

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття ступеня магістра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

Дослідження властивостей розв'язків рівнянь Хукухарі

студента 2 курсу
Колесникова Валерія Андрійовича

Науковий керівник:
доктор фізико–математичних наук, доцент
Пічкур В. В.

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та
рекомендована до захисту, протокол No 10 від 08 травня 2020 р.

Завідувач кафедри МСС

канд. фіз.–мат. наук, доц. Черній Д.І.

Київ — 2020

Зміст

Вступ	3
Основні позначення	5
1 Властивості розв'язків рівнянь Хукухари	6
1.1 Основні відомості і теореми	6
1.2 Похідна Хукухари	7
1.3 Рівняння Хукухари	10
1.4 Рівняння з нечіткою правою частиною	12
2 Чисельні методи знаходження розв'язків рівняння Хукухари . .	15
2.1 Метод Ейлера для знаходження розв'язку рівняння Хукухари	15
2.2 Розвинення методу Ейлера з апроксимацією правої частини	17
2.3 Метод наближеного розв'язку рівняння з нечіткою правою частиною	20
3 Обчислювальний експеримент	22
3.1 Моделювання розв'язків рівнянь Хукухари	22
3.2 Моделювання розв'язків диференціальних рівнянь з нечіткою правою частиною	27
Висновки	29
Література	30

Вступ

Актуальність роботи.

Диференціальні рівняння Хукухари є диференціальними рівняннями з багатозначною правою частиною [6, 7]. Теорія диференціальних рівнянь Хукухари тісно пов'язана і є природним продовженням теорії диференціальних включень, яка грає важливу роль у задачах керування і стійкості [1–3, 10, 11].

Рівняння Хукухари виникають в задачах дослідження динамічних систем з неповною інформацією. Задачі з неповною інформацією зустрічаються у різних галузях техніки, економіки, біології і т.д. Одним з принципів розв'язання таких задач є ймовірносний метод, у якому неповнота інформації розуміється під дією впливу випадкових збурень. Якщо параметри математичної моделі, яка описується системою диференціальних рівнянь, відомі з певною точністю і вплив на ці параметри є детермінованим, то права частина системи має багатозначний характер. У такий спосіб динаміка системи характеризується множиною досяжності у певний момент часу, для опису якої застосовуються рівняння Хукухари. Рівняння Хукухари – це спеціальний тип рівнянь з багатозначною правою частиною. Але на відміну від диференціальних включень, його розв'язком є багатозначна функція [6, 7].

В основі означення рівняння Хукухари лежить поняття похідної від багатозначної функції в сенсі Хукухари. Проблема означення похідної від багатозначної функції є однією з основних в теорії багатозначних відображень. Основною причиною виникнення труднощів є те, що простір опулих компактних множин скінченновимірною евклідового простору є нелінійним, що веде за собою відсутність коректної операції віднімання. Різниця за Хукухарою, на якій базується похідна Хукухари, є одним з підходів до означення різниці двох множин [6]. Дослідженню рівнянь Хукухари присвячена низка робіт, огляд яких представлений в [6]. Результати розвитку теорії рівнянь Хукухари знайшли застосування також і у теорії нечітких множин [4]. Теорія нечітких множин також використовується для опису систем з неповною інформацією. Так, за допомогою нечітких множин можна давати оцінки величинам, які неможливо виміряти точно, наприклад, відстані між двома об'єктами, при умові, що атоми на їх поверхнях знаходяться у постійному русі і тим самим змінюють значення цієї відстані. Зі зростанням складності системи стає дедалі важче формулювати точні твердження, що містили б у собі якийсь сенс стосовно цієї системи. Теорія нечітких множин дозволяє отримувати інфор-

мацію про систему, нехтуючи абсолютною точністю. Теорія рівнянь Хукухари використовується у теорії нечітких множин для апроксимації динаміки диференціальних рівнянь з нечіткою правою частиною. За допомогою похідної Хукухари були введені поняття інтегралу та похідної для нечітких відображень [6, 7].

Мета роботи.

- 1 Проаналізувати властивості розв'язків рівняння Хукухари.
- 2 Проаналізувати зв'язок між рівняннями Хукухари та рівняннями з нечіткою правою частиною.
- 3 Розробити алгоритми наближеного знаходження розв'язку рівнянь Хукухари.
- 4 Розробити алгоритми наближеного знаходження розв'язку рівнянь з нечіткою правою частиною.
- 5 Провести обчислювальні експерименти і здійснити їхній аналіз.

Основні позначення

\mathbb{R}^n – евклідовий n -вимірний простір;

$co(A)$ – опукла оболонка множини A ;

$comp(\mathbb{R}^n)$ – множина всіх непорожніх компактів з \mathbb{R}^n ;

$conv(\mathbb{R}^n)$ – множина всіх опуклих непорожніх компактів з \mathbb{R}^n ;

$I = [0, a]$;

$B(r) = \{x : \|x\| \leq r\}$ – куля радіусу r з центром в початку координат;

$S = \{x : \|x\| = 1\}$ – одинична сфера в \mathbb{R}^n ;

$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ – сума за Мінковським множин з \mathbb{R}^n ;

$[A]^\varepsilon = A + B(\varepsilon)$.

1 Властивості розв'язків рівнянь Хукухари

1.1 Основні відомості і теореми

Основною метрикою в багатозначному аналізі є метрика Хаусдорфа, що задає відстані між множинами.

Означення 1.1. [8, 11] Відображення $h : \text{comp}(\mathbb{R}^n) \times \text{comp}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$, що задається формулою

$$h(A, B) = \max(\beta(A, B), \beta(B, A)), \quad (1.1)$$

де

$$\beta(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq [B]^\epsilon\}, \quad (1.2)$$

називається *метрикою Хаусдорфа*.

Аналогом інтеграла Лебега для багатозначних функцій є інтеграл Аумана.

Означення 1.2. [11] Нехай $F : I \rightarrow cl(\mathbb{R}^n)$. Селектором відображення F називається функція $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, для якої м.в. по $x \in I$ виконується включення $f(x) \in F(x)$.

Позначимо через $S(F)$ множину всіх інтегровних за Лебегом на множині I селекторів відображення F .

Означення 1.3. [11] Інтегралом Аумана багатозначного відображення F на відріжку I називають множину

$$G = \int_0^a F(x)dx = \left\{ \int_0^a f(x)dx : f \in S(F) \right\}. \quad (1.3)$$

Якщо $S(F) = \emptyset$, то покладемо $I = \emptyset$.

Один зі способів задання опуклої множини є визначення опорної функції для неї.

Означення 1.4. [8, 9, 11] Нехай $\psi \in \mathbb{R}^n$ – одиничний вектор, $A \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Тоді функція

$$C(A, \psi) = \max\{(a, \psi) : a \in A\} \quad (1.4)$$

називається опорною функцією множини A .

Теорема 1.1. [8, 9, 11] Опорна функція задовільняє наступним властивостям:

- 1) $C(A, \lambda\psi) = \lambda C(A, \psi), \lambda \geq 0$,
- 2) $C(A, \psi_1 + \psi_2) \leq C(A, \psi_1) + C(A, \psi_2)$,
- 3) $C(A + B, \psi) = C(A, \psi) + C(B, \psi)$,
- 4) $C(\lambda A, \psi) = C(A, \lambda\psi)$,
- 5) $co(A) = \cap\{x \in \mathbb{R}^n | (x, \psi) \leq C(A, \psi), \psi \in S\}$,
- 6) якщо для всіх $\psi \in S$ $C(A, \psi) = C(B, \psi)$, то $co(A) = co(B)$,
- 7) якщо $A \subseteq B$, то $C(A, \psi) \leq C(B, \psi)$ і, навпаки, якщо для всіх $\psi \in S$ $C(A, \psi) \leq C(B, \psi)$, то $co(A) \subseteq co(B)$,
- 8) якщо $A \cap B \neq \emptyset$, то $C(A, \psi) + C(B, -\psi) \geq 0$ і, навпаки, якщо для всіх $\psi \in S$ $C(A, \psi) + C(B, -\psi) \geq 0$, то $co(A) \cap co(B) \neq \emptyset$,
- 9) $|C(A, \psi_1) - C(A, \psi_2)| \leq |A| \|\psi_1 - \psi_2\|, |A| = h(A, \{0\})$,
- 10) $|C(A, \psi) - C(B, \psi)| \leq \|\psi\| \cdot h(A, B)$,
- 11) $h(A, B) \geq h(co(A), co(B)) = \max\{|C(A, \psi) - C(B, \psi)|, \psi \in S\}$.

Наступна група умов є достатньо поширеною в теорії багатозначних функцій, так що їх об'єднують одною назвою.

Означення 1.5. [11] Кажуть, що багатозначне відображення $F(t, X) : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ задовольняє умовам Каратеодорі, якщо

- 1) для довільного x відображення $F(\cdot, x)$ вимірне,
- 2) для м.в. $t \in I$ відображення $F(t, \cdot)$ неперервне,
- 3) існує така інтегровна функція $m(t)$, що для всіх $t \in I, x \in \mathbb{R}^n$ виконується $\|F(t, x)\| \leq m(t)$.

1.2 Похідна Хукухари

Означення 1.6. [6] Нехай $X, Y \in conv(\mathbb{R}^n)$. Множина $Z \in conv(\mathbb{R}^n)$ така, що $X = Y + Z$, називається різницею Хукухари множин X і Y та позначається $X \overset{h}{-} Y$.

Лема 1.2. [6] Різниця Хукухари, якщо вона існує, визначається єдиним чином.

Лема 1.3. [6] Нехай $X, Y, Z, U \in conv(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^n$. Тоді

1) $(X + Y)^h - (Z + U) = (X^h - Z) + (Y^h - U)$, якщо $X^h - Z$ і $Y^h - U$ існують,

2) $(X^h - Y)^h - (Z^h - U) = (X^h - Z)^h - (Y^h - U)$, якщо $(X^h - Z)^h - (Y^h - U)$ і $Z^h - U$ існують,

3) $(X^h - Y)^h - (Z^h - U) = (X^h - Z) + (U^h - Y)$, якщо $X^h - Z, U^h - Y$ і $Z^h - U$ існують,

4) $X^h - U = (X^h - Y) + (Y^h - U)$, якщо $X^h - Y$ і $Y^h - U$ існують,

5) $\lambda(X^h - Y) = \lambda X^h - \lambda Y$, якщо $X^h - Y$ існує,

6) $(\alpha X + \beta Y)^h - (\lambda U + \mu Z) = (\alpha - \lambda)X + \lambda(X^h - U) + (\beta - \mu)Y + \mu(Y^h - Z)$,
якщо $\lambda \geq 0, \mu \geq 0, \alpha - \lambda \geq 0, \beta - \mu \geq 0$ і $X^h - U, Y^h - Z$ існують,

7) $h(X^h - U, Y^h - Z) \leq h(X, Y) + h(U, Z)$, якщо $X^h - U$ і $Y^h - Z$ існують,

8) $h(\lambda X, \lambda Y) = \lambda h(X^h - Y, \{0\})$, якщо $\lambda \geq 0$ і $X^h - Y$ існує.

Лема 1.4. [6] Операція різниці за Хукхарою неперервна в метриці Хаусдорфа: якщо послідовності $\{X_m\}$ і $\{Y_m\}$ збігаються до X і Y та різниці $X_m^h - Y_m^h$ існують при всіх $m \in \mathbb{N}$, то різниця $X^h - Y^h$ існує і послідовність $\{X_m^h - Y_m^h\}$ збігається до $X^h - Y^h$.

Вищенаведені леми демонструють схожість між різницею Хукхарою для множин та звичайною різницею для чисел.

Приклад 1.1. $X = B(r), Y = B(m), r, m \geq 0$. Тоді при $r \geq m$ різниця Хукхарою існує і рівна $X^h - Y^h = B(r - m)$. При $r \leq m$ різниця Хукхарою множин X та Y не існує.

Приклад 1.2. Якщо

$$X = \int_0^b F(x)dx, Y = \int_0^a F(x)dx, a < b \quad (1.5)$$

то різниця за Хукхарою множин буде

$$X^h - Y^h = \int_a^b F(x)dx. \quad (1.6)$$

Зауваження 1.1. Приклади 1.1, 1.2 показують, що в загальному випадку різниця за Хукухарою не співпадає з різницею за Мінковським, тобто $X \overset{h}{-} Y \neq X + (-1)Y$.

Означення 1.7. [6] Багатозначне відображення $X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ називають диференційовним за Хукухарою в точці $t \in I$, якщо існує множина $D_H X(t) \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ така, що

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (X(t + \Delta t) \overset{h}{-} X(t)), \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (X(t) \overset{h}{-} X(t - \Delta t)) \quad (1.7)$$

існують та рівні $D_H X(t)$. Множину $D_H X(t)$ при цьому називають похідною Хукухари багатозначного відображення $X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ в точці t .

Лема 1.5. [6] Нехай багатозначні відображення $X, Y : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ диференційовні за Хукухарою в точці t . Тоді

1) Багатозначне відображення $X + Y : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ диференційовне за Хукухарою в точці t , причому

$$D_H(X + Y)(t) = D_H X(t) + D_H Y(t); \quad (1.8)$$

2) якщо в околі J точки t існує різниця за Хукухарою $(X \overset{h}{-} Y)(\cdot)$, то багатозначне відображення $X \overset{h}{-} Y : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ диференційовне за Хукухарою в точці t , причому

$$D_H(X \overset{h}{-} Y)(t) = D_H X(t) \overset{h}{-} D_H Y(t); \quad (1.9)$$

3) для довільного $\lambda \in \mathbb{R}^n$ багатозначне відображення $\lambda X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ диференційовне за Хукухарою в точці t , причому

$$D_H(\lambda X)(t) = \lambda D_H X(t). \quad (1.10)$$

Означення 1.8. [6] Багатозначне відображення $X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ називають диференційовним за Хукухарою на I , якщо воно диференційовне за Хукухарою в довільній точці $t \in I$.

Лема 1.6. [6] Нехай багатозначне відображення $X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ диференційовне за Хукухарою. Тоді воно неперервне.

Лема 1.7. [6] Багатозначне відображення $X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ є константою тоді і тільки тоді, коли $D_H X(t) = \{0\}$.

Лема 1.8. Нехай багатозначне відображення $X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ неперервне. Тоді для кожного $t \in I$ інтеграл Аумана $G(t) = \int_0^t X(s)ds$ диференційовний та $D_H G(t) = X(t)$.

Лема 1.9. [6] Нехай багатозначне відображення $X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ неперервно-диференційовне. Тоді багатозначне відображення $D_H X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ інтегроване та

$$X(t) = X(0) + \int_0^t D_H X(s)ds. \quad (1.11)$$

Зауваження 1.2. [6] Якщо багатозначне відображення $X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ вимірне та існує така інтегровна функція $k(\cdot)$, що для м.в. $t \in I$ виконується нерівність $|X(t)| \leq k(t)$, то багатозначне відображення $G(t) = \int_0^t X(s)ds$ абсолютно неперервне на I та $D_H G(t) = X(t)$ м.в. на I . Окрім цього, якщо багатозначне відображення $X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ абсолютно неперервне, то багатозначне відображення $D_H X(\cdot)$ визначене всюди на I , інтегроване та справедлива рівність

$$X(t) = X_0 + \int_0^t D_H X(s)ds. \quad (1.12)$$

Таким чином, на похідну Хукухари переносяться більшість властивостей звичайної похідної для однозначних функцій.

1.3 Рівняння Хукухари

Одним з видів диференціальних рівнянь з багатозначною правою частиною є рівняння Хукухари.

Означення 1.9. [6] Рівняння вигляду

$$D_H X = F(t, X), X(0) = X_0, \quad (1.13)$$

де $F : I \times \text{conv}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $X_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, називається рівнянням Хукухари.

Означення 1.10. [6] Багатозначне відображення $X : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ називають розв'язком рівняння Хукухари 1.13, якщо воно абсолютно неперервне на I та задовільняє рівність при м.в. $t \in I$.

Означення 1.11. [6] Багатозначне відображення $X : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$ називають розв'язком інтегрального рівняння

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(s, X(s))ds, \quad (1.14)$$

якщо воно неперервне на I та задовільняє цьому рівнянню для всіх $t \in I$.

В силу лем 1.8, 1.9 та зауваження 1.2 рівняння 1.13 і 1.14 є еквівалентними, тобто розв'язок рівняння 1.13 є розв'язком рівняння 1.14 та навпаки.

Теорема 1.10. [6] Нехай в області $Q = I \times D, D = \{X : h(X, X_0) \leq b\}$ багатозначне відображення $F(t, X)$ задовільняє умовам Каратеодорі з функцією $m(t)$.

Тоді на відрізку $[0, d]$ існує розв'язок рівняння Хукухари 1.13, де $d > 0$ таке, що

$$d \leq a, \varphi(d) \leq b, \varphi(t) = \int_0^t m(s)ds. \quad (1.15)$$

Теорема 1.11. [6] Нехай в області $Q = I \times D, D \in conv(\mathbb{R}^n)$ багатозначне відображення $F(t, X)$ задовільняє умові Ліпшиця с константою $L > 0$.

Тоді розв'язок рівняння Хукухари 1.13 існує та єдиний.

Означення 1.12. [6] Рівняння Хукухари вигляду

$$D_H X(t) = A(t)X(t) + F(t), X(0) = X_0, \quad (1.16)$$

де $A(t)$ - матриця розмірності $n \times n$, елементами якої є однозначні функції, $F : I \rightarrow conv(\mathbb{R}^n)$, називають лінійним.

Теорема 1.12. [6] Нехай для рівняння

$$D_H X(t) = A(t)X(t) + F(t), \quad (1.17)$$

виконуються наступні умови:

- 1) всі елементи матриці $A(t)$ інтегровні на I ,

2) багатозначне відображення $F(t)$ вимірне, $|F(t)| \leq m(t)$, де функція $m(\cdot)$ інтегровна на I .

Тоді розв'язок рівняння 1.17 з будь-якою початковою умовою $X(t_0) = X_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ існує на I та єдиний.

Таким чином, при достатньо загальних припущеннях розв'язок рівняння Хукухари існує, причому, як і для звичайних диференціальних рівнянь, додавання умови Ліпшиця на праву частину робить розв'язок єдиним.

1.4 Рівняння з нечіткою правою частиною

Одним із важливих розділів, де застосовується похідна Хукухари, є диференціальні рівняння з нечіткою правою частиною. У цьому розділі ми дамо означення такого рівняння та розглянемо його зв'язок із рівнянням Хукухари.

Означення 1.13. [6] Нехай $E = \mathbb{R}^n$. Введемо простір \mathbb{E}^n відображень $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, які задовільняють наступним умовам:

- 1) u напівнеперервне згори,
- 2) існує вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такий, що $u(y_0) = 1$,
- 3) для будь-яких $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]$ виконується нерівність $u(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \geq \min\{u(y_1), u(y_2)\}$,
- 4) замикання множини $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > 0\}$ компактне.

Простір \mathbb{E}^n називається простором нечітких множин.

Нулем в просторі \mathbb{E}^n є елемент

$$\widehat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \neq 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Позначимо [6] через $[u]^\alpha$ множини $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > \alpha\}$ при $0 < \alpha \leq 1$ і замикання множини $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > 0\}$ при $\alpha = 0$. Такі множини називаються α -зрізками u .

Теорема 1.13. [6] Якщо $u \in \mathbb{E}^n$, то

- 1) $[u]^\alpha \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ для всіх $\alpha \in [0, 1]$,
- 2) $[u]^{\alpha_2} \subseteq [u]^{\alpha_1}$ для всіх $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$,

3) якщо $\{\alpha_k\}$ - неспадна послідовність, що прямує до α , то $[u]^\alpha = \bigcap \{[u]^{\alpha_k} | k \geq 1\}$.

Навпаки, якщо сім'я множин $\{A_\alpha | \alpha \in [0, 1]\}$ з простору $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ задовільняє умовам 1)-3), то існує $u \in \mathbb{E}^n$ таке, що $[u]^\alpha = A_\alpha$ для всіх $\alpha \in (0, 1]$ і $[u]^0 = \overline{\cup \{A_\alpha | \alpha \in (0, 1]\}} \subseteq A_0$.

Зрозуміло, що функція u з простору \mathbb{E}^n є характеристичною функцією приналежності [4] $\mu_A(x)$ для деякої нечіткої множини A .

Означення 1.14. [6] Відображення $f : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ називають слабко неперервним в точці $t \in I$, якщо для всіх $\alpha \in [0, 1]$ багатозначне відображення $f_\alpha \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ неперервне в точці t .

Означення 1.15. [6] Інтегралом відображення $f : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ на проміжку I називають елемент $g = \int_0^a f(t)dt \in \mathbb{E}^n$ такий, що $[g]^\alpha = \int_0^a f_\alpha(t)dt \in \mathbb{E}^n$ для всіх $\alpha \in [0, 1]$.

Означення 1.16. [6] Відображення $f : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ називають диференційовним в точці $t \in I$, якщо для будь-якого $\alpha \in [0, 1]$ багатозначне відображення $f_\alpha(\cdot)$ диференційовне за Хукухарою в точці t і сім'я множин $\{D_H f_\alpha(t) : \alpha \in [0, 1]\}$ визначає деякий елемент $f'(t) \in \mathbb{E}^n$.

Якщо $f : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ диференційовне в точці $t \in I$, то елемент $f'(t)$ будемо називати нечіткою похідною від $f(t)$ в точці t .

Отже, диференційовність нечіткого відображення визначається напряму через похідну Хукухари.

Теорема 1.14. [6] Якщо $f, g : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ диференційовні та $\lambda \in \mathbb{R}$, то

$$(f + g)'(t) = f'(t) + g'(t), (\lambda f)'(t) = \lambda f'(t). \quad (1.19)$$

Теорема 1.15. [6] Якщо відображення $f : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ диференційовне, то воно слабко неперервне.

Теорема 1.16. [6] Нехай відображення $f : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ слабко неперервне. Тоді для будь-якого $t \in (0, a)$ інтеграл $g(t) = \int_0^t f(s)ds$ диференційовний і $g'(t) = f(t)$.

Теорема 1.17. [6] Нехай $f : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ диференційовне і нечітка похідна $f'(t)$ інтегрована на I . Тоді для будь-якого $t \in I$

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s) ds. \quad (1.20)$$

Таким чином нечітка похідна і інтеграл від нечіткої функції пов'язані тими ж відношеннями, що і похідна Хукухари та інтеграл Аумана.

Означення 1.17. [6] Рівняння вигляду

$$x' = f(t, x), x(0) = x_0, \quad (1.21)$$

де $f : I \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, називається нечітким диференціальним рівнянням.

Означення 1.18. [6] Відображення $x : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ називається розв'язком рівняння 1.21, якщо воно слабко неперервне та задовільняє

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds. \quad (1.22)$$

З означення нечіткої похідної та теореми 1.13 випливає, що нечітке диференціальне рівняння 1.21 можна апроксимувати згори системою рівнянь Хукухари

$$\{D_H[x]^\alpha = [f(t, x)]^\alpha : \alpha \in [0, 1]\}. \quad (1.23)$$

2 Чисельні методи знаходження розв'язків рівняння Хукухари

2.1 Метод Ейлера для знаходження розв'язку рівняння Хукухари

Розглянемо розбиття відрізка $I = [0, a]$ [6]

$$0 < t_1 < \dots < t_m = a, t_{k+1} - t_k = \delta, I_k = [t_k, t_{k+1}], k = \overline{0, m-1} \quad (2.1)$$

та побудуємо за допомогою нього „ламану” Ейлера для рівняння 1.13

$$X_m(t) = X_m(t_k) + (t - t_k)F(t_k, X_m(t_k)), t \in I_k, k = \overline{0, m-1}, \quad (2.2)$$

$$X_m(0) = X_0. \quad (2.3)$$

У лінійному випадку маємо:

$$X_m(t) = X_m(t_k) + (t - t_k)[A(t_k)X_m(t_k) + F(t_k)], t \in I_k, k = \overline{0, m-1}, \quad (2.4)$$

$$X_m(0) = X_0. \quad (2.5)$$

Позначимо через $R = \max_{t \in [0, a]} h(X_m(t), X(t))$ відхилення апроксимації від точного розв'язку.

Теорема 2.1. [6] Нехай багатозначне відображення $F : I \times \text{conv}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ задовільняє наступним умовам:

1) $F(\cdot, \cdot)$ неперервне за обома змінними,

2) $F(t, \cdot)$ задовільняє умові Ліпшиця по X з константою L ,

3) розв'язок $X(\cdot)$ рівняння label має неперервну другу похідну $D_H(D_H X(\cdot))$ на I таку, що $|D_H(D_H X(\cdot))| < K, t \in I$.

Тоді похибка задовольняє нерівність:

$$R < \frac{\delta K}{2} \left[\left(\frac{1}{L} + \delta \right) (e^{aL} - 1) + \delta \right]. \quad (2.6)$$

Приклад 2.1. Лінійне рівняння Хукухари

$$D_H(X) = A(t)X + F(t), X(t_0) = X_0, \quad (2.7)$$

у якому функції $A(t)$ і $F(t)$ неперервно-диференційовні на I , задовільняє умовам теорем 1.12 і 2.1, тому послідовність „ламаних” Ейлера збігається до розв'язку рівняння 2.7.

Використовуючи апарат опорних функцій для лінійної апроксимації 2.4, маємо

$$C(X_m(t), \psi) = C(X_m(t_k), \psi) + (t - t_k)[C(X_m(t_k), A^T(t_k)\psi) + C(F(t_k), \psi)]. \quad (2.8)$$

При $t = t_{k+1}$ маємо

$$C(X_m(t_{k+1}), \psi) = C(X_m(t_k), \psi) + \delta[C(X_m(t_k), A^T(t_k)\psi) + C(F(t_k), \psi)]. \quad (2.9)$$

Для побудови апроксимації множини $X_m(t_{k+1})$ знайдемо $C(X_m(t_{k+1}), \psi_i)$, де $\psi_i \in \mathbb{R}^n, i = \overline{1, N}$ – деяка множина одиничних векторів.

З 2.9 маємо

$$C(X_m(t_{k+1}), \psi_i) = C(X_m(t_k), \psi_i) + \delta[C(X_m(t_k), A^T(t_k)\psi_i) + C(F(t_k), \psi_i)]. \quad (2.10)$$

Оскільки при $A^T(t_k)\psi_i \neq 0$

$$C(X_m(t_k), A^T(t_k)\psi_i) = \|A^T(t_k)\psi_i\| C\left(X_m(t_k), \frac{A^T(t_k)\psi_i}{\|A^T(t_k)\psi_i\|}\right), \quad (2.11)$$

то маємо

$$C(X_m(t_{k+1}), \psi_i) \approx C(X_m(t_k), \psi_i) + \delta[\|A^T(t_k)\psi_i\| C(X_m(t_k), \widehat{\psi}_{ik}) + C(F(t_k), \psi_i)], \quad (2.12)$$

де $\widehat{\psi}_{ik}$ таке, що

$$\left\| \widehat{\psi}_{ik} - \frac{A^T(t_k)\psi_i}{\|A^T(t_k)\psi_i\|} \right\| = \min_{j=\overline{1, N}} \left\| \psi_j - \frac{A^T(t_k)\psi_i}{\|A^T(t_k)\psi_i\|} \right\|. \quad (2.13)$$

У випадку $A^T(t_k)\psi_i = 0$

$$C(X_m(t_{k+1}), \psi_i) = C(X_m(t_k), \psi_i) + \delta C(F(t_k), \psi_i). \quad (2.14)$$

Таким чином можна отримати значення опорних функцій $C(X_m(t_k), \psi_i), k = \overline{0, m}, i = \overline{1, N}$. Оскільки значення опорної функції повністю характеризує опуклу множину, то цим методом можна наблизити розв'язок рівняння Хукухари у вузлових точках, а, згідно з 2.4, і на всьому проміжку I .

2.2 Розвинення методу Ейлера з апроксимацією правої частини

Навіть якщо ми маємо наближене рівняння 2.2, все одно у правій частині залишається множина, яку неможливо занести в комп'ютер для автоматичних обчислень. Тому постає питання про апроксимацію цієї множини скінченною множиною.

Проте занадто велика потужність апроксимуючої множини може зробити час роботи програми занадто довгим. Тому було б гарно, якби можна було ефективно та економічно апроксимувати множини, що виникають у рівнянні 2.2. Звісно, на функцію F при цьому будуть накладатися певні умови.

Нехай для будь-яких значень параметрів значення функції F є опуклою множиною, що містить 0 з деяким його оточенням. Для того, щоб апроксимувати множину $A = F(t)$, оберемо на її границі деяку кількість точок. Тоді їх опукла оболонка буде наближати задану множину.

Означення 2.1. [5,8,9] Нехай $A \in \mathbb{R}^n$ – довільна опукла множина, що містить 0 з деяким його оточенням. Функціонал

$$p_A(x) = \inf\{r : x/r \in A, r > 0\} \quad (2.15)$$

називається функціоналом Мінковського опуклої множини .

Якщо \vec{e} – деякий вектор одиничної довжини, то величина $(p_A(\vec{e}))^{-1}$ є відстанню між нулем та та границею множини за напрямком \vec{e} .

Тепер, якщо ми маємо деяку опуклу множину A , що містить нуль разом з деяким його оточенням, ми можемо побудувати дискретну апроксимацію цієї множини

Справді, нехай ми маємо таку множину :

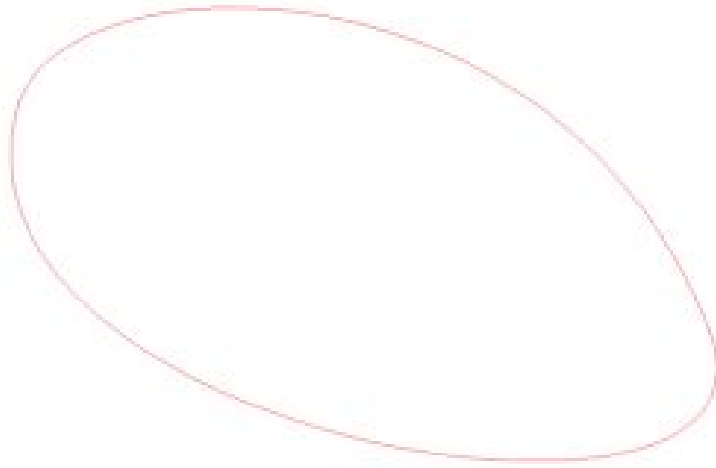


Рис. 2.1: Опукла множина

Візьмемо кулю одиничного радіуса та візьмемо на її поверхні деяку множину $\{a_i\}$ точок так, щоб відстань між опуклою оболонкою цих точок та кулею була достатньо малою. Тобто $h(\text{conv}(\{a_i\}), B) < \varepsilon$, де ε - деяке мале число. Тоді сукупність точок

$$\left\{ \frac{a_i}{p_A(a_i)} \right\} \quad (2.16)$$

буде мати наступні властивості:

- 1) кожна з цих точок лежить на границі множини A ,
- 2) відстань між їх опуклою оболонкою та множиною A менше деякого числа ε_1 , що залежить від ε та величини $\max_{x \in \partial A} (p_A(x))^{-1}$.

Тобто $\text{conv}(\{\frac{a_i}{p_A(a_i)}\})$ є апроксимацією множини

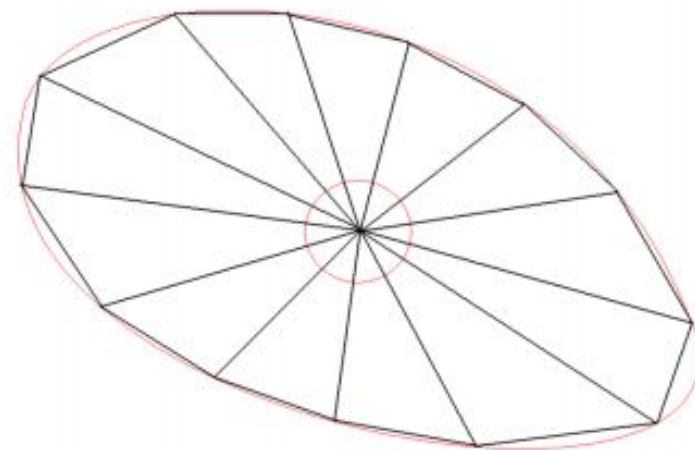


Рис. 2.2: Апроксимація опуклої множини

Тоді якщо ми будемо збільшувати кількість точок на сфері, краще її апроксимуючи, ми будемо також краще апроксимувати множину A .

Тоді метод наближення точного розв'язку ламаними Ейлера буде мати наступний вигляд.

Для рівняння

$$D_H X(t) = F(t, X(t)), X(0) = X_0 \quad (2.17)$$

та розбиття відрізка $I = [0, a]$

$$0 < t_1 < \dots < t_m = a, t_{k+1} - t_k = \delta, I_k = [t_k, t_{k+1}], k = \overline{0, m-1} \quad (2.18)$$

матимемо:

$$X_m(t) = X_m(t_k) + (t - t_k)F_d(t_k, X_m(t_k)), t \in I_k, k = \overline{0, m-1}, \quad (2.19)$$

$$X_m(0) = (X_0)_d, \quad (2.20)$$

де $F_d(t_k, X_m(t_k)), (X_0)_d$ - дискретні апроксимації множин $F(t_k, X_m(t_k)), X_0$.

Якщо рівняння Хукухари є лінійним:

$$D_H X(t) = A(t)X(t) + F(t), \quad (2.21)$$

то формула 2.19 набуває вигляд

$$X_m(t) = ((t - t_k)A(t_k) + E)X_m(t_k) + (t - t_k)F_d(t_k), t \in I_k, k = \overline{0, m-1}. \quad (2.22)$$

Таким чином, маємо наступний алгоритм пошуку розв'язку рівняння Хукухари:

Вхід: рівняння Хукухари 1.13, $\varepsilon > 0$ - порядок наближення.

Крок 1. Побудувати розбиття відрізка I 2.18 з кроком $\delta = \delta(\varepsilon)$ та дискретизувати початкову множину X_0 з точністю $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$ та покласти $X[0] = (X_0)_d, i = 0$.

Крок 2. Покласти

$$X[i+1] := \bigcup \{x + \delta f : x \in X[i], f \in F_d(i\delta, X[i])\}, \quad (2.23)$$

де $F_d(\delta i, X[i])$ - дискретизація правої частини рівняння Хукухари 2.17 з то-

чністю ε_1 .

Крок 3. Повторювати Крок 2, поки не дійдемо до потрібної точки відрізка I .

Вихід: опукла оболонка $X[\cdot]$ у відповідному елементі масиву буде наближенням розв'язку рівняння Хукухари в даній точці відрізка I . За формулою 2.2 обчислюємо наближений розв'язок на всьому проміжку I .

2.3 Метод наближеного розв'язку рівняння з нечіткою правою частиною

За теоремою 1.13 нечітка множина A повністю задається системою зрізок $[A]^\alpha$. Оберемо тепер натуральне число M та покладемо $\alpha_k = \frac{k}{M}, k = \overline{0, M}$.

Побудуємо тепер для множини A систему множин $B_\alpha, \alpha \in [0, 1]$ за формулами:

$$B_\alpha = \begin{cases} [A]^{\alpha_k}, & \alpha = \alpha_k, \\ \bigcap_{\alpha_k \geq \alpha} B_{\alpha_k}, & \alpha \neq \alpha_k. \end{cases} \quad (2.24)$$

Система B_α задовільняє умовам теореми 1.13 і, отже, визначає деяку нечітку множину B . Таку множину можна вважати апроксимацією нечіткої множини A . Приклад множин A і B можна бачити на рис. 2.3.

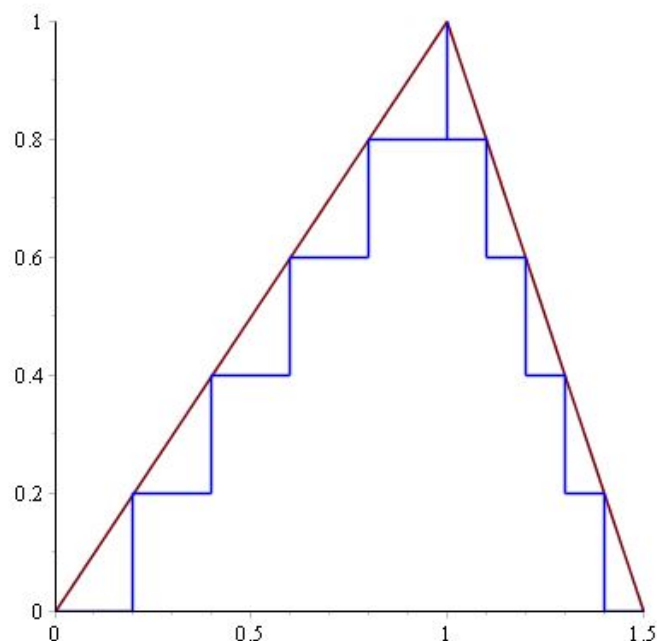


Рис. 2.3: Приклад нечіткої множини та її апроксимації. $M = 5$

Зі збільшенням M точність апроксимації буде зростати. Зрозуміло, що

замість $\frac{k}{M}$ у якості α_k можна обирати довільну множину точок з $[0, 1]$, тільки щоб виконувалося $\max\{\alpha_i - \alpha_j, \alpha_i, 1 - \alpha_i\} \rightarrow 0, M \rightarrow \infty$.

Поставимо тепер задачу знайти наближений розв'язок рівняння з нечіткою правою частиною

$$x' = f(t, x), x(0) = x_0. \quad (2.25)$$

Як ми бачили вище, цей розв'язок можна апроксимувати згори системою рівнянь Хукухари:

$$\{D_H[x]^\alpha = [f(t, x)]^\alpha : \alpha \in [0, 1]\}. \quad (2.26)$$

Оберемо достатньо велике число M і візьмемо множину точок $\{\alpha_k = \frac{k}{M} : k = \overline{0, M}\}$. Тоді замість нескінченної кількості рівнянь 2.26 ми маємо скінченну кількість рівнянь Хукухари:

$$\{D_H[x]^{\alpha_k} = [f(t, x)]^{\alpha_k} : \alpha_k = \frac{k}{M}, k = \overline{0, M}\}. \quad (2.27)$$

Нехай x_{α_k} - наближені розв'язки рівнянь 2.27 для відповідних α_k , які можна знайти за алгоритмом з пункту 2.2. Тоді покладемо

$$x_\alpha(t) = \bigcap_{\alpha_k \geq \alpha} x_{\alpha_k}(t), \alpha \in [0, 1] \quad (2.28)$$

для всіх $t \in I$.

Тоді ми можемо записати алгоритм пошуку наближеного розв'язку для рівняння з нечіткою правою частиною.

Вхід: рівняння 2.25, точність ε .

Крок 1. Обрати $M = M(\varepsilon)$ та звести рівняння з нечіткою правою частиною до скінченної системи рівнянь Хукухари 2.27.

Крок 2. Розв'язати рівняння Хукухари за алгоритмом з розділу 2.2 з точністю $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$ та отримати систему наближених розв'язків x_{α_k} .

Крок 3. За формулою 2.28 отримати значення наближеного розв'язку для всіх $\alpha \in [0, 1]$.

Вихід: отримана система задає наближення розв'язку рівняння 2.25.

3 Обчислювальний експеримент

Деталі реалізації: всі приклади були змодельовані та обчислені в системі комп'ютерної алгебри Maple 18 (Waterloo Maple Inc.)

3.1 Моделювання розв'язків рівнянь Хукухари

Приклад 3.1. Розглянемо лінійне рівняння Хукухари

$$D_H X = \lambda(t)X + F(t), X(0) = X_0, \quad (3.1)$$

де $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ інтегровна, $F : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ вимірне та $|F(t)| \leq m(t)$, де $m : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ інтегровна, $X_0 \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Неважко пересвідчитися, що багатозначне відображення $X : I \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$

$$X(t) = e^{\int_0^t \lambda(s) ds} \left[X_0 + \int_0^t F(s) e^{\int_t^s \lambda(\tau) d\tau} ds \right] \quad (3.2)$$

є розв'язком рівняння 3.1.

Нехай $I = [0, 1]$, $n = 1$, $\lambda \equiv 1$, $X_0 = 0$, $F(t) = B = \{x : |x| \leq 1\}$ - одинична куля в \mathbb{R} . Тоді багатозначне відображення

$$X(t) = B(e^t - 1) \quad (3.3)$$

буде розв'язком рівняння

$$D_H X = X + B. \quad (3.4)$$

Апроксимуємо цей розв'язок, поклавши $\delta = 0.1$ та взявши в якості наближення функції $F(t) = B$ множину $\{-1, 1\}$.

Графіки точного та наближеного розв'язків зображені на рис. 3.1.

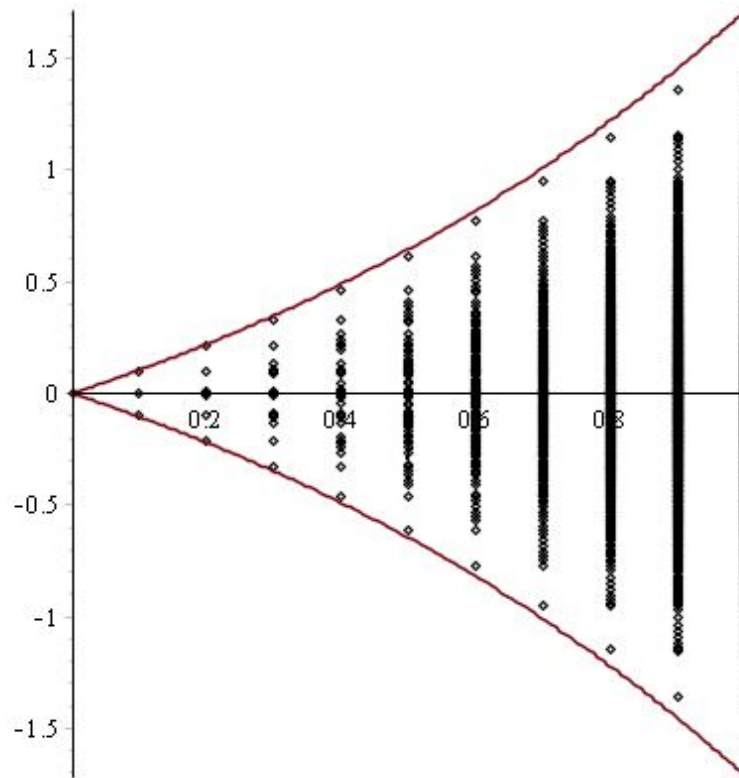


Рис. 3.1: Точний та наближений розв'язки для прикладу 3.1

З графіку видно, що опукла оболонка чорних точок добре апроксимує справжній розв'язок рівняння, що є опуклою оболонкою червоних експонент. Апроксимація тим краще, чим ближче розв'язок до 0. У даному прикладі дискретизація початкової множини та правої частини на всіх ітераціях алгоритму є точною, тобто ε_1 може бути як завгодно малим. Тим самим точність наближеного розв'язку залежить лише від кроку сітки δ .

Приклад 3.2. Нехай маємо наступне рівняння

$$D_H X = A(t)X + F(t), X(0) = X_0, \quad (3.5)$$

Нехай $I = [0, 1]$, $n = 2$, $A(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X_0 = (1, 0)$, $F(t) \equiv B = \{x : |x| \leq 1\}$ - одинична куля в \mathbb{R} .

Наблизимо одиничну кулю, як показано на рис. 3.2.

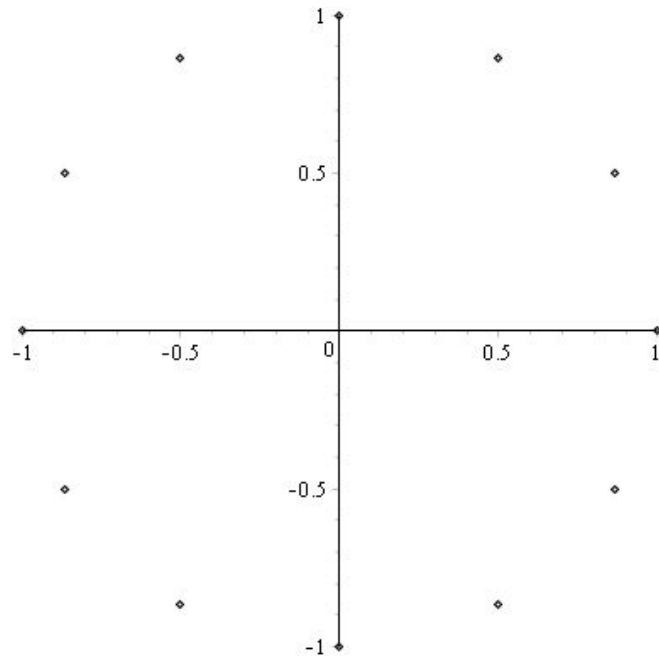


Рис. 3.2: Апроксимація одиничної кулі

Тоді наближений розв'язок даного рівняння Хукухари у точках $t = 0.25, t = 0.5, t = 0.75$ буде мати наступний вигляд:

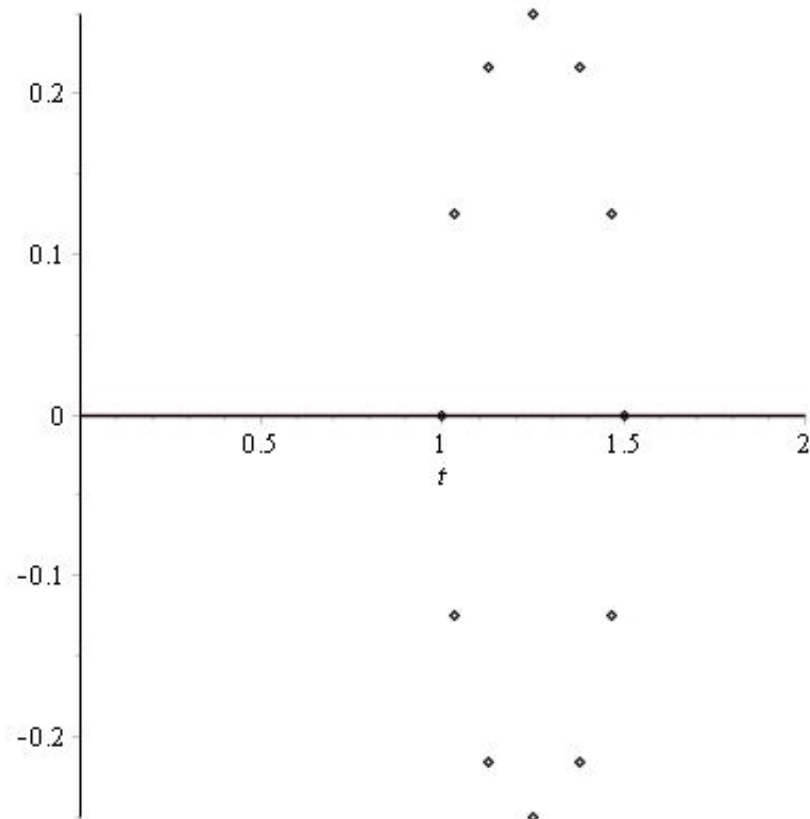


Рис. 3.3: Наближений розв'язок у точці 0.25

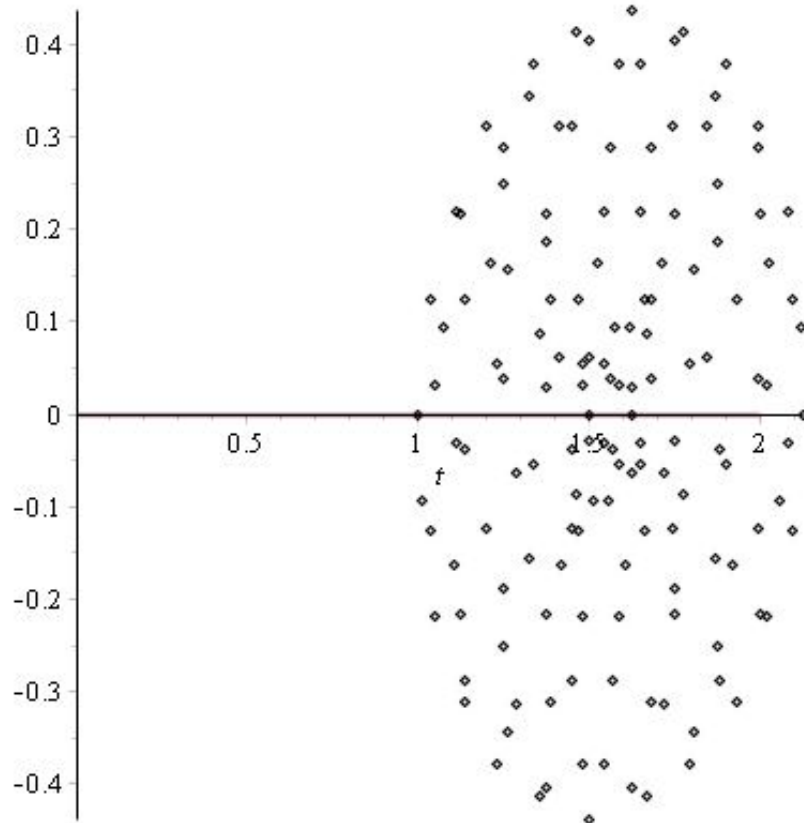


Рис. 3.4: Наближений розв'язок у точці 0.5

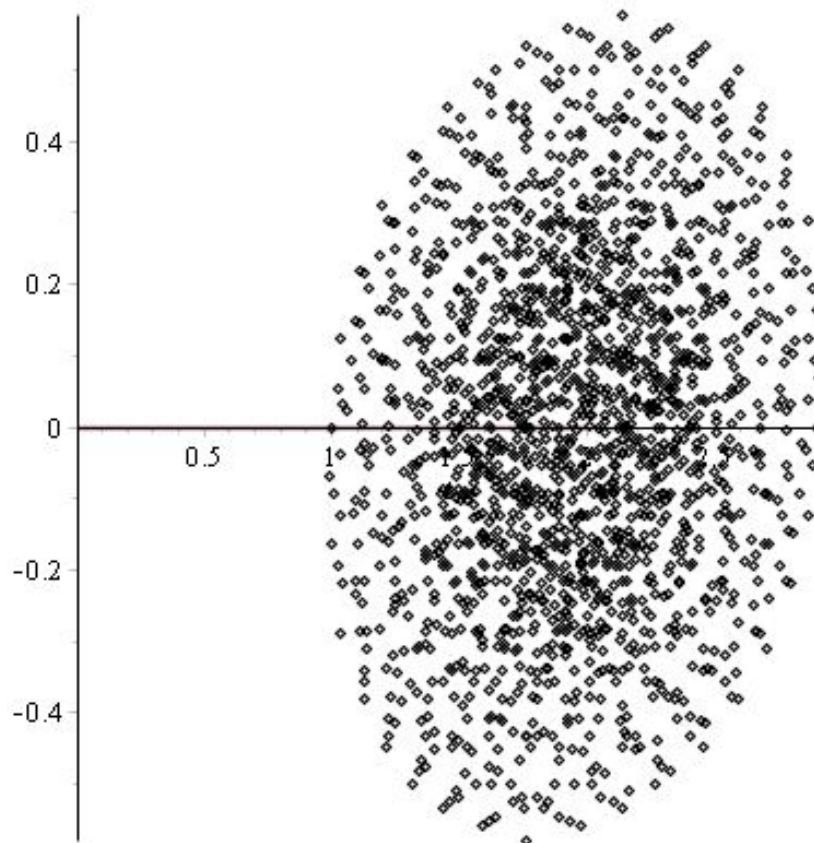


Рис. 3.5: Наближений розв'язок у точці 0.75

З рисунків видно, що розв'язок має еліпсоподібну форму для $t > 0$. Також можна спостерігати, що кількість точок апроксимуючої множини дуже швидко зростає, тому при великій кількості ітерації програмне середовище не може досить швидко обробляти такі великі масиви даних. Це основний з недоліків алгоритму - ефективно його можна використовувати лише на малій кількості ітерацій.

Приклад 3.3. Розглянемо те ж рівняння Хукухари, що і в прикладі 3.1, тільки цього разу в якості початкової множини покладемо $X_0 = [-1, 1]$. Одночасно будемо розглядати рівняння Хукухари з покатковими множинами $X_0 = \{-1\}$, $X_0 = \{0\}$ та $X_0 = \{1\}$. Графіки розв'язків рівнянь маємо на рис. 3.6.

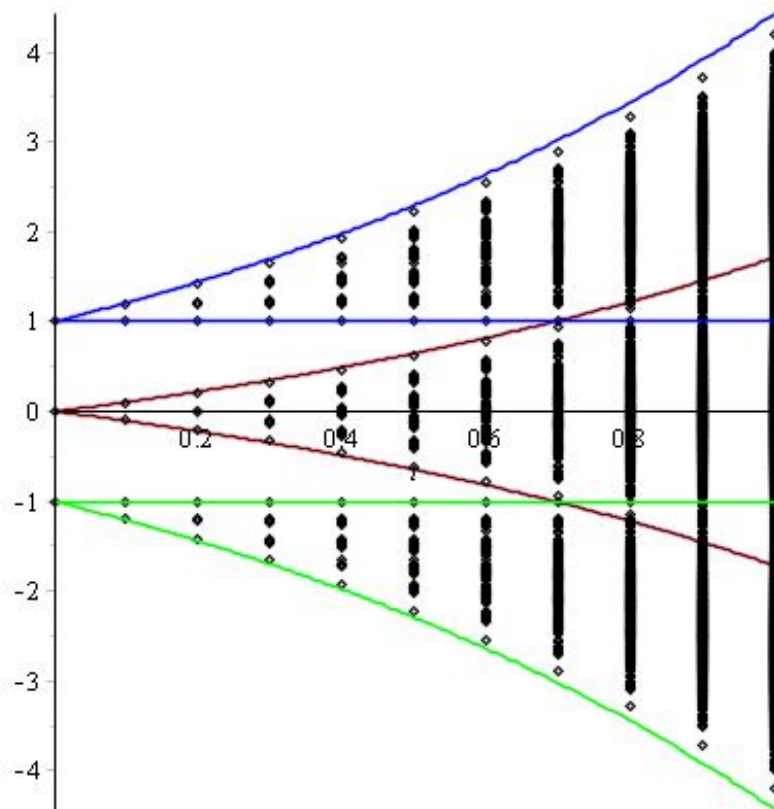


Рис. 3.6: Розв'язок для прикладу 3.3

З результатів видно, що якщо покласти в якості початкової множини неопуклу дискретну множину $X_0 = \{0, -1, 1\}$, то розв'язком рівняння Хукухари з такою початковою множиною можна вважати об'єднання розв'язків рівнянь, де початковою множиною є одноточкова підмножина X_0 . Таким чином, алгоритм можна застосовувати і для неопуклих початкових множин, проте теореми існування розв'язків та збіжність послідовності ламаних Ейлера можуть вже не виконуватися.

3.2 Моделювання розв'язків диференціальних рівнянь з нечіткою правою частиною

Приклад 3.4. Розглянемо диференціальне рівняння з нечіткою правою частиною

$$u' = -Ku, u(0) = u_0, \quad (3.6)$$

де

$$K = 0.02, \quad (3.7)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{x-90}{10}, & 90 < x < 100, \\ \frac{110-x}{10}, & 100 < x < 110, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.8)$$

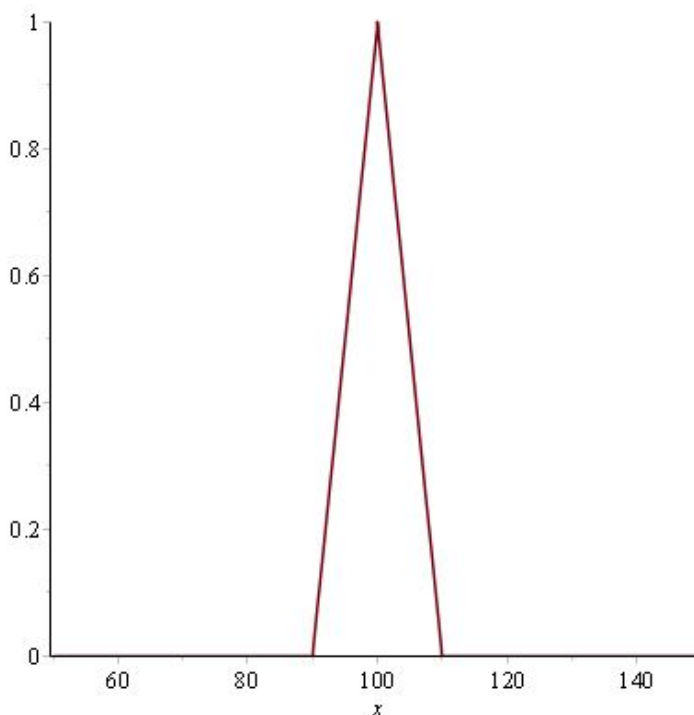


Рис. 3.7: Початкове значення u_0 для прикладу 3.4

Інтерпретація такого початкового значення така: з рівнем довіри 100% початкове значення дорівнює рівно 100, з рівнем довіри 90% значення початкової точки лежить у $[99, 101]$ і так далі.

Тоді розібемо проміжок $[0, 1]$ на $M = 40$ частин та розв'яжемо систему рівнянь Хукухарі $\{D_H[u]^{\alpha_i} = [-Ku]^{\alpha_i} : \alpha_i = (i + 1)/M, i = \overline{1, M}\}$ на

проміжку $[0, 20]$ з кроком $\delta = 0.2$. Тим самим ми отримуємо наближення розв'язку рівняння 3.6. Результат можна бачити на рис. 3.8.

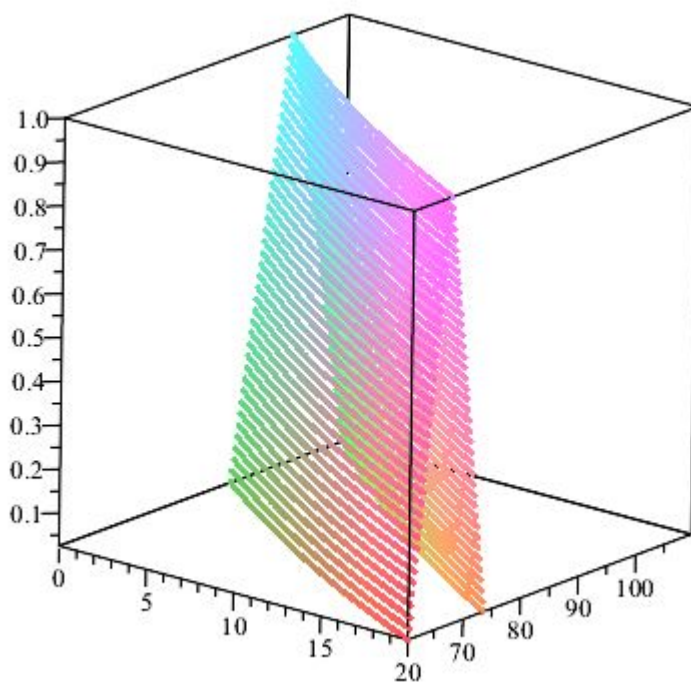


Рис. 3.8: Розв'язок для прикладу 3.4

Наближення розв'язку при фіксованих t можна побачити на рис. 3.9.

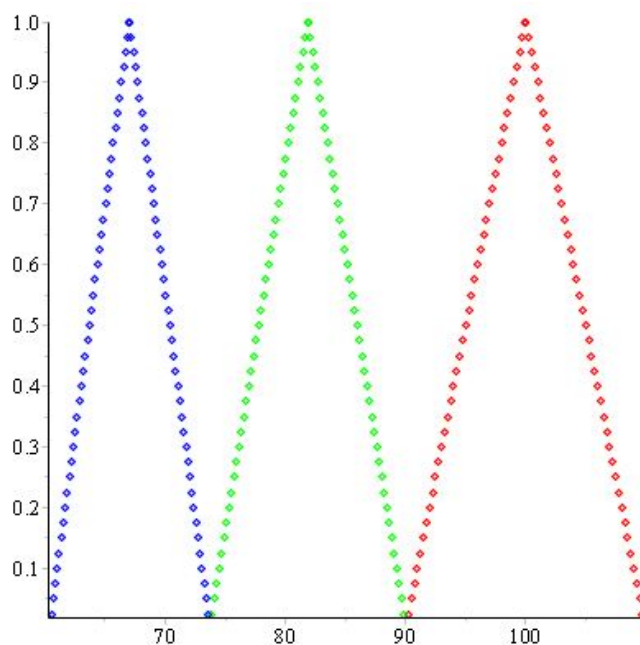


Рис. 3.9: Перерізи розв'язку рівняння з прикладу 3.4 при $t = 0, 10, 20$.

Отже, за допомогою алгоритму для розв'язку рівняння Хукухари, ми змогли змодельовати розв'язок диференціального рівняння з нечіткою правою частиною.

Висновки

Робота присвячена аналізу і чисельним методам знаходження розв'язків рівнянь Хукухари. Основні результати роботи такі:

1) проаналізовано теореми про існування розв'язків рівняння Хукухари;

2) проаналізовано зв'язок диференціальних рівнянь з нечіткою правою частиною з відповідними рівняннями Хукухари;

3) розглянуто особливості методу ламаних Ейлера для апроксимації розв'язків рівнянь Хукухари. Наведено умови, за яких метод наближає розв'язок відповідного рівняння Хукухари з певною точністю;

4) запропоновано розвиток методу Ейлера через апроксимацію правої частини рівняння Хукухари за допомогою функції Мінковського. Запропоновано відповідний алгоритм;

5) розглянуто алгоритм апроксимації динаміки зрізок диференціального рівняння з нечіткою правою частиною на основі методів знаходження розв'язку рівняння Хукухари;

6) проведені обчислювальні експерименти.

Література

1. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. –К.: Київський університет. –2008. –383 с.
2. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление / Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. – М.: Наука, 1985. – С. 194 – 252.
3. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Многозначные отображения / Итоги науки и техники ВИНТИ, Матем. анализ. – 1982. – Т. 19. – С. 127 – 130.
4. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень. – К. : Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет”. 2010. – 336 с.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. Наука, 1976. – 544 с.
6. Плотников А.В., Скрипник Н.В. Дифференциальные уравнения с „четкой” и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы: монография. – Одесса : Астропринт, 2009. – 192 с.
7. Плотников В. А., Плотников А .В., Витюк А. Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: АстроПринт, 1999. – 355 с.
8. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М. Физматлит, 2007. – 440 с.
9. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М. Наука, 1980. – 320 с.
10. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
11. Филатов О.П. Лекции по многозначному анализу и дифференциальным включениям. – Самара: Издательство „Самарский університет”, 2000. – 115 с.