Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

Щеглов Микита Владиславович

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

Узагальнення та застосування нерівностей Вітні, Дзядика та інших для алгебраїчних поліномів

111 – математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

М.В.Щеглов

Науковий керівник

Шевчук Ігор Олександрович

доктор фізико-математичних наук

член-кореспондент НАН України

Київ-2023

Анотація

Щеглов М.В. «Узагальнення та застосування нерівностей Вітні, Дзядика та інших для алгебраїчних поліномів»

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю «111 — математика» — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2023.

Дисертаційне дослідження присвячене наближенню різноманітних функцій поліномами та пов'язаними з ними функціями. Головною метою дослідження є доведення класичних оцінок похибок наближення поліномами, що зберігають певні властивості функції, тобто забезпечують так звану апроксимацію з обмеженнями.. Значну увагу приділено вивченню формозберігаючого наближення, зокрема комонотонного та копозитивного – тобто таких, які зберігають проміжки монотонності та, відповідно, знакосталості вихідної функції.

Сучасна теорія формозберігаючого наближення неперервних на відрізку функцій алгебраїчними поліномами майже настільки ж повна, як і відповідна теорія наближення без обмежень.

Природнім поширенням цієї теорії є SPA (Shape-Preserving Approximation) періодичних функцій, а також SPA функцій комплексної змінної, які є значно складнішими. Тим не менш, за останні 20-25 років відбулось суттєве просування SPA періодичних функцій, але, як не дивно, остаточні результати були отримані для кусково-опуклих (2-монотонних) та q-монотонних функцій, але не кусково-монотонних (1-монотонних). Саме кусково-монотонні періодичні функції досліджені в 6-у розділі дисертаційної роботи. Що стосується SPA функцій комплексної змінної, то цей розділ теорії функцій ще знаходиться в початковому стані і певне просування міститься в розділі 4 дисертаційної роботи. Розділ 5, в якому розглядаються так звані гібридні поліноми, є допоміжним для розділу 6, але, на наш погляд, має самостійний інтерес. Нарешті, важливим апаратом у багатьох доведеннях теорії функції є нерівність Вітні – зокрема, в теорії сплайнів, конструктивній теорії функції та ін. Поточковий варіант нерівності Вітні досліджується в розділі 3.

Таким чином, дисертація складається із вступу, розділу 1 "Історія та огляд літератури"; розділу 2 "Загальні передумови для дослідження"; чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, присвячених повному викладу результатів дослідження дисертанта; висновків та списку використанних джерел.

Основними результатами є:

1. Встановлено поточкові оцінки для нерівності Вітні, які, на відміну від класичної рівномірної нерівності Вітні, свідчать про суттєве покращення (на порядки) похибки відхилення многочлена найкращого наближення у внутрішніх точках відрізка.

2. Доведена нерівність типу Дзядика для наближення на кривій дійснозначної функції комплексного аргумента гармонічними алгебраїчними поліномами із збереженням проміжків знакосталості функції.

3. Доведено справедливість оцінки Джексона для випадку наближення гібридними поліномами із збереженням проміжків монотонності функції.

4. Отримані оцінки типу Джексона-Зигмунда-Ахієзера-Стечкіна наближення періодичних функцій із збереженням проміжків монотонності.

Отримані результати носять теоретичний характер і можуть бути використані в теорії функцій та її застосувань.

Ключові слова: поліноми, формозберігаюче наближення, нерівність Вітні, періодичні функції, функції комплексної змінної.

Abstract

Shchehlov M.V. “Generalization and application of Whitney, Dzyadik and other inequalities for algebraic polynomials”

Doctor’s of Philosophy, specialty “111 - Mathematics” - Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis study is devoted to the approximation of various functions by polynomials and related functions. The main goal of the research is to prove classical estimates of approximation errors by polynomials that preserve certain properties of the function, that is, provide the so-called constrained approximation. The special attention is paid to the study of Shape Preserving Approximations (abbreviation SPA), in particular comonotone and copositive approximations - that is, those that preserve intervals of monotonicity and, respectively, sign of the given function.

The modern theory of SPA of functions continuous on a segment by algebraic polynomials is almost as complete as the corresponding theory of approximation without constraints.

A natural extension of this theory is SPA of periodic functions, as well as SPA of functions of a complex variable, which are much more complicated. Nevertheless, during last 20-25 years there has been a significant advance of this theory, but, surprisingly enough, the final results have been obtained for piecewise convex (2-monotone) and q-monotone functions, but not piecewise monotone (1-monotone). Namely the piecewise monotone periodic functions have been investigated in the 6th section of the thesis. As for SPA functions of a complex variable, this section of the theory of functions is still at the beginning of its development and some progress is presented in Chapter 4 of the thesis. Chapter 5, dealing with the so-called hybrid polynomials, is complementary to Chapter 6, but has, in our view, its separate interest. Finally, Whitney inequality is an important tool in many proofs of function

theory - in particular, in spline theory, constructive function theory, etc. A point-wise version of Whitney's inequality is studied in Chapter 3.

Thus, the thesis consists of an introduction, chapter 1 "History and literature review"; of section 2 "General prerequisites for research"; four chapters, divided into subsections, devoted to a full presentation of the results of the thesis' research; conclusions and a list of references.

The main results are:

1. Point-wise estimates for Whitney inequality are established, which, in contrast to the classical uniform Whitney inequality, show a significant improvement of the deviation error of the best approximation polynomial at the interior points of the interval.

2. Dzyadyk-type inequality is proved for the approximation of a real-valued function of a complex variable by harmonic algebraic polynomials on the curve, preserving the intervals of constancy of the sign of the function.

3. The validity of Jackson's estimate for the case of approximation by hybrid polynomials with preservation of intervals of monotonicity of the function is proved.

4. The estimations of Jackson-Zygmund-Akhiezer-Stechkin type approximation of periodic functions with preservation of the intervals of monotonicity are obtained.

The obtained results are theoretical in themselves and may be applued in the theory of functions and its applications.

Key words: polynomials, Shape Preserving approximation, Whitney inequality, periodic functions, functions of a complex variable.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Щеглов М.В. Поточкова оцінка відхилення полінома Крякіна від неперервної на відрізку функції //Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка.- 2019, №1-С. 12 – 14.
2. Щеглов М.В.«Поточкова оцінка знакозберігаючого наближення на кривих у комплексній площині»// Український математичний журнал, Vol 74 No 4 (2022), ст. 572-576.
3. D. Leviatan, M. V. Shcheglov and I. A. Shevchuk, Comonotone approximation by hybrid polynomials// J. Math. Anal. Appl., doi: 10.1016/j.jmaa.2023.127286

Публікації, які засвідчують апробацію результатів дисертації

1. Щеглов М.В. «Поточкова оцінка відхилення полінома Крякіна від неперервної на відрізку функції»//Міжнародна наукова конференція «Албраїчні та геометричні методи аналізу» (АГМА), Одеса, Україна, 28 травня – 3 червня 2019, с.73. https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2019/agma-2019-abstracts/agma2019_theses.pdf
2. Shchehlov M., Pointwise estimate of deviation of Kriakin polynomial from a function, continuous on a segment // 9th International Online Conference MADEA-9. Bishkek, Kyrgys Republic, 21-25 June 2021, p. 72-73.
3. Щеглов М.В. Поточкова оцінка знакозберігаючого наближення на кривих у комплексній площині// IV міжнародна наукова та практична конференція «Сучасні дослідження у світовій науці», SPC “Sci-conf.com.ua”, Львів, Україна, 10-12 липня 2022, ст. 376-379. https://sci-conf.com.ua/iv-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-modern-research-in-world-science-10-12-07-2022-lviv-ukrayina-arhiv/

4. Shchehlov M. Approximation of the auxiliary function in the copositive approximation// Proceedings of the 7th International scientific and practical conference «Scientific progress: innovations, achievements and prospects», MDPC Publishing. Munich, Germany, 3-5 April 2023, p.266-269.
5. Shchehlov M. «Comonotone approximation of periodic functions»// Proceedings of the 7th International scientific and practical conference «Innovations and prospects in modern science», SSPG Publish. Stockholm, Sweden, 28-30 August 2023, p.83-87. https://sci-conf.com.ua/ix-mizhnarodna-naukovo-praktichna-konferentsiya-innovations-and-prospects-in-modern-science-28-30-08-2023-stokgolm-shvetsiya-arhiv/

ЗМІСТ

ВСТУП

Передмова

Чому математика важлива?

Математика є точною наукою, яка є одночасно як річчю в собі, так і допоміжним, службовим і навіть обов'язковим інструментом для інших наук.

Математику використовує фактично будь-яка пересічна людина, навіть та, яка вважає себе далекою від цього та такою, що не має з математикою нічого спільного. І йдеться не лише про банальні арифметичні обчислення – з чим зазвичай асоціюють математику ті, хто не має до неї безпосереднього стосунку – а й про таку інтуїтивно зрозумілу всім річ, як логіка. Правила математичної логіки працюють не лише в підручниках, посібниках, алгоритмах і програмах – а й у звичайному повсякденному житті. У даному випадку для того, щоб їх розуміти, необов'язково навіть мати математичну освіту, але погане розуміння цих правил призводить до проблем з критичним мисленням. Що, в свою чергу, призводить до більшої уразливості людини до маніпуляцій, неправдивої інформації, обману, пропаганди тощо.

Хоча тут слід додати й зворотне: навіть математична освіта не рятує від того, що людина може зробити неправильний висновок з тієї чи іншої інформації – причому маніпулятором може виступати як хтось сторонній, так і власне мислення. Можна мати науковий ступінь та прочитати безліч статтей щодо цього, однак усе одно потрапити у пастку власного мозку. На наші рішення та сприйняття інформацію в будь-якому разі в тій чи іншій мірі будуть впливати емоції, відчуття, пам'ять та конкретні спогади та вже набуті знання. Очевидною проблемою, яка лежить на поверхні, тут є те, що відчуття та емоції можуть переважити холодний розум, але не тільки. Набір спогадів, який у нас є і який виринає у свідомості чи підсвідомості в конкретний момент часу, і може бути тим фактором, який зманіпулює нашим сприйняттям інформації та тим, наскільки правильною чи неправильною ми будемо її вважати, яке рішення приймемо в майбутньому в ситуації, пов'язаній з цим чи схожим питанням. Під час сприйняття спогадів ніхто з нас не здатен абсолютно завжди користуватися правилами математичної статистики та аналізувати характеристики наявної в нашої пам'яті вибірки. А саме це якраз і може призводити до когнітивних викривлень, які, в свою чергу, призводять до хибних висновків.

Переважна більшість людей – і, знову ж таки, без прив'язки до їхнього безпосереднього зв'язку з математикою – хоч раз у житті використовував словосполучення «теорія ймовірностей». Бо фактично кожен її використовує. Опинившись у ситуації з декількома можливими результатами на виході, рішення, як діяти, людина, навіть необов'язково усвідомлюючи це, зазвичай приймає на основі таких факторів: своїй оцінці ймовірностей цих результатів, своїх потреб та своєї інтуїції, де потреби можна інтерпретувати як випадкову величину від можливих результатів події – чим більше результат відповідає потребі, тим більше значення випадкової величини в ньому. А на інтуїцію – чи те, що ми інтерпретуємо як її – серед іншого впливає наша вибірка спогадів. І тут справедливе те, що вже було сказано раніше: інколи наші оцінки ймовірностей та інтуїтивні уявлення про їхні правила та просто результат найближчої події є цілком виправданими і правильними, іноді – абсолютно хибними. Серед іншого, через логічні викривлення сприйняття – зокрема, спогадів, інформації тощо.

Прикладів, як математика впливає на життя людини трохи більш опосередковано, ще більше.

І йдеться не лише про різноманітні прилади та технології, якими ми користуємось, та роль математики у їхніх створенні та функціонуванні. На нас впливають рішення уряду, на рішення уряду впливає соціологія, для соціології основоположну роль відіграють уже згадані математична статистика та теорія ймовірностей. Саме математичний вигляд має успішність чи неуспішність того чи іншого починання. Він може бути підкріпленим чи непідкріпленим внутрішніми відчуттям, однак це майже завжди має бути якийсь параметр, якесь число. І навіть у тих сферах, де такого немає чи є на недостатньому рівні, здебільшого прагнуть саме до такого – аналітичного підходу до оцінки діяльності.

Чому математичний аналіз важливий?

Математичний аналіз є розділом математики, про який можна сказати те, що вже було сказано про математику в цілому вище – що це одночасно і річ у собі, і необхідний інструмент для багатьох інших напрямів у математиці.

Математичний аналіз вивчає, якщо висловлюватися загальними словами, зміну та неперервність – конкретніше, неперервну зміну. Працює з нескінченно малими величинами. Саме на курсі математичного аналізу вводять поняття та вивчають основні властивості границі, похідної, інтегралів, після чого ці поняття постійно використовуються - можна сказати, що від них відштовхуються - як в самому математичному аналізі, так і на інших курсах, причому не тільки математичних – а й, насамперед, фізичних та механічних. Якщо ж казати про інші розділи математики, то, зокрема, ці поняття та курс теорії міри та інтеграла є основоположним для вже згаданих вище теорії ймовірностей та математичної статистики. Поняття метричних просторів допомагає узагальнити поняття відстані, а та ж теорія міри – поняття площі, об’єму ти величин загалом.

Математичний аналіз використовується в хімічних, біологічних та соціальних науках. Під час пандемії COVID-19 важливу роль відігравали різні математичні моделі швидкості поширення вірусу серед населення – які, в свою чергу, напряму впливали на те, які саме карантинні обмеження уряди різних країн вважали доцільними та необхідними. І це, знову ж таки, те, що зачепило абсолютно кожного з нас. А для цих математичних моделей були потрібні динамічні системи – іще один підрозділ математичного аналізу. Хімії математичний аналіз необхідний для того, щоб описувати швидкість реакції та радіоактивного розпаду. У біології багато рівнянь, які описують поведінку організмів, екосистем, елементів, також записуються мовою математичного аналізу.

Загалом, саме за допомогою математичного аналізу описується неперервна зміна простору, часу та руху.

Чому теорія апроксимації важлива та як вона працює?

Теорія апроксимації, якій, власне, і присвячена ця дисертаційна робота, також підпадає під характеристику, яка була дана вище математиці та математичному аналізу. Це одночасно і річ у собі, і обов’язковий інструмент, засіб для дослідження в інших підрозділах математичного аналізу.

В англомовній, іспаномовній та в деяких інших літературах математичний аналіз називається «calculus», буквальний переклад чого на українську буде звучати як «обчислення». Бо це дійсно одна з тих проблем, яку вирішує математичний аналіз – проблему обчислень, коли йдеться про дуже малі величини, якщо казати загальними словами, та нескінченно малими, якщо вживати більш строгу термінологію. З цими обчисленнями може бути пов’язаний як якийсь конкретний результат, так і необхідність довести чи дослідити певну властивість якогось об’єкту, процесу, функції.

І саме з цим максимально перегукується теорія апроксимацій, вона ж теорія наближень, що також зрозуміло і з назви.

Як і в деяких прикладах вище, апроксимація – це, насправді, те, з чим стикався фактично кожен з нас, у тому числі й ті, хто не має жодного стосунку до математики в принципі. Майже кожна людина вживала у своєму житті слово «приблизно». Це поняття варіюється від ситуації до ситуації, залежить від сприйняття конкретного контексту конкретною людиною, а саме вживання пов’язано з різними факторами. Це може бути неможливість згадати чи встановити точну інформацію. І це також може бути недоцільність це зробити з точки зору «витрачені ресурси – важливість». Шаблонно таку ситуацію можна описати наступним чином: з’ясовувати «точну» інформацію буде складно і довго, а «приблизна» - хоч і не є «точною» - у важливих аспектах дає таку саму чи майже таку саму інформацію, що й «точна». Такий сценарій можливий, насправді, навіть тоді, коли з’ясувати точні дані може бути нескладно чи, ба більше, до них є доступ тут і зараз. Тому що «точна» інформація може бути більш об’ємною, а різниця з «приблизною» не настільки важливою, щоб заради цієї різниці перевантажувати систему чи співрозмовника. Зокрема, через те, що тоді від уваги цього співрозмовника можуть вислизнути інші деталі, які є дійсно важливими. Крім того, спрощена модель спростить і розуміння, можливо, складної за інших обставин інформації. Для машинної системи, натомість, питання може стояти в часі чи потужності. Бо наявний апарат може не мати достатньої потужності, щоб працювати з об’ємною і «точною» інформацією – але достатньо, щоб обробити «приблизну» та спрощену. Або ж потужності може бути достатньо, але обробка «точної» та об’ємної інформації буде настільки довгою в порівнянні з «приблизною», що робота з «точною» у такому разі буде просто недоцільною.

Теорія апроксимації фактично формалізує попередній абзац. Тобто формалізує поняття «приблизно» та «важливих аспектів» - що є задовільним «приблизно» у конкретній ситуації та які саме «важливі аспекти» мають значення. І далі відповідає чи намагається відповісти на питання: як надати таку «приблизну» інформацію, щоб вона не відрізнялася від точної в тому, що «важливо»?

Математика є точною наукою, тому суто в її рамках умовна стислість викладу чи негроміздкість інформації є приємним бонусом, але не строгою необхідністю. Однак цього не скажеш про інші галузі, де математика застосовується.

Ніщо в світі неідеальне – і, зокрема, довільні вимірювання. Тут можна навести зрозумілий кожному приклад. Це вже буде про те, як майже кожна людина несвідомо стикається з теорією апроксимації у своєму житті. Складно знайти того, хто не проводив жодного разу вимірювання лінійкою – 1 см, 2см чи кількох десятків. Однак жодне з цих вимірювань не було абсолютно точним. Абсолютно точну довжину має лише один об’єкт у світі – і це зразок метра у Міжнародному бюро мір і ваги, яке знаходиться у західному передмісті Парижа, містечку Севр. Об’єкт звідти за означенням має довжину метр – і жодні інша річ такої довжини не має, оскільки не існує двох однакових предметів. Коли ми за допомогою лінійки чи навіть машина проводить вимірювання, це не в точності є один метр. Тут втручаються різні фактори: недосконалість нашого зору, недосконалість позначок поділу на лінійці, недосконалість поділок на машинному апараті, недосконалість механізму машинного апарату тощо. Однак це приблизно один метр – настільки приблизно, що нас це цілком влаштовує в рамках тих цілей, для яких ми беремо в руки цю лінійку. І надалі всі дії, обчислення і міркування проводяться з об’єктом, довжина якого не один метр у точності, а приблизно один метр. І це не є проблемою або майже не є проблемою. Бо з науковим прогресом і прогресом людства досконалість і точність усіх процесів збільшується – а з ними й точність вимірювань та подальших розрахунків.

Але, втім, минулий абзац можна підсумувати таким чином. Хоч математичний аналіз і працює з нескінченно малими величинами, але реальні обчислення – якими б розвиненими не були б сучасні обчислювальні апарати – працювати з нескінченністю не можуть. І теорія апроксимації тут вирішує це питання надання для обчислень приблизного та все ж скінченного за своїм цифровим записом об’єкта.

Цей приклад також показує задачу теорії апроксимації з іншого ракурсу: замінити певні об’єкти чи величини іншими, приблизними, так, щоб це суттєво не впливало на подальші обчислення. Лінійку в даному прикладі можна цілком інтерпретувати як інструмент для цього: вона не дозволяє виміряти довжину предмета абсолютно точно, але цілком дозволяє виміряти з точністю до ціни поділки.

У цьому контексті та на даному етапі розвитку людства теорія апроксимації є необхідним та фактично безальтернативним інструментом для подібних ситуацій. Люди змагаються між собою, скільки вони знають цифр після коми в числі π, загалом наразі визначено понад 100 трильйонів знаків після коми, однак точне значення числа невідоме. Тим не менш, з таким поняттям як довжина кола та довжинами кола в принципі все одно потрібно працювати – як зараз, так і необхідно було до цього, коли кількість відомих цифр була меншою. Але з цим, зокрема, був і є пов’язаний це процес визначення цих цифр після коми – щоб мати змогу працювати з якомога більш наближеним до довжини одиничного кола числа і таким, з яким здатні працювати сучасні обчислювальні машини (скінченними десятковими дробами).

Якщо трохи узагальнити приклад, наведений у минулому абзаці, теорія наближень, зокрема, відповідає за розробку чисельних методів розв’язання рівнянь, коли їх треба розв’язати із заданою точністю. Задача теорії апроксимації тут полягає як в тому, щоб показати, що заданий метод дійсно приведе до бажаного результату – який буде відрізнятися від точного розв’язку не більш ніж на наперед задане число – так і оцінювати похибку цього отриманого результату. Під оцінкою похибки тут мається на увазі наступне: чи дійсно її максимальне значення за заданого методу буде давати те значення, яке наперед було задане як допустима похибка, чи насправді отриманий результат буде навіть краще і буде гарантовано відрізнятись від точного розв’язку на ще менше число.

Утім, як зазначалось вище, теорія наближень вирішує подібні завдання не лише задля якихось конкретних обчислень, а й для дослідження певних властивостей чи подальшого аналізу об’єктів.

Математика досліджує та аналізує багато речей – як ті, які можна досить конкретно та «гарно» описати, так і ті, для яких це зробити складніше. Ба більше, іноді сама задача полягає в тому, щоб проаналізувати саме такі об’єкти, які складно описуються.

Доводити чи досліджувати властивості окремо для кожного об’єкту було б недоцільно чи майже неможливо. Навіть якщо згрупувати об’єкти за тим чи іншим принципом, який є доречним у контексті певного методу аналізу чи дослідження, груп може бути все одно занадто багато, а певні об’єкти фактично не належатимуть жодній з них.

Теорія апроксимацій у такому разі допомагає наступним чином: «незрозумілий» об’єкт наближується «зрозумілим»; «зрозумілий» аналізується – аналізуються його властивості, взаємодії з іншими об’єктами – після чого аналізується, на скільки властивості цього «зрозумілого» об’єкта відрізняються від вихідного «незрозумілого».

Фактично це все призводить до того, що практично жоден науковий результат у теорії апроксимації не може відразу вважатися некорисним чи марним. Він таким може виявитись, однак на етапі отримання він дає потенційну можливість проаналізувати нові властивості якихось об’єктів – і, зокрема, отримати такі результати, які до цього ніхто не формулював навіть як гіпотезу.

Таке застосування теорії апроксимації актуальне також і для згаданих вище числових методів обчислення, бо окрім того, щоб провести алгоритм обчислення та довести, що отриманий результат дійсно буде розв’язком із заданою точністю, іноді потрібна і теоретична основа для того, щоб до цього методу прийти. Конкретна задача в науці може мати рівняння, яке не записується в аналітичній формі, однак теорія наближень може допомогти наблизити його «зрозумілими» рівняннями, для яких уже після цього можна буде розробляти методи їх розв’язання.

Окрім того, саме поняття похибки – яке характеризує точність того чи іншого алгоритму, методу чи обчислень – залежить від теорії апроксимації, бо не завжди воно одразу строго задане. Завдання теорії наближень тут – таким чином аналітично визначити поняття похибки, щоб воно узгоджувалося з потребами тієї моделі, для якої воно визначається. Інакше кажучи, потрібно, щоб виконувалось наступне: чим меншою буде похибка – за тим означенням, яке було введене – тим кращий результат буде отримуватись у подальшому, під час застосування цього отриманого з похибкою розв’язку рівняння.

Це також підводить і до іншої задачі теорії апроксимації – порівнювати різні математичні моделі в контексті поставленої задачі. Тобто, наприклад, аналізувати різні можливі визначення похибки та порівнювати, яке з них найкраще «працює» - узгоджується за вказаним в попередньому абзаці принципом з розв’язком поставленої задачі. І не лише порівнювати вже відомі, а й розробляти нові – як принципово нові, так і переробляти старі, певним чином удосконалюючи їх.

Як і математичний аналіз та математика загалом, теорія апроксимацій застосовується в багатьох областях – і поза межами математики в тому числі. Бо, як вже зазначалося раніше, зараз у більшості галузей питання, актуальні для цієї галузі, намагаються оформити в аналітичний вигляд – і потім відповісти на це поставлене аналітично питання. І теорія наближень тут допомагає в багатьох випадках, оскільки часто йдеться саме про наближені рівняння та наближені розв’язки.

Зокрема, теорія наближень застосовується у фізиці, інженерії, механіці, економіці тощо.

Застосування у фізиці є максимально природнім і стосується чи не всіх аспектів, які були зазначені раніше. Необхідність сформулювати задачу аналітично, а потім знайти її наближений розв’язок, трапляється у цій науці постійно.

В інженерії теорія наближень серед іншого допомагає під час проектування різноманітних об’єктів, оскільки у процесі постає необхідність оцінювати різноманітні чинники – такі, як напруга, деформація, навантаження тощо.

В біології та хімії теорія апроксимації також допомагає спростити опис різноманітних складних процесів.

В економіці застосування теорії наближень має багато проявів. Теорія наближень дає теоретичну основу для розробки моделей для функцій попиту та пропозицій, впливу на них фактору зміни цін, відсотку, який йде на податки на них; моделей для прогнозування безробіття, інфляції; допомагає за потреби спростити статистичний аналіз даних. На основі таких моделей оцінюються ризики та приймаються рішення.

Детальніше про ці, а також інші – зокрема, у задачах збільшення швидкості інтернету – застосування можна прочитати в [1],[2],[3].

Методи в теорії апроксимації мають здебільшого теоретичну основу – на противагу тим конкретним результатам, які вона дає та які використовуються.

Це можна проілюструвати та пояснити наступним чином. З теоретичним застосуванням усе цілком зрозуміло й без додаткових пояснень, однак це справедливо і для прикладної частини – різноманітних обчислень. Обчислювальні машини в сучасному світі розвинені досить сильно – і працюють з надзвичайно великими числами. І для цих машин треба розробляти та удосконалювати алгоритми, методи, принципи, за якими вони працюють. Практичним шляхом це зробити фактично неможливо – числа, з якими працюють такі машини, настільки великі, що їх записати, уявити чи провести самостійно з ними обчислення чи міркування ми не можемо. Тим паче розробити якийсь метод пошуку наближеного розв’язку. Саме тому для того, щоб з ними працювати, досліджувати, аналізувати та отримувати з їхньою допомогою якісь практичні та конкретні результати, потрібна теоретична основа. Теорія, яка буде пояснювати, що відбувається з тим, чим ми наближуємо – наскільки воно відрізняється від того, що ми наближуємо; як це покращувати та чому той чи інший метод має спрацювати та дати бажаний результат.

Загалом, рівнянь, які потрібно розв’язати чи наближено розв’язати, занадто багато, щоб розв’язувати кожне з них. І розробити теоретичну основу, яка дозволить розв’язувати одночасно багато рівнянь чи не єдиний можливий вихід.

Нові ж результати чи покращення вже відомих у теорії наближень можна розділити на дві групи. І тут варто згадати те, що було сказано раніше про завдання теорії апроксимацій щодо визначення «приблизності» та «важливих аспектів». Саме з покращенням щодо цих двох понять і пов’язані ці дві групи. Покращення щодо приблизності означає, що нова отримана «приблизна» інформація відрізняється від точної ще менше, ніж до цього. При цьому значення може мати навіть, на перший погляд, несуттєве та мале покращення. Адже воно може оптимізувати якийсь з числових методів обчислення – зменшити час, необхідний для нього, що, в свою чергу, призведе до пришвидшення, можливо, навіть суттєвого, певних обчислювальних процесів у реальному житті. Покращення щодо важливих аспектів означає, що нова отримана «приблизна» інформація зберігає ще більше важливих аспектів, які наявні в «точної». Однак результат необов’язково є покращенням. Іноді в ролі результату виступає доведення того, що наявні результати щодо наближення певних об’єктів покращити неможливо – і це є важливим для подальших досліджень.

Мотиваційна частина дослідження – тобто що саме підштовхує спробувати отримати чи покращити той чи інший результат – може бути різною. Це може бути «контрінтуїтивність» вже відомих результатів. Тобто коли вже є відомий результат наближення одних об’єктів іншими, однак щось у цьому наближенні виглядає неприроднім та дивним – і таким, що не мало б бути властивим для найкращого наближення. Що, відповідно, дає підстави припускати, що наявний результат можна покращити – і отримати більш природній. Також мотивацією може виступати недостатня досліджуваність певного питання – фактично, те, що можна сказати про довільну науку. Додатковим фактором тут може виступати спроба перенести та адаптувати вже застосовані методи доведення, які спрацювали на одних об'єктах, на інші, ще не досліджені. Дещо схожою з цим є і така мотиваційною частиною може бути спроба покращити чи узагальнити наявний результат. Покращенням може виступати покращення відомої оцінки, узагальненням – продовженням відомого результату на більш широкий клас функцій чи інших об'єктів. Схожість з попереднім видом мотиваційної частини тут є те, що таке узагальнення нерідко відбувається за аналогічною схемою – спроба перенести та адаптувати вже відоме доведення. Початкові спроби майже завжди пов'язані саме з цим.

У результатах, які представлені в цій дисертаційній роботі, присутні як обидві групи результатів, так і наведені вище мотиваційні частини.

Хоча слід зазначити, що навіть це не є вичерпним переліком можливих мотиваційних частин для досліджень. Іноді це може бути продиктовано науковим чи іншим прогресом – і коли це робить актуальною ту чи іншу задачу, яка раніше такою не була. Актуальною може бути як необхідність наближено розв'язати вже сформульовану, так і аналітично оформити таку, для якої це ще не зроблено. Іноді саме поява якоїсь нової інформації, міркувань чи конкретних результатів обчислення може підкреслити неприродність раніше отриманих результатів – що було непомітно раніше – і стати частиною відповідної мотивації.

Найбільш стандартна задача, яку вирішує теорія наближень виглядає так: наблизити певну функцію поліномами, бо поліноми є функціями, з якими зручно працювати. Залежно від ситуації на функції можуть накладатися певні умови – зокрема, найчастіше йдеться про неперервні на відрізку функції – а від наближуючих поліномів ці умови та властивості вимагатись.

Многочлени вибираються як універсальний інструмент наближення інших функцій з декількох причин. Це прості та зручні для обчислення функції, адже вони є суперпозицією – можливо, в кілька ітерацій – найбільш елементарних арифметичних дій: додавання, множення та віднімання. Що, тим самим, робить довільні обчислення, пов’язані з ними, більш простою задачею порівняно з іншими функціями.

У певних випадках простота природи многочлени робить їх більш відповідними до реальних процесів. Окрім того, многочлени легко диференціювати та брати від них інтеграл. Враховуючи, що і в самій теорії наближень безпосередньо, і в тих областях, де вона використовується, поняття похідної та інтеграла трапляється постійно – а разом з тим і необхідність їх обчислювати – що робить вибір многочленів як спрощеного об’єкту, яким наближаються більш складні, цілком логічним. Також простота вигляду многочленів дозволяє досягати на них за потреби додаткових умов простіше, ніж на інших функцій. Наприклад, механізми інтерполяції дозволяють побудувати многочлен, який в наперед заданих точках буде набувати наперед заданих значень. Таким чином, виходить досягти того, що «наближена» функція буде і відносно «простою», і її графік буде перетинати графік вихідної функції в наперед заданих точках. Для многочленів доступні деякі методи доведення, які важко застосувати для більш складних функцій. Наприклад, індукція: для многочленів не є проблемою довести чи спробувати довести якесь твердження за допомогою методу математичної індукції, застосованого до, скажімо, величини степеня многочлена; в той час як для довільної, навіть неперервної функції, це оформити набагато важче.

Така числова характеристика многочлена, як степінь, є зручною і в іншому контексті. Хоч многочлени і є простими для обчислення функціями, але, цілком зрозуміло, що чим більше вони містять – нехай і елементарних –

операцій, тим більш складними для обчислення стають. Степінь тут і є тією величиною, яка характеризує як цю кількість елементарних операцій, так і їхню складність, адже зрозуміло, що чим до більшого степеня необхідно піднести число, тим більше вийде і сам результат, і проміжні результати в ході обчислення. А отже, і весь процес стане складнішим. Тому степінь дозволяє ще й всередині многочленів проводити зручну градацією – власне, за величиною степеня – за складністю для обчислення. Це допомагає чітко розмежовувати, зокрема, складність, яка доступна наразі обчислювальним машинам, і складність, яка на даному етапі їм ще не під силу.

Ця градація також робить більш доречним таке поняття, як поступове наближення. Коли спочатку ми наближуємо вихідну функцію найбільш простими поліномами – маленького степеня – а потім усе більш і більш складними, кожного разу збільшуючи дозволений степінь. Таким чином, щоразу ми будемо отримувати більш точне наближення, але водночас і більш складне для обчислення. І завдання теорії наближень тут полягає в тому, щоб досягти бажаної оцінки до того моменту, як складність поліномів вийде за межі доступних у вигляді обчислювальних машин ресурсів. Таке завдання можна вирішувати і в конкретному числовому випадку, однак здебільшого це має вигляд певної загальної оцінки величини наближення, в якій фігурує степінь того многочлена, який наближує вихідну функцію.

У такій інтерпретації досить зручно говорити про швидкість наближення – інакше кажучи, як змінюється величина відхилення, коли збільшується степінь поліномів, якими ми наближуємо вихідну функцію. І оскільки поліноми є зручним об’єктом для того, щоб їх аналізувати, це дає змогу отримувати різноманітні теоретичні результати щодо цієї швидкості наближення – а з ними і висновки про величину наближення для великих степенів. Яку б практичним шляхом отримати було б неможливо з огляду на нездатність людини працювати з такими числами без допомоги машинних апаратів. А таким чином вийшов і теоретичний результат, і практичний – конкретне наближення з відомою точністю.

На цьому зручність многочленів як інструмента наближення не закінчується. Наступна деталь також стосується теоретичної основи, яку дає теорія наближень. Для того, щоб аналізувати певні властивості та правила функцій – скажімо, їхню поведінку на нескінченності – необхідно брати певні границі певних функцій чи послідовностей. І з многочленами це, знову ж таки, найчастіше зробити набагато легше, ніж з іншими функціями. Останні два приклади – це фактично саме те, що раніше було описано, як «наближення» не тільки для обчислень, а й для доведень різноманітних властивостей. Многочлени та вже згаданий механізм інтерполяції – цього разу за схемою Лагранжа-Ерміта - дозволяє зберігати й такі властивості функції, як опуклість чи монотонність, що, зокрема, має значення й для результатів, наведених у цій дисертаційній роботі.

Також варто зазначити те, що більшою мірою функції, які потрібно наближувати, належать до класу гладких чи, принаймні, кусково-гладких. Це, зокрема, ілюструється тим фактом, що пересічній людині не так уже й просто намалювати графік довільної функції так, щоб він був не гладким і не кусково-гладким. Бо нам це не так просто уявити, адже більшість функцій, кривих, які фігурують у природі, є саме гладкими чи, принаймні, кусково-гладкими. Це ще раз підкреслює важливість такого аспекту, як похідна – як першого, так і старших порядків – і важливість того, що у поліномів похідна обчислюється відносно просто.

Зрозуміло, що не кожна функція є многочленом, однак за допомогою наближення поліномів багато функцій у результаті можна представити як своєрідні многочлени нескінченного степеня - ряди. «Представити» у даному випадку може означати різні речі – поточкову чи рівномірну збіжність – а на самі ряди мають бути певні умови, щоб з ними можна було працювати, але все одно часто навіть з усіма цими нюансами це буде зручніше для доведення та різноманітних міркувань, ніж просто якась абстрактна ненаближена функція без жодних додаткових відомостей про неї. Зокрема, диференціювати та інтегрувати функцію може бути зручніше саме у вигляді рядів – оскільки за певних умов ці ряди можна інтегрувати та диференціювати, а інтегрувати та диференціювати окремо кожен член ряду є простим завданням, оскільки це звичайні мономи.

Є й інші властивості поліномів, які відіграють важливу роль у цьому контексті: неперервність, скінченна кількість коренів, замкненість відносно операцій додавання, віднімання, множення та суперпозиції, можливість розбити на проміжки монотонності та проміжки опуклості тощо, можливість – без додаткових умов – наблизити довільну неперервну на відрізку функцію многочленами як завгодно близько (теорема Вейєрштрасса), можливість розкласти на добуток многочленів не більш ніж другого степеня тощо.

У конкретних випадках можуть використовуватися й інші об’єкти – зокрема, різновиди многочленів. Так, для періодичних функцій, наприклад, в якості інструментів наближення використовують не звичайні поліноми, а тригонометричні – оскільки вони також будуть періодичними, як і та функція, яку необхідно наблизити. Фактично вони є найпростішими та найбільш зрозумілими неперервними періодичними функціями. У разі наближення саме тригонометричними поліномами тоді, відповідно, з «наближеною» функцією можна буде працювати на всій числовій прямій, а не лише на конкретному відрізку, а сама «наближена» функція буде мати властивість періодичності, так само, як і вихідна функція. При цьому тригонометричні поліноми теж загальновідомо, як диференціювати та інтегрувати – адже для періодичних випадків це так само актуально, як і для «звичайних». Інтегрувати в деяких випадках може бути навіть простіше – через ортогональність базисних функцій у середньоквадратичній нормі на довжині періоду. Можуть використовуватися сплайни – кусково-алгебраїчні многочлени. Це має сенс через те, що дозволивши на кожній ділянці «наближувальній» функції дорівнювати «своєму» многочлену, можна отримати більшу точність цього наближення – позаяк для кожної ділянки окремо многочлени, які найкраще наближують функцію, можуть відрізнятися. При цьому сплайни фактично мають ті самі властивості, що й многочлени – принаймні, майже всюди на області, яка розглядається – і тому також є досить зручними інструментами для наближення і подальших обчислень з ними.

Іноді в ролі функцій, якими наближується вихідна функція, навіть можуть виступати функції, які є сумами кількох функцій з «традиційних» інструментів наближення – наприклад, сума тригонометричного та алгебраїчного поліномів. Залежно від обставин це може бути пов'язано, до прикладу, з тим, що вихідна функція природнім чином розбивається на суму двох чи більшої кількості функцій – і для кожної з цих функцій-доданків найкращий інструмент наближення свій. І в такому разі такий «змішаний» інструмент наближення дасть кращий результат, ніж кожен з «традиційних» окремо.

Оцінки в рамках так поставлених задач можна розділити на кілька груп: поточкові, рівномірні та інші. Поточкові оцінюють відхилення в кожній конкретній точці, рівномірні – на всій області, яка розглядається в тій чи іншій ситуації. Якщо в контексті поточкової оцінки доречно говорити лише про безпосередньо числове відхилення – тобто різницю двох значень – то рівномірна оцінка може трактуватись як, наприклад, показник того, наскільки далеко один від одного знаходяться графіки функцій – тієї, що наближає, і тієї, яку потрібно наблизити. Серед інших можна виділити середньоквадратичне наближення.

Поточкові оцінки є більш точними, якщо казати про значення в конкретній точці, але з ними складніше працювати порівняно з рівномірними – оскільки частіше цікавіть представляє об'єкт, функція в цілому, а не конкретна точка, хоча й навпаки теж буває. Отримати хоч десь «дуже гарне» наближення замість того, щоб отримати просто «гарне», але на всій області, яка розглядається, теж іноді може бути пріорітетніше – і це один з прикладів, коли поточкова оцінка в рамках поставленого завдання може бути доцільніше за рівномірну.

Зазвичай з рівномірної оцінки випливає поточкова – і такі оцінки складніше отримати. Однак поточкова оцінка може бути більш корисною, якщо йдеться про якусь функцію, яка поводиться досить по-різному на тій області, яка розглядається. Чи коли це невідомо і треба зрозуміти та проаналізувати – чи буде ця поведінка різною чи відносно однаковою. Наприклад, коли відбувається інтерполяція за певними вузлами – і треба зрозуміти, що відбувається на кожній ділянці між ними та яка є залежність найкращої можливої оцінки від, скажімо, їхнього розташування. Рівномірна оцінка тут може викривити враження та сприйняття цього різноманіття, в той час, як поточкова, навпаки, дасть змогу це детальніше дослідити – і, ба більше, у цьому може навіть полягати початкову задачу. І позаяк рівномірна оцінка є здебільшого сильнішою, то негативні результати – що щось не виконується – досить часто простіше продемонструвати саме за допомогою поточкових оцінок. Згадана вище середньоквадратична оцінка теж має свої переваги порівняно з іншими. Кожен з видів оцінок, у принципі, є нечутливим до якоїсь несуттєвої зміни функції – у тому сенсі, що оцінки, можливо, з мінімальною видозміною, залишаються актуальними та справедливими. Однак середньоквадратичні оцінки також залишаються актуальними та справедливими у разі навіть суттєвих змін, але на якійсь мінімальній, несуттєвій ділянці. У той час, як для поточкових та рівномірних такого сказати вже не можна. Тобто, інакше кажучи, на середньоквадратичні оцінки не впливає ситуація, коли на якійсь невеличкій ділянці поведінка функції, яку необхідно наблизити, є принципово іншою порівняно з усією іншою областю, яка розглядається. А таке в різноманітних процесах, які виникають у природі, цілком можливо і трапляється – і саме тому середньоквадратичні оцінки також є важливим видом оцінок у теорії наближень.

Це розділення на поточкові та рівномірні оцінки також є актуальним, коли нам потрібно не просто наблизити щось з наперед заданою точністю, а визначити процес, послідовність елементів, функцій, об'єктів, які наближають початковий об'єкт – щоразу стаючи до нього ближче і ближче. І як похибку можна визначати різними способами, так і те, наскільки швидко визначена послідовність, яка наближає початковий об'єкт, стає до нього ближчою. І тут цілком природньо можна розглядати поточкове наближення та рівномірне.

Наявність різних видів оцінок також допомагає в контексті однієї з описаних вище мотиваційних частин, а саме щодо неприродності вже відомих результатів. Оскільки в нас є можливість порівнювати різні типи оцінок, то можна також аналізувати те, наскільки вони узгоджуються одна з одною – і якщо одна з них поводиться нормально, а інша якимось чином дивно, то це може бути індикатором того, що в цьому напрямку варто зробити певне дослідження. Та з'ясувати, чи це через недосконалість даного типу оцінки в конкретному випадку, чи там дійсно є можливість покращити оцінку, а ситуацію з наближення загалом зробити більш природньою, щоб більше початкове питання не стояло.

Результати, які будуть викладені в подальших розділах, будуть стосуватись обох основних видів оцінок, які були обговорені вище – тобто як поточкових, так і рівномірних.

Перший з результатів, які будуть представлені в цій дисертаційній роботі, пов'язаний з нерівністю Вітні.

Нерівність Вітні – одна з основоположних для теорії апроксимації – пов'язна якраз саме з цією найбільш стандартною задачею щодо наближення функцій поліномами. Більш конкретно, вона показує зв'язок між величинами модуля неперервності вищих порядків неперервної на відрізку функцій та алгебраїчних поліномів, які їх наближають.

Модуль неперервності є величиною, яка є числовою характеристикою рівномірної неперервності – і допомагає розмежовувати «більш рівномірно неперервні функції» та «менш рівномірно неперервні функції». Крім того, модуль неперервності дозволяє оцінити, наскільки сильно може змінитися значення функції в околі заданої довжини – що максимально узгоджується із завданням, яке стоїть перед теорію апроксимацій, і тому робить використання цієї величини в теорії наближень максимально виправданим та природнім.

Модуль неперервності також дозволяє писати оцінки для похідної, яка, як вже неодноразово зазначалося вище, є одним з центральних понять для теорії наближень. Зокрема, за допомогою модуля неперервності можна робити висновок щодо порядку гладкості функції – інакше кажучи, скільки разів вона неперервно та просто диференційовна. Для цього також можуть знадобитись модулі неперервності старших порядків – тобто функція модуля неперервності, застосована кілька, більше одного, разів – які дають змогу отримувати оцінки для старших порядків похідної, які так само є деякими ітераціями першої, «звичайної» похідної.

Також від модуля неперервності може залежати швидкість, з якою певна послідовність многочленів наближує певну фіксовану функцію, та похибка наближення – точніше, можливість її оцінити – на тому чи іншому етапі цього покрокового наближення. Також нерідко саме модуль неперервності виступає тією величиною, за якою – за чиїм значенням – функції розділяють на різноманітні групи і для кожної групи отримана в подальшому оцінка має свій вигляд. І оскільки багато нерівностей пов’язують величину найкращого наближення саме з модулем неперервності, то це демонструє напрочуд велику важливість цього поняття для теорії апроксимації – оскільки всі виведені надалі результати, як теоретичні, так і конкретно-числові, опиралися саме на модуль неперервності.

Таким чином, модуль неперервності впливає як на точність наближення, так і на швидкість, з якою це наближення стає ближчим– бо багато результатів пов'язані саме з цим – і на оптимізацію використання ресурсів.

Інші наведені результати мають інші типи мотивації – а саме спроби просунути теорію формозберігаючого наближення періодичних функцій, яка знаходиться в стані активної розробки, а також теорію формозберігаючого наближення на кривих комплексної площини, яка знаходиться в початковій стадії розробки. узагальнити чи розширити вже наявний результат та спроби перенести та адаптувати доведення певних фактів та властивостей для одних об'єктів на інші.

В одному випадку йдеться про узагальнення відомого результату для більш широкого класу функцій. В двох інших випадках йдеться про раніше отримані результати для коопуклих наближень – тобто в ролі «важливого аспекту», який потрібно зберігати, виступає опуклість на тих самих проміжках, що і функція, яку ми наближуємо – та спроби отримати їхній комонотонний аналог. Для комонотонності в ролі «важливого аспекту» є монотонність на тих самих проміжках. Опуклість пов'язана з другою похідною – і в багатьох допоміжних лемах і проміжних міркуваннях дійсно саме вона і фігурує. Тож початкове питання в такому разі було наступне: чи можна в усіх доведеннях та міркуваннях просто замінити другу на похідну на першу з мінімально необхідними пристосуваннями – і таким чином отримати бажаний комонотонний аналог? Відповідь виявилась негативною і лише частково позитивною. В деяких лемах та міркуваннях дійсно можна просто замінити другу похідну на першу та зробити відповідні заміни – і майже дослівно повторене доведення все ще буде працювати. Однак в більшості лем усе навпаки – «проста» заміна похідної другого порядку на похідну першого не працює і потрібно вигадувати щось суттєво інакше порівняно з тим, що було раніше.

Однією з мотивацій проводити комонотонні та/або коопуклі наближення – тобто вважати проміжки монотонності та опуклості тим самим важливим аспектом, який потрібно зберігати – є наступне. Опуклість та монотонність є тими властивостями, які відповідають за напрямок зміни функції – інакше кажучи, напряму впливають на те, як виглядає графік функції. Тобто отримавши комонотонне та/або коопукле наближення, ми отримаємо не просто многочлен чи інший об’єкт, який наближує функцію загалом, а ще й чий графік, разом з тим, буде виглядати схоже до графіку вихідної функції. Що може бути важливим для подальшого аналізу цього «наближеного» результату і як наслідок – для висновків щодо вихідного «точного».

Крім того, монотонність відповідає за поняття максимумів – як глобальних, так і локальних. А багато задач в різних сферах будуються саме навколо того, щоб з’ясувати максимальне чи мінімальне значення тієї чи іншої величини. Опуклість пов’язана з другою похідною, яка теж нерідко фігурує в постановках задач та обчисленнях, а також вигляд графіку на конкретній ділянці – опуклий чи ввігнутий – може бути важливим фактором під час аналізу властивостей цього графіка чи фігури, яка таким чином наближується.

Оцінки, отримані у двох останніх результатах, пов’язані зі швидкістю наближення поліномами вихідної функції. Під швидкістю наближення в даному випадку мається на увазі, наскільки ближче до функції, яку ми наближуємо, стає поліном, який її наближує, зі збільшенням максимального дозволеного степеня для цього полінома. Тобто аналізується зміна відхилення полінома, яким ми наближуємо, від початкової функції.

Оцінювати цю швидкість наближення важливо з багатьох причин. Зокрема, подібний тип оцінок дозволяє зрозуміти, многочлени яких степенів необхідні, щоб гарантовано отримати бажану оцінку – і, звідси, сформулювати, які обчислювальні потужності потрібно отримати (якщо їх ще немає), щоб цього досягти. Від цього також можуть залежати числові методи обчислення – наприклад, скільки разів треба запускати той чи інший алгоритм, щоб отримати наближення з наперед заданим відхиленням. Більш точна та краща оцінка швидкості наближення дозволить у такому разі запускати цей алгоритм менше разів, це зекономить виробничі потужності та час – а це, у свою чергу, може призвести до суттєвої оптимізації певних процесів. Адже, як уже зазначалось раніше, хоч математичний аналіз і працює з нескінченно малими величинами та багато результатів мають характеристику «з деякого моменту», для реальних обчислень потрібні скінченні числа – і який саме це момент, починаючи з якого щось виконується, теж має значення. Також, як і в усіх попередніх випадках, нові результати – у даному випадку нові оцінки швидкості наближення – дають теоретичну основу для отримання в подальшому нових результатів, розробки оптимальніших методів.

Це також ілюструю сформульовану раніше тезу про те, що навіть мінімальне та незначне, на перший погляд, покращення оцінки в теорії апроксимації може мати надважливе значення для оптимізації ресурсів та процесів. Оскільки обчислювальні потужності у сучасних машин дуже високі і вони працюють з великими числами, то це означає, що це незначне покращення на великих числах може перетворитися на суттєву та відчутну величину – як у контексті точності наближення для конкретної ітерації алгоритму, так і моменту, починаючи з якого має виконуватись те чи інше твердження.

Крім того, враховуючи обсяги кількості безпосередньо обчислень, то це незначне покращення може так само не дуже суттєво вплинути на оптимізацію за часом та витраченими ресурсами конкретного обчислення, однак, враховуючи, величезну кількість подібних обчислень загалом, виходить, що на цій величезній кількості ця несуттєва оптимізація цілком може стати помітно відчутною та суттєво підвищити ефективність усього процесу.

Більш детальні пояснення мотивацій та попередніх результатів з усіма посиланнями будуть надані у розділах дисертаційної роботи, присвячених відповідному отриманому результату, короткий огляд отриманих результатів буде наведений у наступному підрозділі вступу.

Короткий огляд дисертації

Дисертаційне дослідження присвячене наближенню різноманітних функцій поліномами та пов'язаними з ними функціями. Головною метою дослідження є доведення класичних оцінок похибок наближення поліномами, що зберігають певні властивості функції, тобто забезпечують так звану апроксимацію з обмеженнями.. Значну увагу приділено вивченню формозберігаючого наближення, зокрема комонотонного та копозитивного – тобто таких, які зберігають проміжки монотонності та, відповідно, знакосталості вихідної функції.

Сучасна теорія формозберігаючого наближення (Shape Preserving Approximation, скорочено SPA) заснована в роботах Lorentz, Zeller та DeVore. Вони довели, що класичні оцінки Джексона зберігаються при наближенні монотонних функцій монотонними алгебраїчними многочленами. Також Lorentz і Zeller побудували контрприклад, що свідчить про те, що формозберігаюче наближення неможливо звести до наближення без обмежень. Newman вперше розглянув можливість наближення кусково-монотонних функцій кусково-монотонними алгебраїчними многочленами, які мають такі самі проміжки монотонності, що й функції, які вони наближують. З того часу в результаті досліджень багатьох вчених побудована теорія формозберігаючого наближення неперервних на відрізку функцій алгебраїчними многочленами майже настільки ж повна, як і відповідна теорія наближення без обмежень.

Природнім поширенням цієї теорії є SPA періодичних функцій, а також SPA функцій комплексної змінної. SPA періодичних функцій значно складніша, ніж SPA неперіодичних функцій з багатьох причин, однією з основних є та обставина, що періодичні функції не можуть бути монотонними або опуклими, якщо вони не є сталими. Отже, побудова теорії мусить починатися одразу з дослідження кусково-монотонних або кусково-опуклих функцій, тобто без досвіду побудови теорії для "чисто" монотонних або опуклих функцій. Тим не менш, за останні 20-25 років відбулось суттєве просування цієї теорії, але, як не дивно, остаточні результати були отримані для кусково-опуклих (2-монотонних) та q-монотонних, q>2, функцій, але не кусково-монотонних (1-монотонних). Саме кусково-монотонні періодичні функції досліджені в 6-у розділі дисертаційної роботи. Що стосується SPA функцій комплексної змінної, то цей розділ теорії функцій ще знаходиться в початковому стані і певне просування міститься в розділі 4 дисертаційної роботи. Розділ 5, в якому розглядаються так звані гібридні поліноми, є допоміжним для розділу 6, але, на наш погляд, має самостійний інтерес. Нарешті, важливим апаратом у багатьох доведеннях теорії функції є нерівність Вітні – зокрема, в теорії сплайнів, конструктивній теорії функції та ін. Поточковий варіант нерівності Вітні досліджується в розділі 3.

Таким чином, дисертація складається із вступу, розділу 1 "Історія та огляд літератури"; розділу 2 "Загальні передумови для дослідження"; чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, присвячених повному викладу результатів дослідження дисертанта; висновків та списку використанних джерел.

Розділ 3 Поточкова оцінка відхилення полінома Крякіна від неперервної на відрізку функції.

Нагадаємо, що нерівність Вітні має вигляд:

$$||f - P_{k-1}||_{C[0;1]} \le W(k)\omega_k\left(f, \frac{1}{k}\right),$$

де f - неперервна на $[0;1]$ функція, P_{k-1} - многочлен найкращого наближення функції f, $\omega_k(f,\cdot)$ - це k-й модуль неперервності функції f, а $W(k)$ - стала, яка може залежати тільки від k. Ця стала називається сталою Вітні. Добре відома гіпотеза Сендова: $W(k) \leq 1$. Ця гіпотеза доведена для $k \leq 10$, для $k \leq 82000$ доведено, що $W(k) \leq 2$, а для всіх k відома оцінка $W(k) <= 2 + \frac{1}{e^2}$. В усіх відомих доведеннях максимум модуля різниці $f - P_{k-1}$ досягається біля кінців відрізка, і саме доведення за допомогою многочленів Крякіна забезпечує вказану оцінку для всіх k. В розділі 3 доведено, що чим далі точка x знаходиться від кінців відрізка, тим поточкова похибка $|f(x) - P_{k-1}(x)|$ стає на порядки меншою, ніж рівномірна оцінка. А саме, доведена наступна теорема.

Теорема 3.1. Для кожної неперервної на відрізку $[0; 1]$ функції f та для кожних m і k таких, що $0 < m < k, k \geq 13$, виконується нерівність:

$$|f(x) - Q_{k-1}(x)| \leq c\frac{m\ln k}{C_k^m}\omega_k(f, \frac{1}{k}), \text{ якщо } x \in [\frac{m}{k}, \frac{m+1}{k}] \text{ і } m < k/2,$$

та

$$|f(x) - Q_{k-1}(x)\ | \leq c\frac{(k-m-1)\ln k}{C_k^m}\omega_k(f, \frac{1}{k}), \text{якщо } x \in [\frac{m}{k}, \frac{m+1}{k}] \text{ і } m \geq k/2,$$

де $c = const \leq 4$, а Q_{k-1} - поліном Крякіна степеня $\leq k - 1$ для функції f.

Розділ 4 Поточкова оцінка знакозберігаючого наближення на кривих у комплексній площині.

У цьому розділі доведена наступна теорема.

Теорема 4.1. Для кожної кривої Діні $L \in D$ з кінцями в точках z_0 та z^0, числа $\gamma \in (0,1)$ та набору Z точок $z_j \in L$ існують сталі $N = N(L, Z, \gamma)$ та $C = C(L, Z, \gamma)$ такі, що для довільного $n > N$ та довільної дійснозначної неперевної на L функції f, яка змінює знак у точках z_j і задовольняє умову $\gamma\omega(f, 2t) \geq$

$\omega(f,t)$, існує гармонічний поліном h_n степеня $\leq n$ такий, що змінює знак у тих самих точках z_j та має місце нерівність

$$|f(z)-h_n\,(z)| \leq C\omega\left(f,\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}+|z-z_0||z-z^0|}\right), \qquad z\in L, \tag{1}$$

де $\omega(f,t)$ - модуль неперервності функції f на L.

Теорема 4.1. є узагальненням результату Андрієвського, який започатковує теорію SPA на кривих комплексної площини. Результат Андрієвського був доведений для випадку $\omega(f,t)=t^{\alpha},\ 0<\alpha\leq 1$. Нам вдалось спростити доведення Андрієвського за рахунок використання нерівностей Дзядика для так званих ядер Дзядика наближення ядра Коші. Зауважимо, що оцінки вигляду (1) в апроксимації без обмежень називають оцінками типу Дзядика.

Розділ 5 Комонотонне наближення гібридними поліномами.

Розділ 5 присвячений SPA функцій f вигляду $f(x)=g(x)+ax$, де g − 2π-періодична неперервна функція, гібридними поліномами Q_n вигляду $t_n(x)+ax$, де t_n - тригонометричний поліном степеня $\leq n$. Необхідність такого наближення викликана тою простою обставиною, що первісна періодичної функції не періодичною функцією, взагалі кажучи. І це є суттєвою перешкодою в схемах доведення формозберігаючого наближення. З іншого боку, на відміну від нетривіальних періодичних функцій функції вигляду $f(x)=g(x)+ax$ можуть бути "чисто" монотонними при $a\neq 0$. У розділі доведені три теореми. Теорема 5.1.1 стверджує, що якщо функція f монотонна, то за кожного $n\geq 1$ її можна наблизити монотонним гібридним поліномом степеня $\leq n$ із збережнням класичної оцінки Джексона, тобто

$$||f-Q_n||_{C(\mathbb{R})} \leq c\omega(f,\tfrac{1}{n}), \tag{2}$$

де c - абсолютна стала.

Теорема 5.1.2 стверджує, що оцінка (2) зберігається (з $c = c(s)$, де $2s$ - кіл-ть змін монотонності на періоді) і під час SPA кусково-монотонної функції f вказаного вигляду гібридними поліномами, але не для всіх n, а тільки для $n > N$, де N залежить від розташування точок локальних екстремумів функції f. У зауваженні 5.3.1 наведено відповідний контрприклад.

Нарешті, в теоремі 5.1.3 виділено множину функцій f, для яких оцінка (2) (з $c = c(s)$) зберігається і під час SPA кусково-монотонної функції f вказаного вигляду гібридними поліномами для всіх $n \geq 1$. Саме цей результат зумовив можливість доведення основної теореми розділу 6.

Розділ 6 Комонотонне наближення періодичних функцій.

Нагадаємо класичну нерівність типу Джексона, доведену Джексоном ($m = 1$), Зигмундом та Ахієзером ($m = 2$) та Стєчкіним ($m > 2$): *для кожного* $n \geq 1$ *та кожної* 2π*-періодичної* r *разів неперервно диференційовної функції* f *знайдеться тригонометричний поліном* T_n *степеня* $<$ n *такий, що*

$$||f - T_n||_{C(\mathbb{R})} \leq \frac{c}{n^r} \omega_m(f^{(r)}, \frac{1}{n}), \tag{3}$$

де $\omega_m(f^{(r)}, \cdot)$ *-* m*-й модуль неперервності* r*-ї похідної* f^r*, а* $c = c(m, r)$ *- константа, яка залежить лише від m та r.*

Метою SPA періодичних функцій є доведення або спростування оцінки (3) (з $c = c(m, r, s)$) для випадку формозберігаючого наближення. Для кусково-опуклого (кусково-2-монтонного) наближення питання повністю з'ясовано, а саме знайдені всі пари чисел (m, r), за яких нерівність (3) не виконуєтся в жодному сенсі і, отже, всі пари чисел (m, r), для яких нерівність

(3) виконується, але не для всіх n, а тільки для $n \geq N$, де N залежить від розташування точок локального екстремума. При цьому доведено, що для кожної пари (m, r) нерівність (3) є хибною для $n \geq 1$, взагалі кажучи. Так само, для q-монотонного наближення доведено, що нерівність (3) в жодному сенсі не є правильною для всіх пар (m, r), взагалі кажучи. Для кусково-монотонного (кусково-1-монотонного) наближення знайдені всі пари (m, r), за яких (3) є хибною, а для решти пар нерівність (3) є правильною, але для $n \geq N$, де N залежить від розташування точок локального екстремума. При цьому був відомий випадок ($m = 1, r = 0$), коли нерівність (3) виконується для всіх $n \geq 1$. У шостому розділі знайдена широка множина A_s пар (m, r), для яких нерівність 3 виконується для всіх $n \geq 1$:

$$A_s \coloneqq \{(m, r) \mid\ m = 1 \text{ і } r \in N, \quad \text{або } m = 2 \text{ і } r = 2s, \ \text{ або } \ m \in N \text{ і } r > 2s\}.$$

Зокрема, всі пари, в яких m=1. Основну теорему цього розділу можна сформулювати наступним чином.

Теорема 6.1.1. Нехай $s \in N$ і $(m, r) \in A_s$. Для кожної 2π-періодичної r разів неперервно диференційовної на $\mathbb{R}$ функції f, яка змінює монотонність $2s$ разів на періоді та для кожного $n \geq 1$ існує тригонометричний поліном T_n степеня $< n$ такий, що

$$f'(x) T_n'(x) \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

і виконується нерівність (3) з $c = c(m, r, s)$.

Зауважимо, що періодична функція не може мати непарну кількість змін монотонності на періоді, якщо функція не є сталою. Ми гадаємо, що у випадках $(m, r) \notin A_s$ теорема 6.1.1 є хибною, але це питання в дисертаційній роботі не досліджується.

Таким чином, тема дисертації є актуальною, а отримані результати мають наукову цінність.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати стосуються теорії наближень загалом та теорії формозберігаючого наближення зокрема. Результати, запропоновані в дисертації, можуть бути корисними при подальших дослідженнях у цих напрямках.

Загальна характеристика дисертації

Обґрунтування вибору теми дослідження. Природнім поширенням теорії SPA неперервних на відрізку функцій алгебраїчними поліномами є SPA періодичних функцій, а також SPA функцій комплексної змінної. SPA періодичних функцій значно складніша, ніж SPA неперіодичних функцій з багатьох причин, однією з основних є та обставина, що періодичні функції не можуть бути монотонними або опуклими, якщо вони не є сталими. Тим не менш, за останні 20-25 років відбулось суттєве просування цієї теорії, але, як не дивно, остаточні результати були отримані для кусково-опуклих (2-монотонних) та q-монотонних функцій, але не кусково-монотонних (1-монотонних. Що стосується SPA функцій комплексної змінної, то цей розділ теорії функцій ще знаходиться в початковому стані і має багато питань, на які ще не дано відповідь. Нарешті, важливим апаратом у багатьох доведеннях теорії функції є нерівність Вітні – зокрема, в теорії сплайнів, конструктивній теорії функції та ін. Як і формозберігаюче наближення функцій комплексної змінної, так і нерівність Вітні також досліджені в дисертаційній роботі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами. Дисертаційну роботу виконано в рамках проєктів НФДУ №31-88"Підтримка досліджень провідних та молодих учених" на тему «Найкраще наближення поліномами з обмеженнями і без обмежень та системи підпросторів» (реєстраційний номер: 2020.02/0155); № 3М ДО «ВЦП КНУ ім. Т.Шевченка при НАН України» на тему «Геометричні властивості метричних просторів, динамічних систем та особливості параболічних рівнянь» (номер державної реєстрації 0118U003795); та дослідницьких наукових тем 19КФ 038-04 «Апроксимація з вагою та моделі Кокса» та № 22КФ038-01 «Оцінювання та критерій згоди у статистичних моделях, розв'язання стохастичних рівнянь і дослідження модулів гладкості функцій» кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що входять до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета і завдання дослідження.

1. Встановити поточкові оцінки для нерівності Вітні, які, на відміну від класичної рівномірної нерівності Вітні, свідчитимуть про суттєве покращення (на порядки) похибки відхилення многочлена найкращого наближення у внутрішніх точках відрізка.

2. Довести нерівність типу Дзядика для наближення на кривій дійснозначної функції комплексного аргумента гармонічними алгебраїчними поліномами із збереженням проміжків знакосталості функції.

3. Довести справедливість оцінки Джексона для випадку наближення гібридними поліномами із збереженням проміжків монотонності функції.

4. Отримати оцінки типу Джексона-Зигмунда-Ахієзера-Стечкіна наближення періодичних функцій із збереженням проміжків монотонності.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є неперервні на відрізку функції, кусково-монотонні періодичні функції, дійснозначні функції комплексної змінної, алгебраїчні поліноми, тригонометричні поліноми, їх комбінації та модифікації.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є оцінки наближення функцій, зазначених вище, поліномами – зокрема, оцінки формозберігаючого наближення.

Методи дослідження. У роботі застосовуються методи математичного аналізу, теорії фукнції дійсної змінної, теорії функції комплексної змінної, теорії інтерполювання, математичні перетворення.

Наукова новизна дослідження: Результати дослідження стосуються наближень функцій поліномами - зокрема, формозберігаючих наближень. Основними результатами є:

1. Встановлено поточкові оцінки для нерівності Вітні, які, на відміну від класичної рівномірної нерівності Вітні, свідчать про суттєве покращення (на порядки) похибки відхилення многочлена найкращого наближення у внутрішніх точках відрізка.

2. Доведена нерівність типу Дзядика для наближення на кривій дійснозначної функції комплексного аргумента гармонічними алгебраїчними поліномами із збереженням проміжків знакосталості функції.

3. Доведено справедливість оцінки Джексона для випадку наближення гібридними поліномами із збереженням проміжків монотонності функції.

4. Отримані оцінки типу Джексона-Зигмунда-Ахієзера-Стечкіна наближення періодичних функцій із збереженням проміжків монотонності.

Теоретичне значення. Дисертація містить наукові положення та нові науково обґрунтовані теоретичні результати проведених досліджень, що мають істотне значення для галузі знань «математика та статистика», свідчать про особистий внесок здобувача в науку та характеризуються єдністю змісту.

Практичне значення. Отримані результати носять теоретичний характер і можуть бути використані в теорії функцій та її застосувань.

Особистий внесок здобувача. П'ятий та шостий розділи дисертації написані спільно з науковим керівником та проф. D.Leviatan. Внесок кожного із трьох авторів однаковий, а решта дисертації написана автором самостійно. Основні результати роботи опубліковані в трьох наукових статтях [4,11,5], із них одна самостійна стаття у фаховому журналі [4], ще одна самостійна стаття [11] в журналі, індексованому в науко-метричних базах Scopus та Web of Science, ще одна, у співавторстві, в журналі із індексу Q1 [5], а також у тезах конференцій.

Апробація результатів дослідження. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на таких всеукраїнських та міжнародних конференціях:

1. International scientific conference, AGMA-2019, 28 травня -3 червня, 2019, Одеса, Україна.
2. International conference MADEA-9, 21-25 June, 2021, Bishkek, Kyrgyz Republic.
3. Proceedings of the 4^{th} International scientific and practical conference «Modern research in world science», 10-12 July, 2022, Lviv, Ukraine.
4. Proceedings of the 7^{th} International scientific and practical conference «Scientific progress: innovations achievements and prospects», 3-5 April, 2023, Munich, Germany.

5. Proceedings of the 9th International scientific and practical conference «Innovations and prospects in modern science», 28-30 August, 2023, Stockholm, Sweden.

Публікації. За результатами дисертації опубліковано

- 3 статті у періодичних фахових виданнях; дві з них — у виданнях, які індексуються в наукометричних базах Scopus та Web of Science, один з яких входить до квартиля Q3; ще одна — у науковому фаховому виданні України;
- 5 тез доповідей на конференціях.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях України:

(які входять до переліку МОН України)

1. Щеглов М.В. Поточкова оцінка відхилення полінома Крякіна від неперервної на відрізку функції //Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка.- 2019, №1-С. 12 – 14.

Статті у періодичних наукових виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus (крім видань держави, визнаної Верховною Радою України державою-агресором):

1. Щеглов М.В.«Поточкова оцінка знакозберігаючого наближення на кривих у комплексній площині», Український математичний журнал, Vol 74 No 4 (2022), ст. 572-576

2. D. Leviatan, M. V. Shcheglov and I. A. Shevchuk, Comonotone approximation by hybrid polynomials, J. Math. Anal. Appl., DOI: 10.1016/j.jmaa.2023.127286

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, шістьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел. Розділи 3-6 присвячені отриманим у дисертаційній роботі результатам досліджень та є майже дослівними адаптованими текстами відповідних публікацій або їхнім перекладом з англійської мови на українську. Задля зручності у цих розділах збережена структура відповідних статтей та їхні позначення. Деякі позначення в деяких розділах повторюють одне одного, однак одночасно з тим, у деяких різняться певні дрібні деталі – саме тому кожного разу вони наводяться всі.

Автор хоче висловити подяку науковому керівнику Шевчуку Ігорю Олександровичу за керівництво впродовж всієї роботи над цим дисертаційним дослідженням, D.Leviatan за його внесок в отриманих результатах у розділах 5 та 6, а також механіко-математичному факультету, НФДУ та ВЦП КНУ за підтримку впродовж цього періоду.

Розділ 1
ІСТОРІЯ ТА ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У цьому розділі буде подано коротку історичну інформацію та загальний огляд літератури та результатів за напрямками, яким присвячена ця дисертаційна робота.

Почнемо з того, як з'явилась теорія наближень.

2.1. Як започаткувалась теорія наближень?

Можна вважати, що вперше питання, пов'язані з теорією наближень, з'явились із започаткуванням картографії і необхідністю зображувати різноманітні території – зокрема, великі – на них. Одним з перших у цьому взяв участь Леонард Ейлер ще XVIII ст. [12]

Однак у більш звичному контексті – зокрема, з точки зору того, що обговорюється в цій дисертаційній роботі – можна вважати, що започаткувалась вона в 1853 р., коли Пафнутій Чебишев, розв'язуючи задачу, пов'язану з механізмом, який перетворював лінійний рух парової машини на круговий рух колеса, сформулював звичну для нинішньої теорії апроксимації задачу. Подальше формулювання взяте з [13]:

Чи можна для неперервної на відрізку функції f пред'явити такий поліном степеня, не більшого за задане натуральне число n, таким чином, щоб максимальне відхилення від функції f було контрольованим? Та чи можливо взагалі сконструювати такий поліном, щоб максимальне відхилення від f, тобто величина

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-p(x)|,$$

була мінімальною?

Цікавою деталлю є те, що спочатку Чебишев проігнорував питання щодо існування такого поліному, яке згодом, цілком зрозуміло, постало. Окрім того, відразу з'явились питання, чи буде такий многочлен – якщо він існує – єдиним та чи можливо його конструктивно задати. І що буде, якщо змінити принцип, за яким визначається відхилення? Тобто це одразу породило питання, які теорія наближень у різноманітних варіаціях продовжує розв'язувати і донині.

Через півстоліття після цього – та вже після смерті самого Чебишева - це вже було повноцінною конструктивною теорією функцій.

У XX ст. великий внесок у теорію апроксимації зробили і українські математики [14]. Так, йдеться про Н.І. Ахієзера (Харків), С.Банаха (Львів), С.Н.Бернштейна (Харків), В.К.Дзядика (Київ), М.П.Корнєйчука (Дніпро, Київ), М.Г.Крейна (Одеса) та інших.

Зокрема, Дзядиком було показано зв'язок між многочленом, його похідною, степенем та функцією $\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-x^2}$. Це було узагальненням раніше отриманого результату у вигляді нерівності Бернштейна-Маркова. Це стало важливим інструментом для доведення обернених теорем щодо наближення неперервної на відрізку функції алгебраїчними поліномами.

Під оберненими теоремами тут маються на увазі твердження, в яких дано якусь інформацію про величину найкращого наближення – а стверджується і потрібно довести щось про іншу величину функції, наприклад, модуль неперервності [14].

Також Дзядик розв'язав задачу Фавра про найкраще найближення функцій з класу W_r при дробових r, завдяки йому з'явилось таке поняття, як ядра Дзядика, яке згодом буде використовуватись у доведенні в одному з розділів цієї дисертації, тощо [15].

2.2. Нерівність та константа Вітні

Коли почалось досліджуватись детальніше питання найкращого наближення функції поліномами, то, цілком зрозуміло, з'явились різноманітні факти та нерівності, які почали складати теоретичну основу для таких досліджень.

Однією з таких фундаментальних нерівностей стала нерівність Вітні, яка була так названа, бо в 1957 р. саме американський математик Хасслер Вітні першим довів її в тому році [16].

Вона стосується зв'язку між величиною найкращого наближення неперервної на відрізку функції поліномами, степенем цих поліномів, які наближують функцію, та модулями неперервності цих функцій, в тому числі й старших порядків.

Формулювання звучить наступним чином: якщо f є неперервною на відрізку $[a,b]$ функцією, то

$$E_{k-1}(f)_{[a,b]} \leq W_k \omega_k \left(\frac{b-a}{k}; f; [a,b]\right),$$

де $E_{k-1}(f)_{[a,b]}$ – величина найкращого наближення функції f поліномами степеня не більше за $k-1$; а $\omega_k \left(\frac{b-a}{k}; f; [a,b]\right)$ – k-й модуль неперервності f на відрізку $[a,b]$ з максимально допустимою різницею $\frac{b-a}{k}$.

Тут наводити строге означення модуля неперервності не будемо, оскільки воно ще неодноразово буде дано в подальших розділах цієї дисертаційної роботи.

W_k у цій нерівності – це стала, яка залежить від k. $W(k)$ – це найменша така стала, для якої дана нерівність справедливою. $W(k)$ називають сталою Вітні і подальший прогрес у контексті цієї нерівності точився навколо значення цієї сталої – і якнайкращого до неї наближення.

Кінцева мета – встановити точне значення цієї сталої, але якщо це наразі неможливо, то, принаймні, максимально до цього точного значення наблизитися.

Спочатку були досліджені значення $W(k)$ для маленьких k ($k = 1{,}2$)– для яких отримані оцінки були очевидними або майже очевидними. Сам Вітні довів оцінки для константи у випадках $k = 3{,}4{,}5$. але найбільший інтерес представляють обмеження на константу Вітні у загальному випадку. Кілька наступних результатів щодо цього були отримані у вигляді оцінок типу O – тобто не конкретне числове значення, а факт того, що на нескінченності константа Вітні не перевищує той чи інший вираз. Зокрема, найсильніший із серії подібних результатів отримав P.Binev, який у 1985-у році [17] отримав, що

$$W(k) \leq O(k).$$

Згодом, у тому ж 1985-у Bl.Sendov довів абсолютну оцінку зверху для константи Вітні

$W(k) \leq 6$,

та висунув гіпотезу, що вона взагалі не перевищує 1 [18,19].

Остання гіпотеза досі не є ані спростованою, ані доведеною, а найкраща відома наразі абсолютна оцінка

$$W(k) \leq 2 \text{ для } k \leq 82000 \text{ та } W(k) \leq 2 + \frac{1}{e^2} \text{ для } k > 82000$$

була доведена Крякіним, Гілевичем та Шевчком у [20].

2.2. Формозберігаюче наближення (SPA)

Формозберігаюче наближення уже неодноразово згадувалось і полягає саме в наближенні зі збереженням певних «важливих аспектів», у даному випадку «форми». У [21] щодо цього сказано наступне: поняття «форма» відсилає до геометричної поведінки функції чи графіку функції, якою ми наближуємо, і зазвичай включає позитивність (знак), монотонність чи опуклість. Що цілком актуально для дослідження, проведеного у даній дисертаційній роботі.

Сучасна теорія формозберігаючого наближення (Shape Preserving Approximation, скорочено SPA) заснована в роботах Lorentz, Zeller та DeVore. Вони довели, що класичні оцінки Джексона зберігаються при наближенні монотонних функцій монотонними алгебраїчними многочленами. Також Lorentz і Zeller побудували контрприклад, що свідчить про те, що формозберігаюче наближення неможливо звести до наближення без обмежень. Newman вперше розглянув можливість наближення кусково-монотонних функцій кусково-монотонними алгебраїчними многочленами, які мають такі самі проміжки монотонності, що й функції, які вони наближують [22]. З того часу в результаті досліджень багатьох вчених побудована теорія формозберігаючого наближення неперервних на відрізку функцій алгебраїчними многочленами майже настільки ж повна, як і відповідна теорія наближення без обмежень.

Розроблені методи комонотонної та коопуклої інтерполяції як алгебраїчними поліномами, так і раціональними сплайнами [21].

Природнім поширенням цієї теорії була та є SPA періодичних функцій, а також SPA функцій комплексної змінної. SPA періодичних функцій значно складніша, ніж SPA неперіодичних функцій з багатьох причин, однією з основних є та обставина, що періодичні функції не можуть бути монотонними або опуклими, якщо вони не є сталими. Отже, побудова теорії мусить починатися одразу з дослідження кусково-монотонних або кусково-опуклих функцій, тобто без досвіду побудови теорії для "чисто" монотонних або опуклих функцій. Тим не менш, за останні 20-25 років відбулось суттєве просування цієї теорії, але, як не дивно, остаточні результати були отримані для кусково-опуклих (2-монотонних) та q-монотонних функцій, але не кусково-монотонних (1-монотонних).

Зокрема, М.Г.Плешаков та П.А.Попов у 2003-у році дослідили питання копозитивного наближення періодичних функцій [23].

При цьому, йдеться не лише про позитивні, а й про негативні результати. У [24] Г.Дзюбенко, В.Волошина та Л.Ющенко показали, що в оцінці похибки найкращого коопуклого наближення 2π-періодичної функції тригонометричним поліномами через норму різних порядків похідної неможливо позбутися залежності від набору точок $\{Y_s\}$, у яких вимагається зміна опуклості.

Що стосується комонотонного наближення, то, зокрема, це питання було досліджене у [25] Плешаковим та Дзюбенко та ними був отриманий результат

$$||f - T_n|| \leq c(s)\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

де T_n – тригонометричний поліном комонотонного наближення, $c(s)$ – константа, яка залежить лише від s (де $2s$ – кількість вузлів на періоді, у яких функція та поліном змінюють монотонність), ω_2 – другий модуль неперервності 2π-періодичної неперервної функції f, $n \geq N(Y_s)$.

У подальших розділах цієї дисертації будуть проведені дослідження, пов’язані з цим та іншими результатами.

Розділ 2
ЗАГАЛЬНІ ПЕРЕДУМОВИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

У вступі неодноразово зачіпалася тема наближення функцій поліномами та те, що це є найбільш стандартною та поширеною задачею в рамках теорії апроксимації.

Що є правдою, однак більш загальний опис задачі, яку розв'язує теорія апроксимації, звучить наступним чином: якщо є деякий «широкий» клас функцій і в ньому є багато «складних» функцій і невелика кількість «простих», то треба знайти таку «просту» функцію, яка буде не сильно відрізнятися від «складної», яка розглядається [14].

У якості простих залежно від ситуації виступають різні функції – поліноми, тригонометричні поліноми, сплайни, їхні комбінації тощо. Вибір поліномів, як зазначалось у вступі, тут пов'язано з багатьма чинниками, головний з яких можна описати так – простота для обчислень та міркувань.

Вибір інших об'єктів як інструмента наближення, здебільшого пов'язаний з додатковими обставинами та властивостями. Як, наприклад, періодичність функції – з огляду на яку подібні функції найзручніше наближувати тригонометричними поліномами, оскільки ті також є періодичними функціями, тобто зберігають цю важливу властивість вихідної функції.

Саме такий тип питань – наближення функції іншими функціями – і є об'єктом дослідження в цій дисертаційний роботі, оскільки це є центральним питанням того підрозділу математичного аналізу, якому присвячена ця робота в цілому.

Мотиваційна частина для різних отриманих результатів – точніше, для проведення дослідження саме конкретно щодо цього питання - була різною для різних випадків.

В одному з випадків це було те, що у вступі характеризувалось як «неприродність» раніше отриманих результатів.

«Неприродність» у цій ситуації полягала в тому, що оцінка в нерівності Вітні для поліномів Крякіна – тобто поліномів, які є похідними від тих поліномів, які інтерполюють первісну функції за рівновіддаленими вузлами, та які і забезпечують відому наразі оцінку в нерівності Вітні – у відомих доведеннях досягалась біля кінців відрізка. Під «досягається» тут мається на увазі наступне. Оцінка є рівномірною, а отже, за неї «відповідає» максимальне за модулем відхилення. І це максимальне за модулем відхилення досягається біля кінців відрізка.

Сам по собі цей факт ще міг виглядати відносно «природньо», однак у той же час оцінка всередині відрізка була набагато кращою порівняно з кінцями. Саме це стало тим фактором, який підштовхнув провести додаткові дослідження цього об'єкту та більш детально проаналізувати поведінку цих поліномів, які наближують функцію, всередині відрізка.

Сам аналіз у цьому випадку не був чимось абстрактним та мав конкретну мету в контексті подальшого використання. «Неприродність» отриманої наразі оцінки в нерівності Вітні дозволяє припускати, що її можна покращити – покращити за допомогою того, що наблизити не поліномом Крякіна, а якимось іншим, зокрема, можливо, трохи видозміненим поліномом Крякіна. Зокрема, цю видозміну полінома Крякіна цілком можна проводити за наступною ідеологією: «трохи» змінити поліном таким чином, щоб оцінка біля кінців відрізка покращилась, всередині відірзка – погіршилась, але загальна рівномірна таким чином покращилась. Отриманий надалі результат дозволяє зрозуміти, наскільки можна «погіршувати» цю оцінку всередині відрізка.

В інших випадках результати, представлені в цій дисертаційній роботі були отримані в підсумку спроб створити нові конструкції або удосконалити та застосувати відомі.

Спроба удосконалити та узагальнити була пов'язана з поточковою оцінкою наближення дійснозначних функцій на кривих у комплексній площині з додатковою умовою, що це наближення має бути знакозберігаючим – тобто змінювати знак, причому на такий самий, у тих же точках, що і функція, яку необхідно наблизити.

У відомому доведенні оцінка була отримана для функцій, які належать класу Lip α для деякого $0 < \alpha \leq 1$.

Мотивацією та фактором поштовху для дослідження в цьому напрямі стало наступне. Ця умова, яка вказана вище, щодо приналежності класу Lip α дійсно використовувалася впродовж доведення цього результату, однак усі такі місця виглядали таким чином, що використання потужного апарату квазіконформних відображень все дещо ускладнювало – і, відповідно, все можна спростити та обійтися без його використання. І, відповідно, таким чином розширити клас функцій, для яких справедлива отримана оцінка, на функції з довільним модулем неперервності чи, принаймні, зі слабшою умовою на нього порівняно з умовою Ліпшица – а умова Ліпшица є умовою на модуль неперервності функції - що в результаті й вдалося.

Два наступні результати після цього присвячені спробам отримати комонотонний аналог наближення тригонометричними поліномами для отриманих в інших роботах оцінок наближення алгебраїчними поліномами.

Були відомі результати, які оцінювали величину найкращого коопуклого наближення через різні порядки модуля неперервності та похідної функції, яку необхідно наблизити. Коопукле наближення є поняттям, аналогічним до комонотонного – це наближення, яке змінює опуклість, причому на таку саму, в тих же точках, що і функція, яку необхідно наблизити. Метою в даному випадку було отримати «кращу» оцінку для комонотонного наближення.

У всіх доведеннях щодо коопуклості, цілком зрозуміло, все будувалось навколо другої похідної та оцінок для неї. Тому однією з мотивацій почати робити дослідження в цьому напрямку було досить прямолінійне питання. Чи можна буде в усіх доведеннях узяти й замінити другу похідну на першу, коопуклість на комонотонність та зробити відповідні заміни в інших місцях – і так, щоб це все ще працювало?

Відповідь виявилась негативною і лише частково позитивною.

Деякі доведення дійсно переносились фактично дослівно з одного випадку на інший. Але в більшості випадків це так не працювало – «аналогічні» доведення не були правильними і довелось знаходити інші, принципово нові, а часто й принципово складніші та об'ємніші доведення, що підкреслює інтерес і цінність отриманих результатів.

Основною задачею була така: чи вдасться в оцінці позбутися від залежності від розташування вузлів, у яких функція та її наближення змінюють монотонність? Для коопуклого випадку така залежність є – і, ба більше, було показано, що позбутися від неї неможливо. Тобто, інакше кажучи, неможливо отримати оцінку, яка б працювала одночасно для довільного розташування цих вузлів. Ця залежність полягала в тому, що для кожного розташування твердження починало виконуватись із моменту, який залежить від цього розташування – і було показано, що в коопуклому наближенні неможливо зробити так, що для всіх розташувань цей момент був один. Тим не менш, для комонотонного наближення цю задачу вдалось розв'язати – чому присвячені останні два розділи.

Оскільки це математична робота, то всі методи є аналітичними та строгими, а всі твердження точними. Застосовувались нерівності, оцінки та алгебраїчні перетворення, методи математичного аналізу те теорії функцій.

Загалом, кожне з досліджень мало свою мотиваційну частину – і в результаті ці мотиваційні частини вдалося виправдати, отримавши бажані результати, які будуть викладені в наступних розділах цієї дисертаційної роботи.

Розділ 3
ПОТОЧКОВА ОЦІНКА ВІДХИЛЕННЯ ПОЛІНОМА КРЯКІНА ВІД НЕПЕРЕРВНОЇ НА ВІДРІЗКУ ФУНКЦІЇ

Отримано нові оцінки для алгебраїчних поліномів, які наближають неперервну на відрізку функцію, через модулі неперервності вищих порядків, а саме поточкові оцінки.

Вступ. Одним з основоположних елементів теорії наближення є нерівність Вітні. Вона стосується зв'язку між модулями неперервності вищих порядків функції на відрізку та величиною відхилення від неї підхожих алгебраїчних поліномів, зокрема, поліномів найкращого наближення, інтерполяційних та поліномів, які є похідною інтерполяційного многочлена за рівновіддаленими вузлами від первісної (надалі поліноми Крякіна). В усіх відомих доведеннях максимальне відхилення – і, власне, оцінка у нерівності Вітні - досягається біля кінців відрізка, і отже, всередині ця оцінка може бути набагато кращою.

Мета цього розділу – отримати поточкову оцінку величини відхилення поліномів Крякіна всередині відрізка, де ця оцінка набагато «краща» за відому рівномірну.

Також отримано деякі умови на функцію, за яких відому оцінку величини найкращого наближення можна покращити.

Постановка задачі та формулювання основного результату. Нехай C - простір неперервних функцій на відрізку $I := [0,1]$ зі рівномірною нормою

$$||f|| := \max_{\{x \in I\}} |f(x)|.$$

Для $k \in \mathbb{N}$ визначимо $k-$ту різницю функції f з кроком $h \geq 0$:

$$\Delta_h^k f(x) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\, C_k^j\, f(x+ih)\ .$$

$k-$ий модуль неперервності функції f в точці $1/k$ визначається наступним чином:

$$\omega_k(f, 1/k) := sup_{x, x+kh \in I} |\Delta_h^k f(x)|.$$

<u>Означення 1.</u> *Поліномом Крякіна* $Q_{k-1}(f, \cdot)$ для функції $f \in C[0;1]$ назвемо алгебраїчний поліном степеня $\leq k-1$, який є похідною інтерполяційного многочлена Лагранжа за рівновіддаленими вузлами $\frac{i}{k}$, де $i = 0,1..k$ від первісної F функції f; інакше кажучи, такий многочлен $Q_{k-1}(f, \cdot)$ степеня $\leq k-1$, що

$$\int_0^{i/k} (f(t) - Q_{k-1}(f,t))\, dt = 0, i = 0,1 \ldots k.$$

З результатів [20] відомо, що

$$||f - Q_{k-1}|| \leq W(k)\omega_k\left(f, \frac{1}{k}\right)$$

де $\widetilde{W}(k) = 2$ при $k \leq 82000$ $\ \widetilde{W}(k) = 2 + exp(-2)$ при $k > 82000$.

Однак, як було зазначено вище, така оцінка отримується на кінцях відрізка I - тобто на відрізках $\left[0; \frac{1}{k}\right]$ і $\left[\frac{k-1}{k}; 1\right]$.

Тому постає питання, чи можна цю оцінку покращити всередині відрізка, тобто для x $\in [\frac{1}{k}; \frac{k-1}{k}]$ отримати нерівність:

$$|f(x) - Q_{k-1}(f,x)| \leq p(x)\omega_k(f,\tfrac{1}{k});$$

де функція p суттєво менша 2 для вказаних точок x.

Основним результатом цього розділу є наступна теорема.

Теорема 3.1. Для кожної неперервної на відрізку $[0;1]$ функції f та для кожних m і k таких, що $0 < m < k, k \geq 13$, виконується нерівність:

$$|f(x) - Q_{k-1}(x)| \leq c\,\frac{m\ln k}{C_k^m}\,\omega_k(f,\tfrac{1}{k}),\ \text{якщо } x \in [\tfrac{m}{k},\tfrac{m+1}{k}] \text{ і } m < k/2,$$

та

$$|f(x) - Q_{k-1}(x)\ | \leq c\,\frac{(k-m-1)\ln k}{C_k^m}\,\omega_k(f,\tfrac{1}{k}), \text{якщо } x \in [\tfrac{m}{k},\tfrac{m+1}{k}] \text{ і } m \geq k/2,$$

де $c = const \leq 4$, а Q_{k-1} - поліном Крякіна степеня $\leq k-1$ для функції f.

Доведення теореми 3.1. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $\omega_k\left(f,\frac{1}{k}\right) = 1$, Доведемо теорему для випадку $m < k/2$ - з міркувань симетрії з нього буде випливати і доведення для другого випадку. Нехай $g := f - Q_{k-1}(f,\cdot)$. Для доведення теореми нам знадобиться наступна лема:

<u>**Лема 3.2.** [20, Lemma 1.1]</u> Якщо $\omega_k(f,1/k) \leq 1$ і $m < k/2$, $x \in \left[\frac{m}{k},\frac{m+1}{k}\right]$, $\delta = \frac{1-x}{k-m}$, то:

$$C_k^m|g(x)| \leq 1 + (k\delta)^k - (-1)^{k-m}C_k^m A_k'(x) + \frac{2}{\delta}\sum_{j=0}^{m-1} C_k^j\,\frac{1}{m-j}\,|A_k(x+\delta(j-m))|, \qquad (3.1)$$

де многочлен $A_k(x)$ задається наступним чином:

$$A_k(x):=\frac{k^k}{k!}x\left(x-\frac{1}{k}\right)\left(x-\frac{2}{k}\right)\dots\left(x-\frac{k}{k}\right).$$

<u>Доведення теореми:</u> Для доведення теореми 1 треба оцінити праву частину (3.1).

Оскільки $k\delta=\frac{(1-x)k}{k-m}\le\frac{\left(1-\frac{k}{m}\right)k}{k-m}=1$, то

$$1+(k\delta)^k\le 2 \tag{3.2}$$

Далі, враховуючи, що $x\in\left[\frac{m}{k},\frac{m+1}{k}\right]$, то при всіх $0\le i\le m$

$$-(-1)^{k-m}x\left(x-\frac{1}{k}\right)\dots\left(x-\frac{i-1}{k}\right)\left(x-\frac{i+1}{k}\right)\dots\left(x-\frac{k}{k}\right)\le 0,$$

тому

$$-(-1)^{k-m}A_k'(x)$$

$$=-(-1)^{k-m}\sum_{i=0}^{k}\frac{k^k}{k!}x\left(x-\frac{1}{k}\right)\dots\left(x-\frac{i-1}{k}\right)\left(x-\frac{i+1}{k}\right)\dots\left(x-\frac{k}{k}\right)$$

$$\le-(-1)^{k-m}\sum_{i=m+1}^{k}\frac{k^k}{k!}x\left(x-\frac{1}{k}\right)\dots\left(x-\frac{i-1}{k}\right)\left(x-\frac{i+1}{k}\right)\dots\left(x-\frac{k}{k}\right)$$

$$=\sum_{i=m+1}^{k}\frac{k^k}{k!}\left[x\left(x-\frac{1}{k}\right)\dots\left(x-\frac{m}{k}\right)\right]\left|\left(x-\frac{m+1}{k}\right)..\left(x-\frac{i-1}{k}\right)\left(x-\frac{i+1}{k}\right)\dots(x-\frac{k}{k})\right|$$

$$\le\sum_{i=m+1}^{k}\frac{k^k}{k!}\cdot\frac{(m+1)!}{k^{m+1}}\left|\left(x-\frac{m+1}{k}\right)..\left(x-\frac{i-1}{k}\right)\left(x-\frac{i+1}{k}\right)\dots(x-\frac{k}{k})\right|$$

$$\le\sum_{i=m+1}^{k}\frac{k^k}{k!}\cdot\frac{(m+1)!}{k^{m+1}}\cdot\frac{(k-m)!}{k^{k-m-1}\cdot(k-i)}=$$

$$= \frac{(m+1)(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-m})}{C_k^m} \le \frac{(m+1)(1+\ln(k-m))}{C_k^m}. \qquad (3.3)$$

У переходах ми використали, що $\frac{m}{k} \le x \le \frac{m+1}{k}$.

Нарешті, для оцінки суми в (3.1) при кожному j оцінимо $\left|A_k\left(x+\delta(j-m)\right)\right|$. Для цього зауважимо, що при $x \in [m/k, m+1/k]$ вираз $(x+\delta(j-m))$ належить проміжку $[j/k,(j+2)/k]$. З урахуванням цього в добутку $|A_k(x+\delta(j-m))| = \frac{k^k}{k!}\prod_{i=o}^{k}(x+\delta(j-m)-\frac{i}{k})$ окремо оцінимо добуток перших $j+1$ множників та $k-j$ тих, що залишилися. Оцінювати будемо аналогічно до (3.3).

Помітимо, що можна вважати $x \in [j/k,(j+1)/k]$, оскільки

$m < \frac{k}{2}$, а $A_k(x) \le A_k(x-\frac{1}{k})$ при $x \le \frac{1}{2}$. В результаті отримаємо:

$$\frac{k^k}{k!}\prod_{i=o}^{k}(x+\delta(j-m)-\frac{i}{k}) \le \frac{k^k}{k!}\cdot\frac{(j+1)!}{k^{j+1}}\cdot\frac{(k-j)!}{k^{k-j}} = \frac{j+1}{kC_k^j}.$$

Таким чином, отримаємо:

$$\frac{2}{\delta}\sum_{j=0}^{m-1} C_k^j \frac{1}{m-j}|A_k(x+\delta(j-m))| \le \frac{2}{\delta}\sum_{j=0}^{m-1} C_k^j \frac{1}{m-j}\cdot\frac{j+1}{kC_k^j} = \frac{2}{\delta k}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{j+1}{m-j} \le$$

$$\frac{4}{C_k^m}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{m+1}{m-j}-1\right) \le \frac{3}{C_k^m}((m+1)(1+\ln m)-m) \qquad (3.4)$$

при $k \ge 6$.

В результаті з (3.1)-(3.4) отримуємо:

$$|g(x)| \le \frac{1}{C_k^m}\left(1+1+(m+1)\left(1+\ln(k-m)\right)+((m+1)(1+\ln m)-m)\right) \le$$

$$\frac{1}{C_k^m}(m+1)(1+\ln(k-m)+3(1+\ln m)) \le \frac{1}{C_k^m}(m+1)(1+4\ln k-$$

$$3\ln 2) \le \frac{4m\ln k}{C_k^m},$$

що і потрібно було довести.

Останню нерівність можна довести за індукцією, оскільки при $m = 1$вона виконується, бо $k \geq 13$ а при збільшенні m на одиницю, ліва частина збільшується менше, ніж права.

Зауваження 3.1. Для достатньо великих k константу 4 з останньої нерівності можна «покращити» до константи, приблизно рівній три.

Зауваження 3.2. За певних умов на функцію f можна «покращити» і рівномірну оцінку полінома найкращого наближення на відрізку. Якщо максимальні абсолютні величини відхилень на кінцевій ділянці не рівні між собою, то шляхом додавання до многочлена константи або лінійної функції, можна досягти, що максимальне відхилення полінома від функції на всьому відрізку зменшиться. Рівномірна оцінка покращиться тим більше, чим більша різниця вищезгаданих абсолютних величин.

Висновки. Отримана поточкова оцінка величини відхилення поліномів Крякіна всередині відрізка, де ця оцінка набагато краща за відому рівномірну. Основний результат цього розділу дає підстави припускати, що оцінку в нерівності Вітні можна покращити шляхом зміни полінома – щоб всередині відрізка оцінка «погіршилась», а на кінцях «покращилась», і тим самим «покращилась» рівномірна оцінка. Тобто наблизитись до розв’язання задачі Сендова [18], [19] про найкращу сталу в нерівності Вітні.

Розділ 4
Поточкова оцінка знакозберігаючого наближення на кривих у комплексній площині

Анотація

У 2014-у році В. Андрієвський довів, що якщо задана на гладкій жордановій кривій (і яка задовольняє умову Діні) дійснозначна функція $f \in \operatorname{Lip} \alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$, змінює знак скінченне число разів, то її можна наблизити гармонічним поліномом, який змінює свій знак на кривій в тих же точках, що і f, і при цьому похибка наближення за порядком така ж, як і класична похибка Дзядика поточкового наближення. Користюучись схемою доведення В.Андрієвського, ми узагальнюємо цей результат на випадок довільного модуля неперервності $\omega(f, t)$, який задовольняє умову $\gamma\omega(f, 2t) \geq \omega(f, t)$, де $\gamma = \text{const} < 1$.

Примітка. У публікації статті, яка відповідає цьому розділу дисертації, присутня друкарська помилка (з вини автора), а саме: сказано, що результат Андрієвського отримано для $f \in \operatorname{Lip} \alpha,\ 0 < \alpha < 1$, *але насправді його робота покриває також випадок* $\alpha = 1$.

4.1. Позначення та формулювання основного результату

Нехай L - жорданова гладка крива на комплексній площині, з кінцями z_0 та z^0. Для точок $\zeta_1, \zeta_2 \in L$ через $L(\zeta_1, \zeta_2)$ будемо позначати дугу кривої з кінцями в точках ζ_1 і ζ_2. Нехай $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_s\}$, $s \in \mathbb{N}$, - набір попарно різних точок на $L/\{z_0, z^0\}$, пронумерованих у порядку "від z_0 до z^0", тобто

$$z_j \in L(z_{j-1}, z_{j+1}), \qquad j = 1,2, \ldots, s,$$

де $z_{s+1} := z^0$.

Позначимо через $\Delta^{(0)}(Z)$ - множину дійснозначних неперервних на L функцій таких, що $(-1)^j f(z) \geq 0,\ z \in L(z_j, z_{j+1}),\ j = 0,1,\ldots,s.$

Для $z \in L$ та $\delta > 0$ позначимо $\rho_\delta(z) := \delta\sqrt{\delta^2 + |z - z_0||z - z^0|}$.

Також будемо писати, що $L \in \mathcal{D}$, якщо крива L задовольняє умову Діні, тобто, що $\|\beta(\zeta_2) - \beta(\zeta_1)\| < h(|\zeta_2 - \zeta_1|)$, де $\beta(\zeta)$ - величина кута нахилу дотичної до кривої L в точці ζ, а h- зростаюча функція така, що $\int_0^1 x^{-1} h(x)\, dx < +\infty$.

Позначимо також через $\mathbb{P}_n$ множину алгербраїчних поліномів степеня $\leq n$, а через $\mathbb{H}_n := \{\Re\, p_n,\ p_n \in \mathbb{P}_n\}$ - множину гармонічних поліномів степеня $\leq n$.

Будемо писати, що $f \in \Omega^{(\gamma)}$, де $0 < \gamma = \text{const} < 1$, якщо f - неперервна функція на L та для її модуля неперервності ω справедлива нерівність

$$\gamma\omega(f, 2t) \geq \omega(f, t) \tag{4.1}$$

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 4.1. Для кожних кривої $L \in \mathcal{D}$, числа $\gamma \in (0,1)$ та набору Z точок $z_j \in L$ існують сталі $N = N(L, Z, \gamma)$ та $C = C(L, Z, \gamma)$ такі, що для довільних функції $f \in \Delta^{(0)} \cap \Omega^{(\gamma)}$ та $n > N$ існує поліном $h_n \in \mathbb{H}_n \cap \Delta^{(0)}$ такий, що

$$|f(z) - h_n(z)| \leq C\omega\left(\rho_{\frac{1}{n}}(z)\right), \qquad z \in L,$$

де $\omega(t) := \omega(f, t)$ - модуль неперервності функції f на L.

Теорема 4.1 узагальнює результат Андрієвського [26], отриманий раніше для випадку $\omega(t) \leq t^\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$. Ми дотримуємось схеми доведення Андрівського [26], дещо спростивши її в пункті 4.3.

Надалі через $c, c_1, c_2, \ldots$ будемо позначати сталі, які можуть залежати лише від Z та L. Будемо писати, що $a \preccurlyeq b$, якщо $a \le cb$, також $a \asymp b$, якщо одночасно $a \preccurlyeq b$ і $b \preccurlyeq a$.

4.2. Побудова функції f_δ.

Позначимо $Z^* := Z \cup \{z_0, z^0\} = \{z_j\}_{j=0}^{s+1}$. Оскільки L - гладка крива, то існує число

$$\delta_0 < \frac{1}{2}\min_{i\neq j}|z_i - z_j|$$

таке, що для всіх $j = 0,1,\ldots,s+1$ і точок $z \in L$ таких, що $|z - z_j| \le \delta_0$, маємо

$$|\beta(z) - \beta(z_j)| \le \frac{\pi}{16}. \quad (4.2)$$

Для кожних $j = 1,2,\ldots,s$ та $\delta \in (0,\delta_0)$ позначимо через $z_j' := z_j'(\delta)$ точку $z_j' \in L(z_{j-1}, z_j)$ таку, що $|z_j - z_j'| = \delta$; через $z_j'' := z_j''(\delta)$ точку $z_j'' \in L(z_j, z_{j+1})$ таку, що $|z_j - z_j''| = \delta,\ J_j = J_j(\delta) = L(z_j', z_j'')$, та

$$l_j(z) := l_j(z,\delta) = \frac{(z - z_j)}{z_j' - z_j''}\left(\frac{z - z_j'}{z_j'' - z_j} + \frac{z - z_j''}{z_j' - z_j}\right).$$

Позначимо, для $\delta \in (0,\delta_0)$,

$$f_\delta(z) \coloneqq$$
$$= \begin{cases} (-1)^{j+1}\omega(\delta)l_j(z), & \text{якщо } z \in J_j, \quad j = 1,2,\ldots,s; \\ (-1)^j \max\big(|f(z)|, \omega(\delta)\big), & \text{якщо } z \in L(z_j'', z_{j+1}'), \quad j = 1,2,\ldots,s-1; \\ \max((f(z), \omega(\frac{\delta\rho_\delta(z)}{\rho_\delta(z_1')}), & \text{якщо } z \in L(z_0, z_1'); \\ (-1)^s \max\left(f(z), \omega\left(\frac{\delta\rho_\delta(z)}{\rho_\delta(z_s'')}\right)\right), & \text{якщо } z \in L(z_s'', z_{s+1}). \end{cases}$$

Лема 4.2. Справедливі наступні нерівності:

$$|f(z) - f_\delta(z)| \preccurlyeq \omega\big(\rho_\delta(z)\big),\ z \in L; \tag{4.3}$$

$$(-1)^{j+1}\Re\, f_\delta(z) \succcurlyeq \frac{\omega(\delta)}{\delta}\big|z - z_j\big|,\ z \in (z_j', z_j); \tag{4.4}$$

$$(-1)^{j}\Re\, f_\delta(z) \succcurlyeq \frac{\omega(\delta)}{\delta}\big|z - z_j\big|,\ z \in (z_j, z_j''), \tag{4.5}$$

$$|f_\delta(\zeta) - f_\delta(z)| \preccurlyeq \omega\ (|\zeta - z|),\ \zeta, z \in L. \tag{4.6}$$

Доведення. Зауважимо, що $\rho_\delta(z) \asymp \delta$, якщо $|z - z_0| > \delta_0$ і $|z - z^0| > \delta_0$. Спочатку перевіримо нерівність (4.3). Для $z \in J_j$ маємо:

$$|f(z) - f_\delta(z)| \le |f(z)| + |f_\delta(z)| = \big|f(z) - f\big(z_j\big)\big| + \omega(\delta)\big|l_j(z)\big| \preccurlyeq \omega(\delta)$$
$$\asymp \omega(\rho_\delta(z)).$$

Для інших точок кривої єдиним нетривіальним випадком є той, коли $|f(z)| < |f_\delta(z)|$. Однак в цьому випадку $|f_\delta(z)| \preccurlyeq \omega(\rho_\delta(z))$, отже $|f(z) - f_\delta(z)| \le 2|f_\delta(z)| \preccurlyeq \omega(\rho_\delta(z))$.

Нерівності (4.4) та (4.5) випливають з умови (4.2), яка спричиняє нерівності

$$\Re\, l_j(z) \succcurlyeq \frac{\big|z - z_j\big|}{\delta}, \qquad \text{якщо}\ \ z \in L\big(z_j', z_j\big),$$

$$\text{та}\quad -\Re\, l_j(z) \succcurlyeq \frac{\big|z - z_j\big|}{\delta}, \text{якщо}\ \ z \in L(z_j, z_j'').$$

Залишилось перевірити нерівність (4.6). Внаслідок адитивності модуля неперервності зрозуміло, що нерівність (4.6) достатньо довести у випадку, коли обидві точки z, ζ належать одному з проміжків: $J_j, L(z_j'', z_{j+1}), L(z_0, z_1')$ або $L(z_s'', z_{s+1})$.

Отже, нехай $z,\zeta \in J_j$, тоді $\left|l_j(\zeta)-l_j(z)\right| \preccurlyeq \frac{|\zeta-z|}{\delta}$, звідки

$$|f_\delta(\zeta)-f_\delta(z)| \preccurlyeq \omega(\delta)\frac{|\zeta-z|}{\delta} \preccurlyeq \omega(|\zeta-z|).$$

Розглянемо тепер випадок, коли $z,\zeta \in L(z_j'', z_{j+1}')$ для деякого $j=1,2,\ldots,s-1$. Єдиним нетривіальним випадком є ситуація, коли $(|f(z)|-\omega(\delta))(|f(\zeta)|-\omega(\delta))<0$. Без обмеження загальності, вважатимемо, що $|f(z)|<\omega(\delta)<|f(\zeta)|$. Тоді

$$|f_\delta(\zeta)-f_\delta(z)| = |f_\delta(\zeta)|-\omega(\delta) < |f(\zeta)-f(z)| \leq \omega(|\zeta-z|).$$

Нехай тепер $z,\zeta \in L(z_0, z_1')$. Єдиний нетривіальний випадок у такому разі - коли $f-f_\delta$ є від'ємним числом хоча б в одній з точок z чи ζ. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $f(z)<f_\delta(z)=\omega(\frac{\delta\rho_\delta(z)}{\rho_\delta(z_1')})$.

Тоді для $f_\delta(\zeta)$ є дві можливості. Якщо і $f(\zeta)<f_\delta(\zeta)=\omega(\frac{\delta\rho_\delta(\zeta)}{\rho_\delta(z_1')})$, то

$$|f_\delta(\zeta)-f_\delta(z)| = \left|\omega\left(\frac{\delta\rho_\delta(\zeta)}{\rho_\delta(z_1')}\right)-\omega\left(\frac{\delta\rho_\delta(z)}{\rho_\delta(z_1')}\right)\right|$$

$$\leq \omega\left(\frac{\delta|\rho_\delta(\zeta)-\rho_\delta(z)|}{\rho_\delta(z_1')}\right) \preccurlyeq \omega\left(\frac{\delta|\zeta-z|}{\rho_\delta(z_1')}\right) \preccurlyeq \omega(|\zeta-z|),$$

де ми використали нерівність

$$|\rho_\delta(\zeta)-\rho_\delta(z)| \leq \frac{1}{2}\left||\zeta-z_0|\left|\zeta-z^0\right|-|z-z_0|\right|\left|z-z^0\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}|\zeta-z||\zeta+z-(z^0+z_0)| \preccurlyeq |\zeta-z|$$

У випадку ж, коли $f_\delta(\zeta)=f(\zeta)>\omega(\frac{\delta\rho_\delta(\zeta)}{\rho_\delta(z_1')})$, маємо:

$$f_\delta(\zeta)-f_\delta(z) \leq f(\zeta)-f(z) \leq \omega(|\zeta-z|)$$

та

$$f_\delta(z) - f_\delta(\zeta) \le \omega\left(\frac{\delta\rho_\delta(z)}{\rho_\delta(z_1')}\right) - \omega\left(\frac{\delta\rho_\delta(\zeta)}{\rho_\delta(z_1')}\right) \preccurlyeq$$

$$\omega(|\zeta - z|),$$

тобто $|f_\delta(\zeta) - f_\delta(z)| \preccurlyeq \omega(|\zeta - z|)$.

Доведення випадку $z, \zeta \in L(z_s'', z_{s+1})$ є аналогічним. Лема доведена.□

4.3. Наближення функції f_δ.

Умова $\int_0^1 x^{-1}h(x)\ dx < +\infty$ означає, що крива L належить класу множин B_k, який означено на сторінці 392 із [27], див. також сторінку 178 із [28]. А отже, для кривої L справедлива теорема 9.7.1 із [27], див. також теорему 21.1. із [28], частинним випадком якої є наступна лема.

Лема 4.3. Нехай $r = 6,\ l = 5$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують многочленні ядра Дзядика вигляду

$$D_n^+(\zeta, z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^+(\zeta) z^j, \qquad D_n^-(\zeta, z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^-(\zeta) z^j \qquad \text{та} \qquad D_n := D_n^+ - D_n^-$$

де $\alpha_j^\pm$ - неперервні на L функції, такі, що

$$\int_L D_n(\zeta, z)\ d\zeta = 1; \tag{4.7}$$

для всіх $z \in L$:

$$\left|\int_L (\zeta - z) D_n(\zeta, z)\ d\zeta\right| \preccurlyeq \rho_{\frac{1}{n}}^{l(z)}, \quad \left|\int_L (\zeta - z) \frac{\partial D_n(\zeta, z)}{\partial z} d\zeta - 1\right| \preccurlyeq \rho_{\frac{1}{n}}^{l(z)}; \tag{4.8}$$

$$\left|\int_L (\zeta - z)^2 D_n(\zeta, z)\, d\zeta\right| \preccurlyeq \rho_{\frac{1}{n}}^{l(z)}, \quad \left|\int_L (\zeta - z)^2 \frac{\partial D_n(\zeta, z)}{\partial z} d\zeta\right| \preccurlyeq \rho_{\frac{1}{n}}^{l(z)}. \tag{4.9}$$

Для всіх $\zeta, z \in L$:

$$\left|1 - (\zeta - z) D_n^{\pm}(\zeta, z)\right| \preccurlyeq \frac{\rho_{\frac{1}{n}}^{r-1}(z)}{|\zeta - z|^{r-1}}, \quad \left|D_n^{\pm}(\zeta, z)\right| \preccurlyeq \frac{1}{\rho_{\frac{1}{n}}(z)}, \tag{4.10}$$

отже,

$$D_n(\zeta, z)| \preccurlyeq \frac{\rho_{\frac{1}{n}}^{r-1}(z)}{\left(|\zeta - z| + \rho_{\frac{1}{n}}(z)\right)^r}, \quad \zeta, z \in L; \tag{4.11}$$

також

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} D_n(\zeta, z)\right| \preccurlyeq \frac{\rho_{\frac{1}{n}}^{r-2}(z)}{\left(|\zeta - z| + \rho_{\frac{1}{n}}(z)\right)^r}, \quad \zeta, z \in L. \tag{4.12}$$

Позначимо

$$t_n(z) = \int_L f_\delta(\zeta) D_n(\zeta, z)\, d\zeta.$$

Лема 4.4. Нехай δ та n такі, що $\max\limits_{z \in L} \rho_{\frac{1}{n}}(z) < \delta < \delta_0$. Тоді:

$$|f_\delta(z) - t_n(z)| \preccurlyeq \omega\left(\rho_{\frac{1}{n}}(z)\right), \quad z \in L; \tag{4.13}$$

$$|f_\delta(z) - t_n(z)| \preccurlyeq \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{(n\delta)^2}, \quad z \in \cup_{j=1}^{s} \tilde{J}_j; \tag{4.14}$$

$$|f_\delta'(z) - t_n'(z)| \preccurlyeq \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3 \delta^4}, \quad z \in \cup_{j=1}^{s} \tilde{J}_j, \tag{4.15}$$

де $\tilde{J}_j := \tilde{J}_j(Z, \delta) = \left\{z \in L \middle| |z - z_j| \le \frac{\delta}{10}\right\}, \ j = 1, 2, \ldots, s.$

Доведення. Для зручності будемо писати ρ замість $\rho_{\frac{1}{n}}(z)$, і зауважимо, що $\rho_{\frac{1}{n}}(z) \asymp \frac{1}{n}$ та, відповідно, $\omega\left(\rho_{\frac{1}{n}}(z)\right) \asymp \omega(\frac{1}{n})$, якщо $z \in L(z_1', z_s'')$. Як добре відомо, нерівність (4.13) негайно випливає з нерівності (4.6). Справді, користуючись (4.7) та (4.11), отримаємо

$$|t_n(z) - f_\delta(z)| = \left|\int_L \big(f_\delta(\zeta) - f_\delta(z)\big) D_n(\zeta, z)\, d\zeta\right| \preccurlyeq$$

$$\int_L \omega(|\zeta - z|) \frac{\rho^{r-1}}{(|\zeta - z| + \rho)^r} |d\zeta| =$$

$$\left(\int_{\zeta \in L: |z-\zeta| \le \rho} + \int_{\zeta \in L: |z-\zeta| \ge \rho}\right)$$

$$\omega(|\zeta - z|) \frac{\rho^{r-1}}{(|\zeta - z| + \rho)^r} |d\zeta| \preccurlyeq$$

$$\omega(\rho) + \int_{\zeta \in L: |z-\zeta| \ge \rho} \frac{\omega(\rho)|\zeta - z|}{\rho} \frac{\rho^{r-1}}{|\zeta - z|^r} |d\zeta|$$

$$= \omega(\rho) + \omega(\rho)\rho^{r-2} \int_{\zeta \in L: |z-\zeta| \ge \rho} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{r-1}} \preccurlyeq \omega(\rho).$$

Далі, нехай $z \in J_j$, позначимо $\mathcal{L}(\zeta) := (-1)^{j+1}\omega(\delta) l_j(\zeta)$, тоді $f_\delta(z) = \mathcal{L}(z)$.

Тепер доведемо (4.14).

Маємо

$$t_n(z) - f_\delta(z) = \int_L f_\delta(\zeta) D_n(\zeta, z)\ d\zeta - f_\delta(z) =$$

$$\int_L \big(f_\delta(\zeta) - \mathcal{L}(\zeta)\big) D_n(\zeta, z)\, d\zeta + \left(\int_L \mathcal{L}(\zeta) D_n(\zeta, z)\, d\zeta - f_\delta(z)\right) =:$$

$$\int_{L\setminus J_j} \big(f_\delta(\zeta) - (\mathcal{L})(\zeta)\big) D_n(\zeta, z)\, d\zeta + I_1(z) =$$

$$\int_{L\setminus J_j} \big(f_\delta(\zeta) - f_\delta(z)\big) D_n(\zeta, z)\, d\zeta + \int_{L\setminus J_j} (\mathcal{L}(z) - \mathcal{L})(\zeta))\, D_n(\zeta, z)\, d\zeta + I_1(z)$$

$$=: I_3(z) + I_2(z) + I_1(z).$$

Тепер інтеграл $I_3(z)$ оцінимо так само, як при доведенні нерівності (4.13), і отримаємо

$$|I_3| \preccurlyeq \int_{L\setminus J_j} \omega(|\zeta - z|) \frac{\rho^{r-1}}{(|\zeta - z| + \rho)^r} |d\zeta| \preccurlyeq \omega(\rho)\rho^{r-2} \int_{\zeta \in L:\, |\zeta - z| \geq \frac{9}{10}\delta} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{r-1}}$$

$$\preccurlyeq \frac{\omega(\rho)\rho^{r-2}}{\delta^{r-2}}.$$

Далі, користуючись нерівністю

$$\big|l_j(\zeta) - l_j(z)\big| \preccurlyeq \tfrac{|\zeta - z|^2}{\delta^2},\ \zeta \in L \setminus J_j, \tag{4.16}$$

знаходимо

$$|I_2| \preccurlyeq \frac{\omega(\delta)\rho^{r-1}}{\delta^2} \int_{L\setminus J_j} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{r-2}} \preccurlyeq \frac{\omega(\delta)\rho^{r-1}}{\delta^{r-1}} \preccurlyeq \frac{\omega(\rho)\rho^{r-2}}{\delta^{r-2}}.$$

А з (4.8) і (4.9) випливає, що

$$\left| \int_L l_j(\zeta) D_n(\zeta, z)\, d\zeta - l_j(z) \right| \preccurlyeq \frac{\rho^l}{\delta^2},$$

звідки

$$|I_1(z)| \preccurlyeq \frac{\omega(\delta)\rho^l}{\delta^2} \leq \frac{\omega(\rho)\rho^{l-1}}{\delta} \preccurlyeq \frac{\omega(\rho)\rho^{l-1}}{\delta^{l-1}}.$$

Склавши оцінки для I_1, I_2 та I_3 та врахувавши, що $\rho \preccurlyeq \frac{1}{n}$, отримуємо (4.14).

Аналогічно доведемо (4.15). Позначимо $D_n'(\zeta,z)=\frac{\partial}{\partial z}D_n(\zeta,z)$.

Маємо

$$t_n'(z)-f_\delta'(z)=\int_L f_\delta(\zeta)D_n'(\zeta,z)\,d\zeta-f_\delta'(z)=$$

$$\int_L\big(f_\delta(\zeta)-\mathcal{L}(\zeta)\big)D_n'(\zeta,z)\,d\zeta+\left(\int_L\mathcal{L}(\zeta)D_n'(\zeta,z)\,d\zeta-f_\delta'(z)\right)=:$$

$$\int_{L\setminus J_j}\big(f_\delta(\zeta)-\mathcal{L}(\zeta)\big)D_n'(\zeta,z)\,d\zeta+I_1^*(z)$$

$$=\int_{L\setminus J_j}\big(f_\delta(\zeta)-f_\delta(z)\big)D_n'(\zeta,z)\,d\zeta+\int_{L\setminus J_j}\mathcal{L}(z)-\mathcal{L}(\zeta))D_n'(\zeta,z)\;d\zeta+I_1^*(z)=:$$

$$I_3^*(z)+I_2^*(z)+I_1^*(z).$$

Використовуючи (4.12) замість (4.11), отримаємо

$$|I_3^*|\leqslant\int_{L\setminus J_j}\omega(|\zeta-z|)\frac{\rho^{r-2}}{(|\zeta-z|+\rho)^r}|d\zeta|\leqslant\omega(\rho)\rho^{r-3}\int_{\zeta\in L:\,|\zeta-z|\geq\frac{9}{10}\delta}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{r-1}}$$

$$\leqslant\frac{\omega(\rho)\rho^{r-3}}{\delta^{r-2}}.$$

Ще раз скориставшись (4.16), знаходимо

$$|I_2^*|\leqslant\frac{\omega(\delta)\rho^{r-2}}{\delta^2}\int_{L\setminus J_j}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^{r-2}}\leqslant\frac{\omega(\delta)\rho^{r-2}}{\delta^{r-1}}\leqslant\frac{\omega(\rho)\rho^{r-3}}{\delta^{r-2}}.$$

Нарешті, з (4.8) і (4.9) знову випливає, що

$$\left|\int_L l_j(\zeta)D_n'(\zeta,z)\,d\zeta-l_j'(z)\right|\leqslant\frac{\rho^l}{\delta^2},$$

звідки

$$|I_1^*(z)| \preccurlyeq \frac{\omega(\delta)\rho^l}{\delta^2} \leq \frac{\omega(\rho)\rho^{l-1}}{\delta} \preccurlyeq \frac{\omega(\rho)\rho^{l-1}}{\delta^l}.$$

Аналогічно, додавши отримані оцінки для I_1^*, I_2^* та I_3^* отримуємо (4.15).

4.4 Доведення основного результату

З [26] відомо, що існують поліноми $V_j,\ j = 1,2,\dots,s$ степеня $\frac{1}{\delta}$ такі, що

$$V_j(z_j) = 1; \tag{4.17}$$

$$\left|V_j(z)\right| \preccurlyeq \left(\frac{\rho_\delta(z)}{|z-z_j|+\rho_\delta(z)}\right)^3 \quad z \in L; \tag{4.18}$$

та

$$\left|V_j'(z)\right| \preccurlyeq \frac{1}{\delta}, \quad z \in \tilde{J}_j, j = 1,2,\dots s, \tag{4.19}$$

і що шуканим поліномом є поліном h_n, означений нижче для відповідного вибору δ:

$$q_n(z) := (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_j);$$

$$u_n(z) := \sum_{j=1}^{s} \frac{q(z)}{(z - z_j)q'(z_j)} V_j(z) t_n(z_j);$$

$$p_n(z) := t_n(z) - u_n(z);\ \ h_n(z) := \Re p_n(z).$$

Справді, з (4.14) випливає, що $\left|t_n(z_j)\right| \leq \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{(n\delta)^2}$. Тому

$$|u_n(z)| \preccurlyeq \frac{1}{(n\delta)^2} \omega\left(\frac{1}{n}\right),\ z \in L, \tag{4.20}$$

і

$$|u_n(z)| \leqslant \frac{1}{(n\delta)^2}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\rho_\delta^3(z) \leqslant \frac{\omega\left(\rho_{\frac{1}{n}}(z)\right)}{n^3\delta^2\rho_{\frac{1}{n}}(z)}\rho_\delta^3(z)$$

$$\leqslant \frac{\omega\left(\rho_{\frac{1}{n}}(z)\right)}{n}, \; z \in L \setminus (\cup_{i=1}^{s} \tilde{J}_j). \tag{4.21}$$

Тут використано нерівність:

$$\frac{\rho_\delta(z)}{\rho_{\frac{1}{n}}(z)} \leqslant \frac{(\delta^2)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = (n\delta)^2. \tag{4.22}$$

Тепер, якщо $z \in \tilde{J}_j$, то

$$\left|f_\delta'(z) - t_n'(z) + \left(\frac{q(z)}{(z-z_j)q'(z_j)}V_j(z)t_n(z_j)\right)'\right| \leqslant \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3\delta^4} + \frac{1}{\delta}\left|t_n(z_j)\right|$$

$$\leqslant \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{(n^3\delta^4)} + \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2\delta^3} \leqslant \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2\delta^3}, \tag{4.23}$$

і, при $k \neq j$,

$$\left|\frac{q(z)}{(z-z_k)q'(z_k)}V_k(z)t_n(z_k)\right| \leqslant \left|z-z_j\right||V_k(z)t_n(z_k)| \leqslant \left|z-z_j\right|\delta^3|t_n(z_k)|$$

$$\leqslant \frac{\left|z-z_j\right|\delta\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2},$$

отже,

$$|f_\delta(z) - p_n(z)|$$

$$\leq \left|f_\delta(z) - t_n(z) + \frac{q(z)}{(z-z_j)q'(z_j)}V_j(z)t_n(z_j)\right|$$

$$+ \sum_{k=1, k\neq j}^{s}\left|\frac{q(z)}{(z-z_k)q'(z_k)}V_k(z)t_n(z_k)\right|$$

$$\preccurlyeq\ \left|z-z_j\right|\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{(n^2\delta^3)}+\frac{\left|z-z_j\right|\delta\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}\preccurlyeq\ \left|z-z_j\right|\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2\delta^3}. \tag{4.24}$$

Тобто для $z\in\tilde{J}_j,\ j=1,2,\ldots,s$ маємо, що $|f_\delta(z)-p_n(z)|\leq c_1\frac{|z-z_j|\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2\delta^3}$.

Також, з (4.4) та (4.5) маємо, що $|\Re f_\delta(z)|\geq c_2\frac{\omega(\delta)}{\delta}|z-z_j|$.

Тоді, за умови $n\delta>\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$, отримуємо, що для $z\in\tilde{J}_j$

$$|\Re f_\delta(z)-h_n(z)|\leq|f_\delta(z)-p_n(z)|\leq c_1\frac{\left|z-z_j\right|\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2\delta^3}<c_2\frac{\omega(\delta)}{\delta}\left|z-z_j\right|$$

$$\leq|\Re f_\delta(z)|, \tag{4.25}$$

звідки

$$\Re f_\delta(z)h_n(z)\geq 0,\ z\in\tilde{J}_j,\ j=1,2,\ldots,s. \tag{4.26}$$

Далі, для інших $z\in L$ скористаємось (4.13) та (4.22):

$$|f_\delta(z)-p_n(z)|\leq|f_\delta(z)-t_n(z)|+|u_n(z)|\preccurlyeq\omega\left(\rho_{\frac{1}{n}}(z)\right)+\frac{\omega\left(\rho_{\frac{1}{n}}(z)\right)}{n}$$

$$\preccurlyeq\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z)),$$

тобто

$$|f_\delta(z)-p_n(z)|\leq c_3\omega\left(\rho_{\frac{1}{n}}(z)\right),\ z\in\ L\setminus(\cup_{j=1}^{s}\tilde{J}_j). \tag{4.27}$$

Також маємо, що

$$\rho_{\frac{1}{n}}(z)\leq\frac{1}{n\delta}\rho_\delta(z). \tag{4.28}$$

Згадаємо, що для $z \in L \setminus (\cup_{j=1}^{s} \tilde{J}_j)$ справедливо

$$|\Re f_\delta(z)| \geq c_4 \omega(\rho_\delta(z)).$$

Отже, тоді за умови $n\delta > 2^k$, де $k \in \mathbb{N}$ таке, що $\gamma^k < \frac{c_4}{c_3}$, з (4.27),(4.28) та (4.1) отримуємо, що

$$|\Re f_\delta(z) - h_n(z)| \leq |f_\delta(z) - p_n(z)| \leq c_3 \omega\left(\rho_{\frac{1}{n}}(z)\right)$$

$$\leq c_3 \omega\left(\frac{1}{2^k} \rho_\delta(z)\right) < c_4 \omega\big(\rho_\delta(z)\big) \leq |\Re f_\delta(z)|. \tag{4.29}$$

Таким чином, і для $z \in L \setminus (\cup_{j=1}^{s} \tilde{J}_j)$ маємо, що

$$\Re f_\delta(z) h_n(z) \geq 0. \tag{4.30}$$

Згадаємо, що для використання (4.13), (4.14) та (4.15) необхідно, щоб $\max\limits_{z \in L} \rho_{\frac{1}{n}}(z) < \delta < \delta_0$. Тому накладемо ще умову, що $n\delta > c_5$, де

$$\rho_{\frac{1}{n}}(z) \leq c_5 \cdot \frac{1}{n}.$$

Зафіксуємо тепер $\varepsilon := \frac{1}{n\delta}$ такий, щоб для нього виконувались всі зазначені в цьому розділі умови. Тоді, для довільного $n > N := N(L, Z, \gamma) = \left[\frac{1}{\delta_0 \varepsilon}\right] + 1$ з (4.26) та (4.30) випливає, що $h_n \in \Delta^{(0)}(Z)$, а з (4.3),(4.24), (4.27) та (4.22)

$$|f(z) - h_n(z)| \leq |f(z) - \Re f_\delta(z)| + |\Re f_\delta(z) - h_n(z)|$$

$$\preccurlyeq \omega\big(\rho_\delta(z)\big) + \omega\left(\rho_{\frac{1}{n}}(z)\right) \preccurlyeq \omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z)),$$

з чого й отримуємо основний результат цього розділу.

Розділ 5
КОМОНОТОННЕ НАБЛИЖЕННЯ ГІБРИДНИМИ ПОЛІНОМАМИ

Анотація

Нехай $f(x) := g(x) + ax$, де $g \in \tilde{C}$, простір неперервних 2π-періодичних функцій і $a \in \mathbb{R}$. Нехай також $\mathbb{T}_n$ — множина тригонометричних поліномів T_n степеня $< n$. Будемо називати функції вигляду $Q_n(x) := T_n(x) + ax$, $a \in \mathbb{R}$, гібридними поліномами.

Якщо f монотонна, то g з відповідної рівності, за Салемом і Зигмундом, називається функцією монотонного типу.

Якщо f має парну кількість точок екстремуму на $(-\pi, \pi]$, то ми оцінюємо

$$\inf\{\|f - Q_n\|: \ Q_n \text{ такі, що } f'(x)Q_n'(x) \geq 0, \text{м. в. на } \mathbb{R}\},$$

похибку його найкращого комонотонного наближення, гібридними поліномами в рівномірній нормі.

У цьому розділі отримані оцінки типу Джексона для наближення f гібридними поліномами для широкого класу функцій f. Також будуть показані та проаналізовані випадки, коли такі оцінки не є правильними.

5.1 Вступ і головний результат

Нехай $f(x) := g(x) + ax$, де $g \in \tilde{C}$, простір неперервних 2π-періодичних функцій і $a \in \mathbb{R}$, і нехай через $\omega(f, t)$ позначається його модуль неперервності. Для неперервної функції F в $\mathbb{R}$ введемо позначення $\|F\| := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |F(x)|$. Нехай $\mathbb{T}_n$ — множина тригонометричних поліномів T_n степеня $< n$ (тобто порядку $\leq$

$2n-1$). Будемо називати $Q_n(x) := T_n(x) + \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$ гібридним поліномом і позначимо через $\mathbb{Q}_n$ множину усіх гібридних поліномів степеня $< n$.

Якщо $f(x) := g(x) + ax$, де $g \in \tilde{C}$, є монотонною на $\mathbb{R}$ функцією, то функція g з цього співвідношення була названа Салемом і Зигмундом у [31] функцією монотонного типу. Для такої f позначимо через

$$\tilde{E}_n^{(1)}(f) := \inf\{\|f - Q_n\|:\ Q_n \in \mathbb{Q}_n,\ \ Q_n \text{ монотонний}\} \tag{5.1.1}$$

похибку його найкращого монотонного наближення гібридними поліномами у рівномірній нормі.

Зауважимо, що якщо $a = 0$, то єдина періодична монотонна функція $f = g$ є сталою, тому $\tilde{E}_n^{(1)}(f) = 0$.

Перший результат цього розділу дисертації є наступним.

Теорема 5.1.1. Нехай g — неперервна 2π-періодична функція і $f(x) := g(x) + ax$. Якщо f монотонна на $\mathbb{R}$, то

$$\tilde{E}_n^{(1)}(f) \leq c\omega(f, 1/n),\ n \in \mathbb{N}, \tag{5.1.2}$$

де c — абсолютна константа.

Припустимо тепер, що $f(x) = g(x) + ax$ змінює монотонність скінченну кількість разів на періоді g. А саме, нехай дано набір точок $s \geq 1$ $Y_s := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}},\ \ y_i < y_{i+1}$ і $y_{i+2s} = y_i + 2\pi,\ i \in \mathbb{Z}$. Позначимо через $\Delta^{(1)}(Y_s)$ клас неперервних функцій f, точками екстремума якого є Y_s і таких, що $(-1)^{i-1}f$ є неспадною на проміжках, $[y_{i-1}, y_i]$. Далі, для $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$ позначимо

$$\tilde{E}_n^{(1)}(f, Y_s) := \inf_{Q_n \in \mathbb{Q}_n \cap \Delta^{(1)}(Y_s)} \|f - Q_n\|, \tag{5.1.3}$$

- похибку найкращого комонотонного наближення f гібридними поліномами.

Тут розглядається лише випадок парної кількісті екстремумів y_i на періоді, позаяк інакше функції вигляду $f(x) = g(x) + ax$, де $g \in \tilde{C}$, за $a \neq 0$ не існує, а в разі, якщо $a = 0$, то $g \equiv \text{ const}$.

У нещодавній статті [29] була оцінена коопукла апроксимація функцій $f = g + ax^2$, де $g \in \tilde{C}$, гібридними поліномами форми $T_n(x) + \alpha x^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Метою даного розділу дисертації є отримання комонотонного аналога. Проте варто зазначити, що оцінки коопуклої апроксимації були показані для $n > N(Y_s)$, і вони не можуть бути отримані для всіх $n \geq 1$. Причина полягала в тому, що обмеження на n давало змогу відокремлювати y_i один від одного, тобто мати оцінку на відстані між ними. Оцінки похибки комонотонної апроксимації іноді виконуються для всіх $n \geq 1$, тобто без жодних обмежень на відстані між точками y_i.

Нехай

$$\Pi(t) = \prod_{i=1}^{2s} \sin\frac{1}{2}(t - y_i),\ s \geq 1, \quad \text{і} \quad \Pi(t) \equiv 1,\ s = 0, \qquad (5.1.4)$$

і позначимо $I := [-\pi, \pi]$, а для $j \in \mathbb{Z}$ нехай $x_j := \frac{j\pi}{n}$.

Для того, щоб сформулювати основні результати, будуть потрібні і деякі інші позначення. Нехай дано Y_s і $n \in \mathbb{N}$. Для кожного $i \in \mathbb{Z}$ через j_i позначимо такий індекс, що $y_i \in [\frac{j_i\pi}{n}, \frac{(j_i+1)\pi}{n})$. Тоді позначимо через O внутрішність множини $\cup_{i\in\mathbb{Z}} [x_{j_i-1}, x_{j_i+2}]$ і позначимо через O_ν, $\nu \in \mathbb{Z}$ — компоненти зв'язності O.

Для даної трійки (Y_s, n, a), ми кажемо, що $(Y_s, n, a) \in \mathcal{E}$, якщо $a\Pi(x) < 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus O$.

Головний результат цього розділу дисертації стосується трійок, які не входять до щойно означеної виняткової множини $\mathcal{E}$.

Теорема 5.1.2. Нехай $s \geq 1$, $(Y_s, n, a) \notin \mathcal{E}$, $g \in \tilde{C}$ і $f(x) := g(x) + ax$. Якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$, то існує гібридний поліном $Q_n(x) := t_n(x) + ax$, де t_n — тригонометричний поліном степеня $\leq c_1(s)n$ такий, що

$$Q_n \in \Delta^{(1)}(Y_s), \tag{5.1.5}$$

і

$$\|f - Q_n\| \leq c(s)\omega(f, 1/n). \tag{5.1.6}$$

Теорема 5.1.2 для $a = 0$ відома, див., наприклад, [30].

Зауважимо, що для кожного Y_s існує n_0 таке, що $(Y_s, n, \pm 1) \notin \mathcal{E}$ для всіх $n \geq n_0$.

Ми покажемо (див. зауваження 5.3.1 нижче), що теорема 5.1.2 не є правильною для всіх трійок у $\mathcal{E}$. Тим не менш, для $f \in \Delta_k^{(1)}(Y_s, n)$, $k \geq 1$, де $\Delta_k^{(1)}(Y_s, n) \subset \Delta^{(1)}(Y_s)$, таких, що на кожній зв'язній компоненті O_ν множини O, $f|_{O_\nu} = p_\nu$, де p_ν — алгебраїчний поліном степеня $\leq k$, можна показати наступне.

Теорема 5.1.3. Нехай $s \geq 1$, $g \in \tilde{C}$ і $f(x) := g(x) + ax$. Якщо $f \in \Delta_k^{(1)}(Y_s, n)$, то існує гібридний поліном $Q_n(x) := t_n(x) + ax$, де t_n — тригонометричний поліном степеня $\leq c_2(s, k)n$, такий, що $Q_n \in \Delta^{(1)}(Y_s)$ і

$$\|f - Q_n\| \leq c(s, k)\omega(f, 1/n). \tag{5.1.7}$$

У цьому розділі будуть фігурувати константи c, які можуть відрізнятися в різних випадках, навіть якщо вони зустрічаються в одному рядку. Константи

c залежать лише від k і s. Також будуть константи c_i, які будуть згодом визначені для подальшого використання.

Щоб уникнути непотрібних подробиць і громіздкості записів, ми будемо вважати, що $\mathbb{R} \setminus O \neq \emptyset$, що забезпечується припущенням, що $n > 6s$. Зауважимо, що. на відміну від Теореми 5.1.3, 5.1.2 не охоплює випадок

$\mathbb{R} \setminus O = \emptyset$, який може мати місце для $n \leq 6s$.

Також зауважимо, що в теоремах 5.1.2 і 5.1.3, $\deg Q_n \geq s$, якщо тільки не $Q_n \equiv \text{const}$.

5.2. Допоміжні леми

Надалі у цьому розділі будемо позначати $\|f\|_J := \sup\limits_{x \in J} |f(x)|$ для будь-якого скінченного відкритого чи замкненого проміжка J.

Нехай $O_\nu =: (x_{\nu^-}, x_{\nu^+})$, $\nu \in \mathbb{Z}$. Слід підкреслити, що в цьому розділі ми будемо перераховувати компоненти справа наліво, а саме $O_{\nu+1}$ буде компонентом ліворуч від O_ν, $\nu \in \mathbb{Z}$.

Позначимо $\omega := \omega(f, \pi/n)$ і зауважимо, що якщо $O_\nu \subset I$, $1 \leq \nu \leq \mu$, то, очевидно,

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} |f(x_{\nu^-}) - f(x_{\nu^+})| \leq 6s\omega. \qquad (5.2.1)$$

Лема 5.2.1. Нехай дано $n \in \mathbb{N}$ і $a \in \mathbb{R}$, нехай також набір Y_s такий, що $a\Pi(x) > 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus O$. Нехай $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$ має вигляд $f(x) := g(x) + ax$, де $g \in \tilde{C}$. Тоді існує $f_* \in \Delta^{(1)}(Y_s)$, $f_*(x) := g_*(x) + ax$, де $g_* \in \tilde{C}$, який задовольняє,

$$\|f - f_*\| \leq c\omega(f, \pi/n), \qquad (5.2.2)$$

і

$$f_*'(x) = 0,\ x \in O. \tag{5.2.3}$$

Доведення. Можна вважати, що $a > 0$ і тому $\Pi(x) > 0, x \in \mathbb{R} \setminus O$ (якщо $a < 0$, то можна замінити f на $-f$ і покласти $\hat{Y}_s := \{\hat{y}_i := y_{i-1},\ i \in \mathbb{Z}\}$, так що $-f \in \Delta(\hat{Y}_s)$). Це означає, що для всіх $i \in \mathbb{Z},\ y_{2i-1}$ і y_{2i} належать одній і тій же компоненті зв'язності O і

$$f\big(x_{(\nu-1)^-}\big) - f(x_{\nu^+}) \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \tag{5.2.4}$$

Без втрати загальності, можна припустити, що $x_{1^+} = \pi$ і $f(-\pi) = 0$ і, отже, $a_1 := f(\pi) > 0$. Нехай μ — кількість цих компонентів у I, тоді маємо, що $x_{(\mu+1)^+} = -\pi$.

Визначимо $f_*(x) := a_1, x \in O_1$. Тоді за (5.2.1)

$$\|f - f_*\|_{O_1} \leq 6s\omega\,. \tag{5.2.5}$$

Позначимо через κ найменше $\nu, 1 < \nu \leq \mu + 1$, таке, що $f(x_{\nu^+}) \leq 0$. Зауважимо, що

$$\|f\|_{[-\pi, x_{\kappa^+}]} \leq 6s\omega. \tag{5.2.6}$$

Дійсно, нехай $y_i := \arg \max\limits_{x \in [-\pi, x_{\kappa^+}]} |f(x)|$, і нехай O_σ така, що $y_i \in O_\sigma$. Якщо $f(y_i) \geq 0$, то за (5.2.4) та (5.2.1) маємо, що

$$\begin{aligned} f(y_i) &\leq f(y_i) - f(x_{\kappa^+}) \\ &= f(y_i) - f(x_{\sigma^+}) + \sum_{\nu=\kappa+1}^{\sigma} \Big(f(x_{\nu^+}) - f\big(x_{(\nu-1)^-}\big)\Big) \\ &+ \sum_{\nu=\kappa}^{\sigma-1} (f(x_{\nu^-}) - f(x_{\nu^+}) \\ &\leq f(y_i) - f(x_{\sigma^+}) + \textstyle\sum_{\nu=\kappa}^{\sigma-1}\big(f(x_{\nu^-}) - f(x_{\nu^+})\big) \leq 6s\omega. \end{aligned}$$

Аналогічним чином, якщо $f(y_i) < 0$, то

$$-f(y_i) = f(-\pi) - f(y_i)$$

$$= f(x_{\sigma^-}) - f(y_i) + \sum_{\nu=\sigma+1}^{\mu+1} \big((x_{\nu^+}) - f(x_{(\nu-1)^-}\big)$$

$$+ \sum_{\nu=\sigma+1}^{\mu} (f(x_{\nu^-}) - f\ (x\_(\nu^+))$$

$$\le f(x_{\sigma^-}) - f(y_i) + \sum_{\nu=\sigma+1}^{\mu} \big(f(x_{\nu^-}) - f\ (x_{\nu^+})\big) \le 6s\omega.$$

Для початку визначимо f_* для компоненти $O_\nu, 1 < \nu \le \mu$.

Припустимо за індукцією, що $a_{\nu-1}, 1 < \nu < \mu$, визначені. Тоді визначимо

$$a_\nu = \begin{cases} f(x_{\nu^+}), & \nu < \kappa \text{ та } f(x_{\nu^+}) < a_{\nu-1}, \\ 0, & \nu = \kappa, \\ a_{\nu-1}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Позначимо

$$f_*(x) := a_\nu, \qquad x \in O_\nu, \qquad 1 < \nu \le \mu.$$

Ми доведемо, що

$$\|f - f_*\|_{O_\nu} \le c\omega,\ 1 < \nu \le \mu. \tag{5.2.7}$$

Відразу зауважимо, що якщо $a_\nu = f(x_{\nu^+})$, то (5.2.7) з урахуванням, що $c \le 6s$, одразу випливає з (5.2.1).

Крім того, з (5.2.6) можна отримати (5.2.7) для всіх $\nu \ge \kappa$.

Таким чином, залишилось розібрати випадок, коли $1 < \nu < \kappa$ і $f(x_{\nu^+}) \ge\ a_{\nu-1}$. Припустимо, за індукцією, що (5.2.7) виконується для $\nu - 1$, що справджується для $\nu = 2$. Тоді за (5.2.1) робимо висновок, що,

$$f(x_{\nu^+}) - a_{\nu-1}$$

$$= (f(x_{\nu^+}) - f(x_{(\nu-1)^-})) + (f(x_{(\nu-1)^-}) - f(x_{(\nu-1)^+})) + (f(x_{(\nu-1)^+}) - a_{\nu-1})$$

$$\leq 0 + 6s\omega + c\omega \leq c\omega.$$

Таким чином, комбінуючи це з (5.2.1), отримуємо (5.2.7) для ν.

Щоб завершити доведення, визначимо f_* на проміжках $[x_{\nu^+}, x_{(\nu-1)^-}]$, $1 < \nu \leq \mu + 1$, і доведемо, що

$$\|f - f_*\|_{[x_{\nu^+}, x_{(\nu-1)^-}]} \leq c\omega, \quad 1 < \nu \leq \mu + 1 . \tag{5.2.8}$$

Нехай

$$f_*(x) := 0, \qquad x \in [x_{\nu^+}, x_{(\nu-1)^-}], \qquad \kappa < \nu \leq \mu + 1,$$

і одразу зауважимо, що з (5.2.6) маємо (5.2.8) для $\kappa < \nu \leq \mu + 1$.

Тепер, якщо $2 \leq \nu < \kappa$ і $f(x_{\nu^+}) \geq a_{\nu-1}$, тоді покладемо

$$f_*(x) := a_{\nu-1}, \qquad x \in [x_{\nu^+}, x_{(\nu-1)^-}],$$

і, скориставшись (5.2.7), кажемо, що для $x \in [x_{\nu^+}, x_{(\nu-1)^-}]$,

$$0 \leq f(x) - a_{\nu-1} \leq f\left(x_{(\nu-1)^-}\right) - a_{\nu-1} \leq c\omega.$$

Отже, (5.2.8) виконується і для цих ν.

З іншого боку, якщо $2 \leq \nu < \kappa$ і $f(x_{\nu^+}) < a_{\nu-1}$, тоді покладемо

$$f_*(x) := f(x_{\nu^+}) + \left(a_{\nu-1} - f(x_{\nu^+})\right) \frac{f(x) - f(x_{\nu^+})}{\left(x_{(\nu-1)^-}\right) - f(x_{\nu^+})}, \qquad x \in [x_{\nu^+}, x_{(\nu-1)^-}],$$

а якщо $\nu = \kappa$, тоді покладемо

$$f_*(x) := a_{\kappa-1} \frac{f(x) - f(x_{\kappa^+})}{f\left(x_{(\kappa-1)^-}\right) - f\,(x_{\kappa^+})}, \qquad x \in [x_{\kappa^+}, x_{(\kappa-1)^-}].$$

Зауважимо, що f_* є неспаданою на $[x_{\nu^+}, x_{(\nu-1)^-}]$, $2 \leq \nu \leq \kappa$.

Для $x \in [x_{\nu^+}, x_{(\nu-1)^-}]$, $2 \leq \nu < \kappa$,

$$f(x) - f_*(x) = \frac{f(x) - f(x_{\nu^+})}{f(x_{(\nu-1)^-} - f(x_{\nu^+})}(f(x_{(\nu-1)^-}) - a_{\nu-1}).$$

Отже, за (5.2.7)

$$|f(x) - f_*(x)| \le \left|f\left(x_{(\nu-1)^-}\right) - a_{\nu-1}\right| \le\ c\omega, \qquad x \in [\ x_{\nu^+}, x_{(\nu-1)^-}],$$

звідки приходимо до висновку, що (5.2.8) виконується для всіх $2 \le \nu < \kappa$.

Нарешті, для $x \in [x_{\kappa^+}, x_{(\kappa-1)^-}]$,

$$\begin{aligned} f(x) - f_*(x) & \\ &= \frac{f(x) - f(x_{\kappa^+})}{f\left(x_{(\kappa-1)^-}\right) - f(x_{\kappa^+})}(f(x_{(\kappa-1)^-}) - a_{\nu-1}) \\ &+ \frac{f\left(x_{(\kappa-1)^-}\ \right) -\ f(x)}{f\left(x_{(\kappa-1)^-}\right) - f(x_{\kappa^+})} f(x_{\kappa^+}), \end{aligned}$$

так що за (5.2.7) і (5.2.6),

$$|f(x) - f_*(x)| \le\ \left|f\left(x_{(\kappa-1)^-}\right) - a_{\nu-1}\right| + |f(x_{\kappa^+})| \le\ c\omega, \qquad x \in [x_{\kappa^+}, x_{(\kappa-1)^-}].$$

Отже, ми маємо (5.2.8) для $\nu = \kappa$.

Комбінуючи (5.2.5), (5.2.7) та (5.2.8), отримуємо

$$\|f - f_*\|_I \le c\omega, \tag{5.2.9}$$

і підсумовуємо, що f_* є неспадною на $[x_{\nu^+}, x_{(\nu-1)^-}]$, $2 \le \nu \le \mu + 1$, і є константою на O_ν, $1 \le \nu \le \mu$.

Оскільки $f(\pm\pi) = f_*(\pm\pi)$, то маємо, що $f_*(\pi) - f_*(-\pi) = 2a\pi$. Отже, $f_*(x) = g_*(x) + ax$, $x \in I$, де $g_*(\pi) = g_*(-\pi)$. Періодично розширимо g^* і визначимо

$$f_*(x) := g_*(x) + ax, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, що $f_* \in \Delta(Y_s)$, і з огляду на (5.2.9),

$$\|f - f_*\|_{\mathbb{R}} = \|f - f_*\|_I \le c\omega,$$

що і є (5.2.2). Це завершує наше доведення.□

Для $(Y_s, n, a) \in \mathcal{E}$ маємо,

Лема 5.2.2. Нехай $(Y_s, n, a) \in \mathcal{E}$ і f має вигляд $f(x) := g(x) + ax$, де $g \in \tilde{C}$. Якщо $f \in \Delta_k^{(1)}(Y_s, n)$, то існує такий $i \in \mathbb{Z}$, що

$$y_{i+1} - y_i > \frac{c_3(s,k)}{n} \quad \text{та} \quad a(f(y_{i+1}) - f(y_i)) > 0. \tag{5.2.10}$$

Доведення. Не порушуючи загальності, для зручності припустимо, що $a < 0$ (якщо $a > 0$, то ми замінюємо f на $-f$, див. аналогічну ремарку в доведенні леми 5.2.1) і тому $\Pi(x) > 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus O$. Нехай O_ν, $\nu \in \mathbb{Z}$, такі самі, що і в доведенні леми 5.2.1. Тоді y_{2i-1} і y_{2i} для всіх $i \in \mathbb{Z}$ належать одній компоненті.

Існує принаймні одна $O_\nu \subset (-\pi, \pi)$, скажімо, $O_\kappa = (x_{\kappa^-}, x_{\kappa^+})$, така, що

$$f(x_{\kappa^-}) > \inf_{x \in O_\kappa} f(x) = \min_{x \in O_\kappa} f(x), \tag{5.2.11}$$

інакше $f(\pi) \geq f(-\pi)$, тоді як $f(\pi) - f(-\pi) = 2a\pi < 0$, що є неправдою. Дійсно, якщо $f(x_{\nu^-}) = \inf_{x \in O_\kappa} f(x)$ для всіх $\nu \in \mathbb{Z}$, то $f(x_{\nu^+}) \geq f(x_{\nu^-})$, $\nu \in \mathbb{Z}$. Нагадаємо, що $x_{1^+} = \pi$ і $x_{(\mu+1)^+} = -\pi$, отже

$$f(\pi) - f(-\pi) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \big(f(x_{\nu^+}) - f(x_{\nu^-})\big) + \sum_{\nu=1}^{\mu} \Big(f(x_{\nu^-}) - f\big(x_{(\nu+1)^+}\big)\Big) \geq 0.$$

Нехай $y_{2\kappa^*} := \arg \min_{i: y_{2i} \in O_\kappa} f(y_{2i})$, і зауважимо, що, поклавши $J := [x_{\kappa^-}, y_{2\kappa^*}]$, отримуємо, що довжина $|J| \geq \frac{\pi}{n}$. Далі, нехай $y_{2\kappa_*-1} := \arg \max_{y_{2i-1} \in J} f(y_{2i-1})$. Очевидно, $f(y_{2\kappa^*}) < f(y_{2\kappa_*-1})$.

Оскільки $f|_{O_\kappa} = p$ — алгебраїчний поліном степеня k, з нерівності Маркова

$$\|p'\|_J \leq \frac{k^2}{|J|} \Big(\max_{x \in J} p(x) - \min_{x \in J} p(x) \Big),$$

випливає

$$\|f'\|_J < cn\big(f(y_{2\kappa_*-1}) - f(y_{2\kappa^*})\big). \tag{5.2.12}$$

Очевидно, $f(y_{2i}) - f(y_{2i+1}) \le 0$ для $\kappa_* \le i \le \kappa^* - 1$. Отже,

$$0 < f(y_{2\kappa_*-1}) - f(y_{2\kappa^*}) = \sum_{i=2\kappa_*}^{2\kappa^*} (f\,(y_{i-1}) - f(y_i))$$

$$= \sum_{i=\kappa_*}^{\kappa^*} (f(y_{2i-1}) - f(y_{2i})) + \sum_{i=\kappa_*}^{\kappa^*-1} (f(y_{2i}) - f(y_{2i+1})) \le \sum_{i=\kappa_*}^{\kappa^*} \big(f(y_{2i-1}) - f(y_{2i})\big)$$

$$\le s \max_{\kappa_* \le i \le \kappa^*} (f(y_{2i-1}) - f(y_{2i})) =: s(f(y_{2i_0-1}) - f(y_{2i_0})),$$

тому з (5.2.12) випливає

$$\|f'\|_{[y_{2i_0-1}, y_{2i_0}]} \le c_4 n\big(f(y_{2i_0-1}) - f(y_{2i_0})\big).$$

З іншого боку, існує така точка $\theta \in (y_{2i_0-1}, y_{2i_0})$, що

$$f'(\theta) = \frac{f\big(y_{2i_0-1}\big) - f\big(y_{2i_0}\big)}{y_{2i_0-1} - y_{2i_0}} < 0.$$

Отже,

$$\frac{f(y_{2i_0-1}) - f(y_{2i_0})}{|y_{2i_0-1} - y_{2i_0}|} \le c_4 n\big(f(y_{2i_0-1}) - f(y_{2i_0})\big),$$

що, у свою чергу, означає, що

$$y_{2i_0} - y_{2i_0-1} \ge \frac{1}{c_4 n}.$$

Це і завершує доведення леми. □

Наступну лему див. [30], порівнюючи це з [29, Lemma 4.3].

Нехай $\tilde{x}_j := \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$, $j \in \mathbb{Z}$ і $I_j := [x_j, x_{j+1}] = [\tilde{x}_j - \frac{\pi}{2n},\ \tilde{x}_j + \frac{\pi}{2n}]$. Позначимо

$$H := H(Y_s, n) := \{j \in \mathbb{Z} \mid I_j \cap O = \emptyset\}. \qquad (5.2.13)$$

Лема 2.3. Для кожного $j \in H$ існують тригонометричні поліноми $T_j \in \mathbb{T}_{cn}$, такі, що гібридні поліноми

$$\tau_j(x) := \frac{1}{2\pi} x + T_j(x), \qquad (5.2.14)$$

задовольняють

$$\sum_{j \in [-n, n-1] \cap H} \left| \tau_j(x) - \left(x - \tilde{x}_j\right)_+^0 \right| \leq c, \quad x \in I, \qquad (5.2.15)$$

і

$$\tau_j'(x) \Pi(x) \Pi\left(x_j\right) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (5.2.16)$$

5.3. Доведення основних результатів

Доведення теореми 5.1.2. Позначимо $\Delta_j := f\left(x_{j+1}\right) - f\left(x_j\right)$, $j \in \mathbb{N}$ і зауважимо, що

$$\left|\Delta_j\right| \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) =: \omega, \ j \in \mathbb{Z}. \qquad (5.3.1)$$

Нехай

$$L(x) := f(-\pi) + \sum_{j \in [-n, n-1] \cap H} \Delta_j \left(x - \tilde{x}_j\right)_+^0,$$

і, беручи τ_j з (5.2.14),

$$V(x) := f(-\pi) + \sum_{j \in [-n, n-1] \cap H} \Delta_j \tau_j(x). \qquad (5.3.2)$$

Далі,

$$|f(x)-L(x)| \le \ |f(x)-f(-\pi)-\textstyle\sum_{j=-n}^{n-1}\Delta_j\big(\,x-\tilde{x}_j\big)_+^0\ |+$$

$$|\textstyle\sum_{j\in[-n,n-1]\setminus H}\Delta_j\big(x-\tilde{x}_j\big)_+^0\ |$$

$$\le \omega+6s\omega=(1+6s)\omega, \qquad x\in I,$$

де зауважимо, що якщо $\tilde{x}_{j_0}<x\le \tilde{x}_{j_0+1}$, то перший доданок дорівнює $\left|f(x)-f\big(\tilde{x}_{j_0+1}\,\big)\right|\le\omega$, а для другого доданку є не більше ніж $6s$ індексів j, які задовольняють критерію суми. Тоді застосуємо (5.3.1) для кожного з них.

За (5.2.15) отримаємо, що

$$|f(x)-V(x)| \le \ |f(x)-L(x)|+|L(x)-V(x)|$$

$$\le (6s+1)\omega+\omega\textstyle\sum_{j\in[-n,n-1]\cap H}|\tau_j(x)-\big(x-\tilde{x}_j\big)_+^0|\le c\omega,\ x\in\ I. \quad (5.3.3)$$

Позначимо

$$\lambda:=\lambda(f):=\textstyle\sum_{j\in[-n,n-1]\setminus H}\Delta_j. \quad (5.3.4)$$

оскільки $(Y_s,n,a)\notin\mathcal{E}$, треба перевірити два випадки.

Випадок 1). Припустимо, що існують $j_1,j_2\in H$ такі що $a\Pi\big(x_{j_1}\big)\ge 0$ і $a\Pi(x_{j_2})<0$. Тоді існує $j^*\in H,\ -n\le\ j^*<n$, таке, що $\lambda\Pi\big(x_{j^*}\big)\ge 0$. За (5.2.14) маємо, що

$$V(x)=\frac{x}{2\pi}\sum_{j\in[-n,n-1]\cap H}\Delta_j+T^*(x)=\frac{x}{2\pi}\left(\sum_{j=-n}^{n-1}\Delta_j\ -\lambda\right)+T^*(x)$$

$$=ax-\frac{\lambda}{2\pi}x+T^*(x),$$

де T^* — тригонометричний поліном степеня $\le cn$.

Тоді гібридний поліном

$$Q(x):=V(x)+\lambda\tau_{j^*}(x)=ax+T(x),$$

де T — тригонометричний поліном степеня $\leq cn$, задовольняє (5.1.5) і (5.1.6).

Дійсно, оскільки $\Delta_j \Pi(x_j) \geq 0,\ j \in H$ і $\lambda\Pi(x_j^*) \geq 0,$ з (5.2.16) і (5.3.2) випливають $V'(x)\Pi(x) \geq 0$ і $\lambda\tau_{j^*}'(x)\Pi(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$. Таким чином,

$$Q'(x)\Pi(x) \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Тепер зауважимо, що $|\lambda| \leq 6s\omega$, тому, скориставшись (5.2.15), кажемо, що

$$|\lambda|\left|\tau_{j^*}(x)\right| \leq |\lambda|\,\left|\tau_{j^*}(x) - \left(x - \tilde{x}_{j^*}\right)_+^0\right| + |\lambda|\left(x - \lambda x_{j^*}\right)_+^0 \leq c\omega,\ \ x \in I.$$

Комбінуючи з (5.3.3), отримуємо (5.1.6).

Тепер розберемо другий випадок.

Випадок 2). Для всіх $x \in \mathbb{R} \setminus O,\ \ a\Pi(x) > 0$. Застосуємо лему 5.2.1 і наблизимо f до f_*. Тепер, $\lambda(f_*) = 0$, тому доведення випадку 1) дійсне - і, таким чином, доведення теореми завершено. □

Доведення теореми 5.1.1. Не порушуючи загальності, припустимо, що $a > 0$. Оскільки $H = \mathbb{Z}$ і тому $\lambda(f) = 0$, застосуємо доведення теореми 5.1.2 для випадку 2) і отримаємо

$$\tilde{E}_{cn}^{(1)}(f) \leq c\omega\left(f, \frac{1}{n}\right),\ \ n \geq 1. \tag{5.3.5}$$

Таким чином, потрібно просто оцінити $\tilde{E}_1^{(1)}(f)$.

Тоді нехай $Q_1(x) := g(0) + ax$. Тоді

$$\tilde{E}_1^{(1)}(f) \leq \|f - Q_1\| = \|g - g(0)\| \leq \omega(g, \pi) \leq \omega(f, \pi) + a\pi$$

$$= \omega(f, \pi) + \frac{1}{2}\big(f(\pi) - f(-\pi)\big) \leq \omega(f, \pi) + \frac{1}{2}\omega(f, 2\pi)$$

$$\leq 2\omega(f, \pi) \leq 8\omega(f, 1).$$

Разом із (5.3.5) це завершує доведення. □

Зауваження 5.3.1. Підкреслимо, що якщо $a\Pi(x) < 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus O$, то, взагалі кажучи, твердження теореми 5.1.2 не є правильним.

Доведення. Нехай $s = 1,\ n \in \mathbb{N}$ і нехай $0 < \epsilon < \frac{\pi}{n}$ задані. Візьмемо $y_0 = -\epsilon$, $y_1 = \epsilon,\ Y_1 := \{y_0, y_1\}$ і $\Pi(x_j) < 0,\ \ j \in H$ так, що $a > 0$. Припустимо супротивне, тобто що існують такі абсолютні константи c і c_1, що якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y_1)$ і $f(x) = g(x)\ + ax$, де g є 2π −періодичною, тоді (5.15) і (5.1.6) виконуються. Нехай $a = \frac{1}{2\pi}$, тоді можна взяти $f \in \Delta^{(1)}(Y_1)$ таким чином, що $g(-\pi) = g(\pi) = 0$ і $\|f\|_I = 1$. Існує $Q_n(x) =: t_n(x) + ax$ такий, що $Q_n'(x)(x^2 - \varepsilon^2) \leq 0,\ \ x \in I$ і що (5.1.6) справджується.

Тепер, очевидно, $\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq 4$. Отже, за (5.1.6),

$$\|t_n\| \leq \|t_n - g\|_I + \|g\|_I \leq \|Q_n - f\| + \|f\|_I + a\pi < 4c + 2.$$

Отже, за нерівністю Бернштейна $\|t_n'\| \leq (4c + 2)c_1 n$ і, у свою чергу, $\|Q_n'\| \leq (4c + 2)c_1 n + 1$.

Таким чином,

$$1 = Q_n(\pi) - Q_n(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} Q_n'(x)\ dx \leq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} Q_n'(x)\,, dx \leq 2\epsilon((4c + 2)c_1 n + 1),$$

що призводить до суперечності для достатньо малих $\epsilon > 0$.□

Доведення теореми 5.1.3. Можна вважати, що $(Y_s, n, a) \in \mathcal{E}$, оскільки два інші випадки враховані в теоремі 5.1.2. Позначимо $n^* := 4\left[\frac{\pi}{c_3}\right] n$, де c_3 береться з леми 5.2.2. Очевидно, $f \in \Delta_k^{(1)}(Y_s, n^*)$ і $y_{2i_0} - y_{2i_0 - 1} \geq \frac{4\pi}{n^*}$. З останнього випливає існування $x_{n^*,l} \in (y_{2i_0-1}, y_{2i_0})$ такого, що $l \in H(Y_s, n^*)$ і $a\Pi(x_{n^*,l}) > 0$ (нагадаємо, що $a\Pi(x_j) < 0$ для $x_j \in H(Y_s, n)$). Застосовуючи тепер теорему 5.1.2 для випадку 1), ми отримуємо бажаний гібридний поліном

Q_{n^*} із тригонометричною частиною степеня $c_1 n^*$, де c_1 визначено в Теоремі 5.1.2.

Це завершує наше доведення.□

Розділ 6
КОМОНОТОННЕ НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Анотація

Нехай $\tilde{C}$— простір неперервних 2π-періодичних функцій з рівномірною нормою $\|f\|:=\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, а $\omega_m(f,t)$ - це m-й модуль неперервності f. Позначимо через $\tilde{C}^r$ підпростір r разів неперервно диференційовних функцій $f\in\tilde{C}$, і нехай $\mathbb{T}_n$ — множина тригонометричних поліномів T_n степеня $<\ n$. Якщо $f\in\tilde{C}$, має $2s,\ s\geq 1$, точок екстремуму на $(-\pi,\pi]$, позначимо за

$$E_n^{(1)}(f):=inf_{T_n\in\mathbb{T}_n:\, f'(x)T_n'(x)\geq 0,\text{м.в. на }(-\pi,\pi]}\|f-T_n\|,$$

похибку його найкращого комонотонного наближення.

Ми доведемо, що якщо $f\in\tilde{C}^r$ та або $m=1$, або $m=2$ і $r=2s$, або $m\in\mathbb{N}$ і $r>\ 2s$, то

$$E_n^{(1)}(f)\leq\frac{c(m,r,s)}{n^r}\omega_m\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right),\quad n\geq 1,$$

де стала $c(m,r,s)$ залежить лише від m,r і s.

6.1 Вступ і головний результат

Нехай $\tilde{C}$ — простір неперервних 2π-періодичних функцій f з визначеною на ньому рівномірною нормою $\|f\|:=\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, і позначимо через $\omega_m(f,t)$ m-й модуль неперервності f. Позначимо через $\tilde{C}^r$ підпростір $r\geq 0$ разів неперервно диференційованих функцій $f\in\tilde{C}$ ($\tilde{C}^0=\tilde{C}$), а через $\widetilde{W}^r$, $r\geq 1$, простір функцій $f \in \tilde{C}$, які мають абсолютно неперервну $(r-1)$ −у похідну в $\mathbb{R}$ і $ess\, sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(r)}(x)| =: \|f^{(r)}\|_\infty < \infty$. Нарешті, нехай $\mathbb{T}_n$ — множина тригонометричних поліномів T_n степеня $< n$ (тобто порядка $\leq 2n-1$). Якщо за

$$E_n(f) := inf_{T_n\in\mathbb{T}_n}\|f - T_n\|, \tag{6.1.1}$$

позначити похибку найкращого наближення функції $f \in \tilde{C}$, тоді нерівність типу Джексона для $f \in \tilde{C}^r$ має наступний вигляд:

$$E_n(f) \leq \frac{c(m,r)}{n^r}\omega_m\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1, \tag{6.1.2}$$

де стала $c(m,r)$ залежить тільки від m і r.

Нехай дано набір $Y_s := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, точок, $s \geq 1$, такий, що $y_i < y_{i+1}$ і $y_{i+2s} = y_i + 2\pi$, $i \in \mathbb{Z}$. Позначимо через $\Delta^{(1)}(Y_s)$ клас функцій $f \in \tilde{C}$ з множиною локальних екстремумів Y_s і таких, що $(-1)^{i-1}f$ є неспадною на проміжках $[y_{i-1}, y_i]$. Далі, якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$, позначимо

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) := inf_{T_n\in\mathbb{T}_n\cap\Delta^{(1)}(Y_s)}\|f - T_n\|$$

- похибку найкращого комонотонного наближення f тригонометричними поліномами.

Позначимо,

$$\Pi(t) := \prod_{i=1}^{2s}\sin\frac{1}{2}(t - y_i) \qquad \text{та} \qquad \delta(t) := sign\,\Pi(t), \tag{6.1.3}$$

і зауважимо, що якщо $f \in \tilde{C}^1$, то $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x)\Pi(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

Ми зазначаємо, що $s \geq 1$, оскільки якщо f є монотонною на всьому проміжку $(-\infty, \infty)$, то з періодичності $f \equiv const$. Крім того, якщо Y_s містить непарну кількість точок на періоді $(0,2\pi]$, то єдиними тригонометричними поліномами в $\Delta^{(1)}(Y_s)$ є константи, що робить ці ситуації не надто цікавими для дослідження.

У певному сенсі це питання порушувалося ще Лорнецом та Зеллером [39], які в 1968 році отримали першу оцінку типу Джексона для монотонної апроксимації алгебраїчними поліномами неперервної $f(u)$ на $[-1,1]$, шляхом апроксимації дзвоноподібного $f(\cos x)$ на $[-\pi, \pi]$ дзвоноподібними же косинусними поліномами T_n. Очевидно, розглядаючи $f(\cos x)$ як періодичну функцію на $\mathbb{R}$, ми маємо функцію, яка рівно двічі змінює свою монотонність, тобто $s = 1$ на кожному періоді.

Вони довели, що

$$\|f(\cos\cdot) - T_n(\cdot)\|| \leq c\omega(f, 1/n), \quad n \geq 1.$$

Однак, $f(\cos x)$ є парною функцією. Плешаков [30] розширив результат до загального випадку 2π-періодичних неперервних $f \in \Delta^{(1)}(Y_s)$, довівши оцінку

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \leq c(s)\omega\left(f, \frac{1}{n}\right), \qquad n \geq 1.$$

У цьому розділі ми розширюємо цей результат, доводячи комонотонну нерівність типу Джексона для кожного $s \geq 1$ і $(m, r) \in A_s$, де

$$A_s := \{(m,r) |\ m = 1 \text{ і } r \in \mathbb{N}, \quad \text{або } m = 2 \text{ і } r = 2s, \quad \text{або } \ m \in \mathbb{N} \text{ і } r > 2s\}.$$

Теорема 6.1.1. Для кожного $s \in \mathbb{N}$ і $(m, r) \in A_s$ існує константа $c(m, r, s)$, така що якщо функція $f \in \tilde{C}^r \cap \Delta^{(1)}(Y_s)$, то

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \leq \frac{c(m,r,s)}{n^r} \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1. \tag{6.1.4}$$

Наслідок 6.1.2. Для кожного $s, r \in \mathbb{N}$ існує константа $c(r, s)$ така, що якщо функція $f \in \widetilde{W}^r \cap \Delta^{(1)}(Y_s)$, тоді

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \leq \frac{c(r,s)}{n^r} \|f\text{^}\{(r)\|_\infty, \quad n \geq 1.$$

Зауваження 6.1.3. Для оцінок типу (6.1.4), що залежать від розташування точок Y_s (тобто або при $c = c(Y_s)$, або при $n \geq N(Y_s)$) див. [25], [33] та [34].

Підкреслимо, що (6.1.4) не залежить від розташування точок Y_s.

Зазначимо, що навіть якщо дозволити в (6.1.4) $c = c(f)$, тобто щоб константа залежала від f, то ця оцінка не буде правильною для $r = 0$ і $k \geq 3$, або $r = 1$ і $k \geq 4$ (див. [24, Theorems 5.2, 5.3]).

Зауваження 1.4. Варто зазначити, що якщо $f \in \tilde{C}$ має $2s$, $s \geq 1$, точок перегину на $(-\pi, \pi]$, і ми позначимо через $E_n^{(2)}(f)$ похибку його найкращого наближення тригонометричними поліномами T_n, що мають таку саму множину точок перегину, то Левіатан і Шевчук [38] нещодавно довели аналог (6.1.4) (з замінами $E_n^{(1)}(f, Y_s)$ на $E_n^{(2)}(f, Y_s)$, але, знову ж таки, для $n \geq N(Y_s)$, тобто із залежністю від розташування точок перегину f. Зробити N незалежним від цього в цьому випадку не можна (див. [24, Theorem 1.1]).

Теорема 6.1.1 є наслідком леми 6.4.2 і теореми 6.4.2, які будуть наведені нижче.

6.2. Деякі позначення

Як і зазвичай, $\mathbb{Z}$ — це множина цілих чисел, а $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел.

Покладемо $I := [-\pi, \pi]$, а для $j \in \mathbb{Z}$ нехай

$$x_j := \frac{j\pi}{n}, \qquad I_j := [x_j, x_{j+1}], \qquad \text{та} \quad |I_j| = \frac{\pi}{n}.$$

Для $f \in \tilde{C}$ нехай

$$\Delta_h(f, x) = \Delta_h^1(f, x) := f(x + h) - f(x),$$

а для $k > 1$

$$\Delta_h^k(f,x) := \Delta_h\left(\Delta_h^{(k-1)}(f,\cdot),x\right).$$

Нарешті, позначимо через

$$\omega_k(f,t) := \sup_{0\le h\le t}\left\|\Delta_h^k(f,\cdot)\right\|,\ \ k \ge 1,$$

k –й модуль неперервності f і вважатимемо, що $\omega(f,t) := \omega_1(f,t)$.

Нам також будуть потрібні подібні позначення для $f \in C[a,b]$. Нехай

$$\|f\|_{[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

Позначимо

$$\Delta_h(f,x;[a,b]) = \Delta_h^1(f,x;[a,b]) := \begin{cases} f(x+h)-f(x), & x, x+h \in [a,b] \\ 0, & \text{інакше} \end{cases},$$

а для $k > 1$ нехай

$$\Delta_h^k(f,x;[a,b]) := \Delta_h\left(\Delta_h^{k-1}(f,\cdot),x;[a,b]\right).$$

Нарешті, позначимо через

$$\omega_k(f,t;[a,b]) := \sup_{0\le h\le t}\left\|\Delta_h^k(f,\cdot;[a,b])\right\|_{[a,b]},\ \ k \ge 1,$$

k –й модуль неперервності f в $[a,b]$. (Див. [32, Chapter 2, Section 7] щодо властивостей модулів неперервності.)

Нагадаємо, що $Y_s := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $s \ge 1$, — це набір точок, таких що $y_i < y_{i+1}$ і $y_{i+2s} = y_i + 2\pi$, $i \in \mathbb{Z}$, яка є множиною точок екстремуму 2π-періодичних функцій, які тут обговорюються.

Для кожного $i \in \mathbb{Z}$ нехай j_i буде таким індексом, що $y_i \in [x_{j_i}, x_{j_i+1}]$. Позначимо тоді через O внутрішність об'єднання

$$\cup_{i\in\mathbb{Z}}\,[x_{j_i-1}, x_{j\_i+2}].$$

Крім того, позначимо через

$$O_\nu = (x_{\nu^-}, x_{\nu^+}), \quad \nu \in \mathbb{Z}, \tag{6.2.1}$$

зв'язні компоненти множини O, пронумеровані справа наліво. Зрозуміло, що довжина $|O_\nu| = x_{\nu^+} - x_{\nu^-} \le 6s\pi/n$.

Позначимо через $\mathbb{P}_k$ простір алгебраїчних поліномів степеня $< k$.

Через $\tilde{\Sigma}_{k,n}$ будемо позначати простір 2π-періодичних неперервних кусково-алгебраїчних поліномів S степеня $< k$ з вузлами x_j, тобто

$$S|_{I_j} = p_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

де $p_j \in \mathbb{P}_k$. Будемо казати, що $S \in \tilde{\Sigma}_{k,n}(Y_s)$, якщо $S \in \tilde{\Sigma}_{k,n}$ і $S_{|O_\nu} = \pi_\nu, \pi_\nu \in \mathbb{P}_k, \nu \in \mathbb{Z}$.

Нарешті, позначимо через $\bar{\Sigma}_{k,n}$ простір функцій

$$\left\{S = \tilde{S} + P_2 \mid \tilde{S} \in \tilde{\Sigma}_{k,n} \quad \text{та} \quad P_2 \in \mathbb{P}_2\right\},$$

і, за аналогією, визначимо $\bar{\Sigma}_{k,n}(Y_s)$.

У цьому розіділі ми пишемо $S^{(\nu)}(x),\ \nu \in \mathbb{N}$, маючи на увазі $x \ne x_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

Далі вважатимемо, що $k \ge 2$. Крім того, будуть фігурувати константи c, які можуть залежати лише від k і s і які можуть відрізнятися в різних випадках, навіть якщо вони трапляються в одному рядку. У нас також будуть константи c_l, які будуть визначені для подальшого використання.

6.3. Допоміжні леми

Для $S \in \bar{\Sigma}_{k,n}$ позначимо

$$b_{i,j}(S):=\frac{\|p_i-p_j\|_{I_j}}{|i-j|^{k+1}},\ i,j\in\mathbb{Z}. \tag{6.3.1}$$

Будемо казати, що замкнутий інтервал E є *правильним* інтервалом, якщо $E=[x_{j_*},x_{j^*}]$ для деяких індексів j_* і j^*, і $x_{j^*}-x_{j_*}<2\pi$.

Для кожного правильного інтервалу E визначимо

$$b(S,E):=\max_{i,j:I_i\subset E,\,I_j\subset E} b_{i,j}(S),$$

і позначимо,

$$b(S):=\sup_{i,j} b_{i,j}(S).$$

Зауважимо, що якщо $S=\tilde{S}+P_2$, де $\tilde{S}\in\tilde{\Sigma}_{k,n}$ і $P_2\in\mathbb{P}_2$, то для всіх наведених вище інтервалів E

$$b(S,E)=b(\tilde{S},E). \tag{6.3.2}$$

Доведення наступної леми є практично дослівним до [38, Lemma 4.1, Corollaries 4.2 and 4.3].

Лема 6.3.1. Нехай E — правильний інтервал і $S\in\bar{\Sigma}_{k,n}$. Тоді

$$\omega_k\left(S,\frac{1}{n};E\right)\le cb(S,E)\le\ c\omega_k(S,1/n;E). \tag{6.3.3}$$

Крім того,

$$\omega_k\left(S,\frac{1}{n}\right)\le\ cb(S)\le\ c\omega_k(S,1/n), \tag{6.3.4}$$

і

$$b(S)\le\frac{c}{n}\|S'\|. \tag{6.3.5}$$

Далі, якщо $f\in\tilde{C}$ і $S\in\tilde{\Sigma}_{k,n}$, то

$$b(S)\le c(\|f-S\|+\omega_k(f,1/n)). \tag{6.3.6}$$

Нам також знадобиться наступне твердження.

Лема 6.3.2. Нехай $S \in \bar{\Sigma}_{k,n}$, $k \geq 2$ і E — правильний інтервал довжини $|E| = \frac{l\pi}{n}, l \in \mathbb{N}$. Якщо $b(S,E) \leq 1$ і існує принаймні $2k-3$ інтервалів $I_{j_\gamma} \subset E$ таких, що

$$\min_{x \in I_{j_\gamma}} |p'_{j_\gamma}(x)| < n, \tag{6.3.7}$$

тоді

$$\|S'\|_E \leq cl^{2k-2}n.$$

Доведення. Згідно з нерівністю Вітні існує поліном $P \in \mathbb{P}_k$ такий, що

$$\|S-P\|_E \leq c\omega_k(S,|E|;E) \leq cl^k\omega_k\left(S,\frac{1}{n};E\right) \leq cl^k b(S,E) \leq cl^k,$$

де для третьої нерівності було застосовано (6.3.3).

Нерівність Маркова дає оцінку $\left\|p'_j - P'\right\|_{I_j} \leq ck^2l^kn$ для всіх j таких, що $I_j \subset E$, звідки

$$\|S'-P'\|_E \leq cl^kn.$$

Отже,

$$|P'(t_\nu)| \leq |S'(t_\nu)| + |S'(t_\nu) - P'(t_\nu)| \leq |S'(t_\nu)| + \|S'-P'\|_E \leq n + cl^kn \\ \leq cl^kn.$$

З (6.3.7)випливає, що існує $k-1$ точка $t_\nu \in E, t_\nu \neq x_j$, таких, що $|S'(t_\nu)| \leq n$, $1 \leq \nu \leq k-1$, а якщо $k \geq 3$, то $t_{\nu+1} - t_\nu > \frac{\pi}{n}$, $1 \leq \nu \leq k-2$.

Таким чином,

$$\|P'\|_E \leq cl^{2k-2}n,$$

де в разі, якщо $k = 2$, то $P'(x) = P'(t_\nu) = \text{const},\ x \in E$.

Це, в свою чергу, означає

$$\|S'\|_E \le \|P'\|_E + \|S' - P'\|_E \le cl^{2k-2}n + cl^k n \le cl^{2k-2}n\,,$$

що і завершує доведення. □

Завершуємо підрозділ наступним фактом.

Лема 6.3.3. [5, Theorem 1.3] Нехай $a \in \mathbb{R}$, $\tilde{S} \in \tilde{\Sigma}_{k,n}(Y_s)$ і $S(x) := \tilde{S}(x) + ax$. Якщо $S \in \Delta^{(1)}(Y_s)$, то існує гібридний поліном $Q_n(x) := t_n(x) + ax$, де t_n — тригонометричний поліном степеня $\le cn$, такий, що $Q_n \in \Delta^{(1)}(Y_s)$, і

$$\|S - Q_n\| \le c\omega(f, 1/n).$$

6.4. Доведення теореми 6.1.1.

Почнемо з деяких лем.

Лема 6.4.1. Нехай $S \in \bar{\Sigma}_{k,n}(Y_s)$ такий, що $S'(x)\Pi(x) \ge 0$, $x \in I$, де $\Pi(x)$ був визначений в (6.1.3). Якщо

$$b(S) \le 1 \quad \text{та} \quad |S(\pi) - S(-\pi)| \le 1, \tag{6.4.1}$$

тоді існує кусково-алгебраїчний поліном $\tilde{S} \in \tilde{\Sigma}_{k,n}(Y_s) \cap \Delta^{(1)}(Y_s)$, такий, що

$$\left\|\tilde{S} - S\right\|_I \le c. \tag{6.4.2}$$

Доведення. Нам потрібно визначити відповідний кусковий поліном $\tilde{S}$ на I, а потім періодично продовжити його до $\mathbb{R}$. Для спрощення запису можна без обмеження загальності вважати, що компоненти зв'язності $O_\nu = (x_{\nu^-}, x_{\nu^+})$, $1 \le \nu \le \mu \le 2s$, де $x_{\mu^-} = -\pi$, знаходяться в I і що $S(-\pi) = 0$, тому $|S(\pi)| \le 1$.

У разі, якщо $S(x_{1^+})(S(x_{1^+})-S(\pi))>0$, ми визначимо

$$\tilde{S}(x):=\begin{cases} S(x), \ \ x\in I\setminus[x_{1^+},\pi], \\ S(x_{1^+})\dfrac{S(x)-S(\pi)}{S(x_{1^+})-S(\pi)}, \qquad x\in[x_{1^+},\pi]. \end{cases}$$

Отже, $\tilde{S}(x_{1^+})=S(x_{1^+})$, тобто $\tilde{S}$ неперервний на I, $\tilde{S}(\pi)=\tilde{S}(-\pi)=0$, $\tilde{S}'(x)\Pi(x)\geq 0,\ x\in\ I,\ \tilde{S}(x)=S(x),\ x\in O$ і за (6.4.1)

$$\left\|\tilde{S}-S\right\|_{[x_{1^+},\pi]}=\frac{|S(\pi)|}{|S(\pi)-S(x_\nu)\ |}\|S-S(x_{1^+})\|_{[x_{1^+},\pi]}=\ |S(\pi)|\leq 1.$$

Таким чином, ми отримуємо шуканий $\tilde{S}$ і твердження доведено.

В іншому випадку $S(x_{1^+})\big(S(x_{1^+})-S(\pi)\big)\leq 0$. Позначимо

$$J_\nu:=[x_{\nu^-},\pi],\quad \text{і}\quad \tilde{J}_\nu:=\left[x_{\nu^+},x_{(\nu-1\,)^-}\right],\qquad 1\leq\nu\leq\mu,$$

де $x_{0^-}:=\pi$.

Зазначимо, що в кожному інтервалі $\tilde{J}_\nu$, $1\leq\nu\leq\mu$, S є монотонним. Таким чином, якщо $S(x_{\nu^+})\left(S(x_{\nu^+})-S\big(x_{(\nu-1)^-}\big)\right)\leq 0$, для якогось $1\leq\nu\leq\mu$, то

$$\|S\|_{\tilde{J}_\nu}=|S(x_{(\nu-1)^-})|. \tag{6.4.3}$$

Зокрема, для такого ν маємо

$$\|p_{\nu^+}\|_{I_{\nu^+}}\leq\ |S(x_{(\nu-1)^-})|.$$

Це, у свою чергу, означає, що тоді $\|p_{\nu^+}\|_{O_\nu}\leq c|S(x_{(\nu-1)^-})|$, де був використаний той факт, що $|O_\nu|\leq 6s|I_{\nu^+}\,|$.

Крім того, з (6.4.3) маємо:

$$\|S-p_{\nu^+}\|_{O_\nu}\leq\ cb(S)\leq c.$$

Тому, поєднуючи цю оцінку з (6.4,3), ми отримуємо

$$\|S\|_{J_\nu}\leq\|S\|_{O_\nu}+\|S\|_{\tilde{J}_\nu}\ +\|S\|_{J_{\nu-1}}$$

$$\leq \|S - p_{\nu^+}\|_{O_\nu} + \|p_{\nu^+}\|_{O_\nu} + \|S\|_{\tilde{J}_\nu} + \|S\|_{J_{\nu-1}}$$

$$\leq \ c \ + c|S(x_{(\nu-1)^-})| + |S(x_{(\nu-1)^-})| + \|S\|_{J_{\nu-1}}$$

$$\leq c\big(1 + \|S\|_{J_{\nu-1}}\big), \ \ 1 < \nu \leq \mu, \tag{6.4.4}$$

і

$$\|S\|_{J_1} \leq c(1 + |S(\pi)|) \leq c. \tag{6.4.5}$$

Тепер нехай $1 \leq \kappa \leq \mu$ — найбільше число ν, таке, що $S(x_{\nu^+})\big(S(x_{\nu^+}) - (\,S(x_{(\nu-1)^-})\big) \leq 0$ для всіх $0 \leq \nu \leq \kappa$.

За індукцією, з (6.4.5) і (6.4.4) отримуємо, що

$$\|S\|_{J_\kappa} \leq c. \tag{6.4.6}$$

Отже, якщо $\kappa \leq \mu - 1$, визначимо $\tilde{S}$ як

$$\tilde{S}(x) := \begin{cases} S(x), & x \in \big[-\pi, x_{(\kappa+1)^+}\big], \\ S\big(x_{(\kappa+1)^+}\big)\dfrac{S(x) - S(x_{\kappa^-})}{S\big(x_{(\kappa+1)^+}\big) - S\,(x_{\kappa^-})}, & x \in \tilde{J}_{\kappa+1}, \\ 0, & x \in \ J_\kappa. \end{cases}$$

Тоді, за (6.4.6), маємо,

$$\big\|\tilde{S} - S\big\|_I = \big\|\tilde{S} - S\big\|_{\tilde{J}_{\kappa+1}} + \|S\|_{J_\kappa} \leq |S(x_{\kappa^-})| + c \leq c.$$

Нарешті, для $\kappa = \mu$ ми кладемо $\tilde{S} \equiv 0$, і за (6.4.6),

$$\big\|\tilde{S} - S\big\|_I = \|S\|_I = \|S\|_{J_\mu} \leq c.$$

Оскільки $\tilde{S}(\pi) = 0 = \tilde{S}(-\pi)$, ми періодично продовжуємо його на $\mathbb{R}$. Таким чином, лема доведена.□

Лема 6.4.2. Нехай $n > 3s$ та дано $f \in \tilde{C}^r \cap \Delta^{(1)}(Y_s)$ і $(m, r) \in A_s$. Якщо

$$\frac{1}{n^r}\omega_m(f^{(r)}, 1/n) \leq 1,$$

тоді існує $\tilde{S} \in \tilde{\Sigma}_{k,n}(Y_s) \cap \Delta^{(1)}(Y_s)$, $k = m + r$, такий, що

$$\|f - \tilde{S}\| \le c, \tag{6.4.7}$$

і

$$b(\tilde{S}) \le c. \tag{6.4.8}$$

Доведення. Позаяк $n > 3s$, то існує $x_{j_0} \in I \setminus O$. Оскільки f є 2π-періодичною, без обмеження загальності можна припустити, що $x_{j_0} = \pi$, тобто в рамках цього доведення ми вважаємо, що $\pi \notin O$.

У [36, Lemmas 4,4’] було доведено, що для $(m, r) \in A_s$ існує кусково-алгебраїчний поліном S степеня k і вузли $x_j = \frac{j\pi}{n}, -n \le j \le n$, на I такі, що $S'(x)\Pi(x) \ge 0,\ x \in I$ і $\| f - S\|_I \le \frac{c}{n^r}\omega_m\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) \le c.$ Очевидно, можна записати $S(x) = S^*(x) + ax, x \in I,$ так що $S^*(-\pi) = S^*(\pi)$. Отже, можна періодично продовжувати S^* на $\mathbb{R}$, продовжуючи називати його S^*, тобто $S^* \in \tilde{\Sigma}_{k,n}$, і використовуючи ту саму букву, визначити $S(x) = S^*(x) + ax$, $x \in \mathbb{R}$, тобто $S \in \bar{\Sigma}_{k,n}(Y_s)$. До того ж,

$$2\pi|a| = |S(\pi) - S(-\pi)| = |S(\pi) - f(-\pi) + f(\pi) - S(-\pi)| \le c.$$

Тепер,

$$\|f - S^*\| = \|f - S^*\|_I \le \|f - S\|_I + 2\pi|a| < c,$$

звідки, з (6.3.3), маємо

$$b(S) = b(S^*) \le c\omega_k\left(S^*, \frac{1}{n}\right) \le\ c\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right) + c\|f - S^*\|$$

$$\le \frac{c}{n^r}\omega_m\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) + c \le\ c.$$

Тому можна застосувати лему 6.4.1, щоб отримати $\tilde{S} \in \Sigma_{k,n}(Y_s) \cap \Delta^{(1)}(Y_s)$, звідки

$$\|f - \tilde{S}\| = \|f - \tilde{S}\|_I \le \|f - S\|_I + \|S - \tilde{S}\|_I \le c,$$

що завершує доведення.□

Наступний результат є центральним інструментом у доведенні теореми 6.1.1 і решта цього розділу дисертації присвячена саме його доведенню.

Теорема 6.4.3. Нехай $s \in \mathbb{N}$ і $k \ge 2$. Тоді існують константи $c = c(k, s)$ і $c_* = c_*(k, s)$ і $N := N(k, s)$ такі, що для кожного набору Y_s виконується наступне. Якщо $n \ge N$ і

$$S \in \tilde{\Sigma}_{k,n}(Y_s) \cap \Delta^{(1)}(Y_s), \tag{6.4.9}$$

такий, що

$$b(S) \le 1, \tag{6.4.10}$$

то існує многочлен $T_n \in \Delta^{(1)}(Y_s)$ степеня $\le c_* n$, що задовольняє нерівності

$$\|S - T_n\| \le c. \tag{6.4.11}$$

Доведення Теореми 6.1.1. На початку варто зазначити, що (6.1.4) завжди виконується для $n = 1$, з константою в правій частині з (6.1.4), що фактично є $c(m + r)$ і, в такому разі, для $n \le N$, зі сталою $c(m + r, N)$, оскільки можна покласти $T_n(t) \equiv T_1(t) = f(0)$ і отримати (6.1.4) для цих n за допомогою нерівності Вітні. Отже, достатньо довести теорему 6.1.1 для достатньо великих $n \ge N(m, r, s)$.

Якщо $(m, r) \in A_s$, нехай тоді $k := m + r \ge 2$. Отже, існує $N = N(k, s)$ таке, що лема 6.4.2 і теорема 6.4.3 справджуються, тому ми фіксуємо $n > N$.

Якщо $\omega_m(f^{(r)}, 1/n) = 0$, то з того, що f періодична, випливає, що $f \equiv \text{const}$. Таким чином, без обмеження загальності, можна вважати, що $\frac{1}{n^r} \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) = 1$.

Згідно з лемою 6.4.2, існує $S \in \tilde{\Sigma}_{k,n}$ такий, що $\|f - S\| \leq c$ і $b(S) \leq c$, тому що з теоремою 6.4.3 маємо тригонометричний поліном, який задовольняє (6.4.11), а саме,

$$E_n^{(1)}(f, Y_s) \leq \|f - T_n\| \leq c = \frac{c}{n^r} \omega_m(f^{(r)}, 1/n).$$

Це завершує доведення.□

6.5. Леми для доведення теореми 6.4.3.

Позначимо,

$$\pi(t) = \prod_{i=1}^{2s} \frac{\left|\sin\frac{1}{2}(t - y_i)\right|}{|\sin\frac{1}{2}(t - y_i)| + 1/n}.$$

Нам потрібен наступний результат, який легко слідує з леми 6.3.1 і [35, Theorem 6.1].

Лема 6.5.1. Нехай $\eta \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n$ і $S \in \tilde{\Sigma}_{k,n}(Y_s)$. Тоді існує тригонометричний поліном $D_{n_1}(x) := D_{n_1}(S, x)$ степеня $< cn_1$, такий, що

$$\left\|S - D_{n_1}\right\| \leq cb(S), \tag{6.5.1}$$

і існує стала $C_0(k, s, \eta)$ така, що якщо E є правильним інтервалом, то для $x \in E$,

$$\left|S'(x) - D_{n_1}'(x)\right| \leq C_0(k, s, \eta) n\pi(x) \left(b(S, E) + \frac{n}{n_1}\, b(S) \left(\frac{1}{n\, \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}\backslash E)}\right)^{\eta}\right). \tag{6.5.2}$$

Зауваження 6.5.2. Звернемо увагу, що лема 6.5.1 є комонотонним аналогом коопуклого випадку [38, Lemma 5.1] (див., зокрема, (5.3) там). Однак слід підкреслити різницю, а саме, якщо в [38] потрібно було взяти $n > N(Y_s)$, то тут лема 6.5.1 справедлива для довільних n.

Позначимо $\tilde{x}_j := \frac{(x_j + x_{j+1})}{2}$ і зауважимо, що $I_j = [\tilde{x}_j - \frac{\pi}{2n},\ \tilde{x}_j + \pi/(2n)]$.

Також покладемо,

$$\delta_j(x) := \frac{1}{1 + n|\sin\frac{1}{2}(x - x_j)|}.$$

Наступна лема схожа на [29, Lemma 4.3], де обговорювалося наближення до усічених лінійних функцій.

Лема 6.5.3. Нехай $\eta = 8s$. Тоді для кожного j такого, що $I_j \cap O = \emptyset$, існують тригонометричні поліноми $T_j \in \mathbb{T}_{cn}$ і $\bar{T}_j \in \mathbb{T}_{cn}$, такі, що гібридні поліноми

$$\tau_j(x) := \frac{1}{2\pi}x + T_j(x) \ \text{ та } \ \bar{\tau}_j(x) := \frac{1}{2\pi}x + \bar{T}_j(x), \tag{6.5.3}$$

задовольняють оцінкам

$$\left|\left(x - \tilde{x}_j\right)_+^0 - \tau_j(x)\right| \le c\delta_j^2(x), \quad \left|\left(x - \tilde{x}_j\right)_+^0 - \bar{\tau}_j(x)\right| \le c\delta_j^2(x),$$

$$x \in [\tilde{x}_j - 2\pi, \tilde{x}_j + 2\pi], \tag{6.5.4}$$

$$|\bar{\tau}_j{}'(x)| \le cn\delta_j^\eta(x)\pi(x) \ \text{ та } \ |\tau_j{}'(x)| \ge cn\delta_j^\eta(x)\pi(x),\ \ x \in \mathbb{R}, \tag{6.5.5}$$

і

$$\tau_j'(x)\Pi(x)\Pi(x_j) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ \text{ і}$$

$$\bar{\tau}_j'(x)\Pi(x)\Pi(x_j) \le 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \cup_{m\in\mathbb{Z}} I_{j+2mn}. \tag{6.5.6}$$

Нагадаємо, що $\Pi(x)$ було визначено в (6.1.3).

Доведення наступної леми подібне до [38, Lemma 6.2] із застосуванням леми 6.5.3.

Лема 6.5.4. Нехай E — правильний інтервал, який є об'єднанням $l \geq 12s$ з інтервалів I_j, і нехай множина $J \subseteq E$ є об'єднанням $1 \leq \mu \leq l/4$ таких інтервалів. Тоді існує тригонометричний поліном $T_n(x) = T_n(E, J; x)$ степеня $\leq cn$, що задовольняє

$$T_n'(x)\delta(x) \geq c_1 n \frac{l}{\mu}\left(\frac{1}{1+n\,\mathrm{dist}(x,E)}\right)^{\eta} \pi(x),\ x \in [\chi - \pi, \chi + \pi] \setminus E, \quad (6.5.7)$$

де χ — середина E і $\eta = 8s$; і

$$T_n'(x)\delta(x) \geq c_1 n \frac{l}{\mu} \pi(x),\ x \in J, \quad (6.5.8)$$

де можна взяти $c_1 \leq 1$,

$$T_n'(x)\delta(x) \geq -n\pi(x),\ x \in E \setminus J, \quad (6.5.9)$$

і для всіх $x \in \mathbb{R}$,

$$|T_n(x)| \leq cl^5 \sum_{j: I_j \subseteq E} \delta_j^2(x)\,. \quad (6.5.10)$$

Доведення теореми 4.3 (ескіз). Ми розбиваємо $\mathbb{R}$ на проміжки двох типів, де на сукупності інтервалів першого типу величина похідної S "мала", а решта — другого типу. Мета - визначити періодичний кусково-алгебраїчний поліном, похідна якого узгоджується з похідною S на проміжках першого типу і дорівнює нулю в іншому місці. Однак це неможливо і, натомість, ми маємо гібридний кусково-алгебраїчний поліном, комонотонний із S. Його "доповнення" до S, похідна якого узгоджується з похідною S на проміжках другого типу і обертається в нуль на проміжках першого, також є гібридним кусково-поліномом, який є комонотонним із S. Тоді можна застосувати лему

6.3.3 для апроксимації першого з цих поліномів гібридними тригонометричними поліномами, і застосувати лему 6.5.1 і лему 6.5.4 для апроксимації другого. Під час додавання двох гібридних поліномів лінійна частина зникає і отримується тригонометричний поліном, який є комонотонним із S та апроксимує його потрібним чином. □

6.6. Доведення теореми 6.4.3

Перша частина доведення майже дослівно повторює теорему [37, Theorem 4.5], з заміною другої похідної на першу у відповідних місцях і певними коригуваннями через це. Однак для поточного доведення будуть потрібні різні позначення, і для повноти ця частина того доведення буде повторена тут. Друга частина майже дослівно повторює доведення [38, Theorem 4.5], знову з відповідними замінами другої похідної на першу.

Почнемо з позначень. Дня даної $A \subset \mathbb{R}$ позначимо

$$A^e := \cup_{I_j \cap A \neq \emptyset} I_j, \qquad \text{та} \qquad A^{2e} := (A^e)^e.$$

Не порушуючи загальності, ми можемо припсутити, що

$$b(S) \leq 1, \tag{6.6.1}$$

тому, з огляду на (6.3.4), щоб довести твердження теореми, потрібно знайти поліном степеня $\leq cn$, такий, що

$$\|S - T_n\| \leq c, \tag{6.6.2}$$

і

$$T_n'(x)\delta(x) \geq 0, \; x \in \mathbb{R}. \tag{6.6.3}$$

Зафіксуємо $\eta = 8s$. Це робить $C_0(k, s, \eta)$, константу з (6.5.2), залежною лише від k і s, тому позначимо $c_2 := C_0(k, s, 8s)$. Зафіксуємо таке ціле число c_3, що

$$c_3 \geq \frac{1}{c_1} \max\{8k, 24s\}, \tag{6.6.4}$$

де c_1 — константа з (6.5.7), і, не порушуючи загальності, можна вважати, що n ділиться на c_3.

Розіб'ємо $\mathbb{R}$ на проміжки

$$E_q := \left[x_{(q-1)c_3}, x_{qc_3}\right] = I_{(q-1)c_3} \cup \ldots \cup I_{qc_3-1}, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Скажемо, що $j \in UC$ (від "Under Control"), якщо є $x \in I_j$ такий, що

$$\left|p_j'(x)\right| \leq 5c_2 n, \tag{6.6.5}$$

і також будемо казати, що $q \in G_1$, якщо E_q містить принаймні $2k-3$ інтервалів I_j з $j \in UC$. Будемо казати, що $q \in G$ (від «Good»), якщо або $q \in G_1$, або існує $q^* \in G_1$ такий, що

$$E_{q+\nu} \cap O \neq \emptyset, \quad \begin{cases} \nu = 0,1, \ldots, q^* - q, & \text{якщо } q^* > q, \\ \nu = 0, -1, \ldots, q^* - q, & \text{якщо } q^* < q. \end{cases} \tag{6.6.6}$$

Слід зауважити, що якщо $q \in G \setminus G_1$, то $|q - q^*| \leq 4s$. Отже, з (6.6.1), (6.6.5) і леми 6.3.2 випливає, що

$$\|S'\|_{E_q} \leq cn, \ q \in G. \tag{6.6.7}$$

Тепер покладемо

$$E := \cup_{q \notin G} E_q.$$

Розкладемо S на «малу» частину та «велику» шляхом введення

$$s_1(x) := \begin{cases} S'(x), & \text{якщо } x \notin E \\ 0, & \text{якщо } x \in E \end{cases}$$

і $s_2 := S' - s_1$. Нарешті, покладемо

$$S_1(x) \coloneqq S(0) + \int_0^x s_1(u)du,$$

та

$$S_2(x) := \int_0^x s_2(x)\, du.$$

(Варто зазначити, що s_1 і s_2 коректно визначені для $x \neq x_j, j \in \mathbb{Z}$, тому S_1 і S_2 коректно визначені скрізь і мають усі похідні, знову ж таки, для $x \neq x_j, j \in \mathbb{Z}$. Таким чином, відтепер кожного разу запис $S_\ell{}'(x)$ буде передбачати, що $x \neq x_j, 0 \leq j \leq n$.) З (6.6.6) випливає, що $S_1, S_2 \in \bar{\Sigma}_{k,n}(Y_s)$. Очевидно,

$$S_1'(x)\delta(x) \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

та

$$S_2'(x)\delta(x) \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Тепер, з (6.3.5) і (6.3.7) випливає

$$b(S_1) \leq c,$$

що, на підставі (6.6.1), дає змогу стверджувати, що

$$b(S_2) \leq c + 1 < [c + 2] =: c_4. \tag{6.6.8}$$

Множина E є об'єднанням неперетинних проміжків $F_p = [a_p, b_p]$, між будь-якими двома з яких є принаймні один проміжок E_q, з $q \in G$. Можна припустити, що $n > c_3 c_4$, і написати $p \in AG$ (від "Almost Good"), якщо F_p складається з не більш ніж c_4 проміжків E_q, зокрема, він складається не більше ніж з $c_3 c_4$ проміжків I_j. Покладемо

$$F := \cup_{p \notin AG} F_p,$$

і нехай

$$s_4 := \begin{cases} S'(x), & \text{якщо } x \in F, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

та, відповідно $s_3 := S' - s_4$. Тепер покладемо

$$S_3(x) := S(0) + \int_0^x s_3(u)du, \qquad (6.6.9)$$

та

$$S_4(x) := \int_0^x s_4(u)du. \qquad (6.6.10)$$

Таким чином, ми отримали два кусково-алгебраїчні поліноми

$$S_3 \in \bar{\Sigma}_{k,n}(Y_s) \cap \Delta^{(1)}(Y_s) \quad \text{та}$$

$$S_4 \in \bar{\Sigma}_{k,n}(Y_s) \cap \Delta^{(1)}(Y_s), \qquad (6.6.11)$$

з наступними властивостями.

Їхні похідні $s_4 := S_4{}'$ і $s_3 := S_3'$ (які визначені для $x \neq x_j$) є 2π-періодичними з носіями, які є об'єднаннями проміжків E_ν, позначених F і $\overline{\mathbb{R}\backslash F}$ відповідно. Крім того, існує константа c_4 така, що кожен зв'язний компонент F_p об'єднання F складається з більш ніж c_4 інтервалів E_ν, кожен з яких має не більше $2k - 4$ проміжків I_j таких, що

$$\min_{x \in I_j} \left| p_j'(x) \right| \leq 5c_2 n, \qquad (6.6.12)$$

і

$$b\left(S_4, F_p^{2e}\right) = b\left(S_2, F_p^{2e}\right) \leq c_4. \qquad (6.6.13)$$

Крім того,

$$\|s_3\| \leq cn,$$

і

$$S \equiv S_3 + S_4.$$

Отже, кусково-алгебраїчні поліноми S_3 і S_4 мають вигляд

$$S_3(t) = \tilde{S}_3(t) + at \quad \text{та} \quad S_4(t) = \tilde{S}_4(t) - at,$$

де $\tilde{S}_3, \tilde{S}_4 \in \tilde{\Sigma}_{k,n}(Y_s)$ і

$$a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_3(t)dt,$$

звідки

$$|a| \le \|s_3\| \le cn.$$

Отже,

$$b(S_3) = b(\tilde{S}_3) \le \frac{c}{n} \|s_3\| \le c, \tag{6.6.14}$$

що, у свою чергу, разом з (6.4.10), дає змогу стверджувати, що

$$b(\tilde{S}_4) = b(S_4) \le \lceil c + 1 \rceil =: c_5. \tag{6.6.15}$$

Будемо окремо апроксимувати S_3 і S_4, щоб досягти необхідного наближення.

Із леми 6.3.3 у поєднанні з (6.3.4) та (6.6.14) випливає, що існує тригонометричний поліном $\tilde{T}_n$ степеня $\le cn$ такий, що

$$(\tilde{T}_n'(x) + a)\delta(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6.6.16}$$

і

$$\|\tilde{S}_3 - \tilde{T}_n\| \le c. \tag{6.6.17}$$

Таким чином, залишається наблизити S_4.

Застосовуючи лему 6.5.4, побудуємо два тригонометричні поліноми $\bar{T}_n$ і $\hat{T}_n$ степеня $< cn$, і нехай $D_{n_1}(S_4;\cdot)$ степеня cn_1 був визначений в лемі 6.5.1, з $n_1 := c_5 n$.

Почнемо з $\bar{T}_n$. Для кожного ν, для якого $E_\nu \subseteq F$, нехай J_ν — об'єднання всіх проміжків $I_j \subseteq E_\nu$ таких, що виконується (6.6.12). Таким чином, кількість μ_ν таких проміжків становить не більше $2k - 4 < c_3/4$, а загальна кількість проміжків у E_ν становить c_3. Отже, лема 6.5.4 застосовна для кожного E_μ, і якщо покласти

$$\bar{T}_n := \sum_{E_\nu \subseteq F \cap I} T_n(E_\nu, J_\nu; \cdot) ,$$

(вважаємо $T_n(E_\nu, J_\nu;\cdot) \equiv 0$ у разі, якщо $J_\nu = \emptyset$) і позначити

$$J := \bigcup_{E_\nu \subseteq F} J_\nu,$$

то ми отримаємо, що $\bar{T}_n$ задовольняє

$$\begin{aligned} &\bar{T}_n'(x)\delta(x) \geq \ 0, && x \in \mathbb{R} \setminus F, \\ &\bar{T}_n'\ (x)\delta(x) \geq -n\pi(x), && x \in \ F \setminus J, \\ &\bar{T}_n'(x)\delta(x) \geq 4n\pi(x), && x \in \ J. \end{aligned} \tag{6.6.18}$$

Варто зауважити, що (6.6.18) справджується, оскільки для будь-якого заданого x усі відповідні $T_n'(E_\nu, J_\nu; x)$, окрім, можливо, одного, мають однаковий знак, а якщо $J_\nu \neq \emptyset$, то $\frac{c_1 c_3}{\mu_\nu} \geq 4$, оскільки $\mu_\nu \leq 2k - 4$ і $c_1 c_3 \geq 8k$.

Нарешті, з (6.5.10) випливає, що

$$\|\bar{T}_n\| \leq c. \tag{6.19}$$

Далі визначимо $\hat{T}_n$. Нехай для кожного $F_\lambda \subset F$ через J_{λ^-} позначається об'єднання двох інтервалів I_j з лівого краю F_λ^e, і нехай J_{λ^+} позначає об'єднання двох інтервалів I_j з правого краю F_λ^e. Крім того, нехай F_{λ^-} і F_{λ^+} - це замкнуті проміжки, кожен з яких складається з $l := c_3 c_4$ інтервалів I_j і таких, що $J_{\lambda^-} \subset F_{\lambda^-} \subset F_\lambda^e$ і $J_{\lambda^+} \subset F_{\lambda^+} \subset F_\lambda^e$.

Нарешті, покладемо

$$J_\lambda^* := J_{\lambda^-} \cup J_{\lambda^+} \quad \text{та} \quad J^* := \cup_{\lambda : F_\lambda \subseteq F} J_\lambda^*.$$

Тепер покладемо

$$\hat{T}_n := \sum_{\lambda:\, mid\, F_\lambda \in [-\pi,\pi)} (T_n(F_{\lambda^+}, J_{\lambda^+}; \cdot) + T_n(F_{\lambda^-}, J_{\lambda^-}; \cdot)).$$

Оскільки $l = c_3 c_4$, то з (6.6.4) випливає, що $c_1 \frac{l}{\mu} \geq 2c_4$ для $\mu = 2$, так що знову за Лемою 6.5.4,

$$a) \hat{T}_n'(x)\delta(x) \geq -2n\pi(x), \quad x \in F \setminus J^*,$$

$$b) \hat{T}_n'(x)\delta(x) \geq 2c_4 n\pi(x), \quad x \in J^*, \tag{6.6.20}$$

$$c) \hat{T}_n'(x)\delta(x) \geq 2c_4 n\pi(x) \left(\frac{1}{(n \operatorname{dist}(x, F))} \right)^\eta \quad x \in \mathbb{R} \setminus F^e,$$

де в останній нерівності був використаний той факт, що

$$1 + n\operatorname{dist}(x, F^e) < n\operatorname{dist}(x, F), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus F^e.$$

Нарешті, з (6.5.10) легко бачити, що

$$\|T_n\| \leq c. \tag{6.6.21}$$

Третій допоміжний поліном, властивості якого нам потрібно згадати, це $D_{n_1}(x) := D_{n_1}(\tilde{S}_4, x)$. Оскільки $n_1 = c_5 n$, за лемою 6.5.4 та (6.6.15), ми маємо

$$\left\| S_4 - D_{n_1} \right\| \leq c, \tag{6.6.22}$$

і для будь-якого правильного інтервалу E і всіх $x \in E$,

$$\left| \tilde{S}_4'(x) - D_{n_1}'(x) \right| \leq c_2 n\pi(x) b(\tilde{S}_4, E) + c_2\, n\pi(x) \left(\frac{1}{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R} \setminus E)} \right)^\eta. \tag{6.6.23}$$

Покладемо

$$\overline{T}_n := D_{n_1} + c_2\bar{T}_n + c_2\hat{T}_n. \tag{6.6.24}$$

На підставі (6.6.19), (6.6.21) та (6.6.22) ми отримуємо

$$\left\|\tilde{S}_4 - \overline{T}_n\right\| \le c,$$

що разом з (6.6.17) доводить (6.6.2) для $T_n := \overline{T}_n + \tilde{T}_n$. Таким чином, з огляду на (6.6.16), щоб завершити доведення теореми 6.4.3, потрібно довести

$$\left(\overline{T}_n'(x) - a\right)\delta(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.6.25}$$

Оскільки (6.6.23) виконується для будь-якого правильного інтервалу E, ми будемо надалі зазначати, для яких проміжків ми її використовуємо, оскільки "потрібні" відрізки в кожному з випадків будуть різними.

Для $x \in F_\lambda \setminus J_\lambda^*$ достатньо взяти $E := F_\lambda$.

Оскільки справедливо $S_4'(x) = S'(x), x \in F_\lambda$, то (6.3.2) випливає, що $b\left(\tilde{S}_4, F_\lambda\right) = b(S_4, F_\lambda) = b(S, F_\lambda) \le 1$.

Отже,

$$\left|S_4'(x) - D_{n_1}'(x)\right| \le c_2 n\pi(x) b(S_4, F_\lambda) + c_2 n\pi(x)$$

$$\le 2c_2 n\pi(x), \; x \in F_\lambda \setminus J_\lambda^*. \tag{6.6.26}$$

Якщо $x \in J_\lambda^*$, то достатньо взяти $E := F_\lambda^{2e}$ і, так само (6.6.13) і (6.6.23) дають змогу записати

$$\left|S_4'(x) - D_{n_1}'(x)\right| \le c_2 n\pi(x) b\left(S_4, F_\lambda^{2e}\right) + c_2 n\pi(x)$$

$$\le c_2(c_4 + 1) n\pi(x), \; x \in J_\lambda^*. \tag{6.6.27}$$

Нарешті, якщо $x \notin F^e$, то ми вважаємо E замиканням зв'язної компоненти $\mathbb{R}\setminus F$, що містить x. Тоді, за (6.6.23),

$$\left|\tilde{S}_4'(x) - D_{n_1}'(x)\right| \le c_2 n\pi(x) b(\tilde{S}_4, E) +$$

$$c_2 c_5 n\pi(x) \frac{n}{n_1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}\setminus E)}\right)^{\eta} \qquad (6.6.28)$$

$$= c_2 n\pi(x)\left(\frac{1}{n\operatorname{dist}(x,F)}\right)^{\eta}, \qquad x \notin F^e$$

де був використаний той факт, що $\tilde{S}_4'$ є константою на E.

Оскільки за (6.6.24),

$$\left(\overline{T}_n'(x) - a\right)\delta(x) = c_2\overline{T}_n'(x)\delta(x) + c_2\widehat{T}_n'(x)\delta(x)$$

$$+S_4'(x)\delta(x) + \left(D_{n_1}'(x) - \tilde{S}_4'(x)\right)\delta(x)$$

$$\ge c_2\overline{T}_n'(x)\delta(x) + c_2\widehat{T}_n'(x)\delta(x)$$

$$+S_4'(x)\delta(x) - |\tilde{S}_4{}'(x) - D_{n_1}'(x)|,$$

то з (6.6.18)c), (6.6.20)a), (6.6.11) та (6.6.26) випливає, що

$$\left(\overline{T}_n'(x) - a\right)\delta(x) \ge c_2 n\pi(x)(4 - 2 + 0 - 2) = 0, \qquad x \in J_\lambda \setminus J_\lambda^*.$$

Якщо $x \in F_\lambda \setminus (J_\lambda \cup J_\lambda^*)$, то x не задовольняє (6.6.12), а саме:

$$S_4'(x)\delta(x) > 5c_2 n \ge 5c_2 n\pi(x).$$

Отже, з огляду на (6.6.18)b), (6.6.20)a) та (6.6.26), отримуємо наступне

$$\left(\overline{T}_n'(x) - a\right)\delta(x) \ge c_2 n\pi(x)(-1 - 2 + 5 - 2) = 0, \qquad x \in F_\lambda \setminus (J_\lambda \cup J_\lambda^*).$$

Далі, якщо $x \in J^*$, то за (6.6.8), (6.6.18), (6.6.20) b), (6.6.11), і (6.6.27), маємо

$$\left(\overline{T}_n'(x) - a\right)\delta(x) \ge c_2 n\pi(x)\left(-1 + 2c_4 + 0 - (c_4 + 1)\right) \ge 0, \qquad x \in J^*,$$

і, нарешті, з (6.6.18)a), (6.6.20)c), (6.6.11) і (6.6.28) випливає (6.6.25) для $x \notin F^e$, оскільки

$$\left(\overline{T}_n'(x) - a\right)\delta(x) \geq c_2 n\pi(x)(0 + 2c_4()^\eta + 0 - ()^\eta) \geq 0, \;\; x \notin F^e.$$

Таким чином, (6.6.25) виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$, а отже, був побудований поліном

$$T_n := \overline{T}\_n + \tilde{T}_n,$$

який задовольняє (6.6.2) та (6.6.3), для кожного $n > c$, яке є кратним c_3. Для всіх інших n теорема 6.4.3 випливає з наступного включення

$$\Sigma_{k;n}(Y_s) \subseteq \Sigma_{k,c_{3n}}(Y_s).$$

Це завершує доведення для випадку $F \neq \mathbb{R}$. Якщо $F = \mathbb{R}$, то можна покласти $S_4 := S$ (звідки $S_3 := 0$ і $c_4 = 1$), $c_5 = 2$ і $F_\lambda := [x_{2(p-1)c_3}, x_{2pc_3}]$ і отримати потрібне твердження.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі було представлено чотири наукових результати.

Кожен з них стосувався основної задачі теорії наближення.

У ролі функцій, які необхідно було наближувати, виступали неперервні на відрізку функції; неперервні функції з певними додатковими умовами, визначені на кривій у комплексній площині, з фіксованим набором точок на цій кривій, де функція змінює свій знак; сума періодичної та лінійної; періодичні функції з фіксованим набором точок у яких вони змінюють свою монотонність.

У ролі інструментів, які наближують зазначені вище функції, виступали звичайні алгебраїчні поліноми; гармонічні поліноми, визначені на кривій на комплексній площині з заданим набором точок на цій кривій, у яких значення поліномів змінюють свій знак; гібридні поліноми, які є сумами тригонометричного полінома та лінійної функції та які змінюють монотонність у наперед заданому наборі точок; нарешті, просто тригонометричні поліноми, які змінюють монотонність у наперед заданому наборі проміжних точок.

Загалом, у ролі інструментів виступали сплайни – так чи інакше пов'язані з поліномами – які зберігали ту саму важливу властивість, якою володіли функції, які необхідно було наближувати.

Кожне з досліджень мало свою мотиваційну частину і мету. В усіх випадках мети вдалося досягти і отримати бажані результати.

Більш конкретно, результати полягали в наступному:

1. Встановлено поточкові оцінки для нерівності Вітні, які, на відміну від класичної рівномірної нерівності Вітні, свідчать про суттєве покращення (на

порядки) похибки відхилення многочлена найкращого наближення у внутрішніх точках відрізка.

2. Доведена нерівність типу Дзядика для наближення на кривій дійснозначної функції комплексного аргумента гармонічними алгебраїчними поліномами із збереженням проміжків знакосталості функції.

3. Доведено справедливість оцінки Джексона для випадку наближення гібридними поліномами із збереженням проміжків монотонності функції.

4. Отримані оцінки типу Джексона-Зигмунда-Ахієзера-Стечкіна наближення періодичних функцій із збереженням проміжків монотонності.

Перший наведений результат є важливим для можливого покращення оцінки в нерівності Вітні загалом у подальшому. А саме шляхом певної видозміни полінома Крякіна – полінома, який «забезпечує» наразі відому оцінку і який досліджується у відповідному розділі дисертаційної роботи – досягти того, що оцінка біля кінців відрізка «покращиться», всередині «погіршиться», але загальна рівномірна таким чином «покращиться». Оцінка всередині є кращою на порядки, а отриманий результат дозволяє краще розуміти, на скільки можна погіршувати цю оцінку всередині, щоб це не погіршувало загальну рівномірну – якщо діяти за наведеною вище в цьому абзаці схемою.

Другий є узагальненням отриманого раніше результату на більш широкий клас функцій – а саме зі слабшою умовою на модуль неперервності цієї функцій на цій кривій у комплексній площині. «Старою» умовою була умова Ліпшица, тобто модуль неперервності $\omega(f,t) = t^{\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$; «новою» - існування такого $\gamma \in (0;1)$, що $\gamma\omega(f,2t) \geq \omega(f,t)$, де $\omega(f,t)$ – модуль неперервності функції f на кривій . На жаль, наявне доведення не дозволяє отримати даний результат для довільного модулю неперервності – без вказаної умови воно не буде працювати – але є більш сильним результатом у порівнянні з тим, що було доведено для знакозберігаючого наближення дійснозначної функції комплексної змінної на кривій у комплексній площині раніше.

Інші два результати стосувались спроби отримати нерівності типу Джексона для комонотонного наближення. При цьому перший з наведених результатів (3-й у списку, представленому вище) є фактично допоміжним для отримання другого (4-го у списку). Перший стосується наближення функцій, які є сумою періодичної та лінійної, гібридними поліномами, які є сумою тригонметричних та лінійних поліномів. Це використовується впродовж доведення другого, який, у свою чергу, стосується комонтонного наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами.

Зокрема, для всіх порядків похідної доведена справедливість нерівності Джексона для кусково-монотонного наближення, яка раніше була відома лише для одного (нульвого) випадку.

Дисертація містить наукові положення та нові науково обґрунтовані теоретичні результати проведених досліджень у галузі знань «математика та статистика» – а саме присвячені формозберігаючим наближенням та інструментам задля відповідних доведень.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати стосуються теорії наближень загалом та теорії формозберігаючого наближення зокрема. Результати, запропоновані в дисертації, можуть бути корисними при подальших дослідженнях у цих напрямках.

Основні результати роботи опубліковані в трьох наукових статтях, із них одна самостійна стаття у фаховому журналі, ще одна самостійна стаття в журналі, індексованому в науко-метричних базах Scopus та Web of Science, ще одна, у співавторстві, в журналі із індексу Q1, а також у тезах конференцій .

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Dai, M., Loguinov, D., Radha, H.M., Rate-distortion analysis and quality control in scalable Internet streaming, IEEE Transactions on Multimedia, 8 (2006), N6, 1135-1146.

2. Tian, D.-G., Huang, Y.-Q., Computation of channel capacity based on self-concordant functions, Journal of Electrical and Computer Engineering, 2012 (2012), Article ID 318946, 9 p.

3. Vladimir Kodnyako, Directional splines for economic analytics, Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, 54 (2020), N3, 129-144, DOI: 10.24818/18423264/54.3.20.08

4. Щеглов М.В. Поточкова оцінка відхилення полінома Крякіна від неперервної на відрізку функції //Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка.- 2019, №1-С. 12 – 14.

5. D. Leviatan, M. V. Shcheglov and I. A. Shevchuk, Comonotone approximation by hybrid polynomials// J. Math. Anal. Appl., DOI: 10.1016/j.jmaa.2023.127286.

6. Щеглов М.В. «Поточкова оцінка відхилення полінома Крякіна від неперервної на відрізку функції»//Міжнародна наукова конференція «Албраїчні та геометричні методи аналізу» (АГМА), Одеса, Україна, 28 травня – 3 червня 2019, с.73.

7. Shchehlov M., Pointwise estimate of deviation of Kriakin polynomial from a function, continuous on a segment // 9th International Online Conference MADEA-9. Bishkek, Kyrgys Republic, 21-25 June 2021, p. 72-73.

8. Щеглов М.В. Поточкова оцінка знакозберігаючого наближення на кривих у комплексній площині// IV міжнародна наукова та практична конференція «Сучасні дослідження у світовій науці», SPC "Sci-conf.com.ua", Львів, Україна, 10-12 липня 2022, ст. 376-379.

9. Shchehlov M. Approximation of the auxiliary function in the copositive approximation// Proceedings of the 7th International scientific and practical conference «Scientific progress: innovations, achievements and prospects», MDPC Publishing. Munich, Germany, 3-5 April 2023, p.266-269.

10. Shchehlov M. «Comonotone approximation of periodic functions»// Proceedings of the 7th International scientific and practical conference «Innovations and prospects in modern science», SSPG Publish. Stockholm, Sweden, 28-30 August 2023, p.83-87.

11. Щеглов М.В.«Поточкова оцінка знакозберігаючого наближення на кривих у комплексній площині»// Український математичний журнал, Vol 74 No 4 (2022), ст. 572-576.

12. Karl-Georg Steffens, The History of Approximation Theory: From Euler to Bernstein// Birkhäuser, 2006.

13. N.L.Carothers, A short course on Approximation theory// Bowling Green State University, 2009.

14. Шевчук І. О., Примак А. В. Теорія наближень/ Навч. посібник для студентів мех.-мат. факультету.// Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2011.

15. Andrievskii, V. V. Application of Dzyadyk's Polynomial Kernels in the Constructive Function Theory// *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, Vol. 71, no. 2, Feb. 2019, pp. 151-158.

16. Hassler, Whitney. On Functions with Bounded nth Differences// *J. Math. Pures Appl*. **36** (IX), 1957: pp.67–95.

17. P. Binev. O(n) bounds of Whitney constants. //C. R. Acad. Bulgare Sci.,35. 1985.

18. Yu.V. Kryakin, Whitney's constants and Sendov's Conjectures, Mathematica Balcanika, 2002.

19. Bl. Sendov. On the constants of H. Whitney, C.R. Acad. Bulg. Sci., 35, 1982, 431-434.

20. J.Gilewicz, I.A.Shevchuk, Yu.V.Kryakin “Boundedness by 3 of the Whitney Interpolation Constant” JAT 119, 2002 pp. 271-290.

21. L.M.Kosic, G.V.Milovanovic, Shape Preserving Approximation by polynomials and splines// Computer & Mathematic with Application, Vol.33, Is 11, 1997, pp 59-97.

22. D.J Newman, E.Passow, L Raymon, Piecewise monotone polynomial approximation// Trans. Amer. Math. Soc., 172, 1972, pp. 465-472

23. M.G.Pleshakov, P.A.Popov, Sign-Preserving Approximation of Periodic Functions// Ukrainian Mathematical Journal 55, 2003, pp. 1314-1328.

24. G. Dzyubenko, V. Voloshyna and L. Yushchenko, Negative results in coconvex approximation of periodic functions// JAT, 267:105582 2021, pp. 1-11.

25. G. Dzyubenko and M. G. Pleshakov. Comonotone approximation of periodic functions// Math. Notes, 83, 2008, pp. 180-189.

26. V.V. Andriewskii, Pointwise Copositive Polynomial Approximation on Arcs in the Complex plane// Computational Methods and Function Theory, Vol. 13, 2013, pp. 493-508.

27. В.К.Дзядик, Введення в теорію рівномірного наближення поліномами// Головна редакція фізико-математичної літератури, СРСР, 1977.

28. І.О.Шевчук, Наближення многочленів і сліди неперервних на відрізку// Наукова думка, 1992, ст. 189-193.

29. D. Leviatan, O. V. Motorna and I. A. Shevchuk, Coconvex Approximation by Hybrid Polynomials, Mediter. J. Math., 19:245 (2022), pp. 1-16.

30. M. G. Pleshakov, Comonotone Jackson's inequality// JAT 99, 1999, pp. 409-421.

31. R. Salem and A. Zygmund, The approximation by partial sums of Fourier series// Trans. Amer. Math. Soc. 59, 1946, pp. 14-22.

32. Ronald A. DeVore and George G. Lorentz, Constructive approximation, //Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993, pp. X+449.

33. G. Dzyubenko, Comonotone approximation of twice dierentiable periodic functions, Ukrainian Mat. J., 61 2009, pp. 519-540.

34. G. Dzyubenko, Orders of comonotone approximation of periodic functions// Transactions of the Institute of mathematics NAS of Ukraine, 10, #1, 2013, pp. 110-125.

35. D. Leviatan, O. V. Motorna and I. A. Shevchuk, Fast decreasing trigonometric polynomials and applications, J. Fourier Anal. Appl. (submitted).

36. D. Leviatan and I. A. Shevchuk, Some positive results and counterexamples in comonotone approximation II//JAT, 100 (1999), pp. 113-143.

37. D. Leviatan and I. A. Shevchuk, Coconvex approximation// JAT, 118, 2002, pp. 20-65.

38. D. Leviatan and I. A. Shevchuk, Coconvex approximation of periodic functions// Constr. Approx. 57, 2023, pp. 695-726.

39. G. G. Lorentz and K, L. Zeller, Degree of approximation by monmotone polynomials I// JAT, 1, 1968, pp. 501-504.