Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2023, № 1 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.9
MSC 34G10, 34G20

# BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE LYAPUNOV EQUATION

O. O. Pokutnyi
Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine, E-mail: lenasas@gmail.com

# КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА

О. О. Покутний
Інститут математики НАН України, Київ, Україна, E-mail: lenasas@gmail.com

Abstract. The boundary value problems for the Lyapunov equation in the resonant (irregular) case in Banach and Hilbert spaces, when the solution of the equation does not exist for all right-hand sides and its uniqueness may be violated, have been investigated. The conditions for bifurcation and branching of solutions in linear and nonlinear cases, including with a moving right end of the segment on which the corresponding boundary value problem is considered, are found.
Keywords: boundary value problem, Lyapunov equation, existence, bifurcations, branching.

Анотація. Досліджено крайові задачі для рівняння Ляпунова у резонансному (нерегулярному) випадку у просторах Банаха та Гільберта, коли розв'язок рівняння існує не для всіх правих частин й може порушуватися його єдиність. Знайдено умови біфуркації та розгалуження розв'язків у лінійному та нелінійному випадках й у тому числі з рухомим правим кінцем відрізка на якому розглядається відповідна крайова задача.
Ключові слова: крайова задача, рівняння Ляпунова, існування, біфуркації, розгалуження.

## Вступ

Крайові задачі для диференціальних рівнянь у різних функціональних просторах займають важливе місце у якісній теорії диференціальних рівнянь. Серед останнього класу добре відомим є рівняння Ляпунова яке досліджується як у скінченновимірному так і у нескінченновимірному випадках [1–3, 18–26, 28, 30, 31, 33–44]. Рівняння Ляпунова використовується в теорії стійкості руху, теорії керування та квантовій механіці. Воно відіграє важливу роль в теорії лінійних гамільтонових систем, варіаційному численні та теорії ігор [5]. Відома динамічна система, що породжується гамільтоніаном у чотиривимірному просторі й носить назву «configurational quantum cat» [25]. Рівняння Ляпунова розглядають як в матричному, так й операторному випадках [4, 6, 20]. Слід зауважити, що як правило досліджуються коректні нерезонансні задачі, коли існує єдиний розв'язок, який неперервно залежить від правих частин рівняння.

В даній роботі буде досліджено крайові задачі для рівняння Ляпунова у резонансному (нерегулярному) випадку у просторах Банаха та Гільберта, коли розв'язок рівняння існує не для всіх правих частин й може порушуватися його єдиність. Буде знайдено умови біфуркації та розгалуження розв'язків у лінійному та нелінійному випадках й у тому числі з рухомим правим кінцем відрізка на якому розглядається відповідна крайова задача.

Слід зауважити, що у скінченновимірних просторах аналогічна задача у періодичному випадку досліджувалася у роботах [6] для рівняння Ляпунова та Ріккаті. Біфуркаційні методи є досить розвиненим й потужним інструментом в теорії диференціальних рівнянь [13–15].

Робота виконана за підтримки науково-дослідних робіт молодих учених 2021–2022 рр. (проєкт № 0121U111949 «Аналіз крайових задач у моделях природничих наук»).

## Рівняння Ляпунова зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо наступну крайову задачу:

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + Z(t)B + \Phi(t), \tag{1}$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha, \tag{2}$$

де $Z = Z(t)$ є невідомою оператор-функцією; $A, B \in \mathcal{L}(B_1)$ — лінійні обмежені оператори, що діють з простору Банаха $B_1$ в себе; оператор-функція $\Phi(t)$ є шляхом в просторі лінійних та обмежених операторів, тобто неперервне відображення відрізка $[a; b]$ в простір $\mathcal{L}(B_1)$, $\Phi(t) \in C([a; b]; \mathcal{L}(B_1))$; лінійний обмежений оператор $\ell$ переводить оператор-функцію $Z(t)$ в простір Банаха $B_2$, тобто $\ell : C^1([a; b]; \mathcal{L}(B_1)) \to B_2$, $\alpha$ — елемент простору $B_2$.

Розглянемо лінійний оператор $\mathbf{K}_\tau^t$, який переводить оператор-функцію $\Phi(t)$ з простору $C\left([a; b], L(B_1)\right)$ в оператор-функцію $K_\tau^t[\Phi]$ таку, що $K_\tau^t[\Phi] \in C([a; b] \times [a; b]; \mathcal{L}(B_1))$ вигляду

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = e^{A(t-\tau)}\Phi(\tau)e^{B(t-\tau)}, \ \left(t, \tau \in [a; b]\right). \tag{3}$$

За допомогою цього оператора можна представити загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$Z(t) = \mathbf{K}_a^t[M] + \int_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau, \tag{4}$$

де довільний оператор $M \in \mathcal{L}(B_1)$; $\tilde{Z}(t)$ — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1), який має вигляд:

$$\tilde{Z}(t) = \int_a^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau. \tag{5}$$

Підставимо (4) в крайову умову (2) та отримаємо наступне операторне рівняння відносно оператора $M$:

$$\mathbf{L}M = \alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi] d\tau, \tag{6}$$

де оператор $\mathbf{L}$ діє за правилом $\mathbf{L}M = \ell \mathbf{K}_a^{\cdot}[M] : \mathcal{L}(B_1) \to B_2$. Покажемо, що за певних додаткових умов на оператор $\mathbf{L}$ дане рівняння має розв'язки. Розглянемо випадок, коли оператор $\mathbf{L}$ є узагальнено-оборотним [7].

В цьому випадку розв'язки рівняння (6) існують тоді й тільки тоді [7], коли

$$P_{Y_\mathbf{L}} \left[ \alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi] d\tau \right] = 0. \tag{7}$$

Тут $P_{Y_\mathbf{L}}$ — проєктор на підпростір $Y_\mathbf{L}$ ізоморфний ядру $N(\mathbf{L}^*)$ спряженого до $\mathbf{L}$ оператора $\mathbf{L}^*$ ($B_2 = Y_\mathbf{L} \oplus R(\mathbf{L})$). Ця умова гарантує належність правої частини рівняння (6) $\left[ \alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi] d\tau \right] \in R(\mathbf{L})$ множині значень оператора $\mathbf{L}$.

За виконання умови розв'язності (7), операторне рівняння (6) має множину розв'язків вигляду:

$$M = \mathbf{L}^- \left[ \alpha - \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi] d\tau \right] + P_{N(\mathbf{L})} C, \tag{8}$$

де $C$ — довільний лінійний обмежений оператор ($C \in \mathcal{L}(B_1)$), $P_{N(\mathbf{L})}$ — проєктор на ядро оператора $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}^-$ — узагальнено-обернений до оператора $\mathbf{L}$ [17]. Підставивши оператор $M$ в умову (4), отримаємо загальний розв'язок (1), (2) у вигляді:

$$Z(t, C) = \mathbf{K}_a^t [P_{N(\mathbf{L})} C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{9}$$

де узагальнений оператор Гріна визначається наступним чином

$$(G[\Phi, \alpha])(t) = \int_a^t \mathbf{K}_\tau^t [\Phi(\tau)] d\tau - \mathbf{K}_a^t [\mathbf{L}^- \ell \int_a^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot} [\Phi(\tau)] d\tau] + \mathbf{K}_a^t [\mathbf{L}^- \alpha]. \tag{10}$$

Таким чином доведено наступну теорему.

**Теорема 1.** *Нехай оператор* $\mathbf{L}$ *є узагальнено-оборотним. Тоді крайова задача* (1), (2) *має розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова (7). За виконання умови* (7) *розв'язки крайової задачі* (1), (2) *мають вигляд*

$$Z(t, C) = \mathbf{K}_a^t [P_{N(\mathbf{L})} C] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{11}$$

*для довільного оператора* $C \in \mathcal{L}(B_1)$, *де* $(G[\Phi, \alpha])(t)$ *— узагальнений оператор Гріна, який визначається з (10).*

**Зауваження 1.** Якщо оператор $\mathbf{L}$ оборотний, то умова (7) виконується автоматично й крайова задача для рівняння Ляпунова має єдиний розв'язок.

**Приклад 1.** Розглянемо крайову задачу (1), (2) для рівняння Ляпунова у просторі Банаха $m = l_\infty$ обмежених числових послідовностей із діагональними операторми $A$, $B$ й оператор-функцією $\Phi(t) \in C([0,p], \mathbf{B})$:

$$A = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right\}, \tag{12}$$

$$B = \operatorname{diag}\{0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots\}, \tag{13}$$

$$\Phi(t) = \operatorname{diag}\left\{e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, \ldots, e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, \ldots\right\}, \tag{14}$$

і крайовою умовою вигляду

$$\ell Z(\cdot) = (Z_{ii}(0) - Z_{ii}(p))_{i\in\mathbb{N}} = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in m, p > 0.$$

Припускається, що простір $C([0,p], \mathbf{B})$ складається з таких оператор функцій, яким відповідає зліченна матриця $Z(t) = (z_{ij}(t))_{i,j\in\mathbb{N}}$:

$$||Z|| = \sup_{t\in[0,p]} \sup_k \sum_{i=1}^{+\infty} |z_{ki}(t)| < \infty.$$

Таким чином $\mathbf{B} \subset \mathcal{L}(m)$. Знайдемо оператор-функцію $\mathbf{K}_\tau^t[\Phi]\,(t, \tau \in [0;p])$. Оператори $e^{A(t-\tau)}$ та $e^{B(t-\tau)}$ визначаються таким чином:

$$e^{A(t-\tau)} = diag(e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\tau}, e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\tau}, ...), e^{B(t-\tau)} = diag(1, e^{t-\tau}, ...)$$

звідки

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = e^{A(t-\tau)}\Phi(\tau)e^{B(t-\tau)} = diag(e^{\frac{1}{2}t}, e^{\frac{3}{2}t}, ...). \tag{15}$$

Частинний розв'язок $\tilde{Z}(t)$ неоднорідного рівняння (1) має вигляд:

$$\tilde{Z}(t) = \int_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi(\tau)]d\tau = diag(e^{\frac{1}{2}t}t, e^{\frac{3}{2}t}t, ...). \tag{16}$$

Загальний розв'язок рівняння (1) можна представити у вигляді (4), де $M = (m_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ — лійнійний обмежений оператор з невідомими компонентами, які треба знайти. Знайдемо оператор-функцію $\mathbf{K}_0^t[M]$:

$$\mathbf{K}_0^t[M] = (e^{\frac{1}{2}t}m_{i2k-1}, e^{\frac{3}{2}t}m_{i2k})_{i,k\in\mathbb{N}}. \tag{17}$$

Підставивши (17) в крайову умову (2), отримаємо, що в даному випадку оператор $\mathbf{L} : \mathbf{B} \to m$ (на підпросторі $\mathcal{L}(m)$) діє на $M$ наступним чином:

$$\mathbf{L}M = (m_{11}(1 - e^{\frac{1}{2}p}),\ m_{22}(1 - e^{\frac{3}{2}p}), m_{33}(1 - e^{\frac{1}{2}p}), ...).$$

Легко бачити, що даний оператор діє неперервним чином і має множину узагальнено-обернених операторів $\mathbf{L}^-$, які можна визначити наступним чином:

$$\mathbf{L}^-(\alpha_1, \alpha_2, ...) = D = (d_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}},\quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \in m,$$

де діагональні елементи

$$d_{2i2i} = \frac{\alpha_{2i}}{(1 - e^{\frac{3}{2}}p)},\quad d_{2i-12i-1} = \frac{\alpha_{2i-1}}{(1 - e^{\frac{1}{2}}p)},$$

а решта коефіцієнтів $d_{ij}$ обирається довільним чином за умови, щоб $||D||_{\mathbf{B}}$ була скінченною. Дія проєкторів $P_{N(\mathbf{L})} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ та $P_{Y_{\mathbf{L}}} : m \to m$ (в загальному вигляді) визначається таким чином:

$$P_{N(\mathbf{L})}M = (I - \mathbf{L}^{-}\mathbf{L})M = (p_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}, \text{ де } p_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = j, \\ m_{ij} - d_{ij}, & \text{якщо } i \neq j, \end{cases}$$

а проєктор $P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0$. Таким чином умова розв'язності (7) виконується автоматично. Тоді операторне рівняння $\mathbf{L}M = \alpha - \ell\int_0^{\cdot}\mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi]d\tau$ має розв'язок вигляду:

$$M = \mathbf{L}^{-}\left(\alpha - \ell\int_0^{\cdot}\mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi]d\tau\right) + P_{N(\mathbf{L})}C, \quad C \in \mathbf{B}$$

або в розгорнутому вигляді:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 + e^{\frac{1}{2}p}p}{1-e^{\frac{1}{2}p}} & c_{12} & c_{13} & \dots \\ c_{21} & \frac{\alpha_2 + e^{\frac{3}{2}p}p}{1-e^{\frac{3}{2}p}} & c_{23} & \dots \\ c_{31} & c_{32} & \frac{\alpha_1 + e^{\frac{1}{2}p}p}{1-e^{\frac{1}{2}p}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Таким чином, за допомогою отриманого оператора $M$ можна виписати загальний розв'язок крайової задачі (1), (2) у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 + e^{\frac{1}{2}p}p}{1-e^{\frac{1}{2}p}}e^{\frac{t}{2}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\alpha_2 + e^{\frac{3}{2}p}p}{1-e^{\frac{3}{2}p}}e^{\frac{3}{2}t} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_1 + e^{\frac{1}{2}p}p}{1-e^{\frac{1}{2}p}}e^{\frac{t}{2}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{3}{2}t}c_{12} & e^{\frac{t}{2}}c_{13} & e^{\frac{3}{2}t}c_{14} & \dots \\ e^{\frac{t}{2}}c_{21} & 0 & e^{\frac{t}{2}}c_{23} & e^{\frac{3}{2}t}c_{24} & \dots \\ e^{\frac{t}{2}}c_{31} & e^{\frac{3}{2}t}c_{32} & 0 & e^{\frac{3}{2}t}c_{34} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix} \qquad (18)$$

Безпосередньою підстановкою (18) в крайову задачу (1), (2) можна переконатися в достовірності отриманого результату.

## Рівняння Ляпунова зі змінними коефіцієнтами. Узагальнені розв'язки

Розглянемо наступну крайову задачу для рівняння Ляпунова

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t) - Z(t)B(t) + \Phi(t), \qquad (19)$$

$$\ell Z(\cdot) = \alpha, \qquad (20)$$

де $Z(t) \in C^1([a;b];\mathcal{L}(B_1))$, оператор-функції $A(t), B(t) \in \mathcal{L}(B_1)$ при кожному $t$ (для простоти $A(t), B(t) \in C([a;b];\mathcal{L}(B_1)))$. Розглянемо лінійний оператор $\mathbf{K}_\tau^t$, який переводить $\Phi(t)$ в оператор-функцію

$$K_\tau^t[\Phi] \in C([a;b]\times[a;b];\mathcal{L}(B_1))$$

вигляду

$$\mathbf{K}_\tau^t[\Phi] = U(t)U^{-1}(\tau)\Phi(\tau)V(\tau)V^{-1}(t), \tag{21}$$

де $U(t)$, $V(t)$ — еволюційні оператори операторно-диференціальних рівнянь:

$$\dot{X}(t,\tau) = A(t)X(t,\tau), \quad X(\tau,\tau) = I, \quad U(t) := U(t,0), \tag{22}$$

$$\dot{Y}(t,\tau) = B(t)Y(t,\tau), \quad Y(\tau,\tau) = I, \quad V(t) := V(t,0), \tag{23}$$

відповідно. Очевидно, що $V^{-1}(t)$ задовольняє такому операторно-диференціальному рівнянню (нормований в нулі):

$$\dot{Y}(t,\tau) = -Y(t,\tau)B(t), \quad Y(\tau,\tau) = I.$$

Для простоти будем розглядати випадок, коли $[a,b] = [0,T]$. За допомогою цього оператора можна зобразити загальний розв'язок рівняння (19) у вигляді

$$Z(t) = \mathbf{K}_0^t[M] + \int_0^t \mathbf{K}_\tau^t[\Phi]d\tau, \tag{24}$$

де довільний оператор $M \in \mathcal{L}(B_1)$. Підставимо (24) у крайову умову (20) та отримаємо операторне рівняння відносно оператора $M$:

$$\mathbf{L}M = \alpha - \ell\int_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau, \tag{25}$$

де оператор $\mathbf{L}$ діє за правилом $\mathbf{L}M = \ell\mathbf{K}_0^{\cdot}[M] : \mathcal{L}(B_1) \to B_2$. Неважко показати, що за умови узагальненої оборотності оператора $\mathbf{L}$ для задачі зі змінними операторними коефіцієнтами буде справедлива теорем аналогічна до теореми (1).

Покажемо, що цю задачу можна зробити розв'язною і у тому випадку, коли множина значень оператора $\mathbf{L}$ не є замкненою.

Перейдемо до відповідних конструкцій. Нехай задано лінійний обмежений оператор $\mathbf{L}$, що діє з простору Банаха $\mathcal{L}(B_1)$ у простір Банаха $B_2$. Надалі будемо вважати, що підпростори $N(\mathbf{L})$ та $\overline{R(\mathbf{L})}$ є доповнювальними тобто мають місце розклади у прямі суми підпросторів

$$\mathcal{L}(B_1) = N(\mathbf{L}) \oplus X, \quad B_2 = \overline{R(\mathbf{L})} \oplus Y, \tag{26}$$

й відповідні розклади одиниці

$$I_{\mathcal{L}(B_1)} = P_{N(\mathbf{L})} + P_X, \quad I_{B_2} = P_{\overline{R(\mathbf{L})}} + P_Y,$$

де $P_{N(\mathbf{L})}, P_X, P_{\overline{R(\mathbf{L})}}, P_Y$ — проєктори на відповідні підпростори. За аналогією з означенням [48], [45] допустимої пари введемо означення узагальненого $\mathbf{L}$ допустимого підпростору.

**Означення 1.** Нехай $\mathbf{L} : \mathcal{L}(B_1) \to B_2$ лінійний обмежений оператор, що діє з простору Банаха $\mathcal{L}(B_1)$ у простір Банаха $B_2$, а підпростори $X \subset \mathcal{L}(B_1)$, $\overline{R(\mathbf{L})} \subset B_2$ такі, що виконується умова (26). Тоді підпростори $X$ та $\overline{R(\mathbf{L})}$ будемо називати узагальненими $\mathbf{L}$-допустимими.

Розглянемо звужений оператор $L_X : X \to \overline{R(\mathbf{L})}$, $L_X M = \mathbf{L}M, M \in X$ (він буде лінійним, неперервним та ін'єктивним). Поповнимо простір $X$ за нормою

$$||M|| = ||L_X M||_{B_2}$$

і розширимо оператор $L_X$ на поповнений простір $\overline{X}$ за неперервністю. Розширений оператор будемо позначати $\overline{L}_X$. Тоді, як і у випадку гільбертових просторів [45], оператор $\overline{L}_X : \overline{X} \to \overline{R(\mathbf{L})}$ буде здійснювати гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ та $\overline{R(\mathbf{L})}$. Будемо позначати через $\overline{\mathcal{L}(B_1)} = \overline{X} \oplus N(\mathbf{L})$ — розширений вихідний простір.

**Означення 2.** Нехай $\mathbf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(B_1), B_2)$ та $X$, $\overline{R(\mathbf{L})}$ — узагальнені $\mathbf{L}$-допустимі підпростори. Тоді відображення

$$\mathbf{L}_X^- : B_2 \to \overline{\mathcal{L}(B_1)},$$

$$\mathbf{L}_X^- y = \overline{L}_X^{-1} y_1, \ y = y_1 + y_2, \ y_1 \in \overline{R(\mathbf{L})}, \ y_2 \in Y,$$

називатимемо сильним $(X, \overline{R}(L))$ — узагальнено-оберненим до $\mathbf{L}$.

Безпосередньо з означення сильного $(X, \overline{R}(L))$ — узагальнено-оберненого оператора випливають такі властивості:

$$\mathbf{L}\mathbf{L}_X^-\mathbf{L} = \mathbf{L}, \quad \mathbf{L}_X^-\mathbf{L}\mathbf{L}_X^- = \mathbf{L}_X^- \quad \text{на} \ \ X,$$

(або з заміною $\mathbf{L}$ на $\overline{L}_X$),

$$\overline{L}_X \mathbf{L}_X^- \overline{L}_X = \overline{L}_X, \quad \mathbf{L}_X^- \overline{L}_X \mathbf{L}_X^- = \mathbf{L}_X^- \quad \text{на} \ \ \overline{X}.$$

Аналогів властивостей 3 та 4 з означення псевдооберненого оператора у загальному випадку немає.

Розглянемо тепер рівняння (25) у просторах Банаха $\mathcal{L}(B_1)$ та $B_2$, яке перепишемо у вигляді

$$\mathbf{L}M = y, \tag{27}$$

де $y = \alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_\tau^{\cdot}[\Phi] d\tau$, — елемент простору $B_2$, $\mathbf{L}$ — такий лінійний обмежений оператор, що підпростори $X, \overline{R(\mathbf{L})}$ є узагальненими $\mathbf{L}$ — допустимими.

Відомо [17], що у загальному випадку розв'язок такого рівняння може існувати не для всіх правих частин й може бути не єдиним. Коли розв'язку не існує у звичайному сенсі, то часто знаходять такий оператор $M = \overline{M} \in \mathcal{L}(B_1)$ який мінімізує норму нев'язки

$$||\mathbf{L}\overline{M} - y||_{B_2} = \inf_{M \in \mathcal{L}(B_1)} ||\mathbf{L}M - y||_{B_2}.$$

Його називають квазірозв'язком [17, 49]. Для існування такого розв'язку умова замкнености множини значень оператора $\mathbf{L}$ є суттєвою, але у загальному випадку така варіаційна задача може не мати розв'язку.

Запропонуємо означення розв'язків для рівняння (27), щоб можна було гарантувати їх існування у тому чи іншому сенсі.

Використавши побудовану вище конструкцію розширимо вихідний простір $\mathcal{L}(B_1)$ й оператор $\mathbf{L}$ заданий на ньому таким чином, щоб варіаційна задача на розширеному просторі завжди мала розв'язки у певному сенсі. Відображення, яке буде встановлювати відповідність між розв'язками та правими частинами у загальному випадку виявляється багатозначним.

**Означення узагальнених розв'язків.** Для рівняння (27) ми будемо виділяти такі три типи розв'язків.

**1) Класичні розв'язки.** Розглянемо випадок, коли оператор $\mathbf{L}$ нормально-розв'язний. Тоді, як відомо [17], неоднорідність $y \in R(\mathbf{L})$ у рівнянні (27) належить образу оператора тоді й тільки тоді, коли $P_Y y = 0$. У цьому випадку існує узагальнено — обернений оператор $\mathbf{L}^-$ за допомогою якого множина розв'язків рівняння (27) у просторі Банаха має вигляд

$$M = \mathbf{L}^- y + P_{N(\mathbf{L})}C, \quad \forall C \in \mathcal{L}(B_1).$$

**2) Сильні узагальнені розв'язки.** Розглянемо випадок, коли множина значень оператора $\mathbf{L}$ не є замкненою. Оскільки оператор $\mathbf{L}$ має $(X, \overline{R(\mathbf{L})})$ узагальнений $\mathbf{L}$ — допустимий підпростір, то для просторів $\mathcal{L}(B_1), B_2$ справедливий розклад (26).

Тоді ми можемо вести мову про сильний узагальнений розв'язок рівняння (27). Оскільки оператор $\overline{L}_X$ здійснює гомеоморфізм між просторами $\overline{X}$ та $\overline{R(\mathbf{L})}$, то існує $\overline{L}_X^{-1}$ та коректним буде таке означення.

**Означення 3.** Довільний елемент з множини $\{\overline{L}_X^{-1} y + P_{N(\mathbf{L})}C\}_{C\in\mathcal{L}(B_1)}$ будемо називати сильним узагальненим розв'язком рівняння (27), якщо $y \in \overline{R(\mathbf{L})}$.

Тоді множина всіх сильних узагальнених розв'язків рівняння (27) буде мати вигляд

$$M = \mathbf{L}_X^- y + P_{N(\mathbf{L})}C, \quad \forall C \in \mathcal{L}(B_1),$$

а оператор $\mathbf{L}_X^- y := \overline{L}_X^{-1} y_1$, де $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in \overline{R(\mathbf{L})}, y_2 \in Y$.

**3) Узагальнені квазірозв'язки.** Розглянемо випадок, коли $y \notin \overline{R(\mathbf{L})}$. Для елемента $y$ це рівносильно виконанню умови $P_Y y \neq 0$. У цьому випадку сильних узагальнених розв'язків не існує, але існують такі елементи з $\overline{X}$, що є розв'язками варіаційної задачі

$$\inf ||\overline{\mathbf{L}}M - y||_{B_2},$$

де $\overline{\mathbf{L}} = \overline{L}_{\overline{X}} P_{\overline{X}}$ та інфімум береться по всім елементам (операторам) $M \in \overline{\mathcal{L}(B_1)}$. Тут $P_{\overline{X}}$ — проєктор на $\overline{X}$. Ці елементи і будемо називати узагальненими квазірозв'язками.

**Означення 4.** Довільний елемент з множини

$$\{\mathbf{L}_X^- y + P_{N(\mathbf{L})}C\}_{C\in\mathcal{L}(B_1)}$$

будемо називати узагальненим квазірозв'язком рівняння (27).

**Зауваження 2.** Зазначимо, що якщо $R(\mathbf{L}) = \overline{R(\mathbf{L})}$, то узагальнені квазірозв'язки співпадають зі звичайними квазірозв'язками [17].

**Зауваження 3.** З наведеного вище означення оператор $\mathbf{L}_X^- y$ може мати не найменшу норму на відповідному просторі, на відміну від $\overline{L}^+ y$.

Виходячи з цього, повна теорема розв'язності крайової задачі (19), (20) набуде такого вигляду.

**Теорема 2.** *Нехай оператор* $\mathbf{L}$ *має узагальнені* $\mathbf{L}$*-допустимі підпростори* $(X, \overline{R(\mathbf{L})})$. *Тоді:*

*1 a) Крайова задача (19) (20) має сильні узагальнені розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова*

$$P_Y \left[ \alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi] d\tau \right] = 0;$$

*якщо* $\alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi] d\tau \in R(\mathbf{L})$, *то розв'язки будуть звичайними класичними;*

*1 b) За виконання умови розв'язності (25) множина сильних узагальнених розв'язків має вигляд*

$$Z(t, C) = \mathbf{K}_0^t [P_{N(\mathbf{L})} C] + \overline{(G[\Phi, \alpha])}(t), \quad \forall C \in \mathcal{L}(B_1), \tag{28}$$

*де узагальнений оператор Гріна визначається таким чином*

$$\overline{(G[\Phi, \alpha])}(t) = \int_0^t \mathbf{K}_{\tau}^t [\Phi] d\tau - \mathbf{K}_0^t \left[ \mathbf{L}_X^- \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_{\tau}^{\cdot} [\Phi] d\tau \right] + \mathbf{K}_0^t [\mathbf{L}_X^- \alpha]; \tag{29}$$

*2 a) Крайова задача (19) (20) має сильні узагальнені квазірозв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова*

$$P_Y \left[ \alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi] d\tau \right] \neq 0; \tag{30}$$

*2 b) За виконання умови розв'язності (30) множина сильних узагальнених розв'язків має вигляд*

$$Z(t, C) = \mathbf{K}_0^t [P_{N(\mathbf{L})} C] + \overline{(G[\Phi, \alpha])}(t), \tag{31}$$

*де узагальнений оператор Гріна визначається з (29).*

**Приклад 2.** Розглянемо однорідну крайову задачу ($\Phi(t) = 0$) з постійними операторами $A$ та $B$ діагонального вигляду

$$A = diag(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ...), B = diag(1, 1, 1, ...)$$

зі значеннями в підпросторі $\mathbf{B} \subset \mathcal{L}(l_2)$, який складається з зліченних матриць $C = (c_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ елементи яких є квадратично-сумовними $\sum_{i,j} c_{ij}^2 < \infty$ (кожній такій матриці відповідає лінійний обмежений оператор з $\mathcal{L}(l_2)$). Оператор-функція $Z(t) = (z_{ij}(t))_{i,j \in \mathbb{N}} \in C^1([0;1]; \mathbf{B})$, тобто

$$||Z|| = \sup_{t \in [0;1]} \{||Z(t)||_{\mathbf{B}} + ||\dot{Z}(t)||_{\mathbf{B}}\} < \infty$$

та крайовою умовою наступного вигляду:

$$\ell Z(\cdot) = (0, z_{22}(0), \frac{z_{33}(0)}{2}, ..., \frac{z_{ii}(0)}{i-1}, ...) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...) \in l_2.$$

Тоді загальний розв'язок системи буде мати вигляд

$$Z(t, C) = K_0^t[C] = e^{\frac{3}{2}t}[C], \quad C \in \mathbf{B}.$$

Підставляючи в крайову умову отримаємо, що розв'язність крайової задачі еквівалентна розв'язності наступного рівняння

$$\ell Z(\cdot) = \mathbf{L}C = (0, c_{22}, \frac{c_{33}}{2}, ...) = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \in l_2.$$

Тут $\mathbf{L} : \mathbf{B} \to l_2$. Покажемо, що оператор $\mathbf{L}$ має незамкнену множину значень. Для цього достатньо помітити, що

$$l_2 \ni (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...) = \lim_{k\to\infty} (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, 0, 0, ...),$$

$$(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, 0, 0, ...) = \mathbf{L}C^k,$$

де в якості послідовності операторів $C^k$ обирається наступна

$$C^k = diag(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{k+1}, 0, 0, ...) \in \mathbf{B} \subset \mathcal{L}(l_2),$$

та для $C = diag(1, 1, ..., 1, ...)$

$$\mathbf{L}C = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, ...).$$

Але $C$ не належить підпростору $\mathcal{L}(l_2)$ з квадратично сумовних послідовностей, оскільки $||C|| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1^2 \to \infty$. Таким чином маємо послідовність $C^k$ таку, що $\mathbf{L}C^k = y^k = (0, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{k}, 0, 0, ...) \in l_2$ й $y^k \to y = (0, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{k}, ...)$ в просторі $l_2$, коли $k \to \infty$, але $y = \mathbf{L}C$, де $C$ не належить підпростору $\mathbf{B} \subset \mathcal{L}(l_2)$. Таким чином оператор $\mathbf{L}$ має незамкнену множину значень. В даному випадку для простору $\mathbf{B}$ має місце такий розклад у пряму суму підпросторів:

$$\mathbf{B} = N(\mathbf{L}) \oplus X,$$

де нуль-простір $N(\mathbf{L})$ оператора $\mathbf{L}$ складається з операторів вигляду

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & .... & c_{1n} & ... \\ c_{21} & 0 & ... & c_{2n} & ... \\ c_{31} & c_{32} & ... & c_{3n} & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} = \begin{cases} c_{ij}, i \neq j, \text{ або } i = j = 1 \\ 0, \text{ інакше,} \end{cases}$$

а підпростір $X$ складається з матриць

$$C = \begin{cases} c_{ii}, i \neq 1 \\ 0, \text{ інакше.} \end{cases}$$

Згідно до сказаного вище маємо оператор $\mathbf{L}_X : X \to R(L)$, що буде лінійним та ін'єктивним. Поповнивши отриманий підпростір за нормою

$$||C||_{\overline{X}} = ||\mathbf{L}_X C||_{l_2} = \sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{c_{ii}}{i})^2$$

отримаємо простір $\overline{X}$ та простір $\overline{\mathbf{B}}$ в якому розширений оператор $\overline{\mathbf{L}} = \overline{\mathbf{L}}_{\overline{X}} P_{\overline{X}}$ буде нормально-розв'язним. У цьому випадку сильний псевдообернений оператор $\overline{\mathbf{L}}^+ : l_2 \to \overline{\mathbf{B}}$ буде мати наступний вигляд

$$\overline{\mathbf{L}}^+ \alpha = \overline{\mathbf{L}}^+ (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...) = diag(0, \alpha_2, 2\alpha_3, ..., (n-1)\alpha_n, ...).$$

Задача буде розв'язною тоді й тільки тоді, коли $\alpha_1 = 0$. Тоді один з сильних узагальнених розв'язків крайової задачі буде мати вигляд

$$Z(t) = K_0^t [\overline{\mathbf{L}}^+ \alpha] = e^{\frac{3}{2}t} diag(0, \alpha_2, 2\alpha_3, ..., (n-1)\alpha_n, ...)$$

в просторі $C^1([0;1]; \overline{\mathbf{B}})$.

### Крайова задача при лінійних збуреннях

Розглянемо крайову задачу

$$\dot{Z}(t, \varepsilon) = AZ(t, \varepsilon) - Z(t, \varepsilon)B + \varepsilon C(t) Z(t, \varepsilon) + \Phi(t), \tag{32}$$

$$\ell Z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon l_1 Z(\cdot, \varepsilon), \tag{33}$$

де $A, B \in \mathcal{L}(H_1)$ — лінійні обмежені оператори, $\Phi(t), C(t) \in C([a, b]; \mathcal{L}(H_1))$ — неперервні оператор-функції, $\ell, l_1 : C^1([a, b]; \mathcal{L}(H_1)) \to H_2$ — лінійні обмежені оператори, $\varepsilon$ — малий параметр, $\mathcal{L}(H_1)$ — простір лінійних та обмежених операторів, що діють з простору Гільберта $H_1$ у себе; $H_1, H_2$ — простори Гільберта, $\alpha \in H_2$. Шукаємо розв'язок $Z(t, \varepsilon) \in C^1([a, b]; \mathcal{L}(H_1)) \times C(0, \varepsilon_0]$ для фіксованого $\varepsilon_0 > 0$. Для простоти будемо розглядати випадок, коли $[a, b] = [0, T]$. Можливі два випадки, коли породжуюча задача ($\varepsilon = 0$) має розв'язки та коли не має [26].

**1) Породжуюча крайова задача має розв'язки.** У цьому випадку розв'язок крайової задачі (32), (33) будемо шукати у вигляді ряду

$$Z(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i Z_i(t).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях $\varepsilon$ отримаємо низку крайових задач.

Крайова задача при $\varepsilon^0$ буде мати такий вигляд:

$$\dot{Z}_0(t) = AZ_0(t) - Z_0(t)B + \Phi(t), \tag{34}$$

$$\ell Z_0(\cdot) = \alpha. \tag{35}$$

Для простоти будемо розглядати випадок, коли оператор $\mathbf{L}$ нормально-розв'язний та узагальнено-оборотний. Тоді згідно теореми 1 загальний розв'язок (34), (35) має вигляд:

$$Z_0(t, C_0) = \mathbf{K}_0^t [P_{N(\mathbf{L})} C_0] + (G[\Phi, \alpha])(t), \tag{36}$$

для всіх $C_0 \in \mathcal{L}(H_1)$ при виконанні умови розв'язності

$$P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[\alpha - \ell \int_0^{\cdot} \mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] = 0. \tag{37}$$

При $\varepsilon^1$ отримаємо наступну крайову задачу

$$\dot{Z}_1(t) = AZ_1(t) - Z_1(t)B + C(t)Z_0(t, C_0), \tag{38}$$

$$\ell Z_1(\cdot) = l_1 Z_0(\cdot, C_0). \tag{39}$$

Загальний розв'язок рівняння (38) буде мати вигляд

$$Z_1(t, \overline{C}_1) = e^{tA}\overline{C}_1 e^{-tB} + \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-t)B} d\tau.$$

Підставляючи в умову (39) отримаємо наступне операторне рівняння

$$\mathbf{L}\overline{C}_1 = g_1, \tag{40}$$

де

$$g_1 = l_1 Z_0(\cdot, C_0) - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau.$$

Умова розв'язності набуде вигляду:

$$P_{Y_{\mathbf{L}}} g_1 = 0. \tag{41}$$

Введемо до розгляду оператор $B_0 : \mathcal{L}(H_1) \to Y_{\mathbf{L}}$ дія якого визначається таким чином

$$B_0 C_0 = P_{Y_{\mathbf{L}}}[l_1 e^{\cdot A} P_{N(\mathbf{L})} C_0 e^{-\cdot B} - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) e^{\tau A} P_{N(\mathbf{L})} C_0 e^{-\tau B} e^{(\tau-\cdot)B} d\tau].$$

Підставляючи розв'язок $Z_0$ в умову розв'язності (41), отримуємо операторне рівняння відносно оператора $C_0$:

$$B_0 C_0 = -P_{Y_{\mathbf{L}}}[l_1(G[\Phi, \alpha])(\cdot) - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau)(G[\Phi, \alpha])(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau]. \tag{42}$$

Припустимо, що оператор $B_0$ є узагальнено-оборотним. Тоді за виконання достатньої умови $P_{Y_{B_0}} P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0$ ($Y_{\mathbf{L}} = Y_{B_0} \oplus R(B_0)$) рівняння (42) буде мати розв'язок у вигляді

$$C_0 = -B_0^{-} P_{Y_{\mathbf{L}}}[l_1(G[\Phi, \alpha])(\cdot) - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau)(G[\Phi, \alpha])(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau]. \tag{43}$$

Тоді розв'язок операторного рівняння (40) буде мати такий вигляд

$$\overline{C}_1 = P_{N(\mathbf{L})} C_1 + \mathbf{L}^{-} g_1.$$

Підставляючи в загальний розв'язок отримаємо

$$Z_1(t, C_1) =$$
$$= e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_1 e^{-tB} + e^{tA} \mathbf{L}^{-} g_1 e^{-tB} + \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-t)B} d\tau,$$

де $C_0$ визначається з рівності (43). Враховуючи визначення оператора Гріна, загальний розв'язок крайової задачі (38), (39) можна переписати у вигляді

$$Z_1(t, C_1) = e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_1 e^{-tB} + (G[CZ_0, l_1 Z_0])(t).$$

Діючи за індукцією отримаємо при $\varepsilon^i$ наступну крайову задачу

$$\dot{Z}_i(t) = AZ_i(t) - Z_i(t)B + C(t)Z_{i-1}(t), \tag{44}$$

$$\ell Z_i(\cdot) = l_1 Z_{i-1}(\cdot). \tag{45}$$

Загальний розв'язок задачі (44) буде мати вигляд

$$Z_i(t, \overline{C}_i) = e^{tA}\overline{C}_i e^{-tB} + \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_{i-1}(\tau, C_{i-1}) e^{(\tau-t)B} d\tau.$$

Підставляючи в крайову умову (45) отримаємо операторне рівняння

$$\mathbf{L}\overline{C}_i = g_i,$$

де

$$g_i = l_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1}) - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) Z_{i-1}(\tau, C_{i-1}) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau.$$

Умова розв'язності набуде вигляду

$$P_{Y_{\mathbf{L}}} g_i = 0.$$

Виходячи з позначень отримуємо, що умова розв'язності еквівалентна розв'язності операторного рівняння

$$B_0 C_{i-1} = -P_{Y_{\mathbf{L}}}[l_1(G[CZ_{i-2}, l_1 Z_{i-2}])(\cdot) - \\ - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau)(G[CZ_{i-2}, l_1 Z_{i-2}])(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau]. \tag{46}$$

Тоді

$$C_{i-1} = -B_0^+ P_{Y_{\mathbf{L}}}[l_1(G[CZ_{i-2}, l_1 Z_{i-2}])(\cdot) - \\ - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau)(G[CZ_{i-2}, l_1 Z_{i-2}])(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau],$$

$$\overline{C}_i = P_{N(\mathbf{L})} C_i + \mathbf{L}^- g_i,$$

та загальний розв'язок крайової задачі (44), (45) буде мати вигляд

$$Z_i(t, C_i) = e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_i e^{-tB} + (G[CZ_{i-1}, l_1 Z_{i-1}])(t).$$

Таким чином отримали теорему (достатню умову розв'язності).

**Теорема 3.** *Нехай оператори* $\mathbf{L}$, $B_0$ *узагальнено-оборотні та*

$$P_{Y_{\mathbf{L}}}\{\alpha - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\} = 0,$$

$$P_{Y_{B_0}} P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0.$$

*Тоді крайова задача (32), (33) має розв'язок у вигляді такого ряду*

$$Z(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i Z_i(t),$$

*коефіцієнти якого знаходяться наступним чином*

$$Z_0(t,C_0)=e^{tA}P_{N(\mathbf{L})}C_0e^{-tB}+(G[\Phi,\alpha])(t),\quad C_0\in\mathcal{L}(B_1)$$

$$Z_i(t,C_i)=e^{tA}P_{N(\mathbf{L})}C_ie^{-tB}+(G[CZ_{i-1},l_1Z_{i-1}])(t),\quad C_i\in\mathcal{L}(B_1)$$

*де* $(G[\cdot,\cdot])(t)$ *— узагальнений оператор Гріна (10).* $C_i$, $i\geq 0$ *задані так*

$$C_0=-B_0^-P_{Y_{\mathbf{L}}}[l_1(G[\Phi,\alpha])(\cdot)-\ell\int_0^{\cdot}e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)(G[\Phi,\alpha])(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}d\tau],$$

$$C_i=-B_0^-P_{Y_{\mathbf{L}}}[l_1(G[CZ_{i-1},l_1Z_{i-1}])(\cdot)-$$
$$-\ell\int_0^{\cdot}e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)(G[CZ_{i-1},l_1Z_{i-1}])(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}d\tau].$$

**Зауваження 4.** Зазначимо, що розроблена методика дозволяє досліджувати умови існування лінійно збуреної крайової задачі для рівняння Ляпунова й у тому випадку, коли множини значень операторів $\mathbf{L}$ та $B_0$ не є замкненими $R(\mathbf{L})\neq\overline{R(\mathbf{L})}, R(B_0)\neq\overline{R(B_0)}$, тобто оператори $\mathbf{L},B_0$ не є нормально-розв'язними. У такому випадку побудована вище процедура буде давати узагальнені розв'язки або квазірозв'язки й задача може бути дослідженою повністю. Доведення проводиться аналогічним чином до теореми 3.

**2) Породжуюча крайова задача не має розв'язків.** У цьому випадку розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$Z(t,\varepsilon)=\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^iZ_i(t). \tag{47}$$

Підставимо ряд (47) у крайову задачу (32), (33) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях $\varepsilon$.

При $\varepsilon^{-1}$ приходимо до однорідної крайової задачі:

$$\dot{Z}_{-1}(t)=AZ_{-1}(t)-Z_{-1}(t)B, \tag{48}$$

$$\ell Z_{-1}(\cdot)=0. \tag{49}$$

Задача (48), (49) має розв'язок:

$$Z_{-1}(t,C_{-1})=e^{tA}P_{N(\mathbf{L})}C_{-1}e^{-tB}, \tag{50}$$

для довільного оператора $C_{-1}\in\mathcal{L}(B_1)$, який буде знайдений нижче.

Прирівнюючи коефіцієнти при $\varepsilon^0$, отримаємо крайову задачу для $Z_0(t)$:

$$\dot{Z}_0(t)=AZ_0(t)-Z_0(t)B+C(t)Z_{-1}(t,C_{-1})+\Phi(t), \tag{51}$$

$$\ell Z_0(\cdot)=\alpha+l_1Z_{-1}(\cdot,C_{-1}). \tag{52}$$

Операторне рівняння (51) має розв'язок:

$$Z_0(t,\overline{C}_0)=e^{tA}\overline{C}_0e^{-tB}+\int_0^te^{(t-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{-1}(\tau,C_{-1})+\Phi(\tau)\right]e^{(\tau-t)B}d\tau. \tag{53}$$

Підставляючи $Z_0(t, \overline{C}_0)$ в крайову умову (52), отримаємо наступне операторне рівняння

$$\mathbf{L}\overline{C}_0 = g_0, \tag{54}$$

де

$$g_0 = \alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} \left[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)\right] e^{(\tau - \cdot)B} d\tau.$$

Знову будемо припускати, що опеартор $\mathbf{L}$ є узагальнено-оборотним. Тоді розв'язок рівняння (54) існує тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{Y_{\mathbf{L}}} g_0 = 0.$$

Підставляючи в отриману умову розв'язності представлення (50) для розв'язку $Z_{-1}$ приходимо до операторного рівняння

$$B_0 C_{-1} = -P_{Y_{\mathbf{L}}} \left[\alpha - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau - \cdot)B} d\tau\right], \tag{55}$$

де оператор $B_0$ має вигляд

$$B_0 C_{-1} =$$
$$= P_{Y_{\mathbf{L}}} \left[l_1 e^{\cdot A} P_{N(\mathbf{L})} C_{-1} e^{-\cdot B} - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} C(\tau) e^{\tau A} P_{N(\mathbf{L})} C_{-1} e^{-\tau B} e^{(\tau - \cdot)B} d\tau\right].$$

Рівняння (55) є розв'язним тоді і лише тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$P_{Y_{B_0}} P_{Y_{\mathbf{L}}} \left[\alpha - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau - \cdot)B} d\tau\right] = 0. \tag{56}$$

За виконання достатньої умови

$$P_{Y_{B_0}} P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0, \tag{57}$$

умова розв'язності (56) буде виконуватись автоматично й операторне рівняння (55) при цьому буде мати принаймні один розв'язок у вигляді:

$$C_{-1} = -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}} \left[\alpha - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau - \cdot)B} d\tau\right]. \tag{58}$$

В цьому випадку розв'язок рівняння $\mathbf{L}\overline{C}_0 = g_0$ буде мати вигляд:

$$\overline{C}_0 = \mathbf{L}^- g_0 + P_{N(\mathbf{L})} C_0, \quad C_0 \in \mathcal{L}(B_1),$$

або

$$\overline{C}_0 =$$
$$= \mathbf{L}^- \left[\alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} \left[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)\right] e^{(\tau - \cdot)B} d\tau\right] +$$
$$+ P_{N(\mathbf{L})} C_0.$$

Таким чином розв'язок $Z_0(t, C_0)$ можна записати у наступному вигляді:

$$Z_0(t, C_0) = e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_0 e^{-tB} + \overline{Z}_0(t), \tag{59}$$

для довільного оператора $C_0 \in \mathcal{L}(H_1)$, який буде знайдений нижче.

$$\overline{Z}_0(t) = e^{tA}\left[\mathbf{L}^{-}\{\alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1})\}\right] e^{-tB} + \left(G\left[C(\cdot)Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot)\right]\right)(t), \tag{60}$$

де оператор Гріна має вигляд:

$$\begin{aligned}(G\left[C(\cdot)Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot)\right])(t) = \\ = \int_0^t e^{(t-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)\right] e^{(\tau-t)B} d\tau - \\ - e^{tA}\left[\mathbf{L}^{-}\ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)\right] e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\right] e^{-tB}.\end{aligned} \tag{61}$$

При $\varepsilon^1$ отримуємо крайову задачу для визначення $Z_1(t)$ вигляду

$$\dot{Z}_1(t) = AZ_1(t) - Z_1(t)B + C(t)Z_0(t, C_0), \tag{62}$$

$$\ell Z_1(\cdot) = l_1 Z_0(\cdot, C_0). \tag{63}$$

Операторне рівняння (62) має розв'язок:

$$Z_1(t, \overline{C}_1) = e^{tA}\overline{C}_1 e^{-tB} + \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-t)B} d\tau. \tag{64}$$

Підставляючи $Z_1(t)$ в крайову умову (64), отримаємо операторне рівняння

$$\mathbf{L}\overline{C}_1 = g_1,$$

де

$$g_1 = l_1 Z_0(\cdot, C_0) - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau.$$

Розв'язок операторного рівняння існує тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{Y_{\mathbf{L}}} g_1 = 0.$$

Підставляючи в отриману умову розв'язності представлення для $Z_0(t, C_0)$ отримуємо операторне рівняння відносно оператора $C_0$:

$$B_0 C_0 = -P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[l_1 \overline{Z}_0(\cdot) - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) \overline{Z}_0(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\right]. \tag{65}$$

За виконання умови (57) операторне рівняння (65) має принаймні один розв'язок у вигляді

$$C_0 = -B_0^{-} P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[l_1 \overline{Z}_0(\cdot) - l \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) \overline{Z}_0(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\right]. \tag{66}$$

У цьому випадку розв'язок рівняння $\mathbf{L}\overline{C}_1 = g_1$ буде мати вигляд:

$$\overline{C}_1 = \mathbf{L}^{-} g_1 + P_{N(\mathbf{L})} C_1, C_1 \in \mathcal{L}(H_1),$$

або

$$\overline{C}_1 = \mathbf{L}^{-}\left[l_1 Z_0(\cdot, C_0) - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau) Z_0(\tau, C_0)\right] e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\right] + P_{N(\mathbf{L})} C_1.$$

Таким чином розв'язок $Z_1(t, C_1)$ можна зобразити у вигляді:

$$Z_1(t, C_1) = e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_1 e^{-tB} + \overline{Z}_1(t), \tag{67}$$

для довільного оператора $C_1 \in \mathcal{L}(H_1)$, який буде знайдений нижче. Тут

$$\overline{Z}_1(t) = e^{tA}\left[\mathbf{L}^- l_1 Z_0(\cdot, C_0)\right] e^{-tB} + \left(G\left[C(\cdot)Z_0(\cdot, C_0)\right]\right)(t). \tag{68}$$

Діючи за індукцією, для визначення коефіцієнта $Z_i(t)$ при $\varepsilon^i$ ряду (47) маємо таку крайову задачу

$$\dot{Z}_i(t) = AZ_i(t) - Z_i(t)B + C(t)Z_{i-1}(t, C_{i-1}), \tag{69}$$

$$\ell Z_i(\cdot) = l_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1}). \tag{70}$$

За виконання умови (57), крайова задача (69),(70) має розв'язок:

$$Z_i(t, C_i) = e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_i e^{-tB} + \overline{Z}_i(t), \tag{71}$$

де частинний розв'язок $\overline{Z}_i(t)$ крайової задачі (69),(70) має вигляд:

$$\overline{Z}_i(t) = e^{tA}\left[\mathbf{L}^- l_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\right] e^{-tB} + \left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\right]\right)(t). \tag{72}$$

Оператор $C_i \in \mathcal{L}(H_1)$ знаходиться за формулою:

$$C_i = -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[l_1 \overline{Z}_i(\cdot) - \ell \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau)\overline{Z}_i(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\right]. \tag{73}$$

Таким чином, маємо ітераційний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (69), (70):

$$Z_i(t, C_i) = \begin{cases} e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_i e^{-tB}, & i = -1; \\ e^{tA} P_{N(\mathbf{L})} C_i e^{-tB} + \overline{Z}_i(t), & i = \overline{0, \infty}. \end{cases} \tag{74}$$

$$C_i = \\ = \begin{cases} -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[\alpha - l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\right], & i = -1; \\ -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[l_1\overline{Z}_i(\cdot) - l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)\overline{Z}_i(\tau)e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\right], & i = \overline{0, \infty}. \end{cases} \tag{75}$$

$$\overline{Z}_i(t) = \\ = \begin{cases} e^{tA}\left[\mathbf{L}^-\left(\alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1})\right)\right] e^{-tB} + \\ + \left(G\left[C(\cdot)Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot)\right]\right)(t), & i = 0; \\ e^{tA}\left[\mathbf{L}^- l_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\right] e^{-tB} + \left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\right]\right)(t), & i \geq 1. \end{cases} \tag{76}$$

Узагальнений оператор Гріна визначається таким чином:

$$\left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\right]\right)(t) =$$

$$= \begin{cases} \int_0^t e^{(t-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)\right] e^{(\tau-t)B} d\tau - \\ -e^{tA}\left[Q^+ l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1})\ + \right.\right. \\ \left.\left. +\Phi(\tau)\right] e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\right] e^{-tB}, & i = 0; \\ \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau)Z_{i-1}(\tau, C_{i-1}) e^{(\tau-t)B} d\tau - \\ -e^{tA}\left[Q^+ l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{i-1}(\tau, C_{i-1})\right] e^{(\tau-\cdot)B} d\tau\right] e^{-tB}, & i \geq 1. \end{cases} \tag{77}$$

Отже, достатня умова розв'язності крайової задачі (32), (33) має такий вигляд.

**Теорема 4.** *(достатня умова розв'язності). Якщо оператори* $\mathbf{L}$*,* $B_0$ *є узагальнено-оборотніми, породжуюча крайова задача, отримана із* (32), (33) *при* $\varepsilon = 0$ *не має розв'язків й* $P_{Y_{B_0}} P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0$*, то збурена крайова задача* (32), (33) *має принаймні один розв'язок у вигляді ряду:*

$$Z(t) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i Z_i(t),$$

*абсолютно збіжного при довільних фіксованих* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ *коефіцієнти якого визначаються ітераційним алгоритмом (74)–(77).*

## Біфуркація розв'язків

Розглянемо автономну крайову задачу

$$\dot{Z}(t,\varepsilon) = AZ(t,\varepsilon) - Z(t,\varepsilon)B + \varepsilon R(Z(t,\varepsilon),\varepsilon) + \Phi(t), \tag{78}$$

$$\ell Z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{79}$$

де $Z = Z(t,\varepsilon) \in C^1([a;b(\varepsilon)];\mathcal{L}(H_1)) \times C(0;\varepsilon_0]$ для фіксованого $\varepsilon_0 > 0$ невідома оператор-функція; $A, B \in \mathcal{L}(H_1)$ — лінійні обмежені оператори, оператор-функція $\Phi(t) \in C([a;b(\varepsilon)];\mathcal{L}(H_1)])$, $H_1, H_2$ — гільбертові простори, $\alpha \in H_2$; нелінійна по $Z$ оператор-функція $R(Z(t,\varepsilon),\varepsilon)$ неперервно-диференційовна по $Z(t,\varepsilon)$ в околі породжуючого розв'язку і неперервна по $\varepsilon$ в околі нуля:

$$R(Z(\cdot,\varepsilon)) \in C^1[\|Z - Z_0\| \le q]; R(Z,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0],$$

$q$ — достатньо мала константа; $\ell : C^1([a;b(\varepsilon)];\mathcal{L}(H_1)) \to H_2$ — лінійний обмежений оператор; нелінійний оператор $J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ неперервно-диференційовний по $Z$ у розумінні Фреше. Знайдемо необхідну та достатню умови існування розв'язків $Z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (78), (79), які при $\varepsilon = 0$ перетворюються в породжуючий розв'язк $Z_0(t,C)$ вигляду (11) на $[a, b^*]$ ($b^* = b(0)$):

$$Z_0(t,C) = \mathbf{K}_a^t[P_{N(\mathbf{L})}C] + (G[\Phi,\alpha])(t). \tag{80}$$

Правий кінець $b(\varepsilon)$ відрізку $[a;b(\varepsilon)]$, на якому шукається розв'язок задачі (78), (79), невідомий і його треба визначити у процесі побудови розв'язку. Будемо шукати його у вигляді:

$$b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon(b^* - a)\beta(\varepsilon), \quad \beta(0) = \beta^*. \tag{81}$$

Зробимо заміну змінної [7, с. 209]:

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)).$$

Отримаємо нелінійну автономну крайову задачу з невідомою оператор-функцією $Z = Z(\tau,\varepsilon)$, яка визначена на відрізку $[a;b^*]$ фіксованої довжини, з простору $C^1([a;b^*];\mathcal{L}(H_1)) \times C(0;\varepsilon_0]$ для фіксованого $\varepsilon_0 > 0$:

$$\begin{aligned}\dot{Z}(\tau,\varepsilon) &= AZ(\tau,\varepsilon) - Z(\tau,\varepsilon)B + \Phi + \\ &+ \varepsilon\Big(\beta(\varepsilon)\Big(AZ(\tau,\varepsilon) - Z(\tau,\varepsilon)B + \Phi\Big) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))R(Z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big),\end{aligned} \tag{82}$$

$$\ell Z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{83}$$

Виконаємо у крайовій задачі (82), (83) заміну змінних:

$$Z(\tau,\varepsilon) = Z_0(\tau, C^0) + Y(\tau,\varepsilon). \tag{84}$$

Розв'язок $Z(\tau,\varepsilon) = Z_0(\tau,C^0) + Y(\tau,\varepsilon)$ шукаємо в околі розв'язку породжуючої задачі (19), (20). Враховуючи, що $Z_0(\tau,C^0)$ є розв'язком крайової задачі (19), (20), отримаємо таку крайову задачу:

$$\begin{aligned}\dot{Y}(\tau,\varepsilon) &= AY(\tau,\varepsilon) - Y(\tau,\varepsilon)B+ \\ &+ \varepsilon\Big(\beta(\varepsilon)\Big(A(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon)) - (Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon))B + \Phi(\tau)\Big)+ \\ &+ (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))R\Big(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\Big)\Big),\end{aligned} \tag{85}$$

$$\ell Y(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J\Big(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\Big), \tag{86}$$

на фіксованому відрізку $[a;b^*]$. Застосовуючи теорему 1 до задачі (85), (86), приходимо до необхідної умови існування розв'язків задачі (78), (79):

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[J(Z_0(\cdot,C^0),0) - \ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}\Big[\beta^*\Big(AZ_0(\tau,C^0) - Z_0(\tau,C^0)B + \Phi(\tau)\Big)+ \\ + R\Big(Z_0(\tau,C^0),0\Big)\Big]d\tau\Bigg] = 0.$$

Ввівши позначення

$$F_0(\tau,C^0) = \beta^*\big[AZ_0(\tau,C^0) - Z_0(\tau,C^0)B + \Phi\big] + R\Big(Z_0(\tau,C^0),0\Big),$$

приходимо до такого твердження.

**Теорема 5.** *Нехай автономна крайова задача (82), (83) має розв'язок $Z(\tau,\varepsilon) \in C^1([a;b^*];\mathcal{L}(H_1)) \times C(0;\varepsilon_0]$, який при $\varepsilon = 0$ обертається у породжуючий розв'язок $Z_0(\tau,0) = Z_0(\tau,C^0)$ задачі (19), (20). Тоді оператор $C^0 \in \mathcal{L}(H_1)$ задовольняє операторне рівняння*

$$P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[J(Z_0(\cdot,C^0),0) - \ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}\Big[F_0(\tau,C^0)\Big]d\tau\right] = 0. \tag{87}$$

Рівняння (87) будемо називати *рівнянням для породжуючих операторів* крайової задачі (78), (79).

Знайдемо достатню умову існування розв'язків $Z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (78), (79). Нехай оператор $C_0$ задовольняє рівняння для породжуючих операторів (87). Розв'язок крайової задачі (85), (86) має представлення:

$$Y(\tau,\varepsilon) = \mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right] + Y^{(1)}(\tau,\varepsilon), \tag{88}$$

де

$$Y^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\mathbf{K}_0^t\left[\mathbf{L}^-J\Big(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\Big)\right]+$$
$$+\varepsilon G_1\Big\{\beta(\varepsilon)\Big[A(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon))-(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon))B+\Phi\Big]+$$
$$+\big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\big)R\Big(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\Big)\Big\}(\tau)$$

та

$$G_1\{F\}(t)=\int_0^t\mathbf{K}_\tau^t[F]d\tau-\mathbf{K}_0^t\left[\mathbf{L}^-\ell\int_0^{\cdot}\mathbf{K}_\tau^{\cdot}[F]d\tau\right]. \tag{89}$$

Виділимо у оператор-функції $R(Z_0+Y,\varepsilon)$ і оператора $J(Z_0+Y,\varepsilon)$ лінійну частину по $Y$ і члени нульового порядку по $\varepsilon$:

$$R\Big(Z_0(\tau,C^0)+Y(\tau,\varepsilon),\varepsilon\Big)=R\Big(Z_0(\tau,C^0),0\Big)+A_1(\tau)Y+\varphi_1(Y,\varepsilon), \tag{90}$$

$$J\Big(Z_0(\cdot,C^0)+Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big)=J\Big(Z_0(\cdot,C^0),0\Big)+\ell_1Y(\cdot,\varepsilon)+J_1\Big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big), \tag{91}$$

де

$$A_1(\tau)=\frac{\partial}{\partial Z}R(Z,0)|_{Z=Z_0(\tau,C^0)},\varphi_1(0,0)=0,\frac{\partial\varphi_1(0,0)}{\partial Y}=0,$$
$$\ell_1=\frac{\partial}{\partial Z}J(Z,0)|_{Z=Z_0(\tau,C^0)},J(0,0)=0,\frac{\partial}{\partial Y}J(0,0)=0.$$

Перетворимо неоднорідність системи (85), використовуючи розклад (90)

$$\beta\Big[A(Z_0+Y)-(Z_0+Y)B+\Phi\Big]+(1+\varepsilon\beta)R\big(Z_0+Y,\varepsilon\big)=$$
$$=\beta AZ_0+\beta AY-\beta Z_0B-\beta YB+\beta\Phi+R\big(Z_0,0\big)+A_1(\tau)Y+\varphi_1(Y,\varepsilon)+\varepsilon\beta R\big(Z,\varepsilon\big)=$$
$$=\beta^*AZ_0+\overline{\beta}AZ_0+\beta^*AY+\overline{\beta}AY-\beta^*Z_0B-\overline{\beta}Z_0B-\beta^*YB-\overline{\beta}YB+\beta^*\Phi-\overline{\beta}\Phi+$$
$$+R\big(Z_0,0\big)+A_1(\tau)Y+\varphi_1(Y,\varepsilon)+\varepsilon\beta R\big(Z,\varepsilon\big)=$$
$$=F_0(\tau,C^0)+\beta^*AY+A_1(\tau)Y-\beta^*A\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right]-A_1(\tau)\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right]+$$
$$+\beta^*A\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right]+A_1(\tau)\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right]-\beta^*YB+\beta^*\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right]B-$$
$$-\beta^*\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}C^0\right]B+\overline{\beta}AZ_0-\overline{\beta}Z_0B-\overline{\beta}\Phi+\overline{\beta}AY-\overline{\beta}YB+\varphi_1(Y,\varepsilon)+\varepsilon\beta R\big(Z,\varepsilon\big)=$$
$$=F_0(\tau,C^0)+\overline{A}_1[c](\tau)+\big[\beta^*A+A_1(\tau)\big]Y^{(1)}(\tau,\varepsilon)-\beta^*Y^{(1)}(\tau,\varepsilon)B+R_1(Y,\varepsilon),$$

де введено наступні позначення:

$$\overline{A}_1[\cdot](\tau)=\big\{\big[\beta^*A+A_1(\tau)\big]\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}\cdot\right]-\beta^*\mathbf{K}_0^\tau\left[P_{N(\mathbf{L})}\cdot\right]B,AZ_0-Z_0B+\Phi\big\},$$

блочний оператор; $c=\begin{pmatrix}C_0\\ \overline{\beta}\end{pmatrix}$, $\overline{\beta}=\beta-\beta^*\in\mathbb{R}^1$, а оператор $R_1(Y,\varepsilon)$ має вигляд:

$$R_1(Y,\varepsilon)=\overline{\beta}AY-\overline{\beta}YB+\varepsilon\beta R\big(Z_0+Y,\varepsilon\big)+\varphi_1(Y,\varepsilon).$$

Таким чином, приходимо до задачі побудови розв'язку $Y(\tau,\varepsilon)$:

$$Y(\tau,\varepsilon)\in C^1\left([a;b^*];\mathcal{L}(H_1)\right)\times C(0;\varepsilon_0],\ \tau\in[a;b^*],\ \varepsilon\in[0;\varepsilon_0],\ Y(\tau,0)=0$$

операторно-диференціального рівняння

$$\frac{dY(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = AY(\tau,\varepsilon) - Y(\tau,\varepsilon)B + \varepsilon\big\{F_0(\tau, C^0) + \overline{A}_1[c](\tau) +$$
$$+ \big[\beta^* A + A_1(\tau)\big]Y^{(1)}(\tau,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(\tau,\varepsilon)B + R_1(Y,\varepsilon)\big\}, \quad (92)$$

яке задовольняє крайовій умові

$$\ell Y(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J\Big(Z_0(\cdot, C^0) + Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big). \quad (93)$$

Умова розв'язності крайової задачі (85), (86) та, відповідно, і задачі (92), (93) у нових позначеннях приймає вигляд

$$P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[J\Big(Z_0(\cdot, C^0), 0\Big) + \ell_1 Y(\cdot,\varepsilon) + J_1\Big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big) -$$
$$- \ell\int_a^{b^*} \mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[F_0(s, C^0) + \overline{A}_1[c](s) +$$
$$+ \big[\beta^* A + A_1(\tau)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg] = 0.$$

З урахуванням умови (87) маємо

$$P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[\ell_1\mathbf{K}_0^{\cdot}\left[P_{N(\mathbf{L})}C_0\right] - \ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\left[\overline{A}_1\left[\begin{pmatrix} C_0 \\ \overline{\beta}\end{pmatrix}\right](s)\right]ds\right] =$$
$$= -P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[\ell_1 Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\Big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big) -$$
$$-\ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg].$$

Отримаємо операторне рівняння:

$$B_0 C_0 = G_0, \quad (94)$$

де

$$B_0 C = P_{Y_{\mathbf{L}}}\left[\ell_1\mathbf{K}_0^{\cdot}\left[P_{N(\mathbf{L})}C\right] - \ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\left[\overline{A}_1\left[\begin{pmatrix} C \\ \overline{\beta}\end{pmatrix}\right](s)\right]ds\right],$$
$$G_0 = -P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[\ell_1 Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\Big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big) -$$
$$-\ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg].$$

Для розв'язності рівняння (94) за умови узагальненої оборотності оператора $B_0$ необхідно і достатньо, щоб

$$P_{Y_{B_0}} P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[\ell_1 Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\Big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big) -$$

$$-\ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^*A+A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon)-\beta^*Y^{(1)}(s,\varepsilon)B+R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg]=0.$$

Достатньою умовою розв'язності операторного рівняння (94) є умова

$$P_{Y_{B_0}}P_{Y_{\mathbf{L}}}=0.$$

Таким чином, для побудови розв'язку $Y(\tau,\varepsilon)\in C^1\left([a;b^*];\mathcal{L}(H_1)\right)\times C(0;\varepsilon_0]$, $Y(\tau,0)=0$ крайової задачі (92), (93) приходимо до операторної системи:

$$\begin{cases} Y(\tau,\varepsilon)=\mathbf{K}_0^{\tau}[P_{N(\mathbf{L})}C^0]+Y^{(1)}(\tau,\varepsilon), \\ C_0=-B_0^{-}P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[\ell_1Y^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+J_1\Big(Y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big)- \\ -\ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^*A+A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon)- \\ -\beta^*Y^{(1)}(s,\varepsilon)B+R_1(Y,\varepsilon)\Big]ds\Bigg]+ \\ +\mathcal{P}_{N(B)}\overline{C}_0, \\ Y^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\mathbf{K}_0^{t}\left[\mathbf{L}^{-}J\big(Z_0+Y,\varepsilon\big)\right]+ \\ +\varepsilon G_1\Big\{F_0(s,C^0)+\overline{A}_1[c](s)+ \\ +\big[\beta^*A+A_1(s)\big]Y^{(1)}(s,\varepsilon)- \\ -\beta^*Y^{(1)}(s,\varepsilon)B+R_1(Y,\varepsilon)\Big\}(\tau), \end{cases} \tag{95}$$

де

$$G_1\{F\}(t)=\int_a^{b^*}\mathbf{K}_{\tau}^{t}[F]d\tau-\mathbf{K}_0^{t}\left[\mathbf{L}^{-}\ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_{\tau}^{\cdot}[F]d\tau\right],\ \ c=\begin{pmatrix}C_0\\ \overline{\beta}\end{pmatrix}.$$

Операторна система (95) належить до класу систем, для розв'язку яких застосовується збіжний для всіх $\varepsilon\in[0;\varepsilon^*]$ метод простих ітерацій, причому величину $\varepsilon^*$ можна оцінити знизу за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова.

Перше наближення $Y_1(\tau,\varepsilon)$ системи (95) природньо шукати, як розв'язок крайової задачі

$$\frac{dY_1(\tau,\varepsilon)}{d\tau}=AY_1(\tau,\varepsilon)-Y_1(\tau,\varepsilon)B+\varepsilon F_0(\tau,C^0),$$

$$\ell Y_1(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon J\Big(Z_0(\cdot,C^0),0\Big),$$

яке має вигляд

$$Y_1(\tau,\varepsilon)=\mathbf{K}_0^{\tau}[P_{N(\mathbf{L})}C_0]+Y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon),\quad C^0=0,$$

$$Y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\mathbf{K}_0^{t}\left[\mathbf{L}^{-}J\big(Z_0,0\big)\right]+\varepsilon G_1\big\{F_0(s,C^0)\big\}(\tau).$$

Друге наближення $Y_2(\tau,\varepsilon)$ шукається, як розв'язок крайової задачі

$$\frac{dY_2(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = AY_2(\tau,\varepsilon) - Y_2(\tau,\varepsilon)B + \varepsilon\Big\{F_0(\tau,C^0) + \overline{A}_1[c](\tau) +$$
$$+ \big[\beta^* A + A_1(\tau)\big]Y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) - \beta^* Y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)B + R_1(Y_1,\varepsilon)\Big\},$$

$$\ell Y_2(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J\Big(Z_0(\cdot,C^0) + Y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big),$$

у вигляді

$$Y_2(\tau,\varepsilon) = \mathbf{K}_0^\tau[P_{N(\mathbf{L})}C_1] + Y_2^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$Y_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\mathbf{K}_0^t\left[\mathbf{L}^- J\big(Z_0 + Y_1,\varepsilon\big)\right] + \varepsilon G_1\Big\{F_0(s,C^0) + \overline{A}_1[c](s) +$$

$$+\big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y_1^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_1^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y_1,\varepsilon)\Big\}(\tau).$$

З умови розв'язності системи для другого наближення, отримаємо рівняння відносно оператора $C_1$:

$$B_0C_1 = -P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[\ell_1 Y_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\Big(Y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big) -$$

$$-\ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y_1^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_1^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y_1,\varepsilon)\Big]ds\Bigg],$$

розв'язок якого має вигляд

$$C_1 = -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[\ell_1 Y_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\Big(Y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big) -$$

$$-\ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Big[\big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y_1^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_1^{(1)}(s,\varepsilon)B + R_1(Y_1,\varepsilon)\Big]ds\Bigg] + P_{N(B)}\overline{C}_1.$$

Продовжуючи обчислення далі, приходимо до висновку, що розв'язок операторної системи (95) може бути знайдений за допомогою наступного ітераційного процесу:

$$\begin{cases} C_k = -B_0^- P_{Y_{\mathbf{L}}}\Bigg[\ell_1 Y_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + J_1\Big(Y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big) - \\ -\ell\int_a^{b^*}\mathbf{K}_s^{\cdot}\Bigg[\big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y_k^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_k^{(1)}(s,\varepsilon)B + \\ +R_1(Y_k(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg]ds\Bigg] + P_{N(B)}\overline{C}_k, \\ Y_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\mathbf{K}_0^t\Bigg[\mathbf{L}^- J\Big(Z_0(\cdot,C^0) + Y_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon\Big)\Bigg] + \varepsilon G_1\Bigg\{F_0(s,C^0) + \\ +\overline{A}_1\left[\begin{pmatrix} C_k \\ \overline{\beta}\end{pmatrix}\right](s) + \big[\beta^* A + A_1(s)\big]Y_k^{(1)}(s,\varepsilon) - \beta^* Y_k^{(1)}(s,\varepsilon)B + \\ +R_1(Y_k(s,\varepsilon),\varepsilon)\Bigg\}(\tau), \\ \quad Y_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \mathbf{K}_0^\tau[P_{N(\mathbf{L})}C_k] + Y_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon), \\ \quad Y_0(\tau,\varepsilon) = Y_0^{(1)}(\tau,\varepsilon) = 0, \quad k = 0,1,2,3,\dots. \end{cases} \tag{96}$$

**Теорема 6.** *(достатня умова розв'язності). Припустимо, що оператор* $B_0$ *є узагальнено-оборотним й виконується умова* $P_{Y_{B_0}}P_{Y_{\mathbf{L}}} = 0$*. Тоді для кожного оператора* $C^0$*, що є коренем рівняння для породжуючих операторів* (87) *крайова задача* (82), (83) *має розв'язок* $Z(\tau,\varepsilon) \in C^1([a;b^*];\mathcal{L}(H_1)) \times C(0;\varepsilon_0]$, $Z(\tau,0) = Z(\tau,C^0)$*, який можна знайти за допомогою ітераційного процесу* (96) *збіжного при* $\varepsilon \in [0;\varepsilon^*]$

$$Z_k(\tau,\varepsilon) = Z_0(\tau,C^0) + Y_k(\tau,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\dots$$

## Література


1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука. 1970. 534 с.
2. Bamieh B., Dahleh M. Energy amplification in channel flows with stochastic excitation. *Physics of Fluids.* 2001. 13. P. 3258–3269.
3. Bhatia R. A note on the Lyapunov equation. *Linear algebra and its applications.* 1997. 259. p. 71–76.
4. Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
5. Брайсон А., Хо Ю. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 С.
6. Boichuk A. A., Krivosheya S. A. A critical periodic boundary-value problem for a matrix Riccati equation. *Differential Equations.* 2001. Vol.37, № 4. P. 464–471.
7. Бойчук А. А., Журавлёв В. Ф., Самойленко А. М. Обобщённо-обратные операторы и нётеровы краевые задачи. К.: Инст. матем. НАНУ, 1995. 320 с.
8. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. 104 с.

9. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
10. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі з необмеженим оператором в лінійній частині. *Нелінійні коливання.* 2013. т. 16, № 4. С. 518–526.
11. Покутний О. О. Узагальнено-обернений оператор в просторах Фреше, Банаха та Гільберта. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія: фізико-математичні науки.* 2013, № 4. С. 158–161.
12. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
13. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.:Наука, 1990. 129 с.
14. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
15. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 454 с.
16. Чуйко С. М. Обобщенный оператор Грина нётеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2016. № 8. С. 74–83.
17. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. II edition, De Gruyter. 2016. 296 p.
18. Boichuk O. A., Krivosheya S. A. Criterion for the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. *Ukr. Math. J.* 1998. 50, No. 8. P. 1162–1169.
19. Bondarev A. N., Laptinskii V. N. Multipoint boundary value problem for the Lyapunov equation in the case of strong degeneration of the boundary conditions. *Differential Equations.* 2011. Vol. 47, №6. P. 778–786.
20. Chuiko S. M. On the solution of matrix Lyapunov equations. *Visn. Kharkiv. Univ., Ser. Mat. Prikl. Mat. Mekh.* 2014. No. 1120. P. 85–94.
21. Datko R. Extending a theorem of a A. M. Lyapunov to Hilbert space. *Journal of mathematical analysis and applications.* 1970. 32. P. 610–616.
22. Druskin V., Knizhnerman L., Simoncini V. Analysis of the rational Krylov subspace and ADI methods for solving the Lyapunov equation. *SIAM J. Numer. Anal.* 2011. Vol. 49, No. 5. P. 1875–1898.
23. Duncana T. E., Maslowski B., Pasik-Duncana B. Stochastic equations in Hilbert space with a multiplicative fractional Gaussian noise. *Stochastic Processes and their Applications.* 2005. 115. P. 1357–1383.
24. Kielhöfer H. On the Lyapunov-Stability of Stationary Solutions of Semilinear Parabolic Differential Equations. *Journal of diff. equations.* 22. 1976. P. 193–208.
25. Man'ko V. I., Vilela Mendes R. Lyapunov exponent in quantum mechanics. *A phase-space approach. Physica D.* 2000. 145. P. 330–348.
26. Panasenko E. V., Pokutnyi O. O. Boundary-Value Problems for the Lyapunov Equation in Banach Spaces. *J. Math. Sci.* 2017. v. 223. P. 1–7.
27. Panasenko E. V., Pokutnyi O. O. Boundary-value problems for differential equations in a Banach space with unbounded operator in the linear part. *J. Math. Sci.* 2014. 203, No. 3. P. 366–374.
28. Pazy A. On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert space. *SIAM J. Math. Anal.* 1972. Vol. 3, No. 2. P. 291–294.
29. Pokutnyi O. O. Generalized inverse operator in Fréchet, Banach, and Hilbert spaces. *Visn. Kyiv. Nats. Univ. Ser. Fiz. Mat. Nauk.* 2013. No. 4. p. 158–161.
30. Maci Przyluski K. The Lyapunov Equation and the Problem of Stability for Linear Bounded Discrete-Time Systems in Hilbert Space. *Applied mathematics and optimization.* 1980. 6. P. 97–112.

31. Rosen I. G. and Wang C. A multilevel technique for the approximate solution of operator Lyapunov and algebraic riccati equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 1995. Vol. 32, No. 2. P. 514–541.
32. Sather D. Branching of Solutions of an Equation in Hilbert Space. *Arch. Rational M. Anal.* 1970. Vol. 36. P. 47–64.
33. Vu N. P., Tran T. K. On the Lyapunov equation in Banach spaces and applications to control problems. *IJMMS.* 2002. 29:3. P. 155–166.
34. Wen John Ting-Yung, Balas Mark J. Robust Adaptive Control in Hilbert Space. *Journal of mathematical analysis and applications.* 1989. 143. P. 1–26.
35. Dragicevic D., Preda C. Lyapunov theorems for exponential dichotomies in Hilbert spaces. *International journal of mathematics.* 2016. Vol. 27, No. 4.
36. Preda C., Preda P. Lyapunov operator inequalities for exponential stability of Banach space semigroups of operators. *Appl. math. letters.* 2012. 25. P. 401–403.
37. Gil' M. Solution estimates for the discrete Lyapunov equation in a Hilbert space and applications to difference equations. *Axioms.* 2019. 8, 20. 22 pages.
38. Lucas J. An algorithm for solving generalized algebraic Lyapunov equations in Hilbert space, applications to boundary value problems. *Proceedings of the Edinburgh mathematical society.* 1988. 31. P. 99–105.
39. Latushkin Y., Montgomery-Smith S. Lyapunov theorems for Banach spaces. *Bulletin of the American mathematical society.* 1994. Vol.31, No. 1. P. 44–49
40. Gahinet P., Sorine M., Laub A.J., Kenney C. Stability margins and Lyapunov equations for linear operators in Hilbert space. *Proceedings of the 29th conference on decision and control Honolulu.* 1990. P. 2638–2639.
41. Maciej Przyluski K. The Lyapunov equation and the problem of stability for linear bounded discrete-time systems in Hilbert space. *Appl. Math. Optim.* 1980. 6. P. 97–112.
42. Ivanov R. P., Raykov I. L. Parametric Lyapunov function method for solving nonlinear systems in Hilbert spaces. *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* 1996. 17, (9, 10). P. 893–901.
43. Polyakov A. On homogeneous Lyapunov function theorem for evolution equations. *IFAC 2020 — International federation of automatic control, 21st world congress.* Jul 2020, Berlin / Virtual, Germany.
44. Gil' M. Stability of linear equations with differentiable operators in a Hilbert space. *IMA journal of mathematical control and information.* 2018. P. 1–8.
45. Бойчук А. А., Покутний А. А. Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта. *Укр. мат. журн.* 2015. № 9. С. 1181–1188.
46. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Умова біфуркації розв'язків рівняння Ляпунова у просторі Гільберта. *Нелінійні коливання.* 2017. 20, № 3. С.373–390.
47. Панасенко Є. В., Покутний О. О. Нелінійні крайові задачі для рівняння Ляпунова у просторі $L_p$. *Нелінійні коливання.* 2018. 21, № 4. С. 523–536.
48. Deutch E. Semi-inverses, reflexive semi-inverses, and pseudoinverses of an arbitrary linear transformation. *Linear algebra and its applications.* 1971. 4. P. 313–322.
49. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 285 с.

Надійшла: 14.11.2021 / Прийнята: 10.05.2023