УДК 517.988 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.9

О. Ф. Кашпур, *к.ф.-м.н., доц.*

Умови розв'язуваності систем нелінійних рівнянь в евклідових просторах

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: olena.kashpur@gmail.com

O. F. Kashpur, *Ph.D., Associate Prof.*

Conditions for the solvability of nonlinear equations systems in Euclidean spaces

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: olena.kashpur@gmail.com

В роботі одержано умови розв'язуваності систем нелінійних (поліноміальних) рівнянь. Показано, що одержані умови еквівалентні умовам існування інтерполяційного полінома мінімальної норми першого степеня в евклідовому просторі.

Ключові слова: Інтерполяційний поліном, система нелінійних рівнянь, евклідовий простір, умови розв'язуваності.

The solution of many applied problems is to find a solution of nonlinear equations systems in finite-dimensional Euclidean spaces. The problem of finding the solution of a nonlinear system is divided into two problems: 1. The existence of a solution of a nonlinear equations system; in the case of nonunique of the solution, it is necessary to find the number of these solutions and their surroundings. 2. Finding the solution of a system of nonlinear equations with a given accuracy. Many publications are devoted to solving problem 2, namely the construction of iterative methods, their convergence and estimates of the solution accuracy. In contrast to problem 2, for problem 1 there is no general algorithm for solving this task, there are no constructive conditions for the existence of a solution of a nonlinear equations system in Euclidean spaces.

In this article, in finite-dimensional Euclidean spaces, the constructive conditions for the existence of a solution of nonlinear systems of polynomial form are found. The connection of these conditions with the linear polynomial interpolant of the minimum norm, generated by a scalar product with Gaussian measure and the conditions of its existence, is given.

Key Words: Interpolation polynomial, system of nonlinear equations, Euclidean space, solvability conditions.

Статтю представив проф. Анісімов А.В.

1 Вступ

Розв'язання багатьох прикладних задач зводиться до пошуку розв'язку систем нелінійних рівнянь в скінченновимірних евклідових просторах. Такі задачі виникають у випадку пошуку екстремума функції багатьох змінних, при застосуванні неявних методів інтегрування звичайних диференційних рівнянь та ін. Як відомо задача знаходження розв'язку нелінійної системи розпадається на дві задачі:

1. Питання про існування та єдиність розв'язку системи нелінійних рівнянь; у випадку неєдиності розв'язку потрібно знайти кількість цих розв'язків та їх окіл.

2. Знаходення розв'язку системи нелінійних рівнянь із заданою точністю.

Багато публікацій присвячено розв'язанню задачі 2 [1]–[3], а саме побудові ітераційних методів, питанням їх збіжності та оцінкам точності знайденого розв'язку. В [3] доведено теореми про знаходження розв'язку нелінійної системи в евклідових просторах, у випадку коли відомі деякі координати її розв'язку. На відміну від задачі 2, для задачі 1 не існує загального алгоритму розв'язання поставленої задачі, тобто не існує конструктивних умов існування розв'язку системи нелінійних рівнянь в евклідових просторах. Як і для одного нелінійного рівняння локалізація коренів нелінійної системи може бути зроблена за допомогою методів математичного аналізу на основі інформації про систему. У випадку системи нелінійних рівнянь з двома невідомими достатньо зручним є графічний метод. Але якщо змінних більше ніж дві, то для отримання відповіді на питання про існування розв'язку системи та знаходження його околу потрібно використовувати методи математичного аналізу. Зауважимо, що в [4] наведено обзор теорем та тверджень, за допомогою яких можна з'ясувати питання про існування розв'язку нелінійної системи, але умови ці не є конструктивними. В деяких випадках знайдено умови існування розв'язку систем нелінійних рівнянь [5]. В [6] наведено умови розв'язуваності нелінійної системи, але вони містять початкове наближення із околу кореня, тобто це означає, що розв'язок системи існує. В роботі наведено конструктивні умови існування розв'язку нелінійних систем поліноміального вигляду в скінченновимірних евклідових просторах. Наведено зв'язок цих умов з поліноміальним інтерполянтом першого степеня в евклідових просторах та умовами його існування. Перейдемо до опису структури роботи.

Перший розділ містить відомі результати, що необхідні для подальшого викладу. Другий розділ присвячений умовам існування розв'язку систем нелінійних (поліноміальних) рівнянь та показано, що вони еквівалентні умовам існування інтерполяційного полінома першого степеня, значення якого на спеціальних інтерполяційних вузлах збігаються з відповідною лінійною системою алгебраїчних рівнянь, тобто лінійною системою, до якої зводиться система поліноміальних рівнянь за допомогою певної заміни змінних. Закінчується стаття висновками. Виклад ілюструється рядом конкретних прикладів.

2 Допоміжні результати

Наведемо результати, що будуть використані для подальшого викладення матеріалу. Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\alpha_{j1}x_1 + \alpha_{j2}x_2 + \dots + \alpha_{jn}x_n - y_j = 0, \qquad (1)$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Відповідно до [7] введемо такі означення.

Означення 2.1. Мінор Δ, що недорівнює нулю та складається із коефіцієнтів при невідомих системи (1) назвемо вузловим мінором цієї системи, якщо відношення до нього всіх визначників, що отримані із Δ додаванням ще одного стовбчика - вектора правих частин та будь-якого рядка матриці, невід'ємне. Останні мінори називають супроводжуючими.

Означення 2.2. Вузловий мінор Δ системи (1) назвемо невід'ємно (недодатньо) орієнтованим відносно невідомого x_k, якщо виконується одна із двох умов:

1. Жоден із коефіцієнтів при x_k системи (1) не є елементом мінора Δ.

2. Відношення мінора Δ до визначника, який отримано із Δ при заміні стовбчика коефіцієнтів при x_k стовбчиком відповідних правих частин системи (1), невід'ємне (недодатнє).

Означення 2.3. Послідовність чисел $s_1, s_2, \dots, s_m$ назвемо цілком Δ-допустимою, якщо виконуються такі умови:

1. Δ є вузловим мінором системи (1).

2. Чи мінор Δ містить стовбчик, що визначається коефіцієнтами при x_k із системи (1) і при заміні елементів цього стовбця відповідними вільними членами y_j перетворюється на нуль, а при заміні відповідними числами s_j перетворюється на визначник Δ^*, що відповідає співвідношенню $\dfrac{\Delta^*}{\Delta} \leqslant 0$; чи Δ не перетворюється на нуль у випадку першої заміни чи взагалі не містить стовбця із коефіцієнтів при x_k.

Означення 2.4. Якщо існує вузловий мінор Δ системи (1) такий, що сукупність чисел $s_1, s_2, \dots, s_m$ цілком Δ-допустима відносно кожного із невідомих $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ (з одним і тим самим Δ), то назвемо цю послідовність цілком Δ-допустимою відносно сукупності цих невідомих.

На підставі доведеного в [7] має місце

Теорема 2.1. *(С. М. Черніков) Для того, щоб система лінійних рівнянь (1) мала хоча б один розв'язок строго від'ємний (строго додатній) відносно сукупності невідомих $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ і недодатній (невід'ємний) відносно сукупності інших невідомих $x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_t}$, $0 \leqslant t \leqslant n-1$ необхідно та достатньо, щоб виконувалась одна із умов:*

1. $y_j = 0$ та $s_j = \sum_{i=1}^{k} a_{jn_i} = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$.

2. Система (1) має хоча б один недодатньо (невід'ємно) орієнтований відносно сукупності невідомих $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ та $x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_t}$ вузловий мінор Δ такий, що послідовність чисел $s_1, s_2, \dots, s_m$ є цілком Δ-допустимою відносно сукупності цих невідомих.

Зазначимо, що в [8] також доведено теореми про знаки розв'язків системи (1). Але для перевірки виконання умов цих теорем потрібно обчилювати C_n^r визначників порядку r, де r - ранг матриці системи, n - число невідомих.

В подальшому в роботі буде показано зв'язок між умовами існування розв'язку нелінійної системи рівнянь та умовою існування інтерполяційного полінома в евклідовому просторі. У зв'язку із цим розглянемо розв'язання лінійної інтерполяційної задачі в скінченновимірному евклідовому просторі. Нехай $f : E_n \to R_1$, E_n – n-вимірний евклідовий простір, $u \in E_n$, $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Інтерполяційний поліном першого степеня для $f(u)$ має вигляд

$$P_1(u) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \tag{2}$$

та відповідає інтерполяційним умовам

$$P_1(u_k) = f(u_k) = y_k,\ k = \overline{0,m},\ y_0 = 0, \tag{3}$$

де $u_k,\ k = \overline{0,m}$ – вузли інтерполяції:

$$\begin{gathered} u_0 = (0, 0, \dots, 0), \\ u_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}), \\ u_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_m = (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mn}). \end{gathered} \tag{4}$$

На підставі теореми з [9] маємо:

Теорема 2.2. *Для розв'язання інтерполяційної задачі (2)-(4) необхідно та достатньо виконання рівності*

$$(E - \Gamma^+\Gamma)y = 0, \tag{5}$$

де $y = (0, y_1, y_2, \dots, y_m)$, $\Gamma = \| \sum_{p=o}^{1} (u_i, u_j)^p \|_{i,j=0}^m$, $0^0 = 1$, $(\cdot,\cdot)$ – *скалярний добуток в* E_n, Γ^+ – *псевдообернена матриця Мура-Пенроуза [10] до матриці* Γ, E – *одинична матриця розмірності* $(m+1) \times (m+1)$.

При виконання умови (5) поліном

$$P_1(u) = \left\langle y, \Gamma^+ \sum_{p=o}^{1} (u_i, u)^p \|_{i=0}^m \right\rangle$$

є розв'язком задачі (2)-(4), що має мінімальну норму, породжену скалярним добутком з гаусовою мірою [12], де $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=0}^m \alpha_i \beta_i$, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$.

В [11] показано, що умова (5) є аналогом теореми Кронекера-Капеллі розв'язуваності системи лінійних алгебраїчних рівнять (1).

3 Умови розв'язуваності систем нелінійних рівнянь

Розглянемо систему нелінійних рівнянь над полем дійсних чисел вигляду:

$$\alpha_{j1} z_1^k + \alpha_{j2} z_2^k + \dots + \alpha_{jn} z_n^k - y_j = 0, \tag{6}$$
$$k \in N,\ j = 1, 2, \dots, m.$$

Систему (6) будемо називати поліноміальною системою. Постає питання про існування її розв'язку. Введемо позначення: $z_i^k = x_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ та підставимо в (6).

В результаті підстановки система (6) набуває вигляду:

$$\alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2 + \dots + \alpha_{jn} x_n - y_j = 0, \tag{7}$$
$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Отже, отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Умовою існування розв'язку (7) є виконання умови (5). В [11] надано зв'язок між умовами розв'язності систем лінійних рівнянь та поліноміальним інтерполянтом першого степеня в евклідових просторах і умовами його існування. Оскільки поліноміальна система зводиться до (7), то умова існування розв'язку нелінійної системи (6) також буде еквівалентна умовам існування інтерполяційного полінома першого степеня в евклідовому просторі.

Розглянемо систему (6) у випадку, коли k – непарне. Задача розв'язання поліноміальної системи звелась до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (7). Її розв'язок існує, якщо виконується умова (5). Таким чином маємо:

Теорема 3.1. *Нехай в (6)* $k = 2l - 1, l \in N$ *та виконується умова (5) теореми 2.2. Тоді система поліноміальних рівнянь (6) над полем дійсних чисел має розв'язок.*

Нехай в (6) k є парним. Одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (7) із обмеженнями

$$x_k \geqslant 0,\ \ k = 1, 2, \dots n. \tag{8}$$

Для того, щоб існував розв'язок системи (7) з умовами (8) необхідно щоб виконувались умови теореми 2.2, а виконання нерівностей (8) забезпечує виконання умов теореми 2.1. Одержали такий результат:

Теорема 3.2. *Нехай в (6) $k = 2l, l \in N$ та для системи (7) виконуються умови теорем 2.1 та 2.2. Тоді система нелінійних рівнянь (6) над полем дійсних чисел має розв'язок.*

Проілюструємо застосування теореми 3.2 на наступному прикладі.

Приклад 1. З'ясувати, чи існує розв'язок системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - z_4^2 = 0, \\ z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2 = 1, \\ 2z_1^2 - z_2^2 - 2z_3^2 + z_4^2 = -1/2. \end{cases} \tag{9}$$

Позначимо $z_i^2 = x_i,\ x_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,4}$. Отримаємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1/2, \end{cases} \tag{10}$$

із обмеженнями (8). З'ясуємо, чи виконуються умови теореми 2.2. Побудуємо матрицю Γ. Для цього прикладу, відповідно до введених вище позначень:

$$\begin{aligned} u_0 &= (0,0,0,0), \\ u_1 &= (1,-1,1,-1), \\ u_2 &= (1,-1,-1,1), \\ u_3 &= (2,-1,-2,1), \\ y &= (0,0,1,-1/2), \end{aligned}$$

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 7 & 11 \end{Vmatrix}.$$

Матриця Γ невироджена, оскільки $det\Gamma = 16$, отже умова (5) виконується і система лінійних рівнянь (10) має розв'язок. Перевіримо, чи будуть виконуватись обмеження (8). Для цього необхідно, щоб виконувались умови теореми 2.1. Маємо: для системи (10) визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

що складається із коефіцієнтів при невідомих x_1 та x_3 із першого та другого рівняння є вузловим мінором. Покажемо, що він є невід'ємно орієнтованим відносно сукупності всіх невідомих (10). Згідно із пунктом 2 означення 2.2 невід'ємно орієнтованого вузлового мінора маємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,\ \ \frac{\Delta}{\Delta_1} > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \ \frac{\Delta}{\Delta_2} > 0,$$

отже умови виконуються і Δ є невід'ємно орієнтованим вузловим мінором відносно всіх невідомих системи (10). Оскільки сума $s_j,\ j = 1,2,3$ коефіцієнтів при невідомих в будь-якому рівнянні (10) дорівнює нулю, то послідовність чисел s_1, s_2, s_3 є цілком Δ-допустимою відносно x_1, x_2, x_3, x_4. Таким чином, у прикладі виконується друга умова теореми 2.1 і всі розв'язки системи (10) - додатні, а отже і система (9) має розв'язок. Можна переконатись, що розв'язком системи (10) є вектор $(1, 1/2, 5/2, 3)$.

Розглянемо питання про існування розв'язку поліноміальної системи вигляду

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{y}_1, \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{y}_2, \end{cases} \tag{11}$$

де $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - пара дійсних квадратичних форм від n невідомих. Ідея розв'язання поставленої задачі полягає у наступному: потрібно, щоб існувало єдине невироджене лінійне перетворення, яке одночасно переводить дві квадратичні форми $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ до канонічного вигляду.

Нехай $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - додатньо визначена квадратична форма. Тоді, відповідно до [13], існує невироджене лінійне перетворення, яке одночасно зводить форму $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ до нормального вигляду, а форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - до канонічного. В результаті одержимо таку систему

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{12}x_2^2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n^2 = y_1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_2, \end{cases} \tag{12}$$

Система (12) є частинним випадком системи (6) у випадку, коли k є парним. Отже (12) має розв'язок, якщо виконуються умови теореми 3.2.

Теорема 3.3. *Нехай в (11) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - пара дійсних квадратичних форм, форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – додатньо визначена та виконуються умови теореми 3.2 для системи рівнянь (12). Тоді система нелінійних рівнянь (11) має розв'язок.*

Нехай тепер в (11) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - дві довільні дійсні квадратичні форми. Симетричні матриці A та B є матрицями квадратичних форм $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ відповідно. В [10] показано, що умова $AB = BA$ є необхідною та достатньою для одночасного зведення матриць A та B до діагонального вигляду за допомогою ортогонального перетворення. Таким чином, у випадку виконання рівності $AB = BA$ система (11) набуває вигляду (6), де $k = 2$, $m = 2$. Тоді теорему про існування розв'язку системи (11) в цьому випадку можна сформулювати таким чином.

Теорема 3.4. *Нехай в (11) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - пара дійсних квадратичних форм яким відповідають матриці A та B. Якщо виконується рівність $AB = BA$ та умови теореми 3.2 для системи рівнянь (6), де $k = 2$, $m = 2$, то система нелінійних рівнянь (11) має розв'язок.*

Зазначимо, що всі умови одночасної діагоналізації двох дійсних симетричних матриць наведено в [10]. На підставі цих результатів теорему про розв'язуваність нелінійної системи (11) можна записати так:

Теорема 3.5. *Нехай в (11) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - пара дійсних квадратичних форм яким відповідають матриці A та B, $detA \neq 0$. Якщо виконуються умови*

1. Рівняння $det(B - \lambda A) = 0$ має лише дійсні корені.

2. Матриця $B - \lambda A$ має всі лише прості елементарні дільники.

3. Виконуються умови теореми 3.2 для системи рівнянь (6), де $k = 2$, $m = 2$,

то система нелінійних рівнянь (11) має розв'язок.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - дійсні квадратичні форми від n невідомих. Розглянемо питання про існування розв'язку такої нелінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{y}_1, \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{y}_2, \\ v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{y}_3. \end{cases} \tag{13}$$

Наступним кроком потрібно звести всі три квадратичні форми до канонічного вигляду за допомогою одного лінійного невиродженого перетворення, тобто привести систему (13) до вигляду (6). Нехай квадратичним формам $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ відповідають симетричні матриці A, B та C. В [14] знайдено необхідні та достатні умови одночасної діагоналізації трьох дійсних симетричних матриць. На підставі цих результатів теорему про існування розв'язку системи (13) можна подати у вигляді:

Теорема 3.6. *Нехай в (13) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - дійсні квадратичні форми, яким відповідають матриці A, B та C, $detA \neq 0$. Якщо виконуються умови*

1. Рівняння $det(B - \lambda A) = 0$ має лише дійсні корені та матриця $B - \lambda A$ має всі лише прості елементарні дільники.

2. Рівняння $det(C - \beta A) = 0$ має лише дійсні корені та матриця $C - \beta A$ має всі лише прості елементарні дільники.

3. $BA^{-1}C = CA^{-1}B$.

4. Виконуються умови теореми 3.2 для системи рівнянь (6), де $k = 2$, $m = 3$,

тоді система нелінійних рівнянь (13) має розв'язок.

Зазначимо, що умова 3 теореми 3.6 є достатньо жорсткою умовою, оскільки невеликий клас матриць можуть її зодовольняти. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 2. З'ясувати чи буде мати розв'язок система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{2-\alpha^2}(x_1^2 + 2x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2) = -1, \ \alpha \in R^1, \\ \alpha^2 \neq 2, \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 1, \\ 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Квадратичним формам

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2-\alpha^2}(x_1^2 + 2x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2),$$

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2,$$

$$v(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$$

відповідають симетричні матриці

$$A = \frac{1}{2-\alpha^2}\begin{Vmatrix}2 & \alpha \\ \alpha & 1\end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix}1 & -1 \\ -1 & 1\end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix}2 & 1 \\ 1 & 1\end{Vmatrix}.$$

Перевіримо виконання умови 3 теореми 3.6 для цих трьох матриць. Маємо:

$$BA^{-1}C = \begin{Vmatrix}1 & -1 \\ -1 & 1\end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix}2 & \alpha \\ \alpha & 1\end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{Vmatrix}$$

$$BA^{-1}C = \begin{Vmatrix}3-\alpha & 1 \\ -3+\alpha & -1\end{Vmatrix} \qquad (15)$$

$$CA^{-1}B = \begin{Vmatrix}2 & 1 \\ 1 & 1\end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix}2 & \alpha \\ \alpha & 1\end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix}1 & -1 \\ -1 & 1\end{Vmatrix}$$

$$CA^{-1}B = \begin{Vmatrix}3-\alpha & -3+\alpha \\ 3 & -1\end{Vmatrix} \qquad (16)$$

Для виконання умови 3 потрібно щоб знайдені матриці в (15) та (16) співпадали. Отримаємо

$$-3+\alpha = 3,\ 1 = -3+\alpha.$$

Одержали суперечність. Отже при жодному $\alpha \in R^1$ умова 3 теореми 8 для системи (14) не виконується.

Зауваження. В [7] доведено теореми про існування додатніх розв‘язків системи однорідних алгебраїчних рівнянь. Тому теореми, що наведено в даній статті на підставі результатів із [7] можна сформулювати для однорідних поліноміальних систем рівнянь. Також зазначимо, що в роботі [7] доведено ряд теорем про додатні розв'язки систем алгебраїчних рівнянь, отже у формулюванні всіх теорем даної статті можна посилатись на інші теореми із [7].

4 Висновки

В роботі знайдено умови існування розв'язку поліноміальної системи рівнянь в скінченновимірному евклідовому просторі та показано, що необхідні та достатні умови існування лінійного інтерполяційного полінома мінімальної норми з [11] еквівалентні необхідним та достатнім умовам сумісності системи поліноміальних рівнянь.

Список використаних джерел

1. *Трауб Дж.* Итерационные методы решения уравнений. / Дж. Трауб // М.: Мир. – 1985. – 263 с.
2. *Ostrowski A. M.* Solution of equations and systems of equations. / A. M. Ostrowski // University of Basel. Academic press. – 1960. – 220 p.
3. *Айзенберг Л. А.* К решению систем нелинейных алгебраических уравнений с помощью многомерного логарифмического вычета. О разрешимости в радикалах. / Л. Айзенберг, В. Болотов, А. Цих // Докл. АН СССР.– 1980.– 252, № 1.–С. 11-14.
4. *Ортега Дж.* Итерацонные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. / Дж. Ортега, В. Рейнболдт // М.: Мир. – 1975. – 560 с.
5. *Яковлев М. Н.* Разрешимость систем нелинейных уравнений при наличии (γ, δ) - пар сравнения. / М. Яковлев// Zap. Nauchn. Sem. POMI.– 1992.– № 202.– С. 185-189.

References

1. TRAUB D. (1985) *Iterative methods for solving equations*, M., Mir. – 263 p.
2. OSTROWSKI A. M. (1960) *Solution of equations and systems of equations*, University of Basel. Academic press. – 220 p.
3. AIZENBERG L., BOLOTOV V., TSYKH A. (1980) Solution of a systems of non-linear algebraic equations with the multidimensional logarithmic subtraction. About a solvability in radicals *Dokl. akad. nauk SSSR*, **252**, №1, P. 11-14.
4. ORTEGA D., RAINBOLDT V. (1975), Iterative methods for solving nonlinear systems of equations with many variables. M.: Mir, 560 p.
5. YAKOVLEV M. (1992) Solvability of the systems of nonlinear equations in the presence of comparison (γ, δ)-pairs. *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, **202**, P. 185-189.

6. *Чуйко С. М.* Обобщение теоремы Ньютона-Канторовича для систем нелинейных вещественных уравнений. / С. Чуйко // Доп. НАНУ.– 2020.– № 3.– С. 3-9.

7. *Черников С. Н.* Положительные и отрицательные решения систем линейных неравенств / С. Черников // Мат. сб. – 1956.– 38(80), №4.– С. 479-508.

8. *Михельсон В. С.* О знаках решения системы линейных уравнений. / В. Михельсон // УМН – 1954.– т. 9, №3(61).– С. 163-170.

9. *Макаров В. Л.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. / В. Макаров, В. Хлобыстов // Киев: НАН Украины. Ин-т математики. – 1998. – 278 с.

10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. / Ф. Гантмахер // М.: физматлит. – 2010. – 558 с.

11. *Макаров В. Л.* Операторна інтерполяція та системи лінійних рівнянь і нерівностей в евклідових просторах. / В. Макаров, В. Хлобистов, О. Кашпур // УМЖ.– 2020.– (72) № 11.– С. 1524-1535.

12. *Егоров А. Д.* Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. / А. Егоров, П. Соболеский, Л. Янович // Минск: Наука и техника. – 1985. – 310 с.

13. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. / А. Курош // М.: физматлит. – 1963. – 431 с.

14. *Новиков М. А.* Одновременная диагонализация трех вещественных симметрических матриц. / М. Новиков // Изв. вузов.– 2014.– № 12.– С. 70-81.

6. CHUJKO S. (2020) Generalization of the Newton-Kantorovich theorem for systems of nonlinear real equations *Dopov. NANU*, №3, P. 3-9.

7. CHERNIKOV S. (1956) Positive and negative solutions of linear inequalities systems *Math. Zb.*, **38(80)**, №4, P. 479-508.

8. MIKHELSON V. (1954) On the signs of the solution of a linear equations system *UMJ*, **9(61)**, №3, P. 163-170.

9. MAKAROV V., KHLOBYSTOV V. (1998) *The foundations of the polynomial operator interpolation theory.* Kyiv, Inst. of Math., NANU – 268 p.

10. GANTMAHER F. (2010) *Matrix theory.* M., Fizmatlit. – 558 p.

11. MAKAROV V., KHLOBYSTOV V., KASHPUR O. (2020) Operator interpolation and systems of linear equations and unequations in euclidean spaces. *UMJ*, **72**, №11, P. 1524-1535.

12. YEGOROV A., SOBOLEVSKIJ P., YANOVICH L. (1985) *Approximate calculation of continual integrals.* Minsk, Nauka i tekhnika. – 310 p.

13. KUROSH A. (1963) *Higher algebra course.* M., Fizmatlit. – 431 p.

14. NOVIKOV M. (2014) Simultaneous diagonalization of three real symmetric matrices *Izv. vuzov*, №12, P. 70-81.

Надійшла до редколегії: 15.01.2021