорення та аналіз отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались та обговорювались на конференціях та наукових семінарах:

1. Міжнародна конференція "The nonlinear analysis and application 2015" (Київ, 1-3 квітня 2015 р.);
2. XVII Міжнародна конференція "Dynamical system modelling and stability investigation" (Київ, 27-29 травня 2015 р.);
3. Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 3-6 червня 2015 р.);
4. VII Міжнародна конференція "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications" (MADEA-7) (Баку, Азербайджан, 8-13 вересня 2015 р.);
5. VII Міжнародна наукова конференція "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры" (Актобе, Республіка Казахстан, 8-9 жовтня 2015 р.);
6. Міжнародна наукова конференція "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел" (Душанбе, Республіка Таджикістан, 29-30 жовтня 2015 р.);
7. XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука (Київ, 19-20 травня 2016 р.);
8. Міжнародна наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 19-21 травня 2016 р.);
9. Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2016" (Львів, 25-27 травня 2016 р.);
10. Міжнародна конференція "International conference on Differential equations" (Львів, 20-24 вересня 2016 р.);
11. Міжнародна наукова конференція "Диференціально - функціональні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 28-30 вересня 2016 р.);
12. Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування"

(Кам’янець-Подільський, 19-21 травня 2017 р.);
13. XVIII Міжнародна конференція "Dynamical system modeling and stability investigation" (Київ, 24-26 травня 2017 р.);
14. Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування" (Слов’янськ, 28 травня - 3 червня 2017 р.);
15. Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 7-10 червня 2017 р.);
16. Засідання наукового семінару лабораторії крайових задач Інституту математики НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора, члена-кореспондента НАН України О.А. Бойчука (Київ, 2017);
17. Засідання наукового семінару кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора, академіка НАН України А.М. Самойленка та доктора фіз.-мат. наук, професора, академіка НАН України М.О. Перестюка (Київ, 2017).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 20 наукових публікацій. З них

— 5 статей [1]-[5] у фахових виданнях, серед яких 2 статті [1], [2], надруковані у журналі, переклад якого включений до наукометричної бази Scopus, 2 статті [4], [5] у наукових фахових виданнях України, та 1 статтю [3] у фаховому іноземному журналі, який включено до наукометричної бази Scopus;
— 15 тез доповідей на наукових конференціях [6]-[20].

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 116 найменувань, та додатку. Повний обсяг складає 170 сторінок друкованого тексту.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику – члену-кореспонденту НАН України, доктору фіз.-мат. наук, професору О.А. Бойчуку за постановку задачі, постійну увагу до роботи й обговорення отриманих результатів.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У ***вступі*** зроблено опис основних характеристик дисертаційного дослідження: обґрунтовано актуальність поставленої проблеми; визначено мету, завдання, об’єкт, предмет, методи дослідження; розкрито наукову новизну, теоретичне та практичне значення роботи; подано короткий аналіз сучасного стану проблеми; наведено дані про апробацію результатів та загальних опис отриманих результатів.

У ***першому розділі*** роботи наведено необхідні теоретичні відомості з лінійної алгебри, теорії псевдообернених операторів, теорії інтегральних рівнянь. Зроблено огляд сучасних наукових праць, тісно пов'язаних з тематикою дисертаційного дослідження.

У ***другому розділі*** дисертації досліджено питання існування розв'язку нетерових крайових задач для лінійного інтегрального рівняння та лінійного слабкозбуреного інтегрального рівняння типу Фредгольма, ядра яких є невиродженими. Використовуючи теорію псевдообернених за Муром-Пенроузом операторів, встановлено критерії існування розв'язку таких задач. Розглянуто критичний (резонансний) та некритичний (нерезонансний) випадки.

У ***підрозділі 2.1*** досліджено питання існування та встановлено загальний вигляд розв'язку лінійної крайової задачі для інтегрального рівняння типу Фредгольма

$$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \tag{1}$$

$$Sx(\cdot) = \alpha. \tag{2}$$

Тут $K(t,s)$ – ядро, сумовне з квадратом в області $[a,b]\times[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, , S – обмежений лінійний векторний функціонал, визначений в $L_2[a,b]$, $S = col\ S_1,\ \ S_2,\ \ ...,\ \ S_p\ : L_2[a,b] \to R^p$, $S_i : L_2[a,b] \to R$, $\alpha = col\ \alpha_1,\ \ \alpha_2,\ \ ...,\ \ \alpha_p\ \in R^p$.

Для крайової задачі (1), (2) отримано наступний критерій розв'язності.

Теорема 2.1.6 *Однорідна крайова задача (1), (2)* $(f(t) = 0, \alpha = 0)$ *має* d_2*-параметричну сім'ю розв'язків* $x \in L_2[a,b]$

$$x(t, c_{d_2}) = \Phi(t) P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}, \quad \forall c_{d_2} \in R^{d_2}.$$

Неоднорідна крайова задача (1), (2) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються $r + d_1$ *лінійно-незалежних умов*

$$P_{\Lambda_r^*} g = 0, \tag{3}$$

$$P_{Q_{d_1}^*} (\alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^+ g) = 0, \tag{4}$$

і має d_2*-параметричну сім'ю розв'язків* $x \in L_2[a,b]$ *вигляду*

$$x(t, c_{d_2}) = \Phi(t)(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2} + P_{\Lambda_r} Q^+(\alpha - S\Phi(\cdot)\Lambda^+ g) + \Lambda^+ g), \tag{5}$$

$$d_1 = p - \mathrm{rank} Q, \quad d_2 = r - \mathrm{rank} Q.$$

Тут P_{Λ_r} ($P_{\Lambda_r^*}$) – матриця, яка складається із повної системи r лінійно-незалежних стовпчиків (рядків) матриці-ортопроектора P_Λ (P_{Λ^*}) на ядро (коядро) матриці Λ. Матриця $P_{Q_{d_2}}$ $(P_{Q^*_{d_1}})$ складається із повної системи d_2 (d_1) лінійно-незалежних стовпчиків (рядків) матриці-ортопроектора P_Q (P_{Q^*}) на ядро (коядро) матриці Q, Λ^+ (Q^+) – псевдообернена за Муром-Пенроузом до матриці Λ (Q) матриця, $Q = S\Phi(\cdot)P_{\Lambda_r}$,

$$g = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ K \\ f_i \\ K \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & K & -a_{1i} & K \\ -a_{21} & 1-a_{22} & K & -a_{2i} & K \\ K & K & K & K & K \\ -a_{i1} & -a_{i2} & K & 1-a_{ii} & K \\ K & K & K & K & K \end{pmatrix},$$

$$f_i = \int_a^b f(t)\varphi_i(t)dt, \quad a_{ij} = \int_a^b\int_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds,$$

$$\Phi(t) = \varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad K, \quad \varphi_i(t), \quad K \;,$$

$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ – повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$.

У ***підрозділі 2.2*** досліджено умови біфуркації та встановлено структуру розв'язків слабкозбуреного лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K_1(t,s)x(s)ds. \qquad (6)$$

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ – ядра, сумовні з квадратом в області $[a,b]\times[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, $\varepsilon << 1$ – малий параметр.

Припускається, що породжуюче рівняння (1), отримане з (6) при $\varepsilon = 0$, не є розв'язним.

У ***підрозділі 2.3*** встановлено необхідні і достатні умови існування та загальний вигляд розв'язку слабкозбуреної крайової задачі для лінійного інтегрального рівняння (6) з крайовою умовою

$$Sx(\cdot) = \alpha + \varepsilon Jx(\cdot), \qquad (7)$$

у припущенні, що породжуюча задача, тобто задача (1), (2), є нерозв'язною.

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, $x(t)$, $f(t)$, S, α, ε такі ж, як було визначено раніше; $J = col\; J_1, \;\; J_2, \;\; K, \;\; J_p \; : L_2[a,b] \to R^p$ – обмежений лінійний векторний функціонал, $J_i : L_2[a,b] \to R$.

Використовуючи метод Вішика-Люстерника та теорію псевдообернених операторів, отримано критерій розв'язності крайової задачі (6), (7).

Теорема 2.3.3 *Припустимо, що породжуюча крайова задача (1), (2) не є розв'язною. Тоді, якщо виконується умова*

$$P_{\hat{B}_0^*} = 0,$$

то крайова задача (6), (7) буде мати розв'язок $x \in L_2[a,b]$ *у вигляді ряду з сингулярністю в точці* $\varepsilon = 0$*:*

$$x(t)=\Phi(t)\Big(\frac{P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}\hat{B}_0^{+}b_{-1}}{\varepsilon}+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\,(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c_k+\tilde{z}_k)\Big),$$

який збігається при достатньо малих фіксованих $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*]$.

Тут $W=S\Phi(\cdot)$, $W_1=J\Phi(\cdot)$, $\tilde{\lambda}_{ij}=\int_a^b\int_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dtds$,

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix}\tilde{\lambda}_{11} & \tilde{\lambda}_{12} & \dots & \tilde{\lambda}_{1i} & \dots\\ \tilde{\lambda}_{21} & \tilde{\lambda}_{22} & \dots & \tilde{\lambda}_{2i} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \tilde{\lambda}_{i1} & \tilde{\lambda}_{i2} & \dots & \tilde{\lambda}_{ii} & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{pmatrix},\ \hat{B}_0=\begin{bmatrix}P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}\\ P_{Q_{d_1}^*}(W_1-W\Lambda^{+}\Lambda_1)P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}\end{bmatrix},$$

$\tilde{z}_k$ та c_k визначаються з ітераційного процесу через коефіцієнти вихідної задачі, $P_{\hat{B}_0^*}$ – матриця-ортопроектор на коядро $((r+d_1)\times d_2)$- вимірної матриці $\hat{B}_0$, $\hat{B}_0^{+}$ – псевдообернена за Муром–Пенроузом до матриці $\hat{B}_0$ матриця.

За відсутності крайової умови (7), тобто для слабкозбуреного інтегрального рівняння типу Фредгольма (6) у підрозділі 2.2 отримано аналогічний до теореми 2.3.3 критерій розв'язності рівняння (6) з відповідними спрощеннями.

У ***третьому розділі*** дисертаційної роботи досліджено нетерову крайову задачу для слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна та нетерову крайову задачу для слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків таких задач. Побудовано рівняння для породжуючих констант та встановлено зв'язок між необхідними та достатніми умовами. Запропоновано ітераційні схеми побудови їх наближених розв'язків.

У ***підрозділі 3.1*** отримано необхідну та достатню умови існування розв'язку слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна

$$x(t)-\int_a^b K(t,s)x(s)ds=f(t)+\varepsilon\int_a^b K_1(t,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds,\qquad(8)$$

який при $\varepsilon=0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючого рівняння (1).

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, $x(t)$, $f(t)$ такі ж, як було визначено раніше, $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ – нелінійна по першій компоненті функція така, що

$$Z(\cdot,t,\varepsilon)\in C^1[\|x-x_0\|\le\mu],\ Z(x(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\in L_2[a,b],$$
$$Z(x(t,\cdot),t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],$$

де μ, ε_0 – достатньо малі константи, $\varepsilon<<1$ – малий параметр.

У ***підрозділі 3.2*** встановлено необхідну та достатню умови існування розв'язку слабконелінійної крайової задачі для інтегрального рівняння типу

Гамерштейна (8) з крайовою умовою

$$Sx(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \qquad (9)$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із розв'язків породжуючої крайової задачі (1), (2).

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, $x(t)$, $f(t)$, S, α, μ, $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ та ε_0 такі ж, як було визначено раніше; $J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелінійний обмежений p-вимірний вектор-функціонал, неперервно диференційовний по x у розумінні Фреше і неперервний по ε в околі породжуючого розв'язку.

Теорема 3.2.2 (Необхідна умова) *Нехай слабконелінійна крайова задача (8), (9) має розв'язок* $x = x(t,\varepsilon)$:

$$x(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \quad x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок* $x_0(t,c_{d_2})$ *(5) з векторною константою* $c_{d_2} = c^0_{d_2} \in R^{d_2}$. *Тоді константа* $c^0_{d_2}$ *обов'язково повинна бути дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант*

$$P_{\Lambda_r^*}\Lambda_1 V(z(c_{d_2}),0) = 0, \qquad (10)$$

$$P_{Q^*_{d_1}}(H(z(c_{d_2}),0) - W\Lambda^+\Lambda_1 V(z(c_{d_2}),0)) = 0. \qquad (11)$$

Тут $z(c_{d_2})$, $V(z(c_{d_2}),0)$, $H(z(c_{d_2}),0)$ є границями $z(\varepsilon)$, $V(z(\varepsilon),\varepsilon)$, $H(z(\varepsilon),\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, де

$$V(z(\varepsilon),\varepsilon) = col \; m_1(\varepsilon), \;\; m_2(\varepsilon), \;\; \ldots, \;\; m_i(\varepsilon), \;\; \ldots \;,$$

$$V(\cdot,\varepsilon) \in C^1[\|z - z_0\| \le \mu], \quad V(z(\cdot),\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

$$m_i(\varepsilon) = m_i(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_i(\varepsilon), \ldots, \varepsilon) = \int_a^b Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\varphi_i(t)dt,$$

$$H(z(\varepsilon),\varepsilon) = col \; h_1(\varepsilon), \;\; h_2(\varepsilon), \;\; \ldots, \;\; h_\nu(\varepsilon), \;\; \ldots, \;\; h_p(\varepsilon) \;,$$

$$H(\cdot,\varepsilon) \in D^1[\|z - z_0\| \le \mu], \quad H(z(\cdot),\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

$$h_\nu(\varepsilon) = h_\nu(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \ldots, x_i(\varepsilon), \ldots, \varepsilon) = J_\nu(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad \nu = \overline{1,p}.$$

Теорема 3.2.4 (Достатня умова) *Нехай породжуюча для крайової задачі (8), (9) задача (1), (2), за виконання* $r + d_1$ *лінійно-незалежних умов (3), (4), має* d_2*-параметричну сім'ю розв'язків* $x_0(t,c_{d_2})$ *(5). Тоді, для кожного значення* *векторної константи* $c_{d_2} = c_{d_2}^0 \in R^{d_2}$, *що задовольняє систему рівнянь для породжуючих констант (10), (11) та при виконанні умов*

$$P_{\breve{B}_0^*} G = 0, \quad P_{\breve{B}_0} = 0$$

задача (8), (9) буде мати розв'язок $x = x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, *який перетворюється при* $\varepsilon = 0$ *в породжуючий розв'язок* $x_0(t, c_{d_2}^0)$. *Цей розв'язок, при достаньо малих* ε, *можна знайти за допомогою збіжного ітераційного процесу*

$$c_{d_2}^k(\varepsilon) = \breve{B}_0^+ G \breve{b}_k,$$

$$\bar{y}_{k+1}(\varepsilon) = \varepsilon(P_{\Lambda_r} Q^+ (H(z_0(c_{d_2}^0),0) + l_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) +$$

$$+ R_2(y_k(\varepsilon),\varepsilon) - W\Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c_{d_2}^0),0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) +$$

$$+ R_1(y_k(\varepsilon),\varepsilon))) + \Lambda^+\Lambda_1(V(z_0(c_{d_2}^0),0) + A_1(P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}^k(\varepsilon) + \bar{y}_k(\varepsilon)) +$$

$$+ R_1(y_k(\varepsilon),\varepsilon))),$$

$$y_{k+1}(\varepsilon) = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{d_2}^k(\varepsilon) + \bar{y}_{k+1}(\varepsilon), \quad k = \overline{0,\infty},$$

$$y_0(\varepsilon) = \bar{y}_0(\varepsilon) = 0.$$

Тут $((r+d_1)\times d_2)$-вимірна матриця $\breve{B}_0$ має вигляд

$$\breve{B}_0 = \begin{bmatrix} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 A_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \\ P_{Q_{d_1}^*} (l_1 - W\Lambda^+\Lambda_1 A_1) P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} \end{bmatrix},$$

$G = \begin{pmatrix} P_{\Lambda_r^*} \Lambda_1 & P_{Q_{d_1}^*} \end{pmatrix}$, $\quad A_1 = A_1(c_{d_2}^0) = \dfrac{\partial V(z,0)}{\partial z}\Big|_{z=z(c_{d_2}^0)}$, $\quad l_1 = H'(z_0)$, $\quad P_{\breve{B}_0^*}$ – матриця-ортопроектор на коядро матриці $\breve{B}_0$, $\breve{B}_0^+$ – псевдообернена за Муром-Пенроузом до матриці $\breve{B}_0$ матриця.

Теорема 3.2.5. (Зв'язок між необхідною та достатньою умовами) *Якщо* $d_2 = r + d_1$, *то для того, щоб слабконелінійна крайова задача (8), (9) мала розв'язок* $x = x(t,\varepsilon) : x(t,0) = x_0(t, c_{d_2}^0)$, *де* $x_0(t, c_{d_2}^0)$ *– породжуючий розв'язок з векторною константою* $c_{d_2} = c_{d_2}^0 \in \mathrm{R}^{d_2}$, *необхідно, щоб константа* $c_{d_2}^0$ *була дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант (10), (11) і достатньо, щоб ця константа* $c_{d_2}^0$ *була простим коренем системи (10), (11).*

За відсутності крайової умови (9), тобто у випадку слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна (8), у підрозділі 3.1 отримано необхідні та достатні умови існування розв'язку та встановлено зв'язок між цими умовами, які є частковими випадками теорем 3.2.2-3.2.5.

У **підрозділі 3.3** отримано необхідну та достатню умови існування розв'язку слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t)-\tilde{\Phi}(t)\int_a^b[A(s)x(s)+B(s)\dot{x}(s)]ds= \\ = f(t)+\varepsilon\int_a^b K(t,s)Z(x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)ds \tag{12}$$

з імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i}=M_i x(\tau_i-0)+\gamma_i+\varepsilon J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{13}$$

$$t\neq\tau_i,\, t\in[a,b],\, \tau_i\in(a,b),\, i=1,2,...,p$$

та крайовою умовою

$$Sx(\cdot)=\alpha+\varepsilon J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),\, \alpha\in\mathrm{R}^q. \tag{14}$$

Умови (13), (14) еквівалентні умові

$$\ell x(\cdot)=\delta+\varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\in\mathrm{R}^{k+q}, \tag{15}$$

де

$$\ell=\begin{bmatrix}\varphi\\ S\end{bmatrix},\ \delta=\begin{bmatrix}\gamma\\ \alpha\end{bmatrix},\ J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)=\begin{bmatrix}J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\\ J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\end{bmatrix}.$$

Припускаємо, що розв'язок

$$x(\cdot,\varepsilon)\in D_2([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I),\ \dot{x}(\cdot,\varepsilon)\in L_2[a,b],\ x(t,\cdot)\in C(0,\varepsilon_0],$$

слабконелінійної імпульсної крайової задачі (12), (15) при $\varepsilon=0$ перетворюється у розв'язок породжуючої крайової задачі

$$\dot{x}(t)-\tilde{\Phi}(t)\int_a^b[A(s)x(s)+B(s)\dot{x}(s)]ds=f(t), \tag{16}$$

$$\ell x(\cdot)=\delta\in\mathrm{R}^{k+q}. \tag{17}$$

Розв'язок задачі (16), (17) будемо називати породжуючим розв'язком задачі (12)-(14).

Тут $A(t), B(t),\ \tilde{\Phi}(t)$ — $(m\times n),\ (m\times n),\ (n\times m)$ - вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектор-стовпчики матриці $\tilde{\Phi}(t)$ лінійно-незалежні на $[a,b]$, $f(t)$ — n-вимірна вектор-функція з $L_2[a,b]$; E_i, M_i — $(k_i\times n)$-вимірні матриці, γ_i — k_i-вимірний вектор-стовпчик констант; S — обмежений лінійний векторний функціонал, визначений в $D_2[a,b]$,

$S = col(S_1, S_2, S_3, ..., S_q) : D_2[a,b] \to \mathrm{R}^q$; нелінійна вектор-функція $Z(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ така ж, як було визначено в підрозділі 3.1; $J_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, $J_2(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелінійні обмежені, відповідно, p, q - вимірні вектор-функціонали, неперервно диференційовні по x у розумінні Фреше і неперервні по ε в околі породжуючого розв'язку.

Теорема 3.3.2 (Необхідна умова) *Нехай слабконелінійна імпульсна крайова задача (12)–(14) має розв'язок* $x = x(t,\varepsilon)$:

$$x(\cdot,\varepsilon) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \ \dot{x}(\cdot,\varepsilon) \in L_2[a,b], \ x(t,\cdot) \in C(0,\varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок* $x_0(t,c_r)$ *з векторною константою* $c_r = c_r^0$ $(r = m + n - \mathrm{rank} D - \mathrm{rank} Q)$. *Тоді константа* c_r^0 *обов'язково повинна бути дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант*

$$P_{D^*_{d_1}} \int_a^b [A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau,s) Z(x_0(s,c_r^0),s,0) ds d\tau + \\ + B(s) \int_a^b K(s,\tau) Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0) d\tau] ds = 0, \tag{18}$$

$$P_{Q^*_{d_2}} \{J(x_0(\cdot,c_r^0),0) - \mathsf{L}(\int_a^{\cdot} \int_a^b K(\tau,s) Z(x_0(s,c_r^0),s,0) ds d\tau + \\ + \Psi_0(\cdot) D^+ \int_a^b [A(t) \int_a^t \int_a^b K(\tau,s) Z(x_0(s,c_r^0),s,0) ds d\tau + \\ + B(t) \int_a^b K(t,s) Z(x_0(s,c_r^0),s,0) ds] dt)\} = 0, \tag{19}$$

$$d_1 = m - \mathrm{rank} D, \quad d_2 = k + q - \mathrm{rank} Q.$$

Теорема 3.3.3 (Достатня умова) *Нехай породжуюча крайова задача (16), (17), при виконанні умов*

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}} (\delta - \mathsf{L} F(\cdot)) = 0,$$

має r*-параметричну сім'ю розв'язків* $x_0(t,c_r)$. *Тоді для кожної дійсної векторної константи* $c_r = c_r^0 \in R^r$, *що задовольняє систему рівнянь для породжуючих констант (18), (19) та при виконанні умови*

$$\mathrm{rank} \tilde{B}_0 = d_1 + d_2, \quad d_1 + d_2 \le r, \tag{20}$$

слабконелінійна крайова задача (12)–(14) має хоча б один розв'язок $x = x(t,\varepsilon)$, *який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється у породжуючий розв'язок* $x_0(t,c_r^0)$ *і визначається за допомогою збіжного ітераційного процесу*

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k + \bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$c_k = \tilde{B}_0^{+}\begin{bmatrix} -P_{D_{d_1}^*}\int_a^b [A(s)\tilde{e}_2^k(s,\varepsilon) + B(s)e_2^k(s,\varepsilon)]ds \\ -P_{Q_{d_2}^*}\{\mathsf{L}_1\bar{y}_k(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon) - \mathsf{L}F_k^3(\cdot,\varepsilon)\} \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Psi_0(t)P_{D_{r_1}}Q^+\{J(x_0(\cdot,c_r^0)) + \mathsf{L}_1 y_k(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$
$$-\mathsf{L}F_k(\cdot,\varepsilon)\} + F_k(t,\varepsilon)$$

та формулою $x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + y_k(t,\varepsilon), (k = 0,1,2,...).$

Тут $((d_1 + d_2)\times r)$-вимірна матриця $\tilde{B}_0$ визначається формулою

$$\tilde{B}_0 = \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*}\int_a^b [A(s)\tilde{h}_1(s) + B(s)h_1(s)]ds \\ P_{Q_{d_2}^*}\{\mathsf{L}_1 X_r(\cdot) - \mathsf{L}F_0^1(\cdot)\} \end{bmatrix},$$

$\tilde{B}_0^{+}$ – псевдообернена за Муром-Пенроузом до матриці $\tilde{B}_0$ матриця.

Теорема 3.3.4 (Зв'язок між необхідною та достатньою умовами) *Для того, щоб слабконелінійна крайова задача для системи інтегро-диференціальних рівнянь (12)–(14) мала розв'язок* $x = x(t,\varepsilon)$ *необхідно, щоб константа* c_r^0 *була дійсним коренем системи рівнянь для породжуючих констант (18), (19) і достатньо, щоб виконувалася умова (20).*

Більше того, якщо $d_1 + d_2 = r$, *умова (20) означає, що* $c_r = c_r^0 \in \mathrm{R}^r$ *є простим коренем системи рівнянь для породжуючих констант (18), (19).*

У ***четвертому розділі*** дисертаційної роботи розглянуто крайові задачі для лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма з керуванням.

У ***підрозділі 4.1*** отримано необхідні та достатні умови існування розв'язку крайової задачі для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма з постійним керуванням

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \int_a^b K_1(t,s)x(s)ds\cdot u, \tag{21}$$

$$Sx(\cdot) = \alpha + Jx(\cdot)u, \tag{22}$$

у припущенні, що породжуюча крайова задача, тобто задача (1), (2), є незавжди розв'язною.

Ядра $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, функція $f(t)$, функціонали S та J, вектор α – відомі і такі ж, як було визначено в підрозділах 2.1 та 2.3, а функцію $x \in L_2[a,b]$ та керування $u \in \mathrm{R}$ – потрібно визначити.

Для крайової задачі (21), (22) отримано наступний критерій розв'язності.

Теорема 4.1.4 *Нехай крайова задача без керування (1), (2) є нерозв'язною. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Theta^*_{r_1}} \rho = 0, \quad P_{\Lambda^*_r}(g + \Lambda_1 \Theta^+ \rho) = 0,$$

$$P_{Q^*_{d_1}}(\alpha - W\Lambda^+ g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\rho) = 0,$$

то один із розв'язків крайової задачі (21), (22) буде мати вигляд

$$x(t) = \Phi(t)(\Lambda^+(g + \Lambda_1\Theta^+\rho) + P_{\Lambda_r} Q^+(\alpha - W\Lambda^+ g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\rho)),$$

а за умови

$$P_{F^*}\Theta^+\rho = 0$$

керування u визначатиметься формулою

$$u = F^+\Theta^+\rho.$$

Якщо виконуються умови

$$P_\Theta = 0, \quad P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} = 0, \quad P_F = 0,$$

то розв'язок $\{x(t), u\}$ задачі (21), (22) буде єдиним.

Тут $\Theta = \begin{bmatrix} P_{\Lambda^*_r}\Lambda_1 \\ P_{Q^*_{d_1}}(W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1) \end{bmatrix}$, $\rho = -\begin{bmatrix} P_{\Lambda^*_r} g \\ P_{Q^*_{d_1}}(\alpha - W\Lambda^+ g) \end{bmatrix}$,

$F = \Lambda^+(g + \Lambda_1\Theta^+\rho) + P_{\Lambda_r}Q^+(\alpha - W\Lambda^+ g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\rho)$, P_F (P_{F^*}) – матриця-ортопроектор на ядро (коядро) матриці F, P_Θ – матриця-ортопроектор на ядро матриці Θ, $P_{\Theta^*_{r_1}}$ – матриця, яка складається із повної системи r_1 лінійно-незалежних рядків матриці P_{Θ^*}, що є ортопроектором на коядро матриці Θ, F^+ та Θ^+ – псевдообернені за Муром-Пенроузом до матриць F та Θ, відповідно, матриці.

За відсутності крайової умови (22), тобто для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням (21), отримано аналогічний до теореми 4.1.4 критерій розв'язності інтегрального рівняння (21) з відповідними спрощеннями.

У ***підрозділі 4.2*** знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язку крайової задачі для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма зі змінним керуванням

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \int_a^b K_1(t,s)u(s)ds, \qquad (23)$$

$$Sx(\cdot) = \alpha + Ju(\cdot), \qquad (24)$$

у припущенні, що породжуюча крайова задача, тобто задача (1), (2), є незавжди розв'язною.

Ядра $K(t,s)$, $K_1(t,s)$, функція $f(t)$, функціонали S та J, вектор α – відомі і такі ж, як було визначено в підрозділах 2.1 та 2.3, а функцію $x \in L_2[a,b]$ та керування $u \in L_2[a,b]$ – потрібно визначити.

Для крайової задачі (23), (24) отримано наступний критерій розв'язності.

Теорема 4.2.4 *Нехай крайова задача без керування (1), (2) є нерозв'язною. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{\Theta^*_{r_1}}\rho = 0, \quad P_{\Lambda^*_r}(g + \Lambda_1\Theta^+\rho) = 0,$$

$$P_{Q^*_{d_1}}(\alpha - W\Lambda^+ g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\rho) = 0,$$

то крайова задача (23), (24) з керуванням буде мати хоча б один розв'язок вигляду $\{x(t), u(t)\}$

$$x(t) = \Phi(t)(P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}}c_{d_2} + \Lambda^+(g + \Lambda_1\Theta^+\rho) +$$

$$+P_{\Lambda_r}Q^+(\alpha - W\Lambda^+ g + (W_1 - W\Lambda^+\Lambda_1)\Theta^+\rho)),$$

$$u(t) = \Phi(t)(P_\Theta c + \Theta^+\rho).$$

За додаткових умов

$$P_\Theta = 0, \quad P_{\Lambda_r}P_{Q_{d_2}} = 0,$$

розв'язок $\{x(t), u(t)\}$ *крайової задачі (23), (24) буде єдиним.*

За відсутності крайової умови (24), тобто для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням (23), отримано аналогічний до теореми 4.2.4 критерій розв'язності інтегрального рівняння (23) з відповідними спрощеннями.

ВИСНОВКИ

— Знайдено умови існування та загальний вигляд розв'язку лінійної нетерової крайової задачі для інтегрального рівняння типу Фредгольма, ядро якого є невиродженим. Встановлено критерій розв'язності слабкозбуреної крайової задачі для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма, у припущенні, що відповідна породжуюча задача є нерозв'язною. Побудовано загальний вигляд розв'язку такої задачі у вигляді частини ряду з сингулярністю, який збігається при фіксованому, достаньо малому параметрі.

— Встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків нетерових крайових задач для слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна та слабконелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Побудовано рівняння для породжуючих констант та встановлено зв'язок між необхідними та достатніми умовами. Запропоновано ітераційні схеми побудови наближених розв'язків. Для інтегрального рівняння типу Гамерштейна розглянуто випадок інтегрального оператора з невиродженим ядром.
— Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язку нетерової крайової задачі для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням, за умови, що задача без керування є нерозв'язною. Розглянуто випадки змінного та сталого керувань.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях

1. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Нелінійні коливання. – 2016. – 19, № 1. – С. 58-66. (English translation: Kozlova N.O. Noetherian Boundary-Value Problems for Integral Equations / N.O. Kozlova, V.A. Feruk // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 222, No.3. – P. 266-275. DOI: 10.1007/s10958-017-3298-3)
2. Бойчук О.А. Слабкозбурені інтегральні рівняння / О.А. Бойчук, Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Нелінійні коливання. – 2016. – 19, № 2. – С. 151-160. (English translation: Boichuk O.A. Weakly Perturbed Integral Equations / O.A. Boichuk, N.O. Kozlova,V.A. Feruk // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 223, No.3. – P. 199-209. DOI: 10.1007/s10958-017-3348-x)
3. Bondar I. Weakly nonlinear impulsive boundary value problems for systems of integrodifferential equations / I. Bondar, M. Gromyak, N. Kozlova // Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – Vol. 17, No.1. – P. 69-84. DOI: 10.18514/MMN.2016.1897
4. Козлова Н.О. Інтегральні рівняння Фредгольма з керуванням / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Буковинський мат. журн. – 2016. – Т.4, № 1-2. – С. 82-86.
5. Козлова Н.О. Слабкозбурені лінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь/ Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Вісник Київського національного університету ім. Т.Г. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 65-70.

Тези наукових доповідей

6. Kozlova N. Fredholm boundary-value problems for integro-differential

equations / N. Kozlova, V. Feruk // Nonlinear analysis and application: 3rd international scientific conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine V.S. Melnik, April 01-03, 2015. Book of abstracts. – Kyiv, Ukraine. – 2015. – P. 32.
7. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Dynamical system modelling and stability investigation: XVII International Conference “Modelling and stability”, May 27-29, 2015. Abstracts of conference reports. – Київ, Україна. – 2015. – С. 55.
8. Козлова Н.О. Фредгольмові інтегральні рівняння з керуванням / Н.О. Козлова // Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня 2015 р. Тези доповідей. – Київ, Україна. – 2015. – С. 150.
9. Kozlova N. Fredholm boundary-value problems for integral equations / N. Kozlova, V. Feruk // 7th International Conference on “Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications” (MADEA-7), September 08-13, 2015. Abstracts. – Baku, Azerbaijan. – 2015. – P. 89.
10. Бойчук А.А. Метод Вишика-Люстерника для слабовозмущенных интегральных уравнений / А.А. Бойчук, Н.А. Козлова, В.А. Ферук // VII международная научная конференция “Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры”, 8-9 октября 2015. Материалы конференции. – Актобе, Республика Казахстан. – 2015. – С. 25-29.
11. Козлова Н.О. Один подход к исследованию слабовозмущенных краевых задач для интегральных уравнений / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Международная научная конференция “Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел”, посвященная 75-летию доктора физ.-мат. наук, профессора С.Т. Сафаровича, 29-30 октября 2015 г. Материалы конференции. – Душанбе, Республика Таджикистан. – 2015. – С. 111-112.
12. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19-20 травня 2016 р. Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – Київ, Україна. – 2016. – С. 143-146.
13. Козлова Н.О. Інтегральні рівняння Фредгольма з керуванням / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна наукова конференція “Диференціальні рівняння та їх застосування”, присвячена 70-річчю академіка НАН України М.О. Перестюка, 19-21 травня 2016 р. Тези доповідей. – Ужгород, Україна. – 2016. – С. 79.
14. Козлова Н.О. Крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь /Н.О. Козлова // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016», 25-27 травня 2016 р. Тези доповідей. – Львів, Україна. [Електронний ресурс]. – Режим доступу:

http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Kozlova.pdf
15. Kozlova N.O. Weakly perturbed linear boundary value problems for the Fredholm integral equations / N.O. Kozlova, V.A. Feruk // International Conference on Differential Equations dedicated to the 110th anniversary of Ya.B. Lopatynsky, September 20-24, 2016. Book of abstracts. – Lviv, Ukraine. – 2016. – P. 85.
16. Козлова Н.О. Слабконелінійні інтегральні рівняння / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна наукова конференція «Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування», присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І. Фодчука (1936-1992), 28-30 вересня 2016. Матеріали конференції. – Чернівці, Україна. – 2016. – С. 57.
17. Козлова Н.О. Слабконелінійні інтегральні рівняння типу Гамерштейна / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю від дня народження доктора фіз.-мат. наук, професора, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки Д.І. Мартинюка (1942-1996), 19-21 травня 2017 року. Матеріали конференції. – Кам'янець-Подільський, Україна. – 2017. – С. 56.
18. Козлова Н.О. Слабконелінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII Internation Conference "Modelling and stability", 24-26 May, 2017. Abstracts of conference reports. – Київ, Україна. – 2017. – С. 66.
19. Козлова Н.О. Крайова задача для інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.А. Степанця (1942-2007), 28 травня - 3 червня 2017 р. Тези доповідей. – Слов'янськ, Україна. – 2017. – С. 62.
20. Kozlova N.O. Weakly nonlinear integral equations / N.O. Kozlova // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (1917-2008), 7-10 червня 2017 р. Тези доповідей. – Київ, Україна. – 2017. – С. 70.

АНОТАЦІЯ

Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі для інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена знаходженню умов існування та побудові розв'язків нетерових крайових задач для лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма, слабконелінійних інтегральних рівнянь типу Гамерштейна, слабконелінійних систем інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією та крайових задач для лінійних інтегральних рівнянь типу Фредгольма з керуванням.

Встановлено критерії існування розв'язків нетерових крайових задач для лінійного інтегрального рівняння та лінійного слабкозбуреного інтегрального рівняння типу Фредгольма, ядра яких є невиродженими. У випадку лінійної слабкозбуреної крайової задачі, в припущенні, що породжуюча задача не має розв'язку, побудовано представлення розв'язку у вигляді частини степеневого ряду з сингулярністю, який збігається при фіксованому, достатньо малому параметрі.

Досліджено нетерову крайову задачу для системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу та нетерову крайову задачу для слабконелінійного інтегрального рівняння типу Гамерштейна. Встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків таких задач. Побудовано рівняння для породжуючих констант та встановлено зв'язок між необхідними та достатніми умовами. Запропоновано ітераційні схеми побудови їх наближених розв'язків.

Досліджено крайову задачу для лінійного інтегрального рівняння типу Фредгольма з керуванням. Розглядається випадок, коли породжуюча крайова задача без керування є розв'язною не при всіх неоднорідностях. Встановлено умови, при яких вводячи керування в праву частину породжуючої задачі, отримана крайова задача стає розв'язною.

Ключові слова: лінійне інтегральне рівняння типу Фредгольма, слабконелінійне інтегральне рівняння типу Гамерштейна, система інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією, псевдообернений за Муром-Пенроузом оператор, рівняння для породжуючих констант, керування, метод Вішика-Люстерника, метод простих ітерацій.

АННОТАЦИЯ

Козлова Н.А. Нетеровы краевые задачи для интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Министерство образования и науки Украины, Киев, 2017.

Диссертация посвящена исследованию конструктивных методов построения решений нетеровых краевых задач для линейных интегральных уравнений типа Фредгольма, слабонелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, слабонелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, а также линейных интегральных уравнений типа Фредгольма с управлением.

Используя теорию псевдообратных по Муру-Пенроузу операторов, доказана нетеровость краевой задачи для линейного интегрального уравнения типа Фредгольма с невырожденным ядром в пространстве $L_2[a,b]$. Опираясь на переход от исходной задачи к эквивалентному операторному уравнению в пространстве l_2, установлен критерий существования решений поставленной задачи. Рассмотрены критический (резонансный) и некритический (нерезонансный) случаи.

Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости слабовозмущенной краевой задачи для интегрального уравнения типа Фредгольма, при условии, что порождающая задача не является разрешимой. Используя метод Вишика-Люстерника, построен общий вид решения рассматриваемой задачи в виде части степенного ряда с сингулярностью, сходящегося при фиксированном, достаточно малом параметре.

Исследовано вопрос о разветвлении решений нетеровой краевой задачи для слабонелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна. Построено уравнение для порождающих констант и установлены необходимые условия существования решения поставленной задачи. Получены достаточные условия существования решений. Установлена связь между необходимыми и достаточными условиями. Предложена итерационная схема построения приближенных решений поставленной задачи.

Рассмотрено нетерову краевую задачу для системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Показано, что слабонелинейную импульсную краевую задачу можно исследовать, рассматривая ее как внутреннюю краевую задачу (interface BVP). Получены необходимые и достаточные условия существования решений такой задачи, а также установлена связь между этими условиями. Предложен алгоритм отыскания решений поставленной задачи.

Исследовано краевую задачу для линейного интегрального уравнения типа Фредгольма с управлением. Рассматрен случай, когда порождающая краевая задача является разрешимой не при всех неоднородностях. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых, вводя управление в правую часть порождающей краевой задачи, полученная краевая задача становится разрешимой. Построен явный вид таких управлений. Получены критерии существования решений поставленной задачи, в случае постоянного и переменнного управлений.

Приведённые в диссертационной работе теоретические результаты проилюстрированы на конкретных примерах.

Ключевые слова: линейное интегральное уравнение типа Фредгольма, слабонелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна, система

интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, псевдообратный по Муру-Пенроузу оператор, уравнение для порождающих констант, управление, метод Вишика-Люстерника, метод простых итераций.

ABSTRACT

Kozlova N. O. Fredholm boundary-value problems for integral and integro-differential equations. – Manuscript.

The thesis is presented for the scientific degree of the candidate of physics and mathematics by speciality 01.01.02 — differential equations. Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to finding the conditions for the existence and to construction of solutions of the Fredholm boundary-value problems for linear integral equations of Fredholm type, for the weakly nonlinear integral equations of Hammerstein type, for the weakly nonlinear systems of integro-differential equations with impulsive action and for linear integral equations of the Fredholm type with control.

The criteria for the existence of solutions of Fredholm boundary-value problems for a linear integral equation and a linear weakly perturbed integral equation of the Fredholm type, whose kernels are nondegenerate, are established. In the case of a linear weakly perturbed boundary-value problem, under the assumption that the generating boundary-value problem doesn't have a solution, a general form of the solution is constructed as part of the power series with singularity, which coincides with a fixed, sufficiently small parameter.

The Fredholm boundary-value problem for a system of integrodifferential equations with impulsive action at fixed points of time and the Fredholm boundary-value problem for a weakly nonlinear integral equation of Hammerstein type has been investigated. Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of such problems have been obtained. The equation for generating constants has been constructed and the connection between necessary and sufficient conditions has been established. The iterative procedure of constructing their approximate solutions has been proposed.

The boundary-value problem for a linear integral equation of Fredholm type with control has been investigated. The case, when the generating boundary-value problem without control is unsolvable, has been considered. Conditions, when introducing control to the right-hand side of the generating problem, the obtained boundary-value problem becomes solvable, have been established.

Key words: linear Fredholm integral equation, the weakly nonlinear integral equation of Hammerstein type, the system of integrodifferential equations with impulsive action, Moore-Penrose pseudoinverse operator, the equation for generating constants, control, Vishik-Lyusternik method, a method of simple iteration.