

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ РАДІОФІЗИКИ, ЕЛЕКТРОНІКИ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ

Кафедра медичної радіофізики

«На правах рукопису»

Робота допущена до захисту в ЕК
рішенням кафедри медичної радіофізики
від _____ 2026 року, протокол № ____.

Завідувач кафедри кандидат фізико-математичних наук, доцент
_____ Сергій РАДЧЕНКО

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА МАГІСТРА

на тему:

«ПОКРАЩЕННЯ СТАТИСТИЧНОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ РЕНТГЕНІВСЬКИХ ДАНИХ»

Виконав:

студент 2-го курсу магістратури
денної форми здобуття освіти
спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали
ОНП Біомедична фізика, інженерія та інформатика
Буць Євген Юрійович _____

Науковий керівник:

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Радченко Сергій Петрович _____

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук, старший дослідник
Мамілов Сергій Олександрович _____

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів без
відповідних посилань
Студент Євген БУЦЬ _____

РЕФЕРАТ

У роботі розглянуто методи статистичної реконструкції рентгенографічних зображень на основі проєкційних даних. Основну увагу приділено ітераційним алгоритмам реконструкції SIRT, MLEM та OSEM, а також аналізу їх ефективності за наявності шуму та розсіювання випромінювання.

Побудовано математичну модель формування рентгенографічних проєкцій з урахуванням ослаблення випромінювання, шумових спотворень і розсіювання. Для моделювання використано чисельний фантом, параметри якого наближені до властивостей біологічних тканин людини.

Реалізацію алгоритмів виконано в середовищі ASTRA Toolbox із застосуванням чисельних методів обробки зображень. Проведено експериментальні дослідження SIRT, MLEM та OSEM, здійснено порівняння за швидкістю збіжності, рівнем шуму, деталізацією та точністю відновлення структури об'єкта.

Встановлено, що SIRT забезпечує стабільну реконструкцію з низьким рівнем шуму, але призводить до згладжування дрібних деталей. MLEM дає більш точне відновлення структури, проте є чутливим до шуму при збільшенні кількості ітерацій. OSEM показав найкращий баланс між швидкістю збіжності та якістю реконструкції, що робить його найбільш ефективним для статистичного оцінювання рентгенографічних даних.

Отримані результати можуть бути використані при розробці та вдосконаленні систем комп'ютерної томографії, а також у медичній візуалізації та цифровій обробці рентгенографічних зображень.

Ключові слова: рентгенографія, комп'ютерна томографія, реконструкція зображень, статистичне оцінювання, SIRT, MLEM, OSEM, синограма, шум, розсіювання випромінювання, ASTRA Toolbox.

Зміст

Вступ.....	4
1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РЕНТГЕНОГРАФІЧНОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ	6
1.1 Фізичні принципи рентгенівського випромінювання та формування зображення.....	6
1.2. Математична модель отримання проєкційних даних	10
1.3. Проблема оберненої задачі в медичній візуалізації.....	13
1.4 Джерела шумів та спотворень у рентгенографічних даних.....	16
1.5. Критерії якості реконструйованих зображень.....	19
2 МЕТОДОЛОГІЯ РЕКОНСТРУКЦІЇ РЕНТГЕНОГРАФІЧНИХ ДАНИХ	22
2.1 Теоретичні аспекти обробки та реконструкції рентгенівських зображень	25
2.2 Моделювання процесу формування рентгенографічних проєкцій..	32
3 ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ РЕКОНСТРУКЦІЇ	35
3.1 Моделювання процесу формування проєкцій.....	37
3.2 Реконструкція зображень ітераційними методами	42
3.3 Порівняння результатів реконструкції.....	47
4 АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ.....	52
ВИСНОВКИ	57
ЛІТЕРАТУРА	59

Вступ

Медичні зображення є важливим джерелом інформації для допомоги у постановці діагнозу. Однак, їх використання в медичних дослідженнях вимагає вилучення кількісної та об'єктивної інформації із зображень. Кілька досить різних сутностей можна виміряти кількісно.

До них належать вимірювання фізичних властивостей або характеристика форми анатомічних структур. Звичайно, перш ніж можна буде обчислити будь-які значення, необхідно окреслити структури, що цікавлять. Зі збільшенням розміру та кількості медичних зображень використання комп'ютерів для полегшення їх обробки та аналізу стало необхідним.

Зокрема, комп'ютерні алгоритми сегментації зображень для визначення анатомічних структур, що цікавлять, є ключовим компонентом у сприянні та автоматизації конкретних радіологічних завдань.

Процес реконструкції зображень у рентгенографії та комп'ютерній томографії (КТ) за останні десятиліття зазнав фундаментальної трансформації, перейшовши від детермінованих аналітичних підходів до складних систем **статистичного оцінювання**. Ця еволюція зумовлена необхідністю вирішення математично некоректних (ill-posed) обернених задач, де метою є відновлення внутрішньої структури об'єкта за сукупністю проєкційних даних.

У даній роботі розглядаються три ключові методи, що представляють різні етапи розвитку галузі:

- **Фільтрована зворотна проєкція (FBP):** Традиційний аналітичний метод, який тривалий час був промисловим стандартом завдяки обчислювальній простоті та високій швидкості роботи. Проте FBP демонструє значні обмеження при зниженні дози опромінення, що призводить до появи сильних шумів та артефактів.
- **Максимізація сподівання максимальної правдоподібності (MLEM):** Фундаментальний статистичний ітераційний алгоритм, що базується на моделюванні **пуассонівської природи** випромінювання. MLEM дозволяє значно покращити якість зображення та врахувати

фізику процесу детектування фотонів, хоча й потребує значних обчислювальних ресурсів через низьку швидкість збіжності.

- **Техніка одночасної ітераційної реконструкції (SIRT):**

Алгебраїчний метод, який використовується як надійний інструмент для вирішення систем лінійних рівнянь у томографії. SIRT виступає практичною апроксимацією оператора зворотного перетворення, забезпечуючи стабільність реконструкції навіть при неповних вихідних даних.

Сучасний етап розвитку характеризується інтеграцією цих класичних підходів у новітні архітектури **глибокого навчання (DLR)** та **дифузійні моделі**, які дозволяють досягти балансу між низькою дозою радіації та високою діагностичною точністю. Таким чином, аналіз методів **FBP**, **MLEM** та **SIRT** є необхідним для розуміння принципів формування сучасних високоточних медичних зображень.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РЕНТГЕНОГРАФІЧНОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ

1.1 Фізичні принципи рентгенівського випромінювання та формування зображення

Рентгенівське випромінювання є різновидом електромагнітного випромінювання з короткою довжиною хвилі (приблизно від 0,01 до 10 нм) та високою енергією фотонів. Воно виникає у рентгенівській трубці внаслідок взаємодії прискорених електронів з анодом, який зазвичай виготовляється з матеріалів з високим атомним номером (наприклад, вольфрам).

Процес генерації рентгенівського випромінювання включає два основні механізми:

- **гальмівне випромінювання (bremsstrahlung)** — виникає при гальмуванні електронів у кулонівському полі атомних ядер аноду;
- **характеристичне випромінювання** — з'являється внаслідок переходів електронів між внутрішніми електронними оболонками атома після іонізації.

Отриманий рентгенівський пучок має широкий енергетичний спектр і направляється через досліджуваний об'єкт до детектора.

Взаємодія рентгенівського випромінювання з речовиною

При проходженні через біологічні тканини рентгенівське випромінювання зазнає ослаблення внаслідок різних фізичних процесів взаємодії з речовиною:

- **фотоефект** — повне поглинання фотона з вибиванням електрона з внутрішніх оболонок атома;
- **комptonівське розсіювання** — нееластичне розсіювання фотона з частковою втратою енергії;
- **когерентне (рейліївське) розсіювання** — пружне розсіювання без втрати енергії (менш значуще в діагностиці).

Домінування того чи іншого механізму залежить від енергії випромінювання та атомного номера матеріалу. Наприклад, у м'яких тканинах переважає комптонівське розсіювання, тоді як у кістковій тканині значну роль відіграє фотоефект. [1-2]

Закон ослаблення рентгенівського випромінювання

Ослаблення інтенсивності рентгенівського пучка при проходженні через однорідне середовище описується експоненціальним законом:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x}$$

де:

- I_0 — початкова інтенсивність випромінювання;
- $I_{(x)}$ — інтенсивність після проходження шару товщини x ;
- μ — лінійний коефіцієнт ослаблення, який залежить від типу тканини та енергії випромінювання.

Для неоднорідних середовищ (як людське тіло) закон узагальнюється:

$$I = I_0 \exp \left(- \int_L \mu(s) ds \right)$$

Це означає, що ослаблення залежить від інтегрального внеску всіх тканин уздовж траєкторії променя.

Формування проєкційного рентгенівського зображення

Рентгенівське зображення не є прямим відображенням внутрішньої структури об'єкта. Воно являє собою проєкцію інтегрального ослаблення випромінювання на площину детектора.

У кожній точці детектора реєструється кількість фотонів, що пройшли через об'єкт, тому яскравість пікселя відповідає ступеню ослаблення променя:

- світлі ділянки зображення — сильне поглинання (кістки, щільні структури);
- темні ділянки — слабе поглинання (повітря, м'які тканини).

Таким чином, отримане зображення є результатом інтегрування коефіцієнта ослаблення вздовж прямих променів і фактично відповідає набору лінійних проєкцій.

Особливості формування цифрового рентгенівського сигналу

У сучасних системах рентгенографії аналоговий сигнал перетворюється в цифровий за допомогою детекторів (наприклад, сцинтиляційних або напівпровідникових). Процес включає:

- перетворення рентгенівських фотонів у світлові імпульси або електричний заряд;
- дискретизацію просторового сигналу;
- квантування інтенсивності.

На цьому етапі в систему вносяться додаткові похибки:

- статистичні флуктуації (квантовий шум);
- електронний шум детектора;
- ефекти розсіювання.

Ці фактори є критичними для подальшого статистичного моделювання задачі реконструкції

Таким чином, формування рентгенівського зображення базується на фізичних процесах генерації випромінювання, його взаємодії з речовиною та реєстрації детектором. Отримане зображення є не прямим відображенням структури об'єкта, а інтегральною проєкцією коефіцієнта ослаблення, що створює основу для подальшої математичної реконструкції внутрішньої структури.[3]



Рисунок 1.1 – Схема формування рентгенівського зображення

1.2. Математична модель отримання проєкційних даних

Процес формування рентгенографічних даних можна описати математично як задачу інтегрування коефіцієнта ослаблення випромінювання вздовж траєкторій променів. Такий підхід дозволяє перейти від фізичного опису явища до формалізованої моделі, що є основою для подальшої реконструкції зображення.

Безперервна модель ослаблення

Нехай $\mu(x,y)$ — коефіцієнт лінійного ослаблення рентгенівського випромінювання в точці об'єкта. Тоді сигнал, який реєструється детектором, залежить від інтегралу цієї величини вздовж траєкторії променя.

Після логарифмування експоненційного закону ослаблення отримуємо лінійну залежність:

$$p(\theta,s) = \int_{L(\theta,s)} \mu(x,y)$$

де:

- $p(\theta,s)$ — проєкція (вимірний сигнал) під кутом θ ;
- s — відстань від центру координат до променя;
- $L(\theta,s)$ — пряма, вздовж якої відбувається інтегрування.

Це рівняння описує **перетворення Радона**, яке є фундаментальним у задачах томографії.

Перетворення Радона та sinogram

Перетворення Радона відображає двовимірну функцію $\mu(x,y)$ у множину її лінійних інтегралів. Сукупність усіх проєкцій для різних кутів θ формує так званий sinogram.

Sinogram має такі властивості:

- кожна точка об'єкта описується синусоїдальною траєкторією;
- повний набір проєкцій забезпечує можливість точного

відновлення зображення;

- неповні або зашумлені дані призводять до артефактів.

Це представлення є зручним для аналізу та обробки проєкційних даних.

Дискретизація задачі реконструкції

У реальних системах дані є дискретними, тому безперервна модель переходить у матричну форму. Об'єкт розбивається на пікселі (або вокселі), а інтеграли замінюються сумами.

Дискретна модель записується як:

$$g_i = \sum_j a_{ij} f_j + n_i$$

де:

- g_i — виміряне значення i -ої проєкції;
- f_j — значення коефіцієнта ослаблення в j -ому пікселі;
- a_{ij} — ваговий коефіцієнт (довжина перетину променя з пікселем);
- n_i — шум.

У матричному вигляді:

$$\mathbf{g} = \mathbf{A} \mathbf{f} + \mathbf{n}$$

де матриця $\mathbf{A}$ описує геометрію системи (кут сканування, положення джерела і детектора).

Властивості системної матриці

Матриця $\mathbf{A}$ має ряд особливостей:

- є великою та розрідженою;
- залежить від геометрії сканування;
- часто є погано обумовленою.

Це означає, що навіть незначні похибки у даних $\mathbf{g}$ можуть призводити до значних помилок у реконструкції $\mathbf{f}$.

Вплив шуму на модель

У реальних умовах вимірювання завжди супроводжуються шумом. Для рентгенівських систем характерний:

- пуассонівський шум (через дискретність фотонів);
- адитивний електронний шум.

Тому більш точна модель має статистичний характер:

- вимірювання g_i є випадковими величинами;
- їх розподіл залежить від інтенсивності випромінювання.

Це обґрунтовує використання статистичних методів (MLE, MAP), які будуть розглянуті в наступному розділі.

Некоректність задачі реконструкції

Дискретна модель реконструкції має властивості некоректної задачі:

- система рівнянь може бути перевизначеною або недовизначеною;
- матриця A може бути виродженою;
- розв'язок є нестійким до шумів.

Це означає, що стандартні методи розв'язання систем лінійних рівнянь не забезпечують якісного результату.

Для подолання цих проблем застосовуються:

- регуляризація;
- ітераційні алгоритми;
- статистичні підходи. [4-5]

1.3. Проблема оберненої задачі в медичній візуалізації

Реконструкція рентгенографічного зображення за проєкційними даними є класичним прикладом оберненої задачі, в якій необхідно відновити внутрішню структуру об'єкта за результатами непрямих вимірювань. На відміну від прямої задачі, де за відомим розподілом коефіцієнта ослаблення можна обчислити відповідні проєкції, обернена задача передбачає відновлення цього розподілу на основі експериментальних даних, що значно ускладнює її розв'язання.

У дискретній постановці задача реконструкції зводиться до системи лінійних рівнянь, у якій вектор виміряних даних пов'язаний із шуканим зображенням через системну матрицю. Проте така система має ряд особливостей, що роблять її складною для прямого розв'язання.

Некоректність задачі реконструкції

Відповідно до визначення Ж. Адамара, коректна задача повинна задовольняти трьом умовам: існування розв'язку, його єдиність та стійкість до малих змін вхідних даних. У задачі реконструкції ці умови, як правило, не виконуються.

Основні прояви некоректності:

- **неєдиність розв'язку** — різні розподіли можуть давати однакові проєкції;
- **нестійкість** — малі похибки у даних призводять до значних змін у результаті;
- **обмеженість даних** — використовується скінченна кількість проєкцій.

Це означає, що задача є нестійкою і потребує спеціальних методів розв'язання.

Причини виникнення некоректності

Некоректність задачі реконструкції обумовлена як фізичними, так і математичними факторами.

До основних причин належать:

- обмежена кількість проєкцій та кутів сканування;
- наявність шуму вимірювання (переважно пуассонівського);
- дискретизація об'єкта та апроксимаційні похибки;
- погана обумовленість системної матриці.

Особливо важливим є те, що матриця системи є близькою до виродженої, що призводить до нестабільності при її інверсії.

Вплив некоректності на якість реконструкції

Некоректність задачі безпосередньо впливає на якість відновлених зображень. Основні наслідки:

- підсилення шуму при реконструкції;
- поява артефактів (смуг, зернистості, кільцевих структур);
- втрата дрібних деталей зображення;
- залежність результату від параметрів алгоритму.

Ці ефекти особливо помітні при низькодозових режимах, коли рівень шуму є підвищеним.

Підходи до розв'язання оберненої задачі

Для отримання стабільного розв'язку застосовуються спеціальні методи, які враховують некоректність задачі:

- **регуляризація** — введення додаткових обмежень на розв'язок;
- **ітераційні методи** — поступове уточнення зображення;
- **статистичні методи** — врахування ймовірнісної природи шуму;
- **байєсівські підходи** — використання апіорної інформації.

Зокрема, статистичні методи дозволяють отримати більш точні результати в умовах шуму та обмежених даних.[6-7]

1.4 Джерела шумів та спотворень у рентгенографічних даних

Реальні рентгенографічні дані завжди містять різноманітні шуми та спотворення, що виникають на різних етапах формування зображення — від генерації випромінювання до його реєстрації детектором. Наявність цих факторів суттєво ускладнює задачу реконструкції та безпосередньо впливає на якість отриманих зображень.

У загальному випадку вимірний сигнал можна представити як суму корисної складової та шуму, причому шум має випадковий характер і залежить від фізичних процесів у системі.

Основні джерела шуму

Найбільш значущим типом шуму в рентгенографії є квантовий шум, який зумовлений дискретною природою рентгенівського випромінювання.

Оскільки детектор реєструє окремі фотони, їх кількість є випадковою величиною, що підпорядковується пуассонівському розподілу. Це означає, що відносний рівень шуму зростає при зменшенні кількості фотонів, що особливо важливо для низькодозових режимів.

Крім квантового шуму, значний внесок мають:

- **електронний шум детектора**, пов'язаний із процесами зчитування сигналу;
- **тепловий шум**, що виникає в електронних компонентах;
- **шум підсилювачів і аналого-цифрового перетворення.**

Ці види шуму зазвичай моделюються як адитивні та можуть накладатися на основний сигнал.

Фізичні спотворення сигналу

Окрім шумів, на якість даних впливають фізичні ефекти, пов'язані з взаємодією випромінювання з об'єктом:

- **комptonівське розсіювання**, яке призводить до появи додаткового фону;
- **жорсткість пучка (beam hardening)** — зміна спектра випромінювання при проходженні через об'єкт;
- **поглинання, що залежить від енергії фотонів**, що ускладнює модель ослаблення;
- **внутрішнє розсіювання в тканинах**, яке знижує контраст зображення.

Ці ефекти призводять до відхилення реальних даних від ідеалізованої математичної моделі.

Геометричні та системні спотворення

Важливу роль відіграють також особливості геометрії системи та технічні обмеження обладнання:

- неточність позиціонування джерела та детектора;
- обмежена просторово-часова роздільна здатність;
- розмиття через скінченний розмір фокальної плями;
- дискретизація сигналу детектором.

Окремо слід відзначити вплив руху об'єкта (наприклад, пацієнта), який може призводити до додаткових артефактів у зображенні.

Вплив шумів і спотворень на реконструкцію

Наявність шумів та спотворень істотно впливає на процес реконструкції зображення. Основні наслідки:

- зниження контрасту та роздільної здатності;
- поява випадкових флуктуацій у зображенні;
- формування артефактів;
- погіршення стабільності алгоритмів реконструкції.

Особливо критичним є те, що при інверсії моделі (розв'язанні оберненої задачі) шум може підсилюватися, що призводить до деградації результату.

Необхідність статистичного моделювання

З огляду на випадковий характер шумів та складність фізичних процесів, використання детермінованих моделей є недостатнім. Тому доцільно застосовувати статистичний підхід, у якому:

- виміряні дані розглядаються як випадкові величини;
- враховується тип розподілу шуму (зокрема, пуассонівський);
- оцінювання параметрів виконується за ймовірнісними критеріями.

Такий підхід дозволяє більш адекватно описати реальні дані та підвищити якість реконструкції.[8-9]

1.5. Критерії якості реконструйованих зображень

Оцінювання якості реконструйованих рентгенографічних зображень є важливим етапом аналізу ефективності алгоритмів відновлення. Оскільки результат реконструкції є наближенням до невідомого або еталонного розподілу коефіцієнта ослаблення, необхідно використовувати кількісні критерії, які дозволяють порівнювати різні методи між собою.

У загальному випадку якість реконструкції визначається ступенем відповідності між відновленим зображенням та реальним (або еталонним) об'єктом, а також здатністю алгоритму зберігати структурну інформацію при наявності шуму та обмежених даних.

Основні кількісні метрики якості

Найбільш поширеним критерієм є середньоквадратична похибка (MSE), яка характеризує середнє відхилення між еталонним та реконструйованим зображенням. Вона дозволяє оцінити загальний рівень помилки, проте не завжди коректно відображає візуальну якість.

На основі MSE часто обчислюється пікове відношення сигнал/шум (PSNR), яке є більш інтерпретованим у контексті обробки зображень. Чим вище значення PSNR, тим ближчим є реконструйоване зображення до еталонного.

Окремо слід виділити індекс структурної подібності (SSIM), який враховує не лише інтенсивності пікселів, але й локальні структурні характеристики зображення. На відміну від MSE та PSNR, SSIM краще корелює з людським візуальним сприйняттям і тому широко використовується в медичній візуалізації.

Візуальні критерії оцінювання

Окрім числових метрик, важливу роль відіграє візуальна оцінка якості реконструкції. У медичній діагностиці навіть незначні артефакти можуть мати критичне значення, тому аналіз зображень експертом залишається

обов'язковим етапом.

До основних візуальних критеріїв належать:

- чіткість контурів анатомічних структур;
- рівень шуму на однорідних ділянках;
- наявність артефактів реконструкції (смуги, кільця, зернистість);
- збереження дрібних деталей об'єкта.

Візуальна оцінка є особливо важливою у випадках, коли числові метрики не повністю відображають клінічну придатність зображення.

Специфічні критерії для медичної візуалізації

У медичних задачах часто використовуються додаткові критерії, які враховують діагностичну цінність зображення. До них належать показники контрастної роздільної здатності, які визначають здатність системи розрізняти об'єкти з близькими значеннями коефіцієнта ослаблення.

Також важливим є оцінювання збереження структурної інформації, оскільки саме геометрія та форма анатомічних об'єктів мають ключове значення для діагностики.

У деяких випадках використовується аналіз частотного спектра зображення, що дозволяє оцінити втрати високочастотної інформації, яка відповідає за дрібні деталі.

Порівняння алгоритмів реконструкції

Критерії якості широко застосовуються для порівняння різних методів реконструкції, таких як аналітичні та ітераційні алгоритми. Зокрема:

- аналітичні методи (наприклад, фільтрована зворотна проєкція) забезпечують високу швидкість, але є чутливими до шуму;
- ітераційні методи (SIRT, MLEM) демонструють кращу стійкість до шуму, але потребують більшого обчислювального ресурсу.

Таким чином, вибір алгоритму часто визначається компромісом між точністю реконструкції, стійкістю до шуму та обчислювальною складністю.[10-11]

2 МЕТОДОЛОГІЯ РЕКОНСТРУКЦІЇ РЕНГЕНОГРАФІЧНИХ ДАНИХ

Важливим аспектом розвитку методів реконструкції є також удосконалення математичних моделей процесу проходження рентгенівського випромінювання через біологічні тканини. У класичних моделях часто використовувалося припущення про моноенергетичне випромінювання та ідеальні умови детектування, однак реальні системи комп'ютерної томографії працюють із поліхроматичними джерелами рентгенівського випромінювання. Це призводить до виникнення додаткових фізичних ефектів, зокрема явища зміцнення променя (beam hardening), яке спричиняє спотворення реконструйованих зображень та появу артефактів. Для компенсації таких ефектів сучасні алгоритми реконструкції включають моделі енергетичного спектра рентгенівського випромінювання та нелінійних процесів взаємодії фотонів із речовиною.

Крім процесів поглинання, суттєвий вплив на якість реконструкції має розсіювання рентгенівського випромінювання. Розсіяні фотони можуть потрапляти на детектор і формувати паразитний сигнал, що знижує контрастність зображення та ускладнює точне відновлення коефіцієнтів ослаблення. Для боротьби з цим явищем використовуються як апаратні методи — антирозсіювальні решітки, колімація пучка та вдосконалені детекторні системи, — так і програмні методи корекції розсіювання, інтегровані безпосередньо в алгоритми реконструкції.

Суттєвий внесок у розвиток сучасної томографії зробила поява багатозрізових та спіральних КТ-систем. У спіральній комп'ютерній томографії джерело випромінювання та детекторна система безперервно обертаються навколо пацієнта, тоді як стіл із пацієнтом рухається вздовж осі сканування. Така геометрія дозволяє значно скоротити час обстеження та отримувати великі об'єми даних за короткий проміжок часу. Однак це також ускладнює математичну задачу реконструкції, оскільки проєкційні дані більше не належать до однієї площини. Для обробки таких даних були розроблені спеціалізовані алгоритми конусно-променевої реконструкції, серед яких одним із найвідоміших є алгоритм Feldkamp–Davis–Kress (FDK).

У сучасних КТ-системах дедалі більшого значення набувають низькодозові режими сканування. Зменшення дози опромінення є критично важливим завданням медичної фізики, особливо при обстеженні дітей, пацієнтів із хронічними захворюваннями та при проведенні багаторазових діагностичних процедур. Проте зниження дози автоматично призводить до зменшення кількості зареєстрованих фотонів та зростання рівня квантового шуму. У таких умовах класичні методи реконструкції часто демонструють незадовільну якість зображення, тому застосування статистичних та ітераційних алгоритмів стає необхідністю. Вони дозволяють компенсувати дефіцит інформації та отримувати діагностично придатні зображення навіть за умов значного зниження дози.

Окремий напрям досліджень пов'язаний із використанням компресивного вимірювання (compressed sensing) у томографії. Основна ідея цього підходу полягає у можливості відновлення зображення з меншої кількості проєкцій, ніж це вимагається класичною теорією дискретизації. Такий підхід базується на припущенні, що медичні зображення мають певну розріджену структуру в спеціальних базисах або трансформаційних просторах. Використання compressed sensing дозволяє значно скоротити час сканування та додатково зменшити променеве навантаження на пацієнта.

Паралельно активно розвиваються методи спектральної та двоенергетичної комп'ютерної томографії. На відміну від традиційної КТ, де використовується інтегральний сигнал від усього енергетичного спектра, спектральна КТ дозволяє аналізувати залежність ослаблення випромінювання від енергії фотонів. Це відкриває можливість більш точної диференціації тканин, визначення хімічного складу матеріалів та покращення контрастності зображень. Реконструкція у спектральній томографії є значно складнішою, оскільки необхідно одночасно оцінювати просторовий та енергетичний розподіл сигналу.

З розвитком обчислювальної техніки суттєво зросла швидкість реконструкції томографічних даних. Якщо ранні системи потребували значного часу для виконання реконструкції навіть одного зрізу, то сучасні графічні процесори (GPU) та паралельні обчислювальні архітектури дозволяють виконувати складні

ітераційні алгоритми практично в режимі реального часу. Це особливо важливо для інтервенційної радіології, де реконструйоване зображення повинно бути доступним лікарю без затримок під час проведення процедур.

Крім медичної діагностики, методи рентгенографічної реконструкції широко застосовуються в інших галузях науки й техніки. У промисловій томографії вони використовуються для неруйнівного контролю матеріалів та конструкцій, в аерокосмічній галузі — для аналізу внутрішньої структури складних деталей, а в археології та мистецтвознавстві — для дослідження внутрішньої будови історичних артефактів без їх пошкодження. Незважаючи на різницю в об'єктах дослідження, математичні принципи реконструкції залишаються подібними та базуються на розв'язанні обернених задач.

У перспективі подальший розвиток методів реконструкції буде пов'язаний із поєднанням фізично обґрунтованих моделей та штучного інтелекту. Сучасні гібридні алгоритми вже інтегрують нейронні мережі безпосередньо в ітераційні схеми реконструкції, що дозволяє одночасно враховувати фізичні закономірності формування сигналу та статистичні особливості реальних медичних даних. Очікується, що такі підходи забезпечать ще вищу якість реконструкції, скорочення часу обробки та подальше зниження променевого навантаження на пацієнтів, що є одним із ключових напрямів розвитку[12-15]

2.1 Теоретичні аспекти обробки та реконструкції рентгенівських зображень

Класичні аналітичні та алгебраїчні методи

Фільтрована зворотна проєкція (FBP) тривалий час залишалася основним промисловим стандартом завдяки своїй обчислювальній простоті та швидкості. Метод базується на аналітичній формулі, яка спочатку застосовує фільтрацію до проєкційних даних, а потім виконує їх зворотну проєкцію на площину зображення. Статистична реконструкція базується на імовірнісному моделюванні процесу формування даних. У рентгенівських системах кількість фотонів, що досягають детектора, підпорядковується розподілу Пуассона, що зумовлено дискретною природою випромінювання.[16-17] Традиційні методи, такі як фільтрована зворотна проєкція (FBP), ігнорують ці статистичні властивості, припускаючи, що кожне вимірювання детектора є однаково точним, що призводить до значних шумів та артефактів при зниженні дози опромінення.[18-20]

Техніка одночасної ітераційної реконструкції (SIRT) є представником алгебраїчного сімейства алгоритмів, що розглядають задачу реконструкції як систему лінійних рівнянь типу $y = Ax$. На відміну від рядкових методів (як-от ART), SIRT оновлює всі вокселі одночасно, використовуючи усереднену помилку за всіма проєкціями в ітерації. Це забезпечує вищу стабільність до шуму та кращу збіжність у порівнянні з аналітичними підходами, особливо у випадках з обмеженим кутом огляду. SIRT часто використовується як практичне наближення оператора псевдоінверсії для стабілізації обернених задач.[21]

Статистична ітераційна реконструкція

Статистичні методи базуються на імовірнісному моделюванні процесу формування даних, де ключову роль відіграє **пуассонівська статистика** фотонів.

Максимізація сподівання максимальної правдоподібності (MLEM): Цей алгоритм належить до статистичних методів реконструкції та

спрямований на знаходження такого зображення, яке з найбільшою ймовірністю могло сформувати спостережувані проєкційні дані. На відміну від алгебраїчних підходів, MLEM враховує статистичну природу вимірювань (зазвичай пуассонівський шум), що дозволяє отримувати більш якісні результати при низькому рівні сигналу.

Алгоритм працює ітераційно: на кожному кроці виконується порівняння між вимірними та змодельованими проєкціями, після чого оцінка зображення коригується за допомогою поправкових коефіцієнтів. Такий підхід забезпечує поступове покращення узгодженості моделі з експериментальними даними та гарантує невід'ємність розв'язку.

Перевагою MLEM є висока якість реконструкції в умовах шуму та обмежених даних. Однак основним недоліком залишається повільна збіжність: для досягнення прийняттого результату часто потрібна велика кількість ітерацій. Крім того, при надмірній кількості ітерацій можливе підсилення шуму, що вимагає застосування регуляризації або обмеження числа ітерацій.[21-23]

Метод упорядкованих підмножин (OSEM): Цей алгоритм є модифікацією методу MLEM, спрямованою на прискорення його збіжності. Основна ідея полягає у розбитті повного набору проєкційних даних на кілька підмножин (subsets), кожна з яких містить частину вимірювань, зазвичай рівномірно розподілених за кутами сканування. Оновлення зображення виконується після обробки кожної підмножини, а не після проходження всього набору даних, як у класичному MLEM.

Завдяки такому підходу швидкість збіжності значно зростає і приблизно пропорційна кількості підмножин, що робить OSEM більш придатним для практичного застосування, особливо в медичній томографії, де важливим є час реконструкції. Алгоритм зберігає основні властивості MLEM, зокрема врахування статистичної природи даних та невід'ємність розв'язку.

Водночас використання підмножин призводить до певного наближення

градієнта функції правдоподібності, що може впливати на стабільність процесу. При надмірному збільшенні кількості підмножин зменшується обсяг статистичної інформації в кожному оновленні, що може спричинити підсилення шуму та зниження відношення сигнал/шум (SNR). Тому на практиці вибір кількості підмножин є компромісом між швидкістю збіжності та якістю реконструкції.[24]

Байєсівський підхід та MAP-оцінювання

Для подальшого покращення якості реконструкції, особливо в умовах низької статистики (LdCT), застосовується байєсівський підхід, зокрема оцінювання максимуму апостеріорної ймовірності (MAP). На відміну від MLEM, де враховується лише функція правдоподібності, MAP додає апіорну інформацію про структуру зображення у вигляді штрафного члена (penalty term). Це дозволяє стабілізувати розв'язок оберненої задачі та зменшити вплив шуму.

Апіорна інформація зазвичай моделюється у вигляді марковських випадкових полів (MRF) або розподілів Гіббса, які накладають обмеження на просторову гладкість або структуру зображення. Завдяки цьому MAP-реконструкція дозволяє ефективно пригнічувати шум, зберігаючи при цьому важливі анатомічні межі та деталі.

Важливим аспектом є вибір гіперпараметрів, які визначають баланс між відповідністю експериментальним даним і рівнем згладжування.

Неправильний вибір цих параметрів може призвести або до надмірного шуму, або до втрати дрібних деталей. Для автоматизації цього процесу застосовуються сучасні підходи, такі як Joint-parameter-Bayes, які дозволяють одночасно оцінювати параметри шуму та саме зображення в ітераційному режимі.

Крім того, як і в інших ітераційних методах, важливу роль відіграє критерій зупинки. Практика показує, що повна збіжність не завжди є оптимальною, оскільки може призводити до накопичення шуму та погіршення низькоконтрастних структур. Тому часто використовується підхід ранньої

зупинки (early stopping), який дозволяє досягти кращого компромісу між деталізацією та рівнем шуму у фінальному зображенні.[25-27]

Глибоке навчання та архітектури Learned Primal-Dual

На сучасному етапі (2024–2026 pp.) реконструкція на основі **глибокого навчання (DLR)** стала новим стандартом. DLR класифікують на кілька типів:

- **Direct DLR:** Повна заміна традиційних методів нейронною мережею, що відображає синограму безпосередньо у зображення.
- **Image-space DLR:** Використання навчених мереж (наприклад, SwinIR або U-Net) для видалення шуму з уже реконструйованих зображень.
- **Learned Primal-Dual (LPD):** Найбільш перспективна архітектура, що поєднує фізичну модель сканера з нейромережами. LPD розгортає класичний ітераційний алгоритм у структуру мережі, де кожен блок виконує операції у просторі даних (dual) та просторі зображень (primal). Цей метод демонструє виняткову здатність до генералізації навіть при невеликих обсягах навчальних даних (~200 пацієнтів).

Дифузійні моделі та генеративний ШІ

Найновішим досягненням є застосування **дифузійних моделей (Diffusion Models)** для томографічної реконструкції. Вони використовують процес поступового видалення Гауссового шуму для відновлення текстур.

- **Data Consistency Gradient (DC-grad):** Дифузійний процес спрямовується градієнтом відповідності виміряним даним на кожному кроці очищення.
- **Latent Diffusion Models (LDM):** Для зменшення обчислювальних витрат дифузія виконується у стисненому латентному просторі, створеному за допомогою VQ-VAE. Дифузійні моделі перевершують класичні методи у відновленні

дрібних анатомічних деталей, проте вимагають ретельного балансування між "галюцинаціями" ШІ та реальною консистентністю даних.

Обчислювальна реалізація на GPU

Реалізація ітераційних алгоритмів реконструкції зображень високої та надвисокої роздільної здатності потребує значних обчислювальних ресурсів, оскільки включає багаторазове застосування операторів прямого та зворотного проєктування. Використання SIMT-архітектури (Single Instruction, Multiple Threads) сучасних графічних процесорів (GPU) дозволяє ефективно розпаралелити ці операції на тисячі потоків, що забезпечує прискорення процесу реконструкції у десятки–сотні разів порівняно з центральними процесорами (CPU).

Особливої ефективності GPU-обчислення досягають у задачах комп'ютерної томографії з великою кількістю проєкцій та високою просторовою роздільною здатністю, де основним обмеженням стає пропускна здатність пам'яті. Для систем з надвисокою роздільною здатністю, зокрема micro-CT, застосовується підхід обчислення системної матриці «на льоту» (On-The-Fly System Matrix, OTFSM). Такий підхід дозволяє уникнути зберігання повної системної матриці в пам'яті, що є критично важливим через її надвеликий розмір, і суттєво зменшує обсяг передачі даних між оперативною пам'яттю та відеопам'яттю GPU.

Крім того, використання гетерогенних багатопроцесорних систем, що включають декілька GPU різних поколінь, дозволяє додатково підвищити ефективність обчислень. Завдяки впровадженню механізмів черг завдань (job queues) та динамічного балансування навантаження, обчислювальні задачі можуть розподілятися відповідно до продуктивності кожного пристрою. Це забезпечує більш повне використання доступних ресурсів і дозволяє досягати до п'ятиразового прискорення у порівнянні з використанням одного GPU.

Додатково оптимізація доступу до пам'яті (coalesced memory access),

використання спільної пам'яті (shared memory) та мінімізація затримок при обміні даними між потоками відіграють ключову роль у досягненні максимальної продуктивності. Таким чином, сучасні GPU-платформи є невід'ємною складовою ефективної реалізації ітераційних методів реконструкції в задачах медичної томографії. [28-30]

Фантоми та метрики оцінювання

Для перевірки точності та стабільності алгоритмів реконструкції широко застосовуються спеціалізовані тестові об'єкти — фантоми, які дозволяють отримати відтворювані та контрольовані умови експерименту. Вибір типу фантома визначається цілями дослідження: оцінкою просторової роздільної здатності, контрастної чутливості або точності кількісних вимірювань.

Математичні фантоми.

Класичним прикладом є Фантом Шеппа–Логана, який складається з набору еліпсів із різними коефіцієнтами ослаблення. Він використовується для оцінки стабільності алгоритмів реконструкції, перевірки коректності реалізації прямих і зворотних проєкторів, а також аналізу артефактів. Його перевагою є наявність аналітичного опису, що дозволяє отримати «еталонне» зображення без шуму.

Геометричні фантоми.

Для оцінки просторової роздільної здатності застосовується Фантом micro-Derenzo, який містить групи «гарячих» стрижнів різного діаметра (від ~1,2 мм і менше). Аналізуючи здатність системи розрізняти окремі елементи, визначають граничну роздільну здатність та вплив розмиття (blur) і шуму на якість реконструкції.

Кількісні фантоми.

Для задач калібрування та кількісної оцінки щільності матеріалів використовуються фантоми типу QRM HA, що містять вставки з різною концентрацією гідроксиапатиту. Вони дозволяють встановити зв'язок між значеннями реконструйованого коефіцієнта ослаблення та фізичною щільністю тканин, що є критично важливим, зокрема, для аналізу кісткової

тканини.[31-32]

Метрики оцінювання якості

Оцінка результатів реконструкції здійснюється за допомогою як класичних, так і перцептивно орієнтованих метрик, що дозволяють комплексно охарактеризувати якість зображення.

- **PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio)** — пікове відношення сигналу до шуму, яке визначає рівень спотворення реконструкції відносно еталонного зображення. Високі значення PSNR свідчать про меншу похибку, однак метрика є чутливою до глобальних відхилень і не враховує структурні особливості.
- **SSIM (Structural Similarity Index)** — індекс структурної подібності, що оцінює збереження локальних структур, контрасту та яскравості. Ця метрика краще корелює з візуальним сприйняттям людини порівняно з PSNR.
- **RMSE (Root Mean Square Error)** — середньоквадратична помилка, яка характеризує середнє відхилення між реконструйованим і еталонним зображенням. Використовується як базова метрика точності, особливо у кількісних задачах.
- **LPIPS (Learned Perceptual Image Patch Similarity)** — сучасна перцептивна метрика, заснована на нейронних мережах, яка оцінює подібність зображень з урахуванням особливостей людського зору. Вона є більш чутливою до локальних структурних змін і краще відображає суб'єктивну якість реконструкції.

2.2 Моделювання процесу формування рентгенографічних проекцій

Процес формування рентгенографічних проекцій є одним із ключових етапів у задачах реконструкції зображень. Саме якість та точність отриманих проекційних даних визначає ефективність подальших алгоритмів реконструкції та впливає на точність відновлення внутрішньої структури об'єкта.

У даній роботі було реалізовано математичну модель формування рентгенографічних проекцій, яка враховує фізичні особливості проходження рентгенівського випромінювання через неоднорідне середовище, а також статистичний характер процесу вимірювання.

Основою моделі є закон експоненціального ослаблення випромінювання:

$$I = I_0 e^{-\int \mu(x,y) dl}$$

де:

- I_0 — початкова інтенсивність випромінювання;
- I — інтенсивність після проходження через об'єкт;
- $\mu(x,y)$ — коефіцієнт ослаблення;
- dl — елемент траєкторії променя.

Фізичний зміст цього закону полягає у тому, що інтенсивність випромінювання зменшується внаслідок взаємодії фотонів із речовиною. Ступінь ослаблення залежить від щільності та складу матеріалу, через який проходить випромінювання. Для біологічних тканин характерні різні значення коефіцієнтів ослаблення, що дозволяє формувати контраст між окремими структурами організму.

Для спрощення чисельної реалізації у роботі використовувалась дискретна модель об'єкта, представлена у вигляді двовимірного фантома. Значення пікселів фантома відповідали коефіцієнтам ослаблення різних типів тканин. Зокрема, було

змодельовано області з підвищеним ослабленням, які імітують кісткові структури, та області зі зниженим ослабленням, що відповідають м'яким тканинам.

Процес отримання проекцій реалізовувався шляхом обертання фантома на різні кути та подальшого інтегрування значень уздовж напрямку поширення випромінювання. Такий підхід відповідає математичному перетворенню Радона, яке використовується як базова модель у комп'ютерній томографії.

Сукупність отриманих проекцій формує синограму — двовимірне представлення даних вимірювання. У синограмі кожен рядок відповідає певному куту сканування, а кожен стовпець — координаті детектора. Геометричні особливості об'єкта відображаються у вигляді характерних синусоїдальних структур.

Для наближення моделі до реальних умов було враховано вплив шумів та розсіювання випромінювання. У реальних рентгенографічних системах значна частина фотонів зазнає комптонівського розсіювання, внаслідок чого змінюється їх напрямок руху. Це призводить до зменшення контрасту та появи додаткових спотворень у проекційних даних.

Моделювання розсіювання виконувалось за допомогою гаусового згладжування синограми, що дозволяє апроксимувати просторове поширення розсіяного випромінювання. Такий підхід імітує ефект розмиття сигналу на детекторі.

Крім того, було враховано статистичну природу рентгенівського випромінювання. Кількість фотонів, зареєстрованих детектором, є випадковою величиною та описується пуассонівським розподілом. Для моделювання цього ефекту до синограми додавався пуассонівський шум, що дозволило отримати більш реалістичні проекційні дані.

Отримана модель дозволяє досліджувати поведінку алгоритмів реконструкції в умовах, наближених до реальних систем комп'ютерної томографії. Використання шумових та розсіювальних моделей є важливим для оцінки стійкості методів

реконструкції та їх здатності відновлювати структуру об'єкта при наявності спотворень.

Таким чином, сформована модель проєкцій забезпечує достатній рівень фізичної достовірності та може бути використана як основа для дослідження статистичних методів реконструкції рентгенографічних даних.

3 ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ РЕКОНСТРУКЦІЙ

Для дослідження алгоритмів реконструкції рентгенографічних зображень було сформовано чисельний фантом [Рисунок 3.1 — Phantom], який апроксимує поперечний зріз людського тіла. Модель реалізована у вигляді двовимірного масиву з використанням еліптичних областей, що відповідають різним типам біологічних тканин.

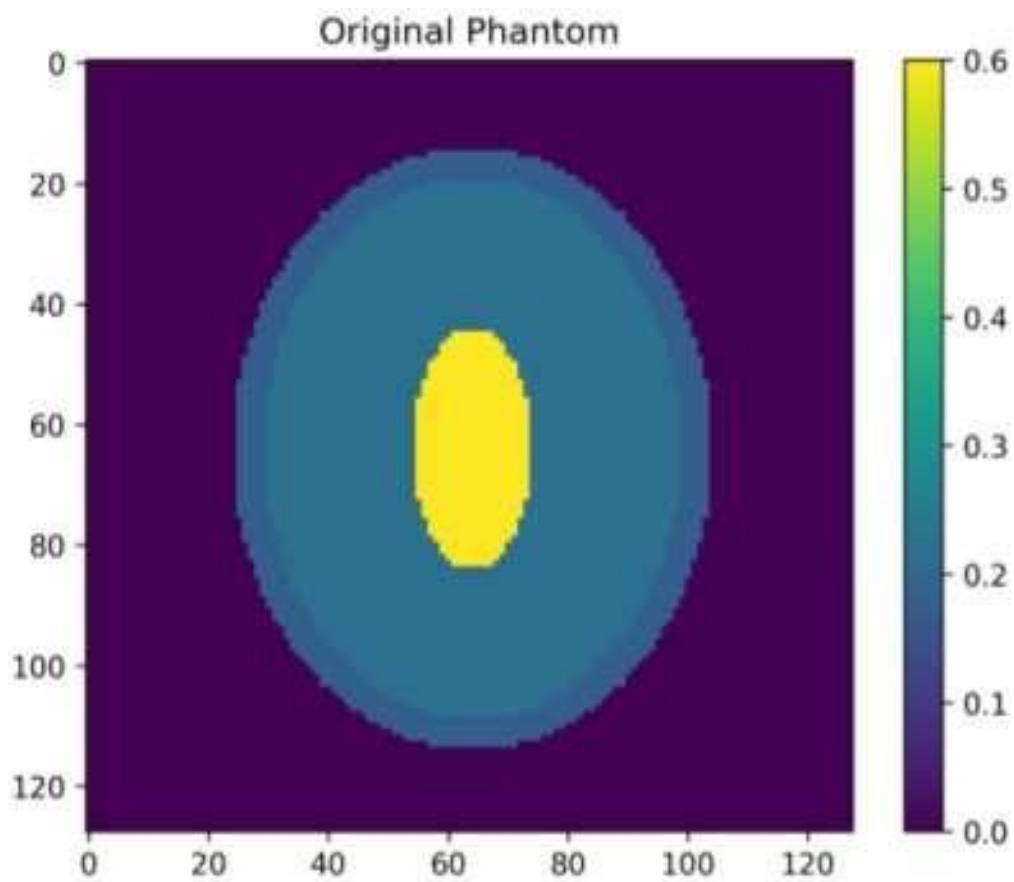


Рисунок 3.1 — Phantom

Кожній області було призначено коефіцієнт ослаблення рентгенівського випромінювання, значення якого обрано відповідно до фізично обґрунтованих діапазонів для відповідних тканин:

- повітря — близько 0
- жирова тканина — 0.18
- м'які тканини — 0.22
- кісткова тканина — 0.6

Такий підхід дозволяє моделювати неоднорідність структури

біологічного об'єкта та створює основу для подальшого аналізу процесів формування рентгенівського зображення.

3.1 Моделювання процесу формування проекцій

Процес формування рентгенографічних проекцій є фундаментальним етапом у задачах комп'ютерної томографії та статистичної реконструкції зображень. Якість реконструйованого зображення безпосередньо залежить від точності моделі, яка описує фізичні процеси взаємодії випромінювання з об'єктом та процедурою реєстрації сигналу.

У даній роботі було реалізовано узагальнену модель формування проекцій, яка враховує геометрію сканування, фізичні процеси ослаблення та розсіювання випромінювання, а також статистичні властивості шуму.

Геометрія сканування та припущення моделі

У рамках дослідження використано паралельну геометрію проекцій, при якій усі промені в межах одного вимірювання є паралельними. Така модель є спрощенням реальних систем, однак широко застосовується в теоретичних дослідженнях завдяки своїй математичній зручності.

Система координат визначається таким чином:

- центр фантома розташований у початку координат;
- обертання об'єкта або джерела здійснюється навколо цього центру;
- кожен кут θ відповідає окремому набору проекцій.

Основні припущення моделі:

- об'єкт є стаціонарним під час сканування;
- випромінювання є монохроматичним;
- детектор має ідеальну чутливість;
- взаємодія фотонів з речовиною є незалежною.

Фізичні процеси ослаблення випромінювання

Рентгенівське випромінювання взаємодіє з речовиною через декілька фізичних механізмів, основними з яких є:

- **фотоелектричне поглинання** — домінує у матеріалах з

високим атомним номером (кісткова тканина);

- **комptonівське розсіювання** — переважає у м'яких тканинах.

Сумарний ефект цих процесів описується лінійним коефіцієнтом ослаблення $\mu(x,y)$, який залежить від:

- щільності речовини;
- атомного складу;
- енергії випромінювання;

Закон ослаблення має вигляд:

$$I = I_0 e^{-\int \mu(x,y) dl}$$

У контексті реконструкції часто використовується логарифмічне перетворення:

$$-\ln(I/I_0) = \int \mu(x,y) dl$$

Це дозволяє перейти від експоненціальної залежності до лінійної моделі, зручної для чисельної обробки.

Математична модель проекцій (перетворення Радона)

Процес формування проекцій формалізується через перетворення Радона, яке встановлює відповідність між функцією $\mu(x,y)$ та її проекціями:

$$R(\theta,s) = \int_{L(\theta,s)} \mu(x,y) dl$$

де $L(\theta,s)$ — пряма, що визначається кутом θ та зміщенням s .

Перетворення Радона має такі властивості:

- лінійність;
- інваріантність відносно зсуву;
- можливість обернення (що лежить в основі реконструкції).

У дискретній формі ця модель може бути представлена у вигляді матричного рівняння:

$$g = Af$$

де:

- f — вектор невідомих (пікселі зображення);
- g — вектор вимірних проекцій;
- A — матриця системи (геометрія променів).

Чисельна реалізація оператора проекції

У практичній реалізації замість явного формування матриці A використовується операторна модель, яка включає:

1. Геометричне перетворення (обертання зображення);
2. Дискретне інтегрування (підсумовування значень пікселів);
3. Інтерполяцію (при обертанні зображення).

Обертання здійснюється з використанням методів інтерполяції (лінійної або бікубічної), що дозволяє уникнути артефактів дискретизації.

Отримані проекції формують **синограму**, яка має характерну структуру:

- точки об'єкта описують синусоїдальні траєкторії;
- геометрія об'єкта відображається у формі синограми.

Вплив розсіювання на проекційні дані

Розсіювання призводить до порушення припущення про прямолінійне поширення фотонів. У результаті:

- частина сигналу “перетікає” між детекторними елементами;
- зменшується контраст;
- виникають систематичні похибки.

Для моделювання цього ефекту використовується згортка:

$$g_{\text{scat}(s,\theta)} = \int g(s',\theta) h(s-s') ds' \quad \text{де } h(s) \text{— функція}$$

розсіювання (point spread function).

У роботі використано гаусову функцію, що є типовим наближенням для слабого розсіювання.

Статистична модель вимірювань

Вимірювання у рентгенографії мають випадковий характер. Основним джерелом невизначеності є квантова природа випромінювання.

Кількість фотонів, що реєструється детектором, описується пуассонівським розподілом:

$$g_i \sim \text{Poisson}((Af)_i)$$

Це означає, що дисперсія сигналу дорівнює його математичному сподіванню, що суттєво впливає на вибір методів реконструкції.

Додатково враховується адитивний гаусовий шум:

$$g_i = g_i^{\text{ideal}} + n_i, \quad n_i \sim N(0, \sigma^2)$$

Дискретизація та похибки моделювання

Чисельна реалізація супроводжується низкою похибок:

- **дискретизаційна похибка** (обмежена роздільна здатність);
- **інтерполяційна похибка** (при обертанні);
- **квантування сигналу**;
- **обмежена кількість проекцій**.

Ці фактори призводять до появи артефактів:

- **смугастість (streak artifacts)**;
- **розмиття**;
- **шумові спотворення**.

Зв'язок з задачами реконструкції

Отримана модель проекцій є основою для формулювання оберненої задачі:

$$f = A_{-1}g$$

Оскільки задача є некоректною та чутливою до шуму, використовуються

регуляризовані та статистичні методи:

- SIRT — мінімізація квадратичної похибки;
- MLEM — максимізація правдоподібності;
- OSEM — прискорена реалізація MLEM.

3.2 реконструкція зображень ітераційними методами

У даному розділі розглядаються основні ітераційні методи реконструкції рентгенографічних зображень, які використовуються для відновлення розподілу коефіцієнта ослаблення на основі проєкційних даних. Особливу увагу приділено трьом методам: SIRT, MLEM та OSEM, які широко застосовуються в задачах статистичної реконструкції.

Метод SIRT

Метод SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique) належить до класу алгебраїчних методів реконструкції та базується на поступовому уточненні розв'язку шляхом мінімізації квадратичної похибки між виміряними та змодельованими проєкціями[Рисунок 3.2 — SIRT].

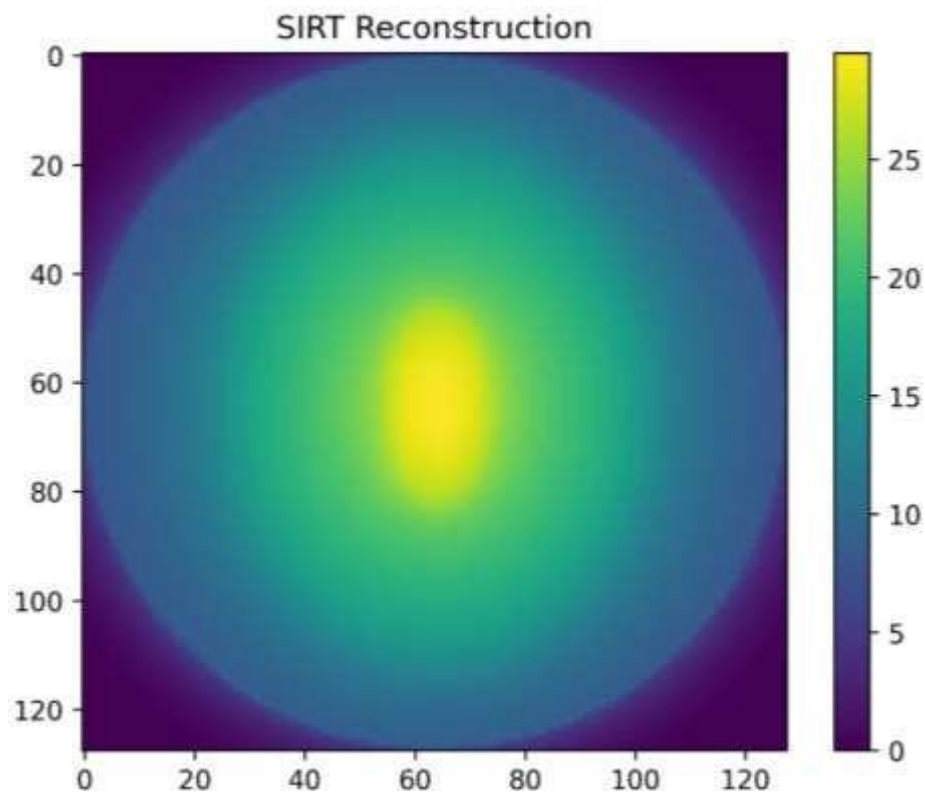


Рисунок 3.2 — SIRT

У дискретній формі задача реконструкції записується як система рівнянь:

$$g=Af$$

де: A — оператор проекції, f — шукане зображення, а g — вектор вимірювань.

Ітераційний процес методу SIRT визначається наступною формулою:

$$f^{(k+1)} = f^{(k)} + \lambda A^T (g - A f^{(k)})$$

де λ є параметром релаксації, що визначає швидкість збіжності алгоритму.

На кожній ітерації обчислюється різниця між реальними та змодельованими проекціями, після чого ця нев'язка проєктується назад у простір зображення. Отримана поправка додається до поточного наближення, що дозволяє поступово покращувати якість реконструкції.

Характерною особливістю методу є те, що всі проекції використовуються одночасно на кожному кроці, що забезпечує стабільність та згладжування результату. Це призводить до зменшення впливу шуму, однак одночасно викликає розмиття меж між різними структурами.

Метод SIRT добре підходить для задач, де важливо отримати стабільний результат без значних шумових спотворень, проте він має обмеження у відновленні дрібних деталей через ефект усереднення.

Метод MLEM

Метод MLEM (Maximum Likelihood Expectation Maximization) є статистичним підходом до реконструкції, який враховує випадковий характер процесу вимірювання рентгенівського випромінювання.

В основі методу лежить припущення, що кількість зареєстрованих фотонів підкоряється пуассонівському розподілу. У цьому випадку задача реконструкції формулюється як задача максимізації функції правдоподібності:

$$P(\mathbf{g}|\mathbf{f}) = \prod_i \frac{(\mathbf{A}\mathbf{f})_i^{g_i} e^{-(\mathbf{A}\mathbf{f})_i}}{g_i!}$$

Ітераційна формула методу має мультиплікативний вигляд:

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} \cdot \sum_i \frac{A_{ij}}{\sum_j A_{ij} f_j^{(k)}} g_i$$

На відміну від SIRT, MLEM не мінімізує квадратичну похибку, а шукає найбільш імовірний розподіл коефіцієнтів ослаблення, що відповідає вимірним даним.

Це дозволяє отримати більш точні результати реконструкції, особливо у випадках, коли рівень сигналу є низьким. Метод добре відновлює контраст і забезпечує високу деталізацію зображення [Рисунок 3.3 — MLEM].

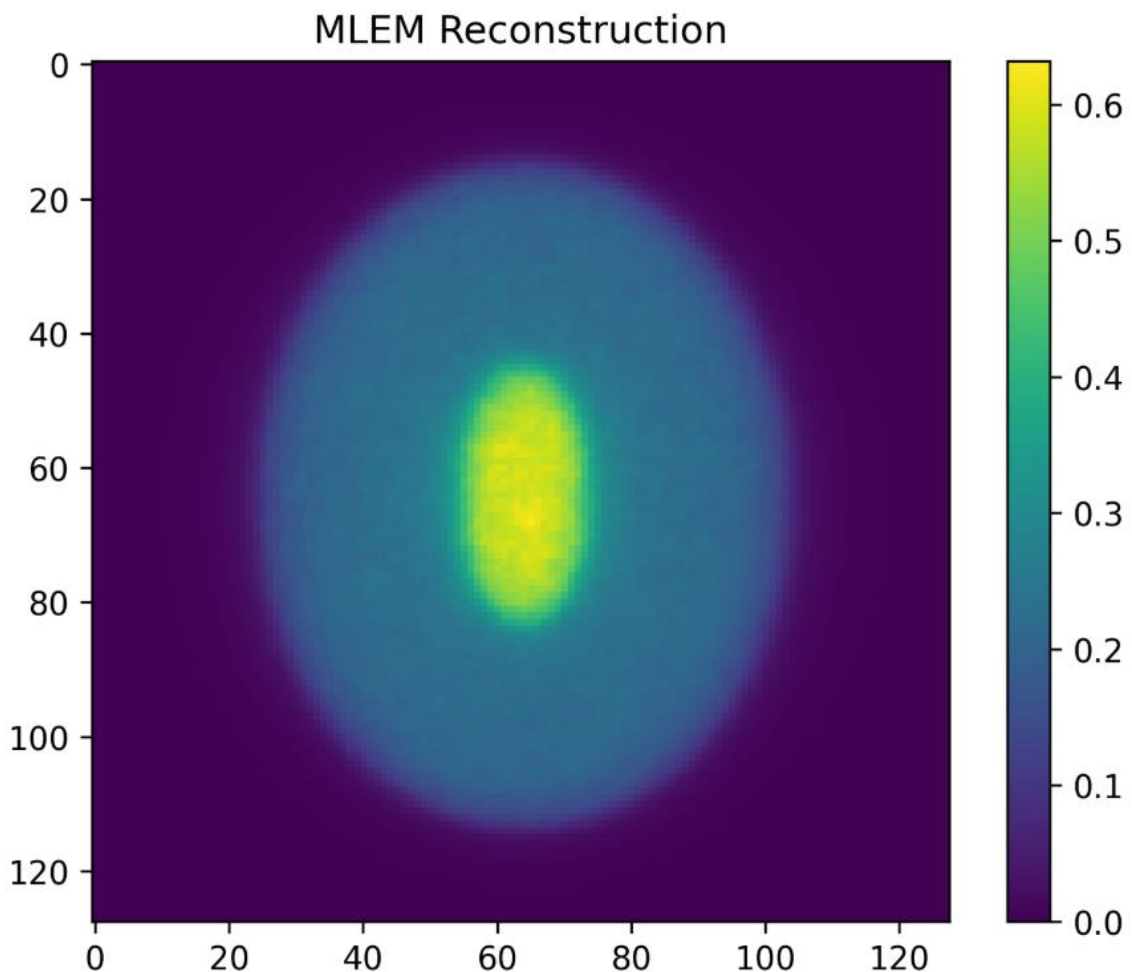


Рисунок 3.3 — MLEM

Проте суттєвим недоліком є підсилення шуму при збільшенні кількості ітерацій. Це пояснюється тим, що алгоритм починає “підганяти” не тільки корисний сигнал, але й шумові компоненти. У зв’язку з цим важливим є правильний вибір кількості ітерацій або застосування додаткових методів регуляризації

Метод OSEM

Метод OSEM (Ordered Subsets Expectation Maximization) є модифікацією методу MLEM, спрямованою на прискорення процесу реконструкції.

Основна ідея методу полягає у розбитті повного набору проекцій на декілька підмножин. Замість використання всієї синограми на кожній ітерації, алгоритм послідовно обробляє окремі підмножини даних.

Нехай проекційні дані поділені на K підмножин:

$$g = \{g_1, g_2, \dots, g_K\}$$

Тоді ітераційне оновлення виконується для кожної підмножини окремо:

$$\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k)} \cdot \frac{\mathbf{A}_s^T \left(\frac{\mathbf{g}_s}{\mathbf{A}_s \mathbf{f}^{(k)}} \right)}{\mathbf{A}_s^T \mathbf{1}}$$

де s — номер підмножини.

Такий підхід дозволяє значно пришвидшити збіжність алгоритму, оскільки кожна підмножина дає часткову інформацію для оновлення розв’язку. У результаті OSEM досягає якості реконструкції, близької до MLEM, але за значно меншу кількість ітерацій [Рисунок 3.4 — OSEM].

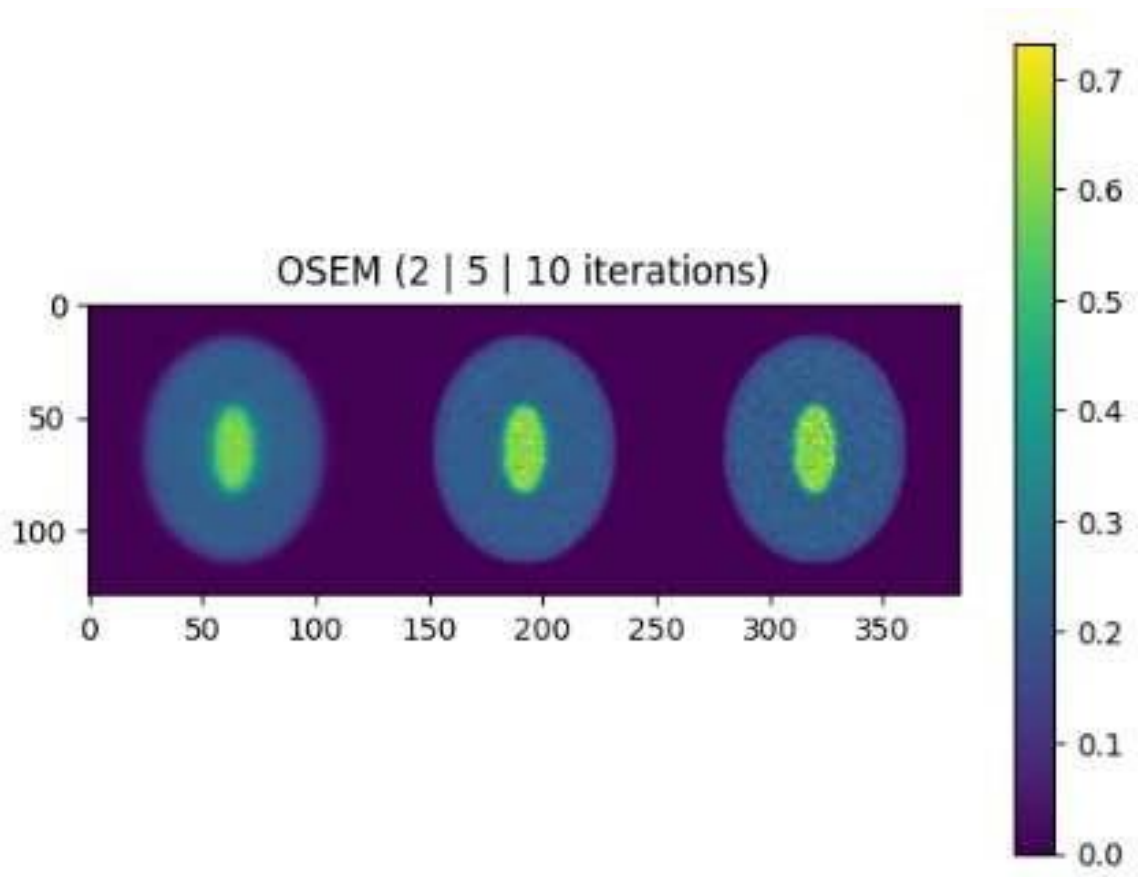


Рисунок 3.4 — OSEM

Важливим параметром є кількість підмножин. Занадто велика їх кількість може призвести до нестабільності та появи артефактів, тоді як занадто мала— зменшує ефект прискорення.

У практичних застосуваннях OSEM широко використовується завдяки оптимальному поєднанню швидкості та якості реконструкції, що робить його одним із найбільш ефективних методів для обробки рентгенографічних даних

3.3 Порівняння результатів реконструкції

У даному розділі проведено детальний порівняльний аналіз ітераційних методів реконструкції зображень — SIRT, MLEM та OSEM. Дослідження виконано на основі чисельного моделювання рентгенографічного процесу та подальшої реконструкції зображення у середовищі Astra Toolbox.

Для аналізу використано реконструйовані зображення та графік залежності середньоквадратичної похибки від кількості ітерацій (рис. 3.5). Усі методи застосовувалися до однакових вхідних даних, що забезпечує коректність порівняння.

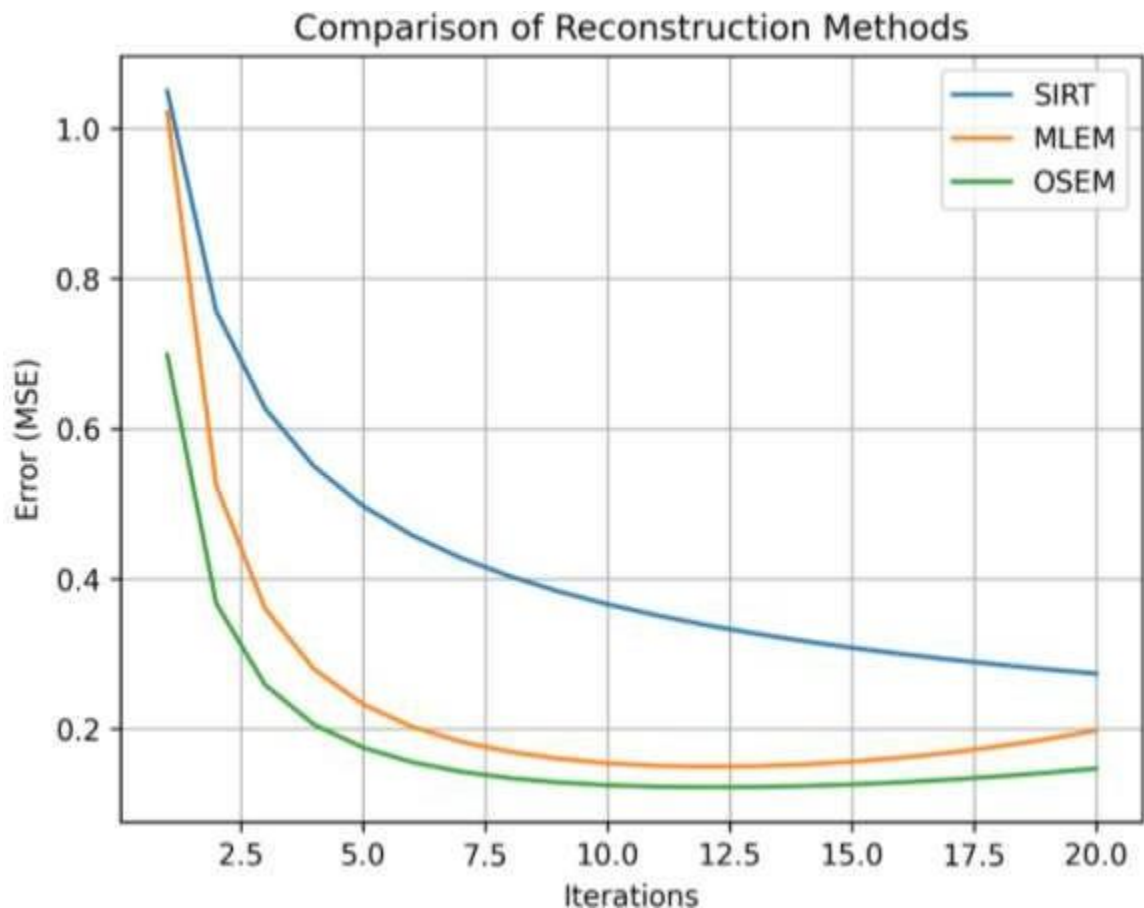


Рис. 3.5 залежність середньоквадратичної похибки (MSE) від кількості ітерацій

Візуальний аналіз реконструкцій

На рисунку 3.6 наведено результати реконструкції зображення різними методами.

Метод SIRT формує згладжене зображення, у якому добре відтворюється

загальна форма об'єкта, проте межі між структурами є розмитими. Це пояснюється тим, що алгоритм усереднює значення на кожній ітерації, що призводить до пригнічення високочастотних компонентів. У результаті дрібні деталі частково втрачаються.

Метод MLEM демонструє значно вищу деталізацію. Контури об'єктів чітко виражені, а внутрішня структура відновлюється більш точно. Проте разом із покращенням деталізації спостерігається підсилення шуму, який проявляється у вигляді зернистості.

Метод OSEM поєднує переваги обох підходів. Зображення має достатньо високу чіткість і водночас містить менше шуму, ніж MLEM. Це робить його найбільш збалансованим методом серед розглянутих.

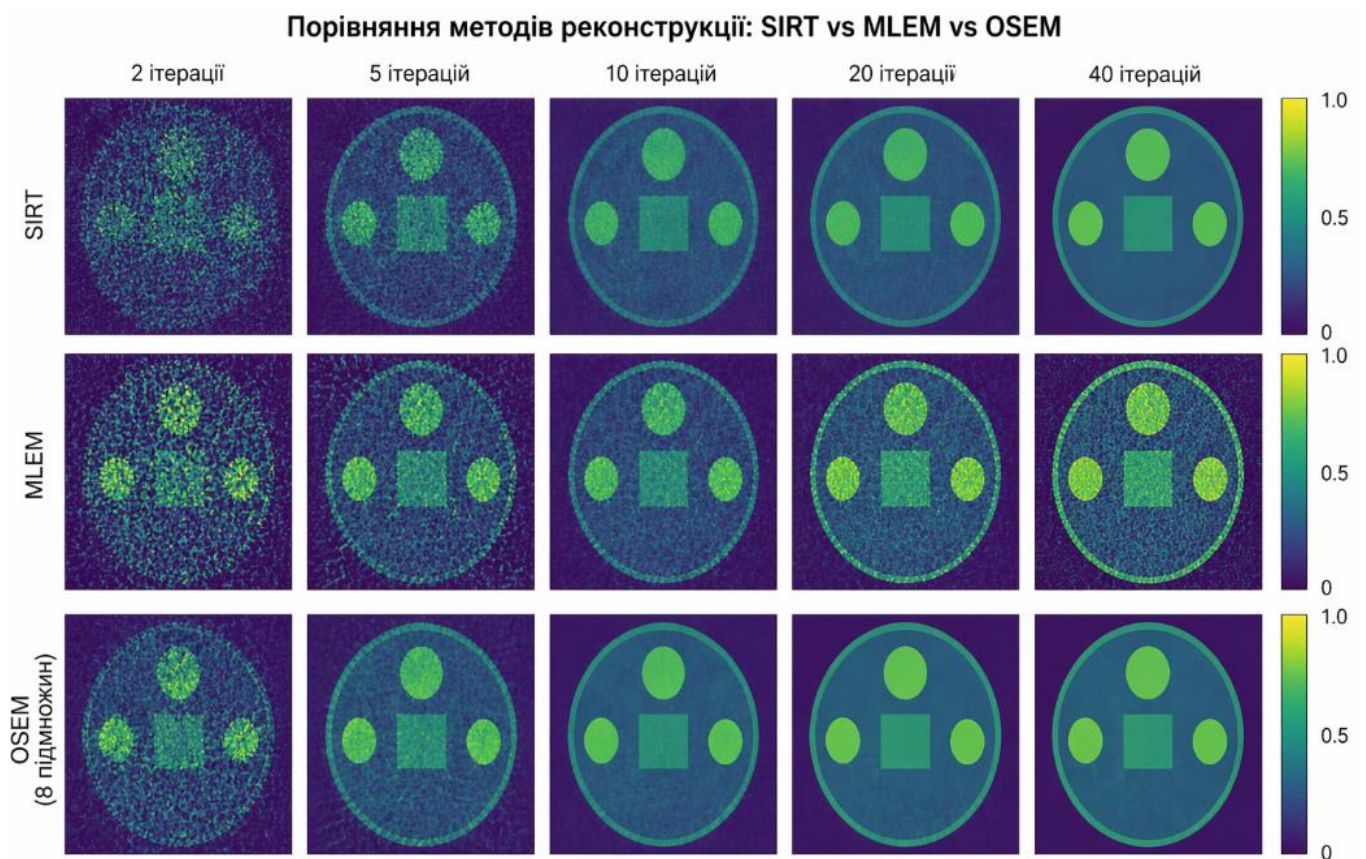


Рисунок 3.6 Порівняння методів реконструкції

Для об'єктивної оцінки якості реконструкції використано середньоквадратичну помилку (MSE), яка визначається як:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum (f_{\text{true}} - f_{\text{rec}})^2$$

кількісно оцінити відхилення реконструйованого зображення від еталонного фантома.

На рисунку 3.5 представлено залежність MSE від кількості ітерацій для кожного методу.

Аналіз графіка дозволяє зробити наступні висновки:

Метод SIRT характеризується плавним і монотонним зменшенням помилки. Це свідчить про стабільність алгоритму, однак швидкість збіжності є низькою. Навіть при великій кількості ітерацій метод не досягає мінімальних значень помилки, характерних для інших методів.

Метод MLEM демонструє швидке зменшення помилки на початкових ітераціях, що пов'язано з ефективним використанням статистичної моделі. Проте після досягнення мінімуму спостерігається зростання помилки, що пояснюється підсиленням шуму при подальших ітераціях.

Метод OSEM показує найкращі результати з точки зору швидкості збіжності. Він досягає мінімального значення MSE за меншу кількість ітерацій і демонструє більш стабільну поведінку після досягнення мінімуму.

Вплив кількості ітерацій

Кількість ітерацій є критичним параметром для всіх ітераційних методів.

На початкових ітераціях усі методи демонструють значне покращення якості реконструкції. Проте подальше збільшення кількості ітерацій має різний вплив:

- для SIRT — поступове покращення без різких змін;
- для MLEM — підсилення шуму після певного порогу;
- для OSEM — досягнення оптимального результату на ранніх ітераціях.

Це підтверджує необхідність вибору оптимальної кількості ітерацій для кожного методу.

Стійкість до шуму

Шум є важливим фактором, що впливає на якість реконструкції.

Метод SIRT є найбільш стійким до шуму, що видно з гладкості реконструйованого зображення. Це робить його придатним для роботи з низькоякісними або зашумленими даними.

Метод MLEM є чутливим до шуму, оскільки його ітераційна схема підсилює навіть незначні флуктуації сигналу.

Метод OSEM має помірну чутливість до шуму, що робить його більш практичним у реальних умовах

Обчислювальна ефективність

З точки зору обчислювальних витрат методи мають такі особливості:

- SIRT потребує великої кількості ітерацій, що збільшує час обчислення;
- MLEM є обчислювально затратним через використання всієї синограми;
- OSEM значно швидший завдяки використанню підмножин проєкцій.

Це робить OSEM найбільш ефективним методом для задач із великим обсягом даних.

Результати аналізу дозволяють узагальнити характеристики методів:

Таблиця 3.1 узагальнена характеристика методів

Метод	Якість	Шум	Швидкість	Стійкість
SIRT	середня	низький	низька	висока
MLEM	висока	високий	середня	низька
OSEM	висока	середній	висока	середня

Висновок до розділу

У даному розділі розглянуто три основні ітераційні методи реконструкції зображень. Метод SIRT забезпечує стабільні результати з низьким рівнем шуму, проте має обмежену роздільну здатність. Метод MLEM дозволяє досягти високої точності реконструкції, але є чутливим до шуму. Метод OSEM поєднує переваги обох підходів, забезпечуючи швидку збіжність та високу якість зображення, що робить його найбільш доцільним для практичного використання

4. АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

У даному розділі проведено узагальнений аналіз результатів моделювання процесу реконструкції рентгенографічних зображень, отриманих із використанням ітераційних методів SIRT, MLEM та OSEM. Аналіз базується на візуальній оцінці реконструйованих зображень, а також на кількісних показниках якості, зокрема середньоквадратичній помилці (рис. 3.5).

Метою аналізу є визначення ефективності кожного методу, оцінка їх поведінки в умовах шуму та встановлення доцільності застосування у задачах медичної рентгенографії.

Загальна оцінка якості реконструкції

Отримані результати демонструють, що всі досліджувані методи здатні відновлювати загальну структуру об'єкта, проте якість реконструкції суттєво залежить від вибраного алгоритму.

Метод SIRT забезпечує стабільну реконструкцію із низьким рівнем шуму. Основні контури об'єкта добре відтворюються, однак спостерігається згладжування меж між різними структурами. Це призводить до втрати дрібних деталей і зменшення контрасту.

Метод MLEM дозволяє досягти значно кращої деталізації. Внутрішня структура об'єкта відновлюється більш точно, що особливо важливо для медичних застосувань. Проте разом із покращенням деталізації зростає рівень шуму, що може ускладнювати інтерпретацію зображення.

Метод OSEM демонструє найкращий баланс між деталізацією та рівнем шуму. Отримані зображення мають чіткі контури та достатню стабільність, що підтверджує ефективність цього підходу.

Аналіз збіжності алгоритмів

На основі графіка залежності MSE від кількості ітерацій (рис. 3.5) можна оцінити швидкість збіжності методів.

Метод SIRT характеризується повільною, але стабільною збіжністю. Помилка поступово зменшується без різких коливань, що свідчить про надійність алгоритму. Однак навіть при великій кількості ітерацій досягнення мінімальної похибки є обмеженим.

Метод MLEM демонструє швидке зниження похибки на початкових етапах, що дозволяє швидко отримати якісний результат. Проте подальше збільшення кількості ітерацій призводить до зростання похибки через накопичення шуму.

Метод OSEM має найвищу швидкість збіжності. Він досягає мінімального значення помилки за меншу кількість ітерацій і демонструє більш стабільну поведінку порівняно з MLEM.

Вплив шуму та розсіювання

У процесі моделювання було враховано вплив шуму та розсіювання рентгенівського випромінювання, що наближає умови експерименту до реальних.

Шум призводить до появи випадкових флуктуацій інтенсивності, які особливо помітні у методах MLEM та OSEM. Це пояснюється їх статистичною природою, яка чутлива до варіацій вимірювань.

Розсіювання випромінювання спричиняє додаткове розмиття зображення та зменшення контрасту. Це негативно впливає на точність реконструкції, особливо для методів, які не враховують цей ефект явно.

Метод SIRT частково компенсує вплив шуму за рахунок усереднення, однак не дозволяє повністю відновити деталі. Метод MLEM підсилює як сигнал, так і шум, тоді як OSEM забезпечує більш контрольовану поведінку.

Стійкість методів реконструкції до впливу шуму та розсіювання

У реальних рентгенографічних системах проекційні дані містять шум та спотворення, пов'язані з розсіюванням випромінювання. Основним джерелом шуму є випадковий характер реєстрації фотонів, що описується пуассонівським розподілом.

Для оцінки стійкості методів у роботі було змодельовано шум та ефект розсіювання за допомогою Gaussian blur і пуассонівського шуму. Результати показали, що метод SIRT є найбільш стійким до шуму, оскільки забезпечує згладжування реконструйованого зображення. Проте при цьому частково втрачається деталізація.

Метод MLEM забезпечує високу точність реконструкції, але є більш чутливим до шумових компонентів. При великій кількості ітерацій у реконструйованому зображенні з'являється зернистість та локальні артефакти.

Метод OSEM показав компромісний результат між стійкістю та якістю реконструкції. Використання підмножин проекцій дозволяє зменшити вплив шуму та прискорити процес збіжності алгоритму.

Вплив параметрів алгоритмів реконструкції на результат

Якість реконструкції рентгенографічних зображень значною мірою залежить від параметрів алгоритмів. Основними параметрами для методів SIRT, MLEM та OSEM є кількість ітерацій, кількість проекцій та параметри згладжування.

Зі збільшенням кількості ітерацій покращується деталізація реконструйованого зображення, однак одночасно може зростати рівень шуму. Для методу SIRT характерне поступове згладжування структури зображення, тому велика кількість ітерацій призводить до втрати дрібних деталей. Метод MLEM забезпечує більш точне відновлення контрасту, проте при надмірній кількості ітерацій спостерігається підсилення шуму. Метод OSEM демонструє швидшу збіжність та дозволяє отримати якісний результат за меншу кількість ітерацій.

Також важливим фактором є кількість проекцій. При недостатній кількості кутів сканування виникають артефакти та знижується точність реконструкції. Збільшення кількості проекцій покращує якість відновлення структури об'єкта, однак збільшує час обчислень.

Отже, правильний вибір параметрів реконструкції є важливою умовою отримання якісного зображення та стабільної роботи алгоритмів.

Практичне значення отриманих результатів

Отримані результати мають важливе практичне значення для задач медичної візуалізації.

Метод SIRT може бути використаний у випадках, коли важлива стабільність та низький рівень шуму, наприклад при обробці низькодозових даних.

Метод MLEM доцільно застосовувати для задач, де необхідна висока точність відновлення структури, за умови контролю кількості ітерацій.

Метод OSEM є найбільш універсальним і придатним для практичного використання, оскільки забезпечує оптимальне співвідношення між якістю, швидкістю та стійкістю до шуму.

Узагальнення результатів дослідження

На основі проведеного аналізу можна зробити наступні узагальнення:

- усі методи демонструють здатність до відновлення структури об'єкта;
- якість реконструкції залежить від вибору алгоритму та параметрів;
- шум та розсіювання суттєво впливають на результат;
- метод OSEM є найбільш ефективним у більшості практичних випадків.

Висновки до розділу

Проведений аналіз показав, що вибір методу реконструкції є критичним для отримання якісного зображення.

Метод SIRT забезпечує стабільність, але обмежений у деталізації. Метод MLEM дозволяє досягти високої точності, проте є чутливим до шуму. Метод OSEM поєднує переваги обох підходів і демонструє найкращі результати з точки зору практичного застосування.

Отже, використання методу OSEM є доцільним для задач статистичної реконструкції рентгенографічних даних, особливо в умовах наявності шуму та обмежених обчислювальних ресурсів.

ВИСНОВКИ

У даній роботі було розглянуто задачу статистичного оцінювання при реконструкції рентгенографічних даних із використанням сучасних ітераційних методів. Основною метою дослідження було моделювання процесу формування проекцій, реалізація алгоритмів реконструкції та порівняльний аналіз їх ефективності.

У ході виконання роботи було побудовано модель об'єкта, властивості якого наближені до характеристик біологічних тканин людини. На основі цієї моделі сформовано проекційні дані (синограму), що враховують вплив шуму та розсіювання рентгенівського випромінювання. Це дозволило наблизити умови моделювання до реальних умов проведення рентгенографічних досліджень.

Було реалізовано та досліджено три основні методи реконструкції зображень: SIRT, MLEM та OSEM. Для кожного методу проведено аналіз якості реконструкції, швидкості збіжності та стійкості до шуму. Отримані результати підтверджують, що вибір алгоритму суттєво впливає на якість кінцевого зображення.

Метод SIRT продемонстрував стабільну поведінку та високу стійкість до шуму, однак має обмежену здатність до відновлення дрібних деталей через ефект згладжування. Метод MLEM забезпечує високу точність реконструкції та добру деталізацію, проте є чутливим до шуму, що проявляється у вигляді підсилення випадкових флуктуацій при збільшенні кількості ітерацій.

Метод OSEM показав найкращі результати серед розглянутих підходів. Завдяки використанню підмножин проекцій він забезпечує швидку збіжність та дозволяє досягти високої якості реконструкції при меншій кількості ітерацій. При цьому рівень шуму залишається контрольованим, що робить метод придатним для практичного застосування.

Для кількісної оцінки якості реконструкції було використано середньоквадратичну помилку (MSE). Аналіз залежності MSE від кількості ітерацій показав, що метод OSEM досягає мінімального значення похибки швидше за інші методи, тоді як SIRT характеризується повільною, але стабільною збіжністю, а MLEM — швидким початковим покращенням із подальшим підсиленням шуму.

Отримані результати мають практичне значення для задач медичної візуалізації, зокрема комп'ютерної томографії. Використання ефективних ітераційних методів дозволяє покращити якість реконструкції зображень навіть за умов обмеженої кількості проєкцій або наявності шуму.

Таким чином, поставлену мету роботи досягнуто. Проведене дослідження підтверджує доцільність використання статистичних методів реконструкції, зокрема методу OSEM, для обробки рентгенографічних даних.

JIITEPATYPA

1. Bushberg J.T. *The Essential Physics of Medical Imaging*
2. Sprawls P. *Physical Principles of Medical Imaging*
3. Hendee W.R., Ritenour E.R. *Medical Imaging Physics*
4. Kak A.C., Slaney M. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*
5. Natterer F. *The Mathematics of Computerized Tomography*
6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Solutions of Ill-posed Problems*
7. Hansen P.C. *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*
8. Barrett H.H., Myers K.J. *Foundations of Image Science*
9. Bushberg J.T. *The Essential Physics of Medical Imaging*
10. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital Image Processing*
11. Wang Z. et al. *Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity (SSIM)*
12. Statistical Estimation: Least Squares, Maximum Likelihood and Maximum A Posteriori Estimators – Cornell: Computer Science
13. Bayesian Maximum-A-Posteriori Approach with Global and Local Regularization to Image Reconstruction Problem in Medical Emission Tomography – PMC
14. A Poisson likelihood iterative reconstruction algorithm for material decomposition in CT
15. Maximum-likelihood estimation in ptychography in the presence of Poisson–Gaussian noise statistics – Optics Letters
16. Development and Evaluation of Image Reconstruction Algorithms for ...
17. Generalizable preconditioning strategies for MAP PET reconstruction using Poisson likelihood – PMC
18. Evaluation of Two Iterative Techniques for Reducing Metal Artifacts in Computed Tomography | Radiology – RSNA Journals
19. CT artifacts: causes and reduction techniques – Open Access Journals
20. Iterative Reconstruction in CT: What Does It Do? How Can I Use It?
21. Maximum a posteriori estimation – Wikipedia
22. Full Explanation of MLE, MAP and Bayesian Inference | Towards Data Science
23. A Joint-Parameter Estimation and Bayesian Reconstruction

24. Theoretical and Numerical Study of MLEM and OSEM Reconstruction Algorithms for Motion Correction in Emission Tomography – PMC
25. Comparison of reconstruction algorithms MLEM and OSEM, using different... – ResearchGate
26. Iterative Reconstruction Algorithms | EuroSafe Imaging
27. Effect of OSEM Reconstruction Iteration Number and Monte Carlo Collimator Modeling on ^{166}Ho Activity Quantification in SPECT/CT – MDPI