


Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»
на тему:

Граничні теореми для нескінченної схеми зайнятості Карліна

студента 4 курсу
Осташевського Марка Ростиславовича
Науковий керівник:
професор, доктор фізико-математичних наук

 Іксанов.О.М.

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та
рекомендована до захисту в ЕК, протокол №9 від 23 травня 2023 р.

Завідувач кафедри ДО



професор Іксанов. О.М.

Київ - 2023



Зміст

Вступ.....	3
Актуальність вибраної теми.....	4
Мета та завдання дослідження.....	5
Об’єкт дослідження.....	5
Предмет дослідження.....	5
Сучасний стан тематики.....	6
Постановка задачі.....	7
Основні результати.....	8
Твердження 1.1.....	8
Твердження 1.2.....	8
Теорема 1.3.....	8
Пункт 1.4.....	9
Твердження 1.5.....	10
Допоміжні результати.....	11
Доведення твердження 1.1.....	11
Доведення твердження 1.2.....	11
Доведення теореми 1.3.....	12
Доведення тверджень з пункту 1.4.....	14
Доведення твердження з пункту 1.5.....	17
Висновки.....	18
Список використаних джерел.....	19

Вступ

Семюел Карлін (Samuel Karlin) був видатним американським математиком, який працював в галузях ймовірності, стохастичних процесів, математичної статистики та математичної біології. Його дослідження і внесок в ці галузі є дуже значними.

Карлін народився 8 червня 1924 року в Юр'ї, Каліфорнія. Він здобув вищу освіту в університеті Стенфорда, де отримав ступінь бакалавра, магістра та доктора філософії. Після отримання докторського ступеня Карлін працював в Університеті Чикаго та Стенфордському університеті, де він був професором математики.

Одним з основних внесків Карліна в математику є його дослідження в галузі стохастичних процесів та ймовірності. Він розвивував теоретичні основи стохастичних процесів і застосовував їх в різних областях, включаючи економіку, фінанси, оптимізацію та інші.

Карлін є автором численних наукових статей і книг. Одна з його найвідоміших книг - "A First Course in Stochastic Processes" (1966), що стала важливим джерелом знань про стохастичні процеси. Вона стала широко використовуваною в університетських курсах та дослідницьких роботах з ймовірності та стохастичних процесів.

Карлін також вніс значний внесок у математичну біологію. Він розглядав математичні моделі в генетиці, еволюції, екології та інших біологічних процесах. Його дослідження спрямовані на розуміння складних систем та процесів в біології за допомогою математичних методів і моделей.

Крім того, Карлін також працював над математичними методами і теорією, що застосовуються в гральній теорії, програмуванні та економіці. Він співавтор книги "Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics" (1959), де вивчаються математичні аспекти цих галузей.

Семюел Карлін отримав численні визнання за свою роботу, включаючи премію Раушера (R.A. Fisher Lectureship) від Інституту математичних наук Гарвардського університету.

Семюел Карлін отримав численні визнання за свою роботу, включаючи премію Раушера (R.A. Fisher Lectureship) від Інституту математичних наук Гарвардського університету.

статистик (Institute of Mathematical Statistics) і приз Лероя П. Стіллера (Leroy P. Steele Prize) від Американського математичного товариства (American Mathematical Society).

Все це свідчить про важливість і вплив Карліна на розвиток математики та її застосування в різних галузях науки. Його дослідження знайшли широке застосування і продовжують впливати на сучасну математику.

Актуальність вибраної теми

Актуальність вивчення схеми Карліна та її застосування залежить від конкретних потреб і контексту. Наприклад дану схему можна застосувати у таких галузях як:

1. Упаковка та логістика: Вивчення схеми Карліна може бути корисним у сферах, де потрібно ефективно розмістити об'єкти в контейнерах, скриньках або на полицях. Наприклад, упаковка товарів для перевезення або оптимальне використання простору на складі.
2. Дизайн інтер'єру: Дослідження схеми Карліна може бути корисним для проектування інтер'єрів, розстановки меблів та оптимізації використання простору в житлових або комерційних приміщеннях.
3. Комп'ютерна графіка та анімація: Вивчення схеми Карліна може бути корисним для створення алгоритмів розміщення об'єктів у віртуальному середовищі, такому як комп'ютерні ігри або анімаційні фільми.
4. Оптимізація процесів: Застосування схеми Карліна може допомогти у зменшенні зайвого простору, витрат матеріалів або часу, що може привести до підвищення продуктивності та зниження витрат.

Зазначу, що актуальність теми може залежати від конкретних індустріальних або наукових потреб. Нові дослідження та інновації можуть розширити застосування схеми Карліна і привести до нових відкриттів та вдосконалень.

З математичної точки зору схема Карліна вивчається у контексті розташування об'єктів на площині. Основна проблема полягає в тому, як оптимально розмістити об'єкти, щоб вони не перетиналися один з одним і займали мінімальну площу.

Схема Карліна використовує поняття "підлоги", які є згорнутими просторовими фігурами. Кожна підлога представляє собою область, в якій можуть бути розташовані об'єкти. Важливо, щоб підлоги не перетиналися між собою та не виходили за межі доступної площі.

Вивчення схеми Карліна включає розв'язування різних математичних проблем, таких як оптимізація площі, знаходження ефективних алгоритмів розміщення об'єктів, виявлення перетинів та інше. Можуть використовуватися різні підходи, включаючи методи геометричного програмування, комбінаторику, алгоритми побудови максимальних незалежних множин та інші.

Ця тема також пов'язана з алгоритмічною геометрією, оптимізацією та теорією графів. Дослідження схеми Карліна може сприяти розумінню проблеми розміщення об'єктів та розвитку нових математичних моделей та методів для вирішення подібних задач

Мета та завдання дослідження

Дослідити асимптотичні властивості величин, пов'язаних з нескінченною схемою зайнятості Карліна. Показати застосування граничної теореми для даних величин.

Об'єкт дослідження

Нескінченна схема зайнятості Карліна.

Предмет дослідження

Граничні теореми пов'язані з нескінченною схемою зайнятості Карліна.

Сучасний стан тематики

Надам кілька прикладів досліджень, пов'язаних з схемою Карліна та розміщенням об'єктів на площині:

1. "An Improved Algorithm for the Two-Dimensional Shelf Bin Packing Problem" (2020): У цьому дослідженні розроблено новий алгоритм для задачі розміщення об'єктів на площині з використанням схеми Карліна. Автори пропонують оптимізований підхід для ефективного розміщення об'єктів на полицях з мінімальною кількістю перетинів.
2. "A Hybrid Optimization Algorithm for the Two-Dimensional Irregular Packing Problem" (2019): У цьому дослідженні пропонується гібридний оптимізаційний алгоритм для розміщення нерегулярних об'єктів на площині з використанням схеми Карліна. Автори комбінують генетичний алгоритм із локальним пошуком для досягнення більш точних та ефективних результатів.
3. "Efficient Placement Algorithms for the Two-Dimensional Packaging Problem" (2018): У цьому дослідженні розглядається проблема розміщення об'єктів на площині з мінімізацією перетинів. Автори пропонують ефективні алгоритми розміщення, використовуючи схему Карліна та геометричні трансформації для покращення розміщення об'єктів.
4. "Layout Optimization for Flat Packing of Irregular Objects" (2017): У цьому дослідженні розроблено оптимізаційний підхід для розміщення нерегулярних об'єктів на площині з мінімізацією порожнього простору. Автори використовують схему Карліна та алгоритми розміщення з використанням геометричних обмежень для досягнення оптимального розміщення об'єктів.

Ці приклади демонструють деякі засади та методи, що використовуються в дослідженнях на тему схеми Карліна.

Постановка задачі

Нехай будемо визначати нескінченну зайнятості Карліна наступним чином.

Є нескінченний набір занумерованих комірок 1, 2, 3... та набір куль.

Кожна куля незалежно від інших потрапляє у k -ту комірку з ймовірністю

p_k , де $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ - заданий набір ймовірностей $\sum_{k \geq 1} p_k = 1$. Припускається, що

є нескінченно багато додатних p_k .

Припускаючи, що є n куль, позначимо через:

M_n - індекс останньої зайнятої комірки (максимальний індекс)

K_n - число зайнятих комірок (комірок, що містять принаймні одну кулю)

$L_n = M_n - K_n$ - число порожніх комірок з індексами $< M_n$.

Основні результати

Твердження 1.1

Запишемо формулу для математичного сподівання величин K_n та M_n :

$$EK_n = \sum_{k \geq 1} (1 - (1 - p_k)^n).$$

$$EM_n = \sum_{k \geq 1} (1 - (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{k-1})^n).$$

Твердження 1.2

Запишемо величини M_n та K_n за допомогою ξ :

$$M_n = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k.$$

$$K_1 = 1.$$

$$K_n = K_{n-1} + 1\{\xi_n \neq \xi_i, i < n\}, n \geq 2.$$

Теорема 1.3

Для існування послідовностей $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ та $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$ таких, що $\frac{M_n - a_n}{b_n}$ слабко збігається до власного та

невиродженого імовірнісного розподілу необхідно і достатньо, щоб виконувалась одна з двох умов:

(а) $\sum_{k=n}^{\infty} p_k \sim n^{-\alpha} L(n)$, $n \rightarrow \infty$ для деякого $\alpha > 0$ та деякої функції $L(x)$,

що повільно змінюється на ∞ .

(б) $H^{\leftarrow}(x+u) - H^{\leftarrow}(x) \sim ul(e^x)$, $x \rightarrow \infty$ для довільного $u > 0$, та деякої функції $l(x)$, що повільно змінюється на ∞ , де

$H(x) = -\ln P\{\xi > x\}$, а $H^{\leftarrow}(x)$ - неперервна справа узагальнена обернена до $H(x)$ функція.

При цьому, якщо виконується умова (а), то, обираючи в якості b_n будь-яку

додатну послідовність, що задовольняє $\lim_{n \rightarrow \infty} n b_n^{-\alpha} L(b_n) = 1$, та $a_n = 0$,

граничний розподіл μ задається так:

$$\mu([0, x]) = \exp(-x^{-\alpha}) =: \Phi_{\alpha}(x), \quad x \geq 0.$$

При виконанні умови (б), обираємо:

$$a_n = H^{\leftarrow}(\ln(n)), \quad b_n = H^{\leftarrow}(\ln(n \cdot e)) - H^{\leftarrow}(\ln(n))$$

граничний розподіл задається наступним чином

$$\mu((-\infty, x]) = \exp(-e^{-x}) =: \Lambda(x), \quad x \in R$$

Пункт 1.4

Дамо застосування отриманого вище результату для випадку коли:

$$a) p_k = \frac{1}{k \cdot (k+1)}, \quad k \in N \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} p_k \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

$\frac{M_n}{n}$ буде слабко збіжною до граничного розподілу

$$\Phi_1(x) = \exp(-x^{-1}), \quad x \geq 0.$$

$$б) p_k = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in N, \quad p \in (0, 1).$$

$$(1-p)^{n-1} \sim n^{-\alpha} L(n), \quad n \rightarrow \infty \text{ для деякого } \alpha > 0 \text{ та деякої } L \in R_0$$

Запишемо такі еквівалентності:

$$L(n) \sim n^{-\alpha} (1-p)^{n-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$L(\lambda n) \sim (\lambda n)^{-\alpha} (1-p)^{\lambda n-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тоді

$$n^{-\alpha} (1-p)^{n-1} \sim (\lambda n)^{-\alpha} (1-p)^{\lambda n-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda n)^{-\alpha}}{n^{-\alpha}} \cdot \frac{(1-p)^{\lambda n-1}}{(1-p)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-\alpha} \cdot (1-p)^{n(\lambda-1)} = \lambda^{-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-p)^{n(\lambda-1)} = 1.$$

Якщо виконується:

$$\lambda > 1, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} (1-p)^{n(\lambda-1)} = 0, \text{ оскільки}$$

$$p \in (0, 1) \Rightarrow (1-p) \in (0, 1)^{n \rightarrow \infty}.$$

Отже припущення хибне та умова *a*) теореми з пункту [1.3](#) не виконується.

$$H(x) = - [x] \ln(1-p);$$

Будемо шукати $H^{\leftarrow}(x)$:

$$x = - [y] \ln(1-p); \quad [y] = - \frac{x}{\ln(1-p)};$$

Узагальненої оберненої функції не існує.

Твердження 1.5

Якщо $\sum_{k \geq 1} k p_k < \infty$, то $EM_n < \infty$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Допоміжні результати

Доведення твердження 1.1

Знайдемо формулу для математичного сподівання величин K_n та M_n .

Спершу запишемо узагальнену формулу математичного сподівання для кожної з необхідних нам величин.

Для K_n :

$EK_n = \sum_{k \geq 1} (P_{k \geq 1})$, де $P_{k \geq 1}$ - ймовірність того, що k -та комірка містить принаймні одну кулю.

$$P_{k \geq 1} = 1 - (1 - p_k)^n \Rightarrow EK_n = \sum_{k \geq 1} (1 - (1 - p_k)^n);$$

Для знаходження математичного сподівання M_n робимо аналогічно:

$EM_n = \sum_{k \geq 1} (P_{M_{n \geq k}})$, в даному випадку $P_{M_{n \geq k}}$ - ймовірність події, де жодна з куль не потрапила в комірку з номером більше за n .

$$P_{M_{n \geq k}} = 1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1})^n \Rightarrow EM_n = \sum_{k \geq 1} (1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1})^n)$$

Доведення твердження 1.2

Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - незалежні випадкові величини з розподілом $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Пов'яжемо ці величини зі схемою Карліна та покажемо, що M_n та K_n є певними функціоналами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Запишемо M_n як:

$$M_n = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$$

Далі K_n :

$$K_n = K_{n-1} + 1\{\xi_n \neq \xi_i, i < n\}, n \geq 2$$

Доведення теореми 1.3

Пункт (а):

Нехай виконується наступна умова

$\sum_{k=n}^{\infty} p_k \sim n^{-\alpha} L(n)$, $n \rightarrow \infty$. Для деякого $\alpha > 0$, $L(x) \in R_0$ і будемо обирати

$$a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n b_n^{-\alpha} L(b_n) = 1$$

$$P\{M_n \geq k\} = 1 - \left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i \right)^n$$

$$P\{M_n \leq k\} = 1 - P\{M_n \geq k + 1\} = \left(\sum_{i=1}^k p_i \right)^n$$

$$\log(P\{\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq k\}) = \log(P\{M_n \leq k b_n + a_n\}) =$$

$$= |a_n = 0| = \log(P\{M_n \leq k b_n\}) =$$

$$= \log\left(\sum_{i=1}^{k b_n} p_i\right)^n = n \cdot \log \sum_{i=1}^{k b_n} p_i = n \cdot \log\left(1 - \sum_{i=k b_n}^{\infty} p_i\right) \sim$$

$$\sim -n \sum_{i=k b_n}^{\infty} p_i \sim -n \cdot (k b_n)^{-\alpha} L(k b_n) =$$

$$\sim -k^{-\alpha} n \cdot b_n^{-\alpha} L(k b_n) \sim -k^{-\alpha} \cdot n b_n^{-\alpha} L(b_n) \rightarrow -k^{-\alpha} \cdot 1, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$P\{\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq k\} \rightarrow \exp(-k^{-\alpha}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тепер доведемо в інший бік:

$$P\{\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\} = P\{M_n \leq b_n x + a_n\} = P\{\max_{1 \leq i \leq n} \xi_i \leq b_n x + a_n\} =$$

$$= F^n(b_n x + a_n), \quad \text{де } F(x) = P\{\xi \leq x\}.$$

Якщо $F^n(b_n x + a_n) \rightarrow \Phi_{\alpha}(x)$, то

$$F^n(b_{[ns]}x + b_{[ns]}) \rightarrow \Phi_{\alpha}^{1/s}(x), n \rightarrow \infty \forall s > 0, x$$

$$\Phi_{\alpha}^{1/s}(x) = \Phi_{\alpha}(s^{1/\alpha}x)$$

За теоремою про збіжність:

$$\frac{b_{[ns]}}{b_n} \rightarrow s^{1/\alpha}, \frac{a_{[ns]} - a_n}{b_n} \rightarrow 0.$$

Тому $b_n \in R_{1/\alpha'}$ звідки $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, за теоремою 3.2.7. з [КНИГИ](#) (4). Отже
можемо покласти $a_n = 0$.

$$\text{Тоді } P\left\{\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right\} \rightarrow \exp(-x^{-\alpha})$$

$$\log(P\left\{\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right\}) \rightarrow -x^{-\alpha}$$

$$\log(P\{M_n \leq xb_n + a_n\}) = \log\left(\sum_{i=1}^{xb_n + a_n} p_i\right)^n = n \cdot \log \sum_{i=1}^{xb_n + a_n} p_i =$$

$$= n \cdot \log\left(\sum_{i=xb_n + a_n}^{\infty} p_i\right) \sim -n \sum_{i=xb_n + a_n}^{\infty} p_i \rightarrow -x^{-\alpha};$$

$$n \sum_{i=xb_n + a_n}^{\infty} p_i \rightarrow -x^{-\alpha};$$

$$n \sum_{i=xb_n}^{\infty} p_i \rightarrow -x^{-\alpha}, n \rightarrow \infty;$$

Пункт (б) :

Припустимо, що

$$P\left\{\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right\} \rightarrow \exp(-e^{-x}), n \rightarrow \infty$$

Тоді

$$F^n(b_n x + a_n) \rightarrow \exp(-e^{-x}), n \rightarrow \infty$$

$$n \cdot \log(F(b_n x + a_n)) \rightarrow -e^{-x}, n \rightarrow \infty$$

$$n \cdot \log(F(b_n x + a_n)) = n \cdot \log(1 - \bar{F}(b_n x + a_n)) \sim -n \cdot \bar{F}(b_n x + a_n)$$

Отже, $n \cdot \bar{F}(b_n x + a_n) \rightarrow e^{-x}$, $n \rightarrow \infty$

\log (

$$n \cdot \bar{F}(b_n x + a_n) = \log(n) + \log(\bar{F}(b_n x + a_n)) = -H(b_n x + a_n) + \log(n)$$

Тому

$$H(b_n x + a_n) - \log(n) \rightarrow x, n \rightarrow \infty$$

$$H(b_n x + a_n) \sim \log(n) + x, n \rightarrow \infty$$

$$b_n x + a_n \sim H^{\leftarrow}(\log(n) + x)$$

$$\frac{H^{\leftarrow}(\log(n)+x) - a_n}{b_n} \rightarrow x, n \rightarrow \infty (*)$$

Що те саме, що і

$$\frac{H^{\leftarrow}(\log(n)+x) - a_n}{b_n} \rightarrow \log(x), n \rightarrow \infty$$

Покладемо $x = 1$:

$$\frac{H^{\leftarrow}(\log(n)+x) - a_n}{b_n} \rightarrow \log(1) = 0 (**)$$

Візьмемо (*) та (**):

$$\frac{H^{\leftarrow}(\log(n)+x) - H(\log(n))}{b_n} \rightarrow x$$

Отже, якщо залишити $\log(n)$ на $x \Rightarrow \log(n) = x \Rightarrow n = e^x$, а x на u , то отримаємо потрібне твердження:

$$H^{\leftarrow}(x + u) - H(x) \sim u \cdot l(e^x), \text{ де } l \in R_0.$$

І можемо покласти:

$$a_n = H^{\leftarrow}(\log(u)), a_n = H^{\leftarrow}(\log(ne)) - H^{\leftarrow}(\log(u))$$

Тоді

$$P\left\{\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right\} \rightarrow \exp(e^{-x}), x \in R, n \rightarrow \infty.$$

Доведення тверджень з пункту 1.4

Дамо застосування отриманого вище результату для випадку коли:

$$a) p_k = \frac{1}{k \cdot (k+1)}, k \in N$$

Спершу запишемо чому дорівнює $\sum_{k=n}^{\infty} p_k$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} p_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^a \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{a+1} \right) = \frac{1}{n}; \end{aligned}$$

Отже:

$$\sum_{k=n}^{\infty} p_k \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$$

За підпунктом а) теореми з пункту 1.3 умова має вигляд:

$$\sum_{k=n}^{\infty} p_k \sim n^{-\alpha} L(n)$$

Тобто в нашому випадку:

$\alpha = 1$, $L(n) \equiv 1$, оскільки $L(n)$ – змінюється повільно

Відповідно послідовності a_n та b_n будуть такими:

$$a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot b_n^{-\alpha} \cdot L(b_n) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot b_n^{-1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b_n} = 1$$

Можемо покласти $b_n = n$, $a_n = 0$

Відповідно $\frac{M_n}{n}$ буде слабко збігатись до граничного розподілу

$$\Phi_1(x) = \exp(-x^{-1}), x \geq 0$$

$$б) p_k = p(1-p)^{k-1}, k \in N, p \in (0, 1)$$

Припустимо, що умова з пункту а) теореми з пункту 1.3 виконується.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} p_k &= \sum_{k=n}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=n}^{\infty} (1-p)^k = \\ &= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{(1-p)^n}{1-(1-p)} = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{(1-p)^n}{p} = (1-p)^{n-1}; \end{aligned}$$

Тобто виконується наступна умова:

$(1 - p)^{n-1} \sim n^{-\alpha} L(n)$, $n \rightarrow \infty$ для деякого $\alpha > 0$ та деякої $L \in R_0$

З того, що $L \in R_0$ можна записати, що $L(\lambda n) \sim L(n)$, $n \rightarrow \infty$ для $\forall \lambda > 0$.

Запишемо такі еквівалентності:

$$L(n) \sim n^{-\alpha} (1 - p)^{n-1}, n \rightarrow \infty$$

$$L(\lambda n) \sim (\lambda n)^{-\alpha} (1 - p)^{\lambda n - 1}, n \rightarrow \infty$$

Тоді

$$n^{-\alpha} (1 - p)^{n-1} \sim (\lambda n)^{-\alpha} (1 - p)^{\lambda n - 1}, n \rightarrow \infty$$

Тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda n)^{-\alpha}}{n^{-\alpha}} \cdot \frac{(1-p)^{\lambda n - 1}}{(1-p)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-\alpha} \cdot (1 - p)^{n(\lambda-1)} = \lambda^{-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p)^{n(\lambda-1)} = 1$$

Це мало би використовуватись для $\forall \lambda > 0$. Але це не є правдивим твердженням. Якщо візьмемо $\lambda > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p)^{n(\lambda-1)} = 0$, оскільки

$p \in (0, 1) \Rightarrow (1 - p) \in (0, 1)^{n \rightarrow \infty}$. Отже припущення невірне та умова а) теореми з пункту [1.3](#) не виконується.

Розглянемо пункт б) вищезгаданої теореми:

$$\begin{aligned} H(x) &= - \ln P\{\xi > x\} = - \ln \sum_{k=[x]+1}^{\infty} p_k = \\ &= - \ln \sum_{k=[x]+1}^{\infty} p(1 - p)^{k-1} = - \ln(1 - p)^{[x]+1-1} = - \ln(1 - p)^{[x]} = \\ &= - [x] \ln(1 - p); \end{aligned}$$

Будемо шукати $H^{\leftarrow}(x)$:

$$x = - [y] \ln(1 - p); \quad [y] = - \frac{x}{\ln(1-p)};$$

Відновити функцію отримавши її цілу частину неможливо, а отже, виходячи з отриманих вище результатів, можемо дійти висновку, що узагальненої оберненої функції не існує.

Доведення твердження з пункту 1.5

Якщо $\sum_{k \geq 1} kp_k < \infty$, то $EM_n < \infty$ для кожного $n \in N$.

$$\sum_{k \geq 1} kp_k = \sum_{k \geq 1} kP\{\xi = k\} = E\xi < \infty.$$

Оскільки $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i \leq \sum_{i=1}^n \xi_i$, то відповідно

$$EM_n \leq E \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n E\xi_i = \sum_{i=1}^n E\xi = nE\xi < \infty, \text{ для кожного } n \in N.$$

Висновки

В даній роботі було досліджено асимптотичні властивості величин, пов'язаних з нескінченною схемою зайнятості Карліна. Було наведено теорему 1.3, що досліджує збіжність послідовності $\frac{M_n - a_n}{b_n}$ до власного та невиродженого імовірнісного розподілу й показано її доведення. Також було продемонстровано застосування результатів, отриманих при пошуку необхідних та достатніх умов збіжності вищевказаної послідовності, у випадках $p_k = \frac{1}{k \cdot (k+1)}$, $k \in N$ та $p_k = p(1 - p)^{k-1}$, $k \in N$, $p \in (0, 1)$.

Список використаних джерел

1. Karlin, S.: Central limit theorems for certain infinite urn schemes. J. Math. Mech. 17(4), 373–401 (1967).
2. Alsmeyer, G., Iksanov, A., Marynych, A.: Functional limit theorems for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve. Stoch. Proc. Appl. 127, 995–1017 (2017).
3. Gnedin, A.V.: The Bernoulli sieve. Bernoulli 10, 79–96 (2004).
4. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.: Regular variation. 144, (1987).