ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичні олімпіади

УДК [378.4.091.33:005.332.4(477.411)КНУ]:51 DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.4

Олександр БОРИСЕЙКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332
e-mail: boryseiko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олег ПЕРЕГУДА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА З МАТЕМАТИКИ

Анотація. *Математична олімпіада – це інтелектуальне змагання, яке дає можливість талановитим учням продемонструвати свої знання, логічне мислення та вміння вирішувати складні математичні задачі. Олімпіади стимулюють поглиблене вивчення математики, розширюють знання та удосконалюються навички учнів. В роботі представлено розв'язки задач Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка 2024 року.*

Ключові слова: *математична олімпіада; рівняння; нерівність; розв'язок; трикутник*.

1. Вступ

Всеукраїнська олімпіада з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка у 2024 році, як зазвичай, викликала неабияку зацікавленість серед школярів-випускників, майбутніх абітурієнтів. Багато хто зі школярів розглядав олімпіаду для перевірки своїх знань та підготовки до національного мультимедійного тесту, адже завдяки олімпіадам стимулюється поглиблене вивчення математики, розширюються знання та удосконалюються навички учнів.

Математична освіта у загальноосвітній школі насамперед спрямована на засвоєння учнями алгоритмів розв'язування стандартних задач. Але часто доводиться мати справу із задачами, для розв'язування яких традиційних способів буває недостатньо. Як правило, завдання такого типу пропонуються на різноманітних олімпіадах. Часто розв'язання олімпіадної задачі ґрунтується на використанні однієї оригінальної ідеї. Однак в більшості випадків одні і ті ж підходи реалізуються для розв'язування багатьох задач. Тільки, на відміну від стандартного алгоритму, треба ще здогадатися, що саме цей, а не інший метод, необхідно використати.

2. Огляд літератури

В якості рекомендацій для підготовки до олімпійських стартів варто будувати підготовку, використовуючи широкий арсенал можливостей, який представлено в мережі Інтернет та спеціалізованій літературі (Федак, 2003), (Сарана, 2005) та багатьох інших джерелах. Основна мета зазначених джерел – ознайомлення з різноманітними методами розв'язування олімпіадних задач. Викладення матеріалу побудовано так, що загальні висновки і рекомендації встановлюються і формулюються в процесі аналізу та розв'язування конкретних задач, взятих в основному з математичних олімпіад різних рівнів.

3. Задачі фінального туру олімпіади

Всеукраїнська олімпіада з математики – 2024 відбувалася на базі механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка і складалася з двох турів: заочного та фінального. У олімпіаді прийняли участь 83 учасники з різних регіонів України.

Наведемо умови завдань фінального туру олімпіади з відповідними розв'язками або вказівками.

Задача 1. *Обчислити значення* $log_{30} 8$ *якщо* $log_{30} 3 = a,\ \ log_{30}\ 5 = b.$

Розв'язання: Для розв'язання запропонованої задачі застосуємо відомі формули для перетворення логарифмічних виразів:

$$log_a b\, c = log_a|b| + log_a|c|\,, \qquad log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a|b| - log_a|c|\,, \qquad n\, log_a b = log_a b^n$$

Застосуємо ланцюжок наступних перетворень:

$$a + b = log_{30} 1\,5 = log_{30}\frac{30}{2} = log_{30} 3\,0 - log_{30} 2 = 1 - log_{30} 2.$$

Маємо, що $log_{30} 2 = 1 - a - b.$

Домножимо отриману рівність на 3, отримаємо:

$$3\, log_{30} 2 = 3(1 - a - b) \text{ звідки } log_{30} 8 = 3(1 - a - b).$$

Відповідь: $3(1 - a - b).$

Задача 2. *Знайти розв'язки нерівності* $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^x + \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^x \leq 10.$

Розв'язання: Зауважимо, що $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)\left(5 - 2\sqrt{6}\right) = 25 - 24 = 1.$

Отже, можемо записати, що

$$5 - 2\sqrt{6} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}.$$

Враховуючи область значень показникової функції, застосуємо заміну змінної

$$\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^x = t > 0.$$

Для отриманої нерівності $t + \frac{1}{t} \leq 10$, знаходимо її розв'язок:

$$t \in \left[5 - 2\sqrt{6}; 5 + 2\sqrt{6}\right].$$

Повернувшись до початкової змінної, отримаємо : $x \in [-1; 1].$

Відповідь: $x \in [-1; 1].$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Задача 3. *Задано трикутник ABC. До сторони BC проведено бісектрису AM. Відомо, що $CM : MB = 3:2$. На стороні AB вибрано точку N так, що $AN : NB = 2:1$.*

а) Нехай $AC = 12$ см, $BC = 10$ см. Обчислити площу трикутника ABC.

б) Знайти $AO : OM$, де O – точка перетину AM і CN.

Розв'язання. Зробимо схематичну побудову рисунка відповідно до умов задачі.

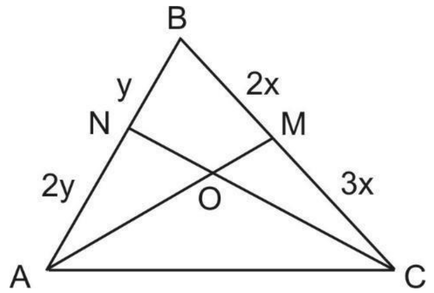

Рис.1. Схематичний рисунок до задачі 3.

а) Скористаємося властивістю бісектриси трикутника:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ см}.$$

Тоді площу трикутника ABC обчислимо за формулою Герона.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника. Отже,

$$p = \frac{8+10+12}{2} = 15 \text{ см}, \qquad S_{ABC} = \sqrt{15 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = 15\sqrt{7} \text{ см}^2.$$

б) Для визначення відношення $AO : OM$ застосуємо теорему Менелая (Сарана, Семенець, 2007) до трикутника ABC і точок C, O, N, які лежать на одному відрізку.

$$\frac{BN}{NA} \cdot \frac{AO}{OM} \cdot \frac{CM}{CB} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{AO}{OM} \cdot \frac{3}{5} = 1 \quad \Rightarrow \quad AO : OM = 10 : 3.$$

Відповідь: $S_{ABC} = 15\sqrt{7}$ см^2; $AO : OM = 10 : 3$.

Задача 4. *Знайти розв'язки системи рівнянь*

$$\begin{cases} 2^{x+1} = 32y\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 2 - 2x - 2y} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 9} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Розв'язання. Виразимо змінну y з першого рівняння $y = 2^{x - \frac{9}{2}}$. Функція $y(x) = 2^{x - \frac{9}{2}}$ є показниковою функцією, що зростає на всій множині визначення.

Перетворимо друге рівняння: виділимо повні квадрати під коренями у лівій частині рівняння. Отримаємо:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{5}.$$

Геометричне місце точок, яке описується цим рівнянням – це точки відстань від яких до точок $A(1;1)$ та $B(3;0)$ дорівнює $\sqrt{5}$. Але відстань $|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$. Отже, розв'язками другого рівняння можуть бути координати лише тих точок, що належать відрізку AB.

Відрізок AB лежить на прямій, рівняння якої можемо визначити з системи рівнянь:

$$\begin{cases}0=3k+l,\\1=k+l,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad k=-\frac{1}{2},\qquad l=\frac{3}{2}.$$

Тоді координати точок, що задовольняють умовам

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

та $1\le x\le 3$ будуть розв'язками другого рівняння. Таким чином, проаналізувавши графіки, що описують рівняння заданої системи, приходимо до висновку, що система може мати не більше одного розв'язку.

Координати єдиної точки перетину графіків або єдиний розв'язок системи можемо визначити нескладним методом підбору $\left(\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right)$.

Відповідь: $\left(\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right)$.

Задача 5. *а) Розв'язати рівняння:* $\sqrt{2+tg\,x}=tg\,x$ *.*

б) Знайти значення параметра a, при кожному з яких має розв'язки рівняння

$$\sqrt{a+\sqrt{a+tg\,x}}=tg\,x\,.$$

Розв'язання: а) Застосуємо метод розв'язування як для стандартного ірраціонального рівняння вигляду $\sqrt{f(x)}=g(x)$. Отримаємо систему, що відповідає початковому рівнянню:

$$\begin{cases}f(x)=\big(g(x)\big)^2,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$$

Отже, ми отримали квадратне рівняння відносно змінної $tg\,x$:

$$tg^2\,x-tg\,x-2=0 \text{ за умови } tg\,x\ge 0.$$

Розв'язки рівняння знаходимо за теоремою Вієта

$$tg\,x=-1;.\qquad tg\,x=2.$$

Перший корінь від'ємний, тому він не задовольняє умову $tg\,x\ge 0$. Другий корінь :

$$tg\,x=2\quad\Rightarrow\quad x=arctg\,2+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

б) Проведемо заміну змінної $tg\, x = t \geq 0$. Обмеження відповідає аналогічному з попереднього випадку а). Маємо: $\sqrt{a+\sqrt{a+t}} = t$.

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і запишемо відповідну систему обмежень:

$$\begin{cases} \sqrt{a+t} = t^2 - a, \\ t \geq 0, \\ t^2 \geq a. \end{cases}$$

Ще раз підносимо до квадрату

$$a + t = t^4 - 2at^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 - (2t^2+1)a + t^4 - t = 0.$$

Отримали квадратне рівняння відносно параметра a. Знаходимо його розв'язки у вигляді $a = a(t)$:

$$D = (2t^2+1)^2 - 4t^4 + 4t = 4t^4 + 4t^2 + 1 - 4t^4 + 4t = 4t^2 + 4t + 1 = (2t+1)^2,$$

$$a = \left[\begin{array}{l} \dfrac{2t^2+1+2t+1}{2}, \\ \dfrac{2t^2+1-2t-1}{2}, \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} t^2+t+1, \\ t^2-t. \end{array}\right.$$

Далі розглянемо два випадки

1) Якщо $a = t^2 + t + 1$, то рівняння не має розв'язків, бо $t^2 - a + t + 1 > 0$.

2)Розглянемо випадок коли виконуються умови:

$$\begin{cases} a = t^2 - t, \\ t^2 \geq a, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Друга нерівність системи виконується автоматично з врахуванням третьої нерівності та рівняння.

Для функції $y = t^2 - t$ областю значень на проміжку $[0; +\infty)$ є проміжок $[-\frac{1}{4}; +\infty)$, бо вершина параболи розташована у точці з координатами $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Отже, $a \in [-\frac{1}{4}; +\infty)$.

Відповідь: а) $x = arctg\, 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $a \geq -\frac{1}{4}$.

Висновки

Організатори олімпіади відзначають стійкий інтерес юних математиків до цієї престижної інтелектуальної події. На таких заходах майбутні абітурієнти змагаються не лише за звання кращих математиків України, а й за можливість продемонструвати свою кмітливість, логічне мислення та наполегливість. Математика – це не просто наука, це мова Всесвіту, яка відкриває двері до безмежних знань і можливостей. Керівництво університету вірить, що учнівська молодь володіє неабияким талантом і потенціалом, здатна успішно розв'язувати найскладніші задачі, стійка перед складними викликами сучасності. Київський національний університет імені Тараса Шевченка докладає багато зусиль для того, щоб надихати атмосферою змагань, стимулювати прагнення до перемоги, що вестиме до нових звершень.

Зауважимо, що, незалежно від результатів, учасники олімпійського математичного руху вже є переможцями, адже уже в юному віці вони зважилися на важливий крок і продемонстрували свою зацікавленість у математиці.

Список використаних джерел

Федак І. В.(2003) *Готуємося до олімпіади з математики: Посібник для ЗНЗ.*

Сарана О.А. (2005) *Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник.*

Сарана О.А., Семенець С.П. (2007) *Нестандартні геометричні задачі: Навчально-методичний посібник.* Житомир: Вид-во ЖДУ ім.. І.Франка.150 с.

Отримано редакцією журналу: 01.05.2024
Схвалено до друку: 24.06.2024

Oleksandr BORYSEIKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332
e-mail: boryseiko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleh PEREHUDA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ALL-UKRAINIAN MATHEMATICS OLYMPIAD OF TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY

Abstract. *Mathematical Olympiad is an intellectual competition that gives talented students the opportunity to demonstrate their knowledge, logical thinking and ability to solve complex mathematical problems. Olympiads stimulate in-depth study of mathematics, expand knowledge and improve students' skills. The work presents solutions to the problems of the 2024 All-Ukrainian Mathematics Olympiad of Taras Shevchenko National University of Kyiv were considered*

Keywords: *mathematical Olympiad; equation; inequality; solution; triangle.*