

УДК 539.3

Васільєв К. В.¹, к.ф.-м.н.,
Сулим Г. Т.², д.ф.-м.н., проф.

K. V. Vasil'ev¹, PhD,
G. T. Sulym², Dr. Sci.

**Метод вирізування у задачі
поздовжнього зсуву анізотропного
півпростору з тріщиною**

**Cutting-out method in the problem of
longitudinal shear of anisotropic half-space
with a crack**

¹ Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
79000, м. Львів, вул. Наукова 3-б,
e-mail: kirill.all@gmail.com

² Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1,
e-mail: gtsulym@gmail.com

¹ Pidstryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics, 79000, L'viv, Naukova
str., 3-b,
e-mail: kirill.all@gmail.com

² Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1,
e-mail: gtsulym@gmail.com

Розроблений раніше метод прямого вирізування у застосуванні до ізотропних матеріалів, зокрема тіл із тонкими неоднорідностями у вигляді тріщин та тонких деформівних включень поширено на випадок врахування можливої анізотропії матеріалу. Основа методу полягає у моделюванні вихідної задачі визначення напруженого стану обмеженого тіла з тонкими включеннями за допомогою технічно простішої для розв'язування задачі пружної рівноваги нескінченного простору з децю збільшеною кількістю тонких неоднорідностей, які у свою чергу формують межі досліджуваного тіла. Навантаженими тріщинами моделюємо крайові умови першого роду, а впровадженими в матрицю з певним натягом абсолютно жорсткими включеннями – крайові умови другого роду. З використанням методу функцій стрибків та умов взаємодії матриці з включенням задача зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь, розв'язування якої здійснено з використанням методу колокацій. Апробація розробленого підходу здійснена на задачі пружної рівноваги анізотропного (ортотропного у напрямку зсуву) півпростору зі симетрично навантаженим дуже податним включенням (тріщиною) за жорстко зацементованої межі півпростору. Вивчено вплив орієнтації неоднорідності та матеріалу півпростору на узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень.

Ключові слова: антиплоска деформація, анізотропія, тріщини, тонкі пружні включення, метод вирізування.

The previously developed direct cutting-out method in application to isotropic materials, in particular to bodies with thin inhomogeneities in the form of cracks and thin deformable inclusions is extended to the case of taking into account the possible anisotropy of the material. The basis of the method is to modulate the original problem of determining the stress state of a limited body with thin inclusions by means of a technically simpler to solve problem of elastic equilibrium of an infinite space with a slightly increased number of thin inhomogeneities, which in turn form the boundaries of the investigated body. By loaded cracks we model the boundary conditions of the first kind, and by absolutely rigid inclusions embedded into a matrix with a certain tension – the boundary conditions of the second kind. Using the method of the jump functions and the interaction conditions of a matrix with inclusion, the problem is reduced to a system of singular integral equations, the solution of which is carried out using the method of collocations. Approbation of the developed approach is carried out on the problem of elastic equilibrium of anisotropic (orthotropic in direction of shear) half-space with a symmetrically loaded very flexible inclusion (a crack) at jammed half-space boundary. The influence of inhomogeneity orientation and the half-space material on the generalized stress intensity factors were studied.

Key Words: antiplane shear, anisotropy, cracks, thin elastic inclusions, cutting-out method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

У багатьох матеріалах містяться дефекти у вигляді тріщин, а також тонких пружних чи абсолютно жорстких включень. Причому тріщину можна за потреби вважати тонким включенням із нульовим модулем пружності. Анізотропія у свою чергу є важливою характеристикою традиційних, сучасних а також більшості смарт-матеріалів і її також необхідно враховувати врахування під час прогнозування придатності елементів конструкцій до експлуатації.

Урахування впливу тонких пружних неоднорідностей при дослідженні напружено-деформованого стану обмежених тіл (реальних конструктивних елементів) істотно ускладнює розв'язування відповідних задач. Огляд методів і підходів до вирішення цього питання здійснено зокрема в [1]. У [2] було запропоновано аналітико-числовий метод прямого вирізування для моделювання і розв'язування задач стосовно обмежених ізотропних тіл з тонкими неоднорідностями. Його ідея полягає у моделюванні обмеженого тіла з тонкими неоднорідностями за допомогою тіла простішої геометричної форми, скажімо нескінченного простору з тою ж системою тонких дефектів, доповненою необхідною кількістю додаткових, які моделюють межі досліджуваного тіла та крайові умови на них: умови першого роду - навантаженими тріщинами, другого роду - впровадженими у тіло з певним натягом абсолютно жорсткими включеннями. У такій спосіб дещо зростає лише порядок системи сингулярних інтегральних рівнянь, зате спрощується процедура їхньої побудови та розв'язування. З використанням такого підходу успішно досліджено задачі пружної рівноваги ізотропних шаруватих структур, півпростору, шару, двошарової структури [2], клина [3] з тріщинами та включеннями за дії однорідного навантаження, а також зосереджених чинників.

Тут метод прямого вирізування застосовано до задачі поздовжнього зсуву півпростору з тонкою неоднорідністю-тріщиною.

1. Формулювання задачі

Досліджується антиплоска деформація анізотропного півпростору з модулями пружності a_{km} ($k, m = 4, 5$), що містить довільно орієнтоване загалом пружне включення L_j ($j = 1$) з модулями пружності $a_{km}^{0,j}$ ($k, m = 4, 5$). Збільшення кількості включень не змінює схеми розв'язування задачі. Межа півпростору може бути або вільна від навантаження, або жорстко защемлена. Відомі координати центра включення

– $z_{0j} = x_{0j} + iy_{0j}$; кут повороту стосовно осі абсцис – φ_j ; довжина – $2a_j$; товщина – $2h_j$. Півпростір може бути навантажений на нескінченності однорідними напруженнями, а на верхньому та нижньому берегах неоднорідності можуть діяти симетричні відносно її осі зусилля τ^1 (рис. 1).

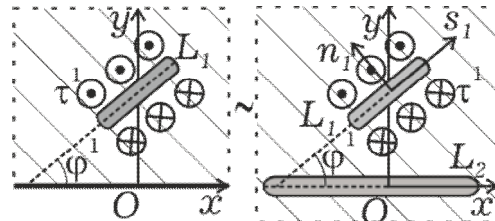


Рис. 1. Моделювання півпростору з включенням за допомогою методу прямого вирізування

З використанням методу прямого вирізування така задача зводиться до дослідження так само навантаженого нескінченного простору з двома довільно орієнтованими неоднорідностями L_1, L_2 (рис. 1). Метод розв'язування такої задачі відомий [1, 4].

2. Методика побудови розв'язку

Використовуючи метод функцій стрибків тонкі включення вилучаємо з розгляду, а їхній вплив на матрицю замінюємо невідомими функціями стрибків напружень f_5^j та похідних від переміщень f_6^j на серединній лінії $L'_j \equiv [-a_j, a_j]$ ($j = 1; 2$) неоднорідності у її локальній системі координат $s^j O^j n^j$:

$$\sigma_{nz}^{j-} - \sigma_{nz}^{j+} = f_5^j(s^j), \quad \frac{\partial}{\partial s}(w^{j-} - w^{j+}) = f_6^j(s^j);$$

$$s^j \in L'_j \quad (j = 1; 2).$$

Індекси (+) і (-) стосуються верхнього та нижнього берегів включення відповідно.

Напружений стан анізотропного простору з якоюсь однією неоднорідністю L_j у її локальній системі координат стосовно невідомих функцій стрибків подано у [1, 4]:

$$\sigma_{nz}^j + i\sigma_{sz}^j = \frac{1}{4}(g_p^j t_5(z^j) - g_m^j t_5(\bar{z}^j)) + \quad (1)$$

$$+ \frac{i}{4a_{55}^j \alpha^j}(g_p^j t_6(z^j) + g_m^j t_6(\bar{z}^j)),$$

$$\frac{\partial w}{\partial s^j} = \frac{a_{55}^j \alpha^j}{4} (t_5(z^j) + t_5(\bar{z}^j)) + \frac{i}{4} (t_6(z^j) - t_6(\bar{z}^j));$$

$$t_r(z^j) = \frac{1}{\pi} \int_{L_j} \frac{f_r^j(t) dt}{t - z^j} \quad (r = 5, 6), \quad g_p^j = \beta^j + i(1 + \alpha^j),$$

$$g_m^j = \beta^j + i(1 - \alpha^j), \quad \alpha^j = \frac{\sqrt{a_{44}^j a_{55}^j - (a_{45}^j)^2}}{a_{55}^j},$$

$$\beta^j = \frac{a_{45}^j}{a_{55}^j}, \quad z^j = s^j + (\beta^j + i\alpha^j)n^j.$$

Пружні сталі a_{km}^j для повернутої системи координат $s^j O^j n^j$ визначаємо згідно [1].

Використавши принцип суперпозиції розв'язків, вирази (1) та формули перетворення для тензора напружень при зміні системи координат, напружений стан анізотропного простору з двома довільно орієнтованими неоднорідностями подамо у вигляді

$$\sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = \sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0 + \sum_{j=1}^2 (\sigma_{nz}^j + i\sigma_{sz}^j) e^{-i\varphi_j}, \quad (2)$$

$$s^j + in^j = (x + iy - z_{0j}) e^{-i\varphi_j}.$$

Тут $\sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0$ – обумовлене впливом зовнішнього навантаження поле напружень у розглядуваній точці простору без дефектів.

Скористаємося умовами взаємодії матриці з включеннями [1, 4], які, враховуючи задані напруження на берегах неоднорідностей, запишемо у вигляді

$$\sigma_{nz}^{j+} + \sigma_{nz}^{j-} + \frac{1}{h_j a_{44}^{0,j}} \int_{-a_j}^s a_{45}^{0,j} f_5^j(t) + f_6^j(t) dt =$$

$$= -2 / (a_{44}^{0,j}) (a_{45}^{0,j} N_1^{-a,j} + N_2^{-a,j}) - 2\tau^j, \quad (3)$$

$$\partial w^{j+} / \partial s + \partial w^{j-} / \partial s - 1 / (h_j a_{44}^0) \int_{-a_j}^s |r^{0,j}|^2 f_5^j(t) -$$

$$- a_{45}^{0,j} f_6^j(t) dt = \frac{2}{a_{44}^{0,j}} (|r^{0,j}|^2 N_1^{-a,j} - a_{45}^{0,j} N_2^{-a,j}).$$

Тут $\sigma_{nz}^{j\pm}$, $\partial w^{j\pm} / \partial s$ – напруження і похідні від переміщень на верхньому (+) і нижньому (-) берегах j -ї неоднорідності; $N_{1,2}^{-a,j}$ – апріорні сталі [1] (зокрема при $\sigma_{yz}^0 = \sigma_{xz}^0 = 0$, $N_{1,2}^{-a,j} = 0$); $(r^{0,j})^2 = a_{44}^{0,j} a_{55}^{0,j} - (a_{45}^{0,j})^2$.

Перейдемо у (2) до системи координат l -го включення та знайдемо граничні значення $\sigma_{nz}^{l\pm}$,

$\partial w^{l\pm} / \partial s$ на її берегах згідно формули Сохоцького-Племелі [1]. Їхня підстановка у (3) дає систему чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь стосовно чотирьох невідомих функцій стрибків. У разі тріщин стрибки напружень дорівнюватимуть нулю або будуть відомими. У разі абсолютно жорсткого включення це стосується стрибків похідних переміщень. Додаткові умови рівноваги та однозначності переміщень при обході навколо кожного з дефектів

$$\int_{-a_l}^{a_l} f_5^l(t) dt = 0, \quad \int_{-a_l}^{a_l} f_6^l(t) dt = 0 \quad (l = 1; 2)$$

дають змогу розв'язати результуючу систему, зокрема методом колокацій.

Важливими параметрами напруженого стану тіла з дефектами є узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН) [1], які обчислюємо за формулами

$$K_{31}^{lA,B} = \pm p_6^{l\pm} \sqrt{\pi/2} / (a_{55}^l \alpha^l), \quad K_{32}^{lA,B} = \pm p_5^{l\pm} \sqrt{\pi/2}$$

$$p_r^{l\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm a_l} [\sqrt{a_l \mp t} f_r^l(\pm a_l)] \quad (r = 5, 6; l = 1, 2).$$

Тут (A) і (B) відповідно ліва і права вершини неоднорідностей.

3. Числові результати

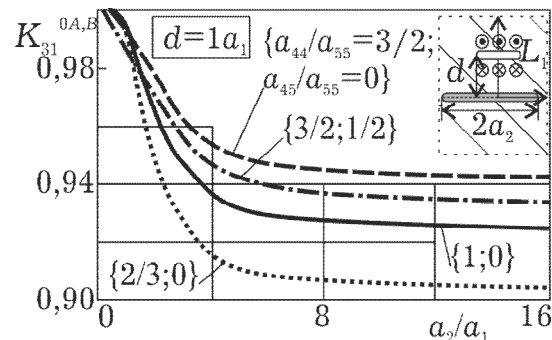


Рис. 2. Вплив довжини моделюючого абсолютно жорсткого включення L_2 на УКІН тріщини L_1 .

На рис. 2 подано графіки залежності ненульових нормованих УКІН $K_{31}^{0A,B} = K_{31}^{1A,B} / \tau^1 \sqrt{\pi a_1}$ тріщини L_1 (дуже податного ізоотропного включення з пружними сталіми $a_{44}^{0,1} / a_{55}^{0,1} = 1$; $a_{45}^{0,1} / a_{55}^{0,1} = 0$; $a_{44}^{0,1} / a_{55}^{0,1} = 10^5$) від відносної довжини a_2 / a_1 моделюючого жорстко защемлену межу півпростору дуже жорсткого ізоотропного включення L_2 з пружними сталіми $a_{44}^{0,2} / a_{55}^{0,2} = 1$;

$a_{45}^{0,2}/a_{55}^{0,2} = 0$; $a_{44}^{0,2}/a_{55}^{0,2} = 10^{-5}$ для різних мір ортотропії матеріалу змодельованого півпростору. При $a_2 = 16a_1$ похибка обчислення УКІН для розглянутих мір ортотропії матеріалу не перевищувала 1%.

На рис. 3 подано графіки залежності нормованих УКІН від кута орієнтації тріщини L_1 . Тип ліній та матеріалів на рис. 3 відповідають лініям і матеріалам з рис. 2. Суцільна лінія відповідає ізотропному матеріалу.

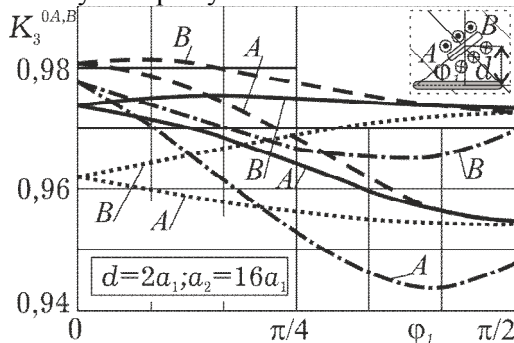


Рис. 3. Вплив орієнтації φ_1 дуже податного ізотропного включення-тріщини L_1 на його УКІН.

Для вертикальної орієнтації тріщини при співпадінні головних осей ортотропії з осями тріщини спостерігаємо незалежність УКІН від міри ортотропії матеріалу півпростору.

4. Висновки

На прикладі задачі дослідження пружної рівноваги півпростору зі симетрично навантаженим дуже податним включенням та жорстко защемленою межею півпростору показано ефективність методу вирізування у разі його застосування також і до анізотропних структур. Отримані значення УКІН збіглися з відомими [2] для ізотропного випадку.

Це свідчить, що метод вирізування цілком успішно можна використовувати у разі анізотропії матеріалів, однак треба враховувати, що величина міри анізотропії матеріалу має істотний вплив на необхідну для досягнення належної точності обчислень довжину моделюючих включень.

Робота виконана за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень" КПКВК 6541230

Список використаних джерел

1. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термпружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Васільєв К. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування / К. Васільєв, Г. Сулим // *Машинознавство*. – 2006. – № 11–12. – С. 10–17.
3. Vasil'ev K. V. Application of the method of direct cutting-out to the solution of the problem of longitudinal shear of a wedge with thin heterogeneities of arbitrary orientation / K.V. Vasil'ev, H.T. Sulym // *J. Math. Sci.* – 2012. – **180**, No. 2. – P. 122–134.
4. Sulym G. Antiplane problem for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations / G.Sulym, S. Shevchuk // *J. Theor. and Appl. Mech.* – 1999. – **37**, №1. – P. 47–63.

References

1. SULYM, G. (2007) *Osnovy matematychnoyi teoriiy termoprzhnoyi rivnovahy deformivnykh tverdyykh til z tonkymy vkluchennyamy* L'viv: Doslidno-vydavnychyuy tsentr NTSh.
2. VASIL'EV, K. & SULYM, G. (2006) Pryamy metod vyrizuvannya dlya modelyuvannya napruzhenno-deformovanoho stanu izotropnykh sharuvatykh seredovyshch z tonkymy neodnorodnostyamy za antyploskoho deformuvannya. *Mashynoznavstvo*. 11–12. p. 10-17.
3. VASIL'EV, K. & SULYM, G. (2012) Application of the method of direct cutting-out to the solution of the problem of longitudinal shear of a wedge with thin heterogeneities of arbitrary orientation. *J. Math. Sci.* 180 (2). p 122-134.
4. SULYM, G. & SHEVCHUK, S. (1999) Antiplane problem for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations. *J. Theor. and Appl. Mech.* 37 (1). p. 47-63.

Надійшла до редколегії 13.06.19