ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 539.375
DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/1.8

Олександр КІПНІС, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.
ORCID ID: 0000-0001-6747-8584
e-mail: a.l.kipnis@gmail.com
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

СТИСНЕННЯ ШАРУВАТОГО КОМПОЗИТУ З КОМПОНЕНТАМИ, ЩО ПРОКОВЗУЮТЬ, УЗДОВЖ ДВОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ МІЖФАЗНИХ СТРУКТУРНИХ ТРІЩИН

Досліджено задачу лінеаризованої теорії стійкості про стиснення кусково-однорідного тіла, що складається з нелінійно пружної смуги, яка без тертя проковзує між двома нелінійно пружними півплощинами, та послаблене двома паралельними тріщинами, розташованими на прямолінійних межах поділу середовищ. Застосовано апробований аналітико-числовий метод, що полягає у зведенні вихідної крайової задачі з використанням загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні гармонічні функції до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Зазначене розв'язальне інтегральне рівняння задачі одержано в загальній формі для широкого класу комбінацій двох стисливих або нестисливих матеріалів, для пружних потенціалів яких реалізується випадок рівних коренів характеристичних рівнянь, досліджених числово з використанням методу Бубнова – Гальоркіна у випадку, коли високоеластичні матеріали тіла описують потенціалом гармонічного типу. Визначено критичні значення параметрів навантаження, що відповідають старту руйнування такого тіла, та досліджено характер їхньої залежності від фізико-механічних і геометричного параметрів тіла.

Ключові слова: ***шаруватий композитний матеріал, міжфазна тріщина, високоеластичні матеріали, критерій руйнування, потенціал гармонічного типу.***

Класифікація відповідно до AMS 2020: 74R99, 74G60.

Вступ

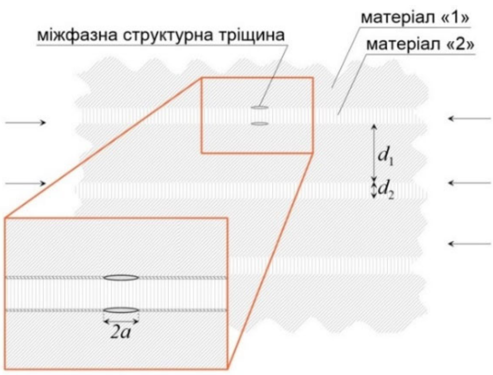
Наявність тріщин на межі поділу середовищ в елементах конструкцій, виконаних із шаруватих композитних матеріалів, може суттєво впливати на параметри їхньої міцності та надійності, обраховані за припущення відсутності міжфазних дефектів. Відповідні задачі механіки руйнування матеріалів найменш досліджені у випадку, коли навантаження до таких елементів конструкції прикладене паралельно до площин розташування тріщин, оскільки за вказаної геометрії навантаження незастосовними (Guz, 2014) є класичні критерії руйнування (Griffith, 1920; Irwin, 1957) та сучасні моделі для зон передруйнування (Камінський, Дудик, & Решітник, 2023).

Для дослідження означених некласичних проблем руйнування в межах лінеаризованої теорії стійкості (Guz, Bogdanov, & Nazarenko, 2020) був запропонований критерій, який асоціює старт процесу руйнування тіл у процесі їхнього стиснення вздовж тріщин із втратою стійкості рівноваги локальної частини матеріалу, що оточує тріщину. Детальну бібліографію стосовно задач руйнування, досліджених із застосуванням цього критерію, подано, наприклад, в оглядовій роботі (Guz, 2014).

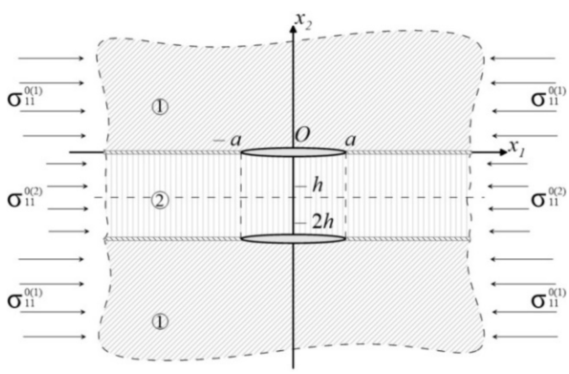
Нижче в межах тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл досліджено задачу плоскої деформації про стиснення необмеженого шаруватого композиту, компоненти якого проковзують одне відносно одного без тертя, уздовж двох паралельних міжфазних структурних тріщин однакової довжини (рис. 1, а). Визначено критичні значення параметрів навантаження та досліджено їхню залежність від фізико-механічних і геометричного параметрів композиту.

1. Постановка задачі

Розглянемо необмежене кусково-однорідне тіло періодичної структури, утворене композицією шарів двох різних нелінійно пружних матеріалів "1" і "2", що перебуває в умовах стиснення вздовж прямолінійних меж поділу середовищ, що проковзують одне відносно одного без тертя, та послаблене двома паралельними міжфазними тріщинами однакової довжини (рис. 1а). Нехай товщина d_1 шару, виконаного з матеріалу "1", суттєво більша за товщину d_2 шару, виконаного з матеріалу "2" та за довжину $2a$ тріщин. Відповідно до термінології (Гузь, 2008), зазначений спосіб з'єднання шарів композиту відповідає "найслабшому" типу зв'язку між компонентами кусково-однорідного тіла, а міжфазні тріщини, за поданих співвідношень між геометричними параметрами можна характеризувати як "структурні".



а



б

Рис. 1. Шаруватий композит в умовах стиснення вздовж двох міжфазних структурних тріщин

Ураховуючи малість тріщин приходимо до задачі плоскої деформації для нескінченної смуги $-2h \le x_2 \le 0$ ($d_2 = 2h$), виконаної з нелінійно пружного матеріалу "2", що проковзує без тертя між півплощинами $x_2 \ge 0$ і $x_2 \le -2h$, виконаними з нелінійно пружного матеріалу "1". Прямолінійні межі поділу середовищ $x_2 = 0$ і $x_2 = -2h$ містять міжфазні тріщини завдовжки $2a$ (див. рис. 1б).

Нехай на нескінченності матеріали стискаються вздовж осі Ox_1 рівномірно розподіленими навантаженнями

$$\sigma_{11}^{0(i)} = \text{const},\ i = 1,2;\ \sigma_{11}^{0(1)} \ne \sigma_{11}^{0(2)} \tag{1}$$

таким способом, щоб гарантувати однакові видовження вздовж осі Ox_1 для матеріалів півплощини та смуги:

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 = \text{const},\ \lambda_1 < 1, \tag{2}$$

де λ_1^1, λ_1^2 – коефіцієнти укорочення матеріалів "1" та "2", що обумовлені стискувальними зусиллями $\sigma_{11}^{0(1)}$ та $\sigma_{11}^{0(2)}$, відповідно.

У цьому випадку докритичний напружено-деформований стан (НДС) у кожній із компонент кусково-однорідного тіла буде статично визначеним, однорідним і визначається виразами для переміщень

$$u_1^{0(i)} = (\lambda_1 - 1)x_1,\ i = 1,2. \tag{3}$$

Тут і далі верхнім індексом "1" або "2" позначені величини для відповідного матеріалу, верхнім індексом "0" – величини, що належать до початкового (докритичного, незбуреного) стану, а збурення цих величин не позначаються додатковим індексом.

Обмежуючись розглядом згинальної (Гузь, 2008; Guz, Nazarenko, & Starodubtsev, 1991) форми втрати стійкості та беручи до уваги симетрію конфігурації рис. 1б відносно лінії $x_2 = -h$, крайові умови сформульованої задачі запишемо так:

$$\begin{gathered} u_1^{(2)} = 0,\ t_{22}^{(2)} = 0\quad (x_2 = -h,\ 0 \le |x_1| < \infty); \\ t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)},\ t_{21}^{(1)} = 0,\ t_{21}^{(2)} = 0\quad (x_2 = 0,\ 0 \le |x_1| < \infty); \\ t_{22}^{(2)} = 0\quad (x_2 = 0,\ |x_1| \le a);\ u_2^{(1)} = u_2^{(2)}\quad (x_2 = 0,\ |x_1| > a). \end{gathered} \tag{4}$$

У (4) $t_{kl}^{(i)}$, $i,k,l = 1,2$ – збурення компонент несиметричного тензору напружень Піоли – Кірхгофа $\tilde{t}^{(i)}$, $\vec{u}^{(i)}$ – вектор збурення переміщень.

Зазначимо, що задачу, аналогічну до тієї, що зображена на рис. 1б для випадку ідеального контакту між компонентами тіла, розглянуто в (Guz, 1994). З використанням чисельного методу скінченних різниць визначені критичні значення параметрів навантаження для багатьох конкретних комбінацій двох лінійно пружних матеріалів.

2. Розв'язальне інтегральне рівняння

Перевагою чисельно-аналітичного методу, що пропонуємо використовувати у розв'язанні поставленої задачі в цій роботі, є можливість одержання розв'язального інтегрального рівняння в загальній формі для комбінації двох різних нелінійно пружних матеріалів з довільною структурою пружного потенціалу, а конкретизацію моделей матеріалів проводити лише на фінальному етапі чисельного дослідження інтегрального рівняння. Цей метод базується на підході, який був запропонований для дослідження аналогічних задач про стиснення *однорідного* тіла вздовж приповерхневої (Nazarenko, 1986) та двох паралельних тріщин (Guz, Nazarenko, & Starodubtsev, 1991). Згодом зазначений підхід було поширено на випадок міжфазних тріщин (Bogdanov, Nazarenko, & Kipnis, 2024a; 2024b) і зон проковзування (Bogdanov, Nazarenko, & Kipnis, 2025) в напівобмежених *кусково-однорідних* тілах із шаром покриття.

Умови однорідності докритичного НДС (1) – (3) є необхідними умовами застосування загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні гармонічні функції (Guz, Bogdanov, & Nazarenko, 2020). Використовуючи ці представлення та застосовуючи апарат інтегрального перетворення Фур'є за аналогією до роботи (Bogdanov, Nazarenko, & Kipnis, 2024a), вихідна крайова задача з умовами (4) зводиться до задачі на власні значення для наступного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду відносно невідомої безрозмірної функції $f(\eta)$:

$$\begin{gathered} \int_0^1 K(\xi,\eta) f(\eta)\, d\eta = 0,\ \beta = h/a,\ 0 \le \xi < 1,\ 0 \le \eta \le 1; \\ K(\xi,\eta) = \int_0^\infty \frac{\delta_1(n^{-1/2}\beta\lambda)}{\delta(n^{-1/2}\beta\lambda)} \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda} d\lambda, \\ \delta_1(\mu) = k + \mu\left(\coth\mu - \coth^{-1}\mu\right),\ \delta(\mu) = r_2\coth\mu - r_1\delta_1(\mu), \\ k = \frac{k_2^2 k_4^2 - k_1^2 k_5^2}{k_2^2 k_5^2},\ l = \frac{k_2^1 k_4^1 - k_1^1 k_5^1}{k_2^1 k_5^2},\ r_1 = l^{-1}\left(p_2^1 \frac{k_1^1}{k_2^1} - p_1^1\right),\ r_2 = p_2^2 \frac{k_1^2}{k_2^2} - p_1^2, \end{gathered} \tag{5}$$

де l, k_i^j, p_i^j – відомі величини , що визначені в (Bogdanov, Nazarenko, & Kipnis, 2024a) і залежать від типу пружного потенціалу складових компонентів тіла.

Наведене інтегральне рівняння (5) одержане в загальному вигляді для комбінації двох стисливих або нестисливих матеріалів, для пружних потенціалів яких справджується випадок рівних коренів характеристичних рівнянь (Guz, Bogdanov, & Nazarenko, 2020).

Отже, вихідна лінеаризовані задача із граничними умовами (4) зводиться до задачі (5) на власні значення відносно параметра укорочення $\lambda_1 < 1$ (значення $\lambda_1 = 1$ відповідає недеформованому стану). Параметр λ_1 характеризує докритичний стан і нелінійним чином входить до ядра інтегрального рівняння (5). Іншими словами, розшукується перше значення параметра $\lambda_1 < 1$ (за зменшення λ_1, починаючи зі значення $\lambda_1 = 1$, що відповідає неперервному збільшенню зовнішнього стискувального навантаження), за якого інтегральне рівняння Фредгольма першого роду (5) має неєдиний розв'язок.

3. Аналіз числових результатів

Як приклад розглянемо випадок, коли матеріали "1" і "2" описують двоконстантним пружним потенціалом *гармонічного типу* для стисливих тіл.

Потенціал гармонічного типу характеризується двома сталими: μ_i і ν_i для кожного з матеріалів тіла, що визначають, відповідно, жорсткість матеріалу та його здатність до стисливості. Сталі μ_i є аналогом модуля жорсткості в лінійній теорії пружності; сталі ν_i – аналогом коефіцієнта Пуассона.

Числове дослідження реалізовано з використанням методу Бубнова – Гальоркіна.

На рис. 2а зображено залежність критичного значення відносного укорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ в задачі, що розглядається, від значення відносної (нормованої на довжину тріщини) ширини смуги $\beta = h/a$ для різних значень $g = \mu_2/\mu_1$ відношення жорсткості матеріалу "2" до жорсткості матеріалу "1" за значень $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

На рис. 2б зображено криві залежностей $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\beta)$ для деяких різних значень параметрів ν_1, ν_2, що визначають здатність матеріалів до стисливості, за значення $g = 3$.

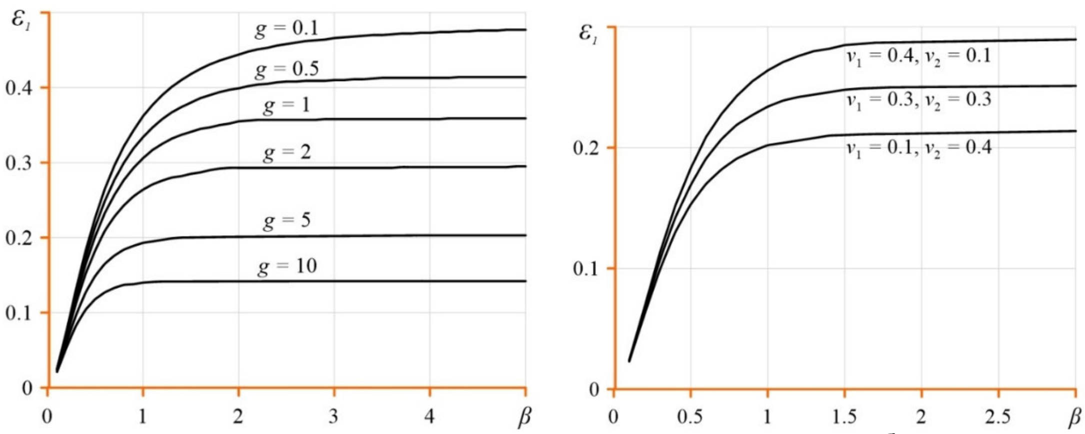


Рис. 2. Залежності критичного значення відносного укорочення ε_1 від значення геометричного параметру $\beta = h/a$ для: а – різних значень параметру $g = \mu_2/\mu_1$ за $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; б – різних значень параметрів ν_1, ν_2 за $g = 3$

Аналіз результатів показує, що за $\beta \to \infty$ критичні значення ε_1 асимптотично наближаються до значень, що відповідають внутрішній (структурній) нестійкості за стискання смуги, що проковзує без тертя між двох півплощин (за відсутності тріщин), за тих самих значень фізико-механічних параметрів тіла (докл. див. Bogdanov, Nazarenko, & Kipnis, 2024b). Іншими словами, за зменшення довжини тріщини щодо ширини смуги розв'язок задачі, що розглядаємо, наближається до розв'язку аналогічної задачі для тіла без тріщини. Останнє цілком узгоджується з міркуваннями фізичного характеру.

Дискусія і висновки

У межах лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл аналітико-чисельний підхід, розвинений у (Bogdanov, Nazarenko, & Kipnis, 2024a, 2024b) для напівобмежених кусково-однорідних тіл із шаром покриття було успішно адаптовано до використання для задач про стиснення необмежених шаруватих композитів уздовж двох паралельних міжфазних структурних тріщин та визначені критичні значення параметрів навантаження задачі у випадку, коли матеріали тіла описуються пружним потенціалом гармонічного типу (стисливі матеріали, рівні корені характеристичних рівнянь).

Було показано, що коли матеріал "2" "тонкого" шару достатньо жорсткий щодо матеріалу "1" "товстого" шару шаруватого композиту (і, напр., виконує функцію армування) і довжина тріщин порівняно мала, то з достатньою для інженерних розрахунків точністю наявність дефектів у вигляді двох паралельних міжфазних структурних тріщин можна не враховувати в оцінюванні параметрів міцності такого структурно неоднорідного тіла, використовуючи значення цих параметрів, обраховані для аналогічного тіла без дефектів.

Список використаних джерел

Гузь, А. Н. (2008). *Основы механики разрушения композитов при сжатии.* Літера

Камінський, А. О., Дудик, М. В., & Рештник, Ю. В. (2023). Двопараметрична модель зони передруйнування у квазіпружному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки*, 2, 116–119. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.17

Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M., & Kipnis, A. L. (2025). Compression of a semi-bounded body with a coating layer along the interface sliding zone. *Z Angew Math Mech.,* 105, e202400799. https://doi.org/10.1002/zamm.202400799

Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M., & Kipnis, O. L. (2024a). Compression of a semibounded body with thin coating layer along the interface near-surface crack. Part I. *International Applied Mechanics,* 60(5), 511–524. https://doi.org/10.1007/s10778-025-01303-2
Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M., & Kipnis, O. L. (2024b). Compression of a semibounded body with thin coating layer along interface near surface crack. Part II. *International Applied Mechanics,* 60(6), 641–652. https://doi.org/10.1007/s10778-025-01316-x
Griffith, A. A. (1920). The phenomenon of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 221, 163–198. https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006
Guz, A. N. (2014). Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). *International Applied Mechanics*, 50(1), 1–57. https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y
Guz, A. N., Bogdanov, V. L., & Nazarenko, V. M. (2020). Basic principles of fracture mechanics of materials loaded along cracks. In A. N. Guz, V. L. Bogdanov, & V. M. Nazarenko (Eds.), *Fracture of materials under compression along cracks*. *Advanced Structure Materials* (Vol. 138, pp. 61–148). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_2
Guz, A. N., Nazarenko, V. M., & Starodubtsev, I. P. (1991). A planar problem of failure of structural materials in compression along two parallel cracks. *Soviet Applied Mechanics*, 27, 352–360. https://doi.org/10.1007/BF00896513
Guz, I. A. (1994). Investigation of the stability of a composite in compression along two parallel structural cracks at the layer interface. *International Applied Mechanics*, 30(11), 841–847.
Irwin, G. R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24, 361–364. https://doi.org/10.1115/1.4011547
Nazarenko, V. M. (1986). Two-dimensional problem of the fracture of materials in compression along surface cracks. *Soviet Applied Mechanics*, 22(10), 970–978. https://doi.org/10.1007/BF01273678

References

Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M., & Kipnis, A. L. Compression of a semi-bounded body with a coating layer along the interface sliding zone. *Z Angew Math Mech.,* 105, e202400799 (2025). https://doi.org/10.1002/zamm.202400799
Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M., & Kipnis, O. L. (2024a). Compression of a semibounded body with thin coating layer along ~~the~~ interface near-surface crack. Part I. *Int Appl Mech,* 60(5), 511–524. https://doi.org/10.1007/s10778-025-01303-2
Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M., & Kipnis, O. L. (2024b). Compression of a semibounded body with thin coating layer along interface near surface crack. Part II. *Int Appl Mech,* 60(6), 641–652. https://doi.org/10.1007/s10778-025-01316-x
Griffith, A. A. (1920). The phenomenon of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 221, 163–198. https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006
Guz, A. N. (2008). *Fundamentals of the fracture mechanics of compressed* composites. Litera [in Russian].
Guz, A. N. (2014). Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). *International Applied Mechanics*, 50(1), 1–57. https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y
Guz, A. N., Bogdanov, V. L., & Nazarenko, V. M. (2020). Basic principles of fracture mechanics of materials loaded along cracks. In A. N. Guz, V. L. Bogdanov, & V. M. Nazarenko (Eds.), *Fracture of materials under compression along cracks*. *Advanced Structure Materials* (Vol. 138, pp. 61–148). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_2
Guz', A. N., Nazarenko, V. M., & Starodubtsev, I. P. (1991). A planar problem of failure of structural materials in compression along two parallel cracks. *Soviet Applied Mechanics*, 27, 352–360. https://doi.org/10.1007/BF00896513
Guz, I. A. (1994). Investigation of the stability of a composite in compression along two parallel structural cracks at the layer interface. *International Applied Mechanics*, 30(11), 841–847.
Irwin, G. R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24, 361–364. https://doi.org/10.1115/1.4011547
Kaminsky, A. O., Dudyk, M. V., & Reshitnyk, Y. V. (2023). Two-parameter model of the prefracture zone in a quasi-elastic material near the tip of an interface crack. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*, 2, 116–119 [in Ukrainian]. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.17
Nazarenko, V. M. (1986). Two-dimensional problem of the fracture of materials in compression along surface cracks. *Soviet Applied Mechanics*, 22(10), 970–978. https://doi.org/10.1007/BF01273678

Отримано редакцією журналу / Received: 13.11.24
Прорецензовано / Revised: 11.03.25
Схвалено до друку / Accepted: 12.03.25

Alexander KIPNIS, PhD (Phys. & Math.), Senior Researcher
ORCID ID: 0000-0001-6747-8584
e-mail: a.l.kipnis@gmail.com
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

COMPRESSION OF A LAYERED COMPOSITE WITH SLIDING COMPONENTS ALONG TWO PARALLEL INTERFACE STRUCTURAL CRACKS

The problem of the linearized stability theory on compression of a piecewise-homogeneous body consisting of a nonlinearly elastic strip that slides frictionlessly between two nonlinearly elastic half-planes and weakened by two parallel cracks located on the rectilinear interface was studied. A proven analytical-numerical method is used, which consists in reducing the original boundary value problem using general representations of solutions of linearized equilibrium equations through potential harmonic functions to the Fredholm integral equation of the first kind. The specified solving integral equation of the problem was obtained in a general form for a wide class of combinations of two compressible or incompressible materials for which the case of equal roots of the characteristic equations is realized. The critical values of the load parameters corresponding to the start of the fracture of such a body were determined and the nature of their dependence on the physical-mechanical and geometrical parameters of the body was investigated.

Keywords: ***layered composite material; interface crack; hyperelastic materials; fracture criterion; harmonic potential.***

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The author declares no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.