Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2021, № 1 (135) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.977.55
MSC 93C55, 93C95, 03C45, 49N05, 03H10

CONTROLLABILITY OF A LINEAR DISCRETE SYSTEM WITH CHANGE OF THE STATE VECTOR DIMENSION

V.V. Pichkur[1], D.A. Mazur[1], V.V. Sobchuk[2]

[1]Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: vpichkur@gmail.com

[2]Educational Research Institute of Information Technologies, State University of Telecommunications Kyiv, Ukraine, E-mail: v.v.sobchuk@gmail.com

КЕРОВАНІСТЬ ЛІНІЙНОЇ ДИСКРЕТНОЇ СИСТЕМИ ЗІ ЗМІНОЮ РОЗМІРНОСТІ ВЕКТОРА СТАНУ

В.В. Пічкур[1], Д.А. Мазур[1], В.В. Собчук[2]

[1]Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: vpichkur@gmail.com

[2]Навчально науковий інститут інформаційних технологій, Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна, E-mail: v.v.sobchuk@gmail.com

Abstract. The paper proposes an analysis of controllability of a linear discrete system with change of the state vector dimension. We offer necessary and sufficient conditions of controllability and design the control that guarantees the decision of a problem of moving of such system to an arbitrary final state. It provides functional stability of technological processes described by a linear discrete system with change of the state vector dimension.
sc Keywords: controllability, systems with change of the state vector dimension, technological processes, functional stability.

Анотація. В роботі пропонується аналіз керованості лінійної дискретної системи зі зміною розмірності вектора стану. Отримано необхідні і достатні умови керованості, побудовано керування, що гарантує розв'язок задачі переведення такої системи в довільний кінцевий стан. Це забезпечує функціональну стійкість технологічних процесів, які описуються лінійною дискретною системою зі зміною розмірності вектора стану.
Ключові слова: керованість, системи зі зміною розмірності вектора стану, технологічні процеси, функціональна стійкість.

Вступ

Стрімкий розвиток сучасного високотехнологічного суспільства спонукає інтенсивний розвиток інформаційних технологій, які характеризуються високим ступенем автономії. Особливо гостро ця проблема стоїть перед виробничими підприємствами, що працюють під постійною дією внутрішніх та зовнішніх дестабілізуючих факторів [1]. До таких підприємств передусім відносять підприємства металургії, енергетики, хімічної промисловості тощо. Функціонування виробничих підрозділів таких підприємств забезпечується інформаційними системами різних типів. Відповідні інформаційні системи тісно інтегровані в процеси планування, управління виробничими та технологічними процесами, забезпечення контролів на ключових етапах виконання технологічних операцій і т.і. [1]. Використання новітніх інформаційних систем передусім націлене на збільшення продуктивності праці всіх виробничих центрів при одночасному зменшенні кількості зайнятих на виробництві осіб та суттєвому зменшенні частки ручної праці.

Підвищення ефективності управління виробничим підприємством тісно пов'язане з вдосконаленням системи оперативно-виробничого планування (ОВП) на підприємстві. При цьому головна мета ОВП полягає в забезпеченні злагодженого, комплексного, ритмічного ходу виробництва щодо виготовлення та випуску продукції при найповнішому і рівномірному використанні всіх виробничих ресурсів. Рішення цієї задачі безпосередньо пов'язане з проблемою керованості технологічних процесів.

Технологічні процеси сучасних підприємств здійснюються як на складних виробничих центрах, які виконують як повний цикл технологічних операцій для виготовлення готової продукції, так і поетапно – групою виробничих центрів, кожен з яких реалізує спеціальні технологічні операції. Відтак, при автоматизації таких технологічних процесів доводиться мати справу з різною кількістю діагностичної інформації і, відповідно, зі зміною розмірності параметрів технологічнго процесу на кожному проміжному етапі [2,3]. Тому розробка умов керованості систем зі зміною розмірності вектору стану є важливою актуальною проблемою при побудові інформаційних систем сучасних високотехнологічних підприємств.

1. Постановка задачі

Розглянемо дискретну лінійну систему вигляду

$$x\,(t+1) = A\,(t)\,x\,(t) + C\,(t)\,u\,(t)\,,\ t \in \{0,\ 1, \ldots, N-1\}\,. \tag{1}$$

Тут $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_t})^*$ – вектор стану розмірності n_t, $u = (u_1, \ldots, u_m)^*$– вектор керування розмірності m, $A\,(t)$ – $n_{t+1} \times n_t$ - матриця, $C\,(t)$– $n_{t+1} \times m$ - матриця, $t = 0, 1, \ldots,\ N-1$. Позначимо $I_N = \{0,\ 1, \ldots, N\}$; $x(t, x_0, u)$ розв'язок системи (1), $t \in I_N$ при керуванні $u\,(t)$, $t \in I_{N-1}$ [6].

Така система описує певний технологічний процес в якому у визначені моменти часу здійснються контроль показників випуску продукції. Матриця $A\,(t)$ – матриця переходу, яка характеризує відповідність між станами на попередньому x_{t_k} на наступному $x_{t_{k+1}}$ кроці виконання технологічного процесу. Слід зауважити, що при $u(\cdot) = 0$ матриця $A\,(t)$ описує стаціонарні стани технологічного процесу у базових контрольних точках без зовнішніх впливів, матриця $A\,(t)$ – структуру керування технологічним процесом. При цьому важливо мати на увазі, що технологія виконання виробничих процесів має задовольняти умовам практичної стійкості [5].

Система (1) називається цілком керованою на інтервалі I_N, якщо для довільних $x_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, $x_N \in \mathbb{R}^{n_N}$ знайдеться керування $u(t)$, $t \in I_{N-1}$ таке, що $x_N = x(N, x_0, u)$.

Розглянемо простір $\ell_2^{(m)}$, елементами якого є послідовності векторів з $\mathbb{R}^m$ такі, що якщо $u \in \ell_2^{(m)}$, то $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $t = 0, 1, 2, \ldots$; $\sum_{t=0}^{\infty} \|u(t)\|^2 < \infty$. Тут $\|\cdot\|$ є звичайною евклідовою нормою простору $\mathbb{R}^m$. Простір $\ell_2^{(m)}$ є гільбертовим, оскільки в $\ell_2^{(m)}$ можна ввести скалярний добуток

$$\langle u, v\rangle_{\ell_2} = \sum_{t=0}^{\infty} \langle u(t), v(t)\rangle, \; u, v \in \ell_2^{(m)}$$

і норму $\|u\|_{\ell_2} = \sqrt{\langle u, v\rangle_{\ell_2}}$. Множина допустимих керувань системи (1) складається з елементів $u \in \ell_2^{(m)}$ таких, що $u(t) = 0$, $t = N, N+1, \ldots$.

2. Критерій повної керованості лінійної дискретної системи зі зміною розмірності

Позначимо $\Theta(t) = A_{t-1} \ldots A_1 A_0$, $\Theta(t, s) = A_{t-1} A_{t-2} \ldots A_s$ – $n_t \times n_0$ і $n_t \times n_s$ - матриці, $\Theta(t, t) = I$, де I – одинична матриця, $t, s \in I_N$. Розглянемо

$$W(t) = \Theta(N, t+1)\, C(t), \; W^*(t) = \left(w_1(t)\; w_2(t) \ldots w_{n_N}(t)\right),$$

де $w_j(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in I_{N-1}$, $j = 1, 2, \ldots, n_N$ є векторами, які описують стрічки матриці $W(t)$, $t \in I_{N-1}$, $w_j(t) = 0$, $t = N, N+1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $\Theta(N, t)$ – $n_N \times n_t$ матриця, $W(t)$ – $n_N \times m$ матриця. Має місце така теорема.

Теорема 1. *Для того, щоб система* (1) *була цілком керованою на інтервалі* $t \in I_N$ *необхідно і достатньо, щоб система функцій*

$$H = \{w_1(\cdot), w_2(\cdot), \ldots, w_{n_N}(\cdot)\}$$

була лінійно незалежною в $\ell_2^{(m)}$.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що система (1) є цілком керованою. Побудуємо в $\ell_2^{(m)}$ лінійний многовид $L = Lin\ H$, який є лінійною оболонкою, натягнутою на систему векторів H. Це означає, що якщо $w(\cdot) \in L$, то

$$w(t) = \lambda_1 w_1(t) + \lambda_2 w_2(t) + \lambda_{n_N} w_{n_N}(t), \; t \in I_{N-1},$$

при цьому $w(t) = 0$, $t = N, N+1, \ldots$, де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_N}$ – скалярні величини. Оскільки система (1) є цілком керованою, то для довільних $x_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, $x_N \in \mathbb{R}^{n_N}$ існує керування $u \in \ell_2^{(m)}$ таке, що

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Theta(N, k+1)\, C(k)\, u(k) = c, \; c = x_N - \Theta(N) x_0.$$

Це співвідношення можна записати так:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W(k)\, u(k) = c. \tag{2}$$

Так як система (1) є цілком керованою, то систему (2) можна розв'язати для довільної правої частини, знаходячи допустимі керування $u(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Оскільки $\ell_2^{(m)}$– гільбертів простір, то $\ell_2^{(m)}$ розкладається в пряму суму $\ell_2^{(m)} = L \oplus L^{\perp}$, де $L^{\perp}$ – ортогональне доповнення до L. Це означає, що довільне $u \in \ell_2^{(m)}$ можна подати у вигляді $u(t) = u_0(t) + v(t)$, $t = 0, 1, \dots$, $u_0 \in L$, $v \in L^{\perp}$. З означення ортогонального доповнення випливає, що $\langle u_0, v \rangle_{\ell_2} = 0$ для $u_0 \in L$. Оскільки $u_0 \in L$, то існує вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_N})^*$ такий, що

$$u_0(t) = \lambda_1 w_1(t) + \lambda_2 w_2(t) + \lambda_{n_N} w_{n_N}(t) = W^*(t)\lambda.$$

Отже,

$$u(t) = W^*(t)\lambda + v(t), \ t = 0, 1, \dots. \tag{3}$$

Підставимо його в (2). Одержимо

$$\sum_{k=0}^{N-1} W(k) W^*(k) \lambda = c. \tag{4}$$

Зауважимо, що $\sum_{k=0}^{N-1} W(k) v(k) = 0$, так як $v \in L^{\perp}$. Оскільки система (2), а значить і (4), має розв'язок для довільної правої частини, то матриця цієї системи

$$\Phi(N) = \sum_{k=0}^{N-1} W(k) W^*(k) \tag{5}$$

є невиродженою. Матриця $\Phi(N)$ є матрицею Грамма за системою функцій H розмірності $n_N \times n_N$. Оскільки матриця Грамма невироджена, то система H – лінійно незалежна.

Достатність. Якщо система H – лінійно незалежна, то матриця (5) є невиродженою. Покажемо, що для довільних $x_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, $x_N \in \mathbb{R}^{n_N}$ існує допустиме керування $u(t)$, $t \in I_{N-1}$, яке переводить систему зі стану x_0 в стан $x(N) = x_N$. Як ми показали в доведенні необхідності, будь-яке допустиме керування можна подати у вигляді (3). Підставимо (3) в (2) і одержимо систему (4) для знаходження вектора λ. Оскільки матриця (5) невироджена, то вектор λ можна визначити з (4) так

$$\lambda = \Phi^{-1}(N)\, c, \ c = x_N - \Theta(N) x_0.$$

Отже, з (3) одержуємо, що керування

$$u(t) = W^*(t)\, \Phi^{-1}(N)\, c + v(t) \tag{6}$$

розв'язує задачу про переведення системи зі стану x_0 в стан x_N, де $v \in L^{\perp}$ – довільний елемент. Теорему доведено. □

Наслідок 1. *Для того, щоб система* (1) *була цілком керованою необхідно і достатньо, щоб матриця* (5) *була невиродженою. При цьому в* (5) $W(k) = \Theta(N, k+1)\, C(k)$.

Наслідок 2. *Нехай матриця* $\Phi(N)$ *є невиродженою. Тоді керування*

$$u_0(t) = W^*(t)\,\Phi^{-1}(N)\,(x_N - \Theta(N)\,x_0)\,,\; t = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (7)$$

переводить систему (1) *зі стану* $x(0) = x_0$ *в стан* $x(N) = x_N$.

Теорема 2. *Нехай матриця* $\Phi(N)$ *є невиродженою. Тоді серед усіх керувань, які переводять систему* (1) *зі стану* $x(0) = x_0$ *в стан* $x(N) = x_N$ *керування* (7) *має найменшу норму в* $\ell_2^{(m)}$.

Доведення. Доведення теореми спирається на доведення теореми 1. Ми показали, що довільне керування, яке переводить систему (1) зі стану $x(0) = x_0$ в стан $x(N) = x_N$, має вигляд (6). Отже, $u = u_0 + v$, де $v \in L^{\perp}$. Тому

$$\|u\|_{\ell_2} = \langle u_0+v, u_0+v\rangle_{\ell_2} = \langle u_0, u_0\rangle_{\ell_2} + \langle v, v\rangle_{\ell_2} + 2\langle u_0, v\rangle_{\ell_2} = \langle u_0, u_0\rangle_{\ell_2} + \langle v, v\rangle_{\ell_2},$$

так як $v \in L^{\perp}$, $u_0 \in L$. Звідси $\|u\|_{\ell_2} \geq \langle u_0, u_0\rangle_{\ell_2} = \|u_0\|_{\ell_2}$. □

Наслідок 3. *Нехай матриця* $\Phi(N)$ *є невиродженою. Тоді керування* (7) *розв'язує задачу оптимального керування, яка полягає в мінімізації критерія якості*

$$I(u) = \sum_{t=0}^{N-1} \|u(t)\|^2$$

на розв'язках системи (1) *за умов* $x(0) = x_0$, $x(N) = x_N$.

Висновок

В роботі побудовано критерій керованості лінійної дискретної системи зі зміною ромірності стану. Показано, що для того, щоб така система була цілком керованою, необхідно і достатньо, щоб матриця (5) була невиродженою. При цьому серед допустимих керувань, які розв'язують задачу переведення зі точки в точку, керування (7) має найменшу норму.

Підсумовуючи необхідно зазначити, що існування керування (7) свідчить про те, що властивіть функціональної стійкості відповідних технологічних процесів забезпечується повною мірою. Тобто технологічний процес буде виконуватись від початкового стану x_0 до фінального стану x_N, який описує стан процесу на стадії випуску готової продукції. При цьому технологічний процес є цілком керованим і гарантує виконання відповідного виробничого плану. Отримані теореми є підґрунтям для створення інформаційної системи на виробничому підприємстві з функціонально стійким технологічним процесом.

В подальшому буде продовжено дослідження проблематики побудови функціонально стійкої інформаційної системи підприємств, які функціонують в екстремальних умовах впливу зовнішніх та внутрішніх дестабілізуючих факторів на основі методів теорії керування. Головний акцент буде скеровано на особливості потреб підприємств, що функціонують в секторах промисловості в умовах неперервного виробничого циклу зі складною структурою керування технологічними процесами.

Література

1. Sobchuk, V., Pichkur, V., Barabash, O., Laptiev, O., Kovalchuk, I., Zidan, A. Algorithm of control of functionally stable manufacturing processes of enterprises. *2020 2nd IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory*, (2020), 206–210.
2. Barabash, H. Tverdenko, V. Sobchuk, A. Musienko and N. Lukova-Chuiko The Assessment of the Quality of Functional Stability of the Automated Control System with Hierarchic Structure. *2020 IEEE 2nd International Conference on System Analysis Intelligent Computing (SAIC), Kyiv, Ukraine*, (2020), 158–161.
3. Maksymuk, O., Sobchuk, V., Salanda, I., Sachuk, Yu. A system of indicators and criteria for evaluation of the level of functional stability of information heterogenic networks. *Mathematical Modeling and Computing*. No. 7 (2) (2020), 285–292.
4. Bashnyakov, A.N., Pichkur, V.V., Hitko, I.V., On Maximal Initial Data Set in Problems of Practical Stability of Discrete System. J*Journal of Automation and Information Sciences*, No. 43 (3) (2001), 1–8.
5. Pichkur, V.V., Linder, Y.M., Practical Stability of Discrete Systems: Maximum Sets of Initial Conditions Concept, In: Sadovnichiy, V.A., Zgurovsky, M. (eds.) Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems, Springer, Berlin, 2021, 381–394.
6. Matvienko, V.T., Control of trajectories set by linear dynamic systems with discrete argument. *Journal of Automation and Information Sciences*, No. 39 (11) (2007), 4–10.

Надійшла: 30.05.2021.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ИЗМЕНЕНИЕМ РАЗМЕРНОСТИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

В.В. Пичкур[1], Д.А. Мазур[2], В.В. Собчук[3],

[1,2]Факультет компьютерных наук и кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: vpichkur@gmail.com

[3]Учебно научный институт информационных технологий, Государственный университет телекоммуникаций, Киев, Украина, E-mail: v.v.sobchuk@gmail.com

Аннотация. В работе предлагается анализ управляемости линейной дискретной системы с изменением размерности вектора состояния. Получены необходимые и достаточные условия управляемости, построены управления, гарантирующее решение задачи перевода такой системы в произвольное конечное состояние. Это обеспечивает функциональную устойчивость технологических процессов, которые описываются линейной дискретной системой с изменением размерности вектора состояния.

Ключевые слова: управляемость, системы с изменением размерности вектора состояния, технологические процессы, функциональная устойчивость.