МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Мунчак Євгенія Юріївна

УДК 519.21

Функціональні граничні теореми та їх застосування до фінансових ринків з дискретним та неперервним часом

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Мішура Юлія Степанівна,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, завідувач кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
ЄлейкоЯрослав Іванович,
Львівський національний університет імені Івана Франка, завідувач кафедри теоретичної та прикладної статистики;

кандидат фізико-математичних наук
Голіченко Ірина Ігорівна,
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», старший викладач кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей

Захист відбудеться "20" листопада 2017 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий "19" жовтня 2017 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Моклячук М.П.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Стохастична фінансова математика має чималу історію свого розвитку. Витоки її досліджень беруть свій початок від появи дисертації Л. Башельє, в якій вперше була виведена формула для ціни опціону. Вона дала поштовх до нового потоку досліджень в даній галузі. Саме тому найбільшої популярності та розвитку теорія оцінювання опціонів набуває у другій половині двадцятого століття. Зокрема, П. Самуельсону вдалося покращити формулу, виведену Л. Башельє, що дало можливість сформулювати проблему знаходження ціни опціону. Над цією проблемою працювала і працює величезна кількість видатних науковців. Серед них найвідомішими є Р. Мертон, Ф. Блек та М. Шоулс. Вони вважаються творцями математичної формули для обчислення вартості опціонів та інших похідних інструментів, яка справила величезний вплив на розвиток теорії і практики фінансів. Ця формула сьогодні широко відома як формула Блека-Шоулса. Дослідження цих вчених базувалися на попередніх роботах Д. Трейнора, П. Самуельсона, Д. Бонеса та Е. Торпа і проводились в період швидкого зростання опціонної торгівлі. Саме їм вдалося строго формалізувати проблему оцінювання опціонів і вивести класичні формули для цін. Наступні покоління вчених працювали над узагальненням та покращенням відомої формули Блека-Шоулса.

Зауважимо, що реальний час дискретний, але аналітичні дослідження, легше проводити в неперервному часі. Тому велику кількість робіт у фінансовій математиці присвячено збіжності цін ризикових активів та цін відповідних опціонів, що моделюються в дискретному часі, до моделей з неперервним часом. При цьому виникає питання щодо швидкості збіжності цін опціонів. Існує велика різноманітність вибору як граничної моделі, так і дограничної моделі. Частина робіт з оцінки швидкості збіжності стосуються дограничної біноміальної та триноміальної моделей та моделі Блека-Шоулса. Це зумовлено наявністю досить тонких результатів щодо швидкості збіжності біноміального розподілу до гауссівського, але при відході від біноміальної моделі треба шукати або одержувати результати щодо швидкості збіжності функцій розподілу сум незалежних однаково розподілених випадкових величини до гауссівського розподілу.

Робота присвячена застосуванню функціональних граничних теорем до фінансових ринків з дискретним на неперервним часом. Зокрема, розвивається питання оцінки та швидкості збіжності цін опціонів у різних моделях.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках державної бюджетної науково-дослід- ної теми №11БФ038-02 "Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей" (номер державної реєстрації 0111U006561) і №16БФ038-02 "Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем" (номер державної реєстрації 0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт "Сучасні математичні проблеми природознавстава, економіки та фінансів".

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є застосування функціональних граничних теорем до фінансових ринків з дискретним та неперервним часом, дослідження цін опціонів та їх швидкості збіжності. Для досягнення мети дисертації були поставлені наступні завдання:

- дослідити швидкість збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону розподілу;
- застосувати метод псевдомоментів до дослідження швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу;
- дослідити швидкість збіжності цін опціонів при дискретизації геометричного процесу Орнштейна-Уленбека бернуллієвськими стрибками цін акцій;
- дослідити повний та "зрізаний" процеси Кокса-Інгерсолла-Росса та їхні дискретні апроксимаційні схеми;
- побудувати мультиплікативну та адитивну дискретні апроксимаційні схеми для цін акцій в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса; дослідити слабку збіжність мір в цій моделі;
- застосувати числення Маллявена до точного і наближеного оцінювання опціонів на акції зі стохастичною волатильністю.

Об'єктом дослідження є математичні моделі фінансового ринку.

Предметом дослідження є оцінювання опціонів, збіжність та швидкість збіжності цін опціонів в таких моделях за умов дискретизації.

Методи дослідження. У роботі використано методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, мартингальні методи, методи теорії стохастичних диференціальних рівнянь та методи фінансової математики.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, отримані в дисертації, такі:

• знайдено швидкість збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону розподілу в термінах “зрізаних” псевдомоментів. Для цього реалізовано ідею Ю.П. Студнєва отримання оцінки швидкості збіжності порядку вище ніж $n^{-\frac{1}{2}}$;

• досліджено умови безарбітражності ринку в схемі серій та умови безарбітражності ринку з дискретним часом, утвореного незалежними випадковими величинами;

• доведено, що при певному виборі мартингальної міри випадкові величини, незалежні в сукупності відносно об’єктивної міри, залишаються незалежними в сукупності відносно цієї мартингальної міри;

• доведено функціональну граничну теорему для ринку з дискретним часом у схемі Блека-Шоулса;

• доведено теорему про оцінку швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу, використовуючи метод псевдомоментів;

• знайдено приклади функцій розподілу, до яких можна застосувати метод псевдомоментів;

• сформульовано умови, за виконання яких, швидкість збіжності об’єктивних і справедливих цін опціонів обмежена зверху величиною $\frac{C}{\sqrt{n}}$ при дискретизації геометричного процесу Орнштейна-Уленбека бернуллієвськими стрибками цін акцій. Проаналізовано перехід від об’єктивної до мартингальної міри і зміни, що відбуваються з розподілом цін на ринку при такому переході у вказаній моделі;

• доведено функціональні граничні теореми для адитивної та мультиплікативної схем в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса;

• проведено точне і наближене оцінювання опцінів в моделі Хестона із застосуванням числення Маллявена.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має як теоретичне, так і практичне значення. На практиці одержані результати можуть бути застосовані на реальних фінансових ринках при моделюванні первинних цінних паперів і наближеному обчисленні цін похідних цінних паперів на фондовому ринку.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації отримані автором самостійно. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 5 робіт. У трьох роботах, підготовлених разом з науковим керівником професором Ю. С. Мішурою, та одній роботі підготовленій з професором Ю. С. Мішурою та к.ф.-м.н. П. В. Слюсарчуком, професорові Ю. С. Мішурі належить постановка задачі та загальне керівництво роботою, а к.ф.-м.н. П. В. Слюсарчукові – ідея для досягнення отриманої оцінки швидкості збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону розподілу. Ще одна робота підготовлена разом з професором Ю. С. Мішурою та С. В. Кучуком-Яценком, в якій здобувачу належать отримані результати, що відносяться моделі Хестона, і лише вони включені до дисертаційної роботи.

Апробація результатів дисертації. Результати дослідження доповідалися на наукових конференціях та наукових семінарах, а саме:

1. International conference “Probability, reability and stochastic optimization”, м. Київ, Україна, 7.04.2015–10.04.2015.
2. Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, смт. Ворохта, Україна, 24.02.2016–27.02.2016
3. XIV Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна – 2016”, м. Київ, Україна, 6.04.2016–8.04.2016.
4. “Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука”, м. Київ, Україна, 19.05.2016–20.05.2016.
5. Міжнародна наукова конференція “Диференціальні рівняння та їх застосування”, м. Ужгород, Україна, 19.05.2016–21.05.2016.
6. “Міжнародна літня математична школа пам’яті В.О. Плотнікова”, м. Одеса, Україна, 12.09.2016 – 17.09.2016.
7. Засідання наукового семінару “Теорія ймовірностей та математична статистика” при кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Мішури Ю.С. та проф. Козаченка Ю.В. (м. Київ, Україна, 2017).
8. Засідання наукового семінару кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Наконечного О. Г. (м. Київ, Україна, 2016).
9. Засідання наукового семінару Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України під керівництвом проф. Кнопова П. С. (м. Київ, Україна, 2016).
10. Засідання наукового семінару кафедри теоретичної та прикладної статистики ЛНУ ім.І.Франка під керівництвом проф. Єлейка Я.І. (м.Львів, Україна, 2016).

11. XV Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна – 2017”, м. Київ, Україна, 4.04.2016–6.04.2017.

Публікації. За результатами дисертації опубліковано 12 наукових праць, з яких 5 опубліковано в фахових виданнях [1]-[5], а 7 у вигляді тез доповідей [6]-[12]. Дві статті [3], [5] видані в міжнародному журналі. Три статті [1], [2], [4] опубліковані у виданні України, англомовна версія якого включена до наукометричної бази Scopus.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, які містять підрозділи, висновків, списку використаних джерел, який містить 101 найменувань, та додатку. Повний обсяг роботи – 154 сторінки, в тому числі 128 сторінок основного тексту.

Подяка. Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Юлії Степанівні Мішурі за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу та підтримку в роботі.

Основний зміст роботи

У **вступі** обгрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначені мета і задачі дослідження, виділено наукову новизну, практичну значущість отриманих результатів, особистий внесок здобувача та апробацію отриманих результатів.

Перший розділ містить огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи та спорідненими питаннями. Проаналізовано результати інших авторів щодо проблем, які досліджуються в дисертації.

У **другому розділі** досліджено швидкість збіжності послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону за методом псевдомоментів та застосовано даний результат до знаходження оцінки швидкості збіжності цін опціонів.

Розглянемо послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ з $E\xi_i = 0$, $B\xi_i^2 = \sigma^2 \in (0,\infty)$, функцією розподілу $F(x)$ і характеристичною функцією $f(t)$. Нехай $\Phi_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функція розподілу випадкової величини

$S_n = (\sqrt{n})^{-1}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$ і $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – функція розподілу стандартного нормального розподілу. Припустимо, що для деякого $m \geq 3$ існують псевдомоменти $\mu_k = \int_R x^k dH(x), (k = 3, \ldots, m, m \in \mathbb{N}),$ де $H(x) = F(x) - \Phi(x).$ Введемо наступні позначення для величин, які будемо називати зрізаними псевдомоментами: "зрізані зверху" $\nu_n^{(1)}(m) = \int_{|x| \leq \sqrt{n}} |x|^{m+1} |dH(x)|$ і "зрізані знизу"

$\nu_n^{(2)}(m) = \int_{|x| > \sqrt{n}} |x|^m |dH(x)|.$ Доведено наступні результати, які дають швидкість збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону.

Теорема 1. Нехай виконуються наступні умови:

(i) Характеристична функція інтегровна, тобто $\int_{\mathbb{R}} | f(t) | \, dt = A < \infty$;

(ii) Псевдомоменти до m-го порядку включно рівні нулю і зрізані псевдомоменти обмежені:

$$\mu_k = 0, \; k = 3, \ldots, m, \text{ для деякого } m \geq 3 \text{ і}$$

$$\nu_n(m) = \max\left\{\nu_n^{(1)}(m), \nu_n^{(2)}(m)\right\} \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}}.$$

Тоді для всіх $n \geq 2$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} | \Phi_n(x) - \Phi(x) | \leq$$

$$\leq 2C_m^{(1)} \frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + 2C_m^{(2)} \frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} + \frac{A}{\pi} b^{n-1} + \nu_n(m) \frac{4e^{\frac{3}{2}}}{\pi} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n},$$

де $C_m^{(1)} = \dfrac{12^{\frac{m+1}{2}} \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\pi (m+1)!}, \; C_m^{(2)} = 2C_{m-1}^{(1)}, b = \exp\left\{-\dfrac{\pi^2}{24A^2 (2+\pi)^2}\right\} < 1.$

Наслідок 1. Нехай випадкові величини ξ_i мають обмежену щільність $p(x) \leq A_1$. Припустимо, що виконується умова *(ii)* теореми 1. Тоді для всіх $n \geq 3$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} | \Phi_n(x) - \Phi(x) | \leq$$

$$\leq 2C_m^{(1)} \frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + 2C_m^{(2)} \frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} + 2A_1 b_1^{n-2} + \nu_n(m) \frac{4e^{\frac{3}{2}}}{\pi} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n},$$

де $b_1 = \exp\left\{-\dfrac{1}{96 A_1^2 (2+\pi)^2}\right\} < 1.$

Відмітимо, що з припущення (i) випливає існування щільності для випадкової величини S_n. Позначимо її через $p_n(x)$. Також нехай $\Phi(x)$ – щільність стандартного нормального закону.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для всіх $n \ge 2$

$$\sup_{x \in \mathrm{P}} | p_n(x) - \phi(x) | \le$$

$$\le C_m^{(3)} \frac{\nu_n^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + C_m^{(4)} \frac{\nu_n^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} + b^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{2\pi} A + \nu_n(m) \frac{e^{\frac{3}{2}}}{\pi} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{n},$$

де

$$C_m^{(3)} = \frac{12^{\frac{m+2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{4\pi(m+1)!}, \; C_m^{(4)} = 2C_{m-1}^{(3)}.$$

Далі застосовується отриманий результат до дослідження швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу. З цією метою введемо ймовірнісний простір (Ω, F, P), на якому розглянемо в схемі серій послідовність фінансових ринків з дискретним часом, з одним ризиковим та одним безризиковим активом. Припустимо, що $T > 0$ задано, параметр n приймає значення з N, при кожному $n \ge 1$ маємо розбиття інтервалу часу $[0,T]$ виду $\pi(n) = \{0 = t_n^0 < t_n^1 < \mathrm{K} < t_n^n = T\}$, і точки розбиття будемо вважати моментами торгів на фінансовому ринку. Сукупність невід'ємних чисел $\{r_n^k, 1 \le k \le n\}$ будемо трактувати як послідовні відсоткові ставки, так що ціна безризикового активу в момент t_n^k має вигляд

$$B_n^k = \prod_{i=1}^{k} (1 + r_n^i).$$

Нехай на (Ω, F, P) при кожному $n \ge 1$ задано сукупність випадкових величин $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$, щодо якої завжди припускається виконаною умова обмеженості: існує $0 < c < 1$ таке, що всі $| R_n^k | \le c, n \ge 1, 1 \le k \le n$. Введемо потік -алгебр $F_n^k = \{R_n^i, i = 1, \Lambda, k\}$, породжений цими випадковими величинами. Будемо вважати, що ціна ризикового активу в момент t_n^k має вигляд

$$S_n^k = S_n^0 \prod_{i=1}^{k} (1 + R_n^i).$$

Тоді дисконтований ризиковий актив в момент t_n^k має вигляд

$$X_n^k = S_n^0 \prod_{i=1}^{k} \frac{1 + R_n^i}{1 + r_n^i}.$$

Позначимо $\{P_n, n \ge 1\}$ послідовність об'єктивних (фізичних) мір, що відповідає ризиковому ціновому процесу $\{S_n^k, 1 \le k \le n\}$. Як відомо, ринок в n-й серії буде безарбітражним тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одна еквівалентна до P_n ймовірнісна міра P_n^*, відносно якої $\{X_n^k, 1 \le k \le n\}$ буде $\{F_n^k, 1 \le k \le n\}$-мартингалом, або скорочено F_n-мартингалом. Всі можливі мартингальні міри F_n^* в n–й серії мають похідну Радона-Нікодима вигляду

$$\frac{dP_n^*}{dP_n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \Delta M_n^k\right) \tag{1}$$

де $\{M_n^k, 1 \le k \le n\}$ – деякий F_n-мартингал, $\Delta M_n^k > -1$. Умова еквівалентності має вигляд

$$\frac{dP_n^*}{dP_n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \Delta M_n^k\right) > 0. \tag{2}$$

Для випадку, коли ринок є біноміальним, доведено, що на ньому відсутній арбітраж, а єдина мартингальна міра визначається співвідношенням (1), причому

$$\Delta M_n^k = \frac{r_n^k - \mu_n^k}{(\sigma_n^k)^2} (R_n^k - \mu_n^k), \tag{3}$$

де $\mu_n^k = ER_n^k$, $(\sigma_n^k)^2 = DR_n^k$, тобто, прицьому ринок є повним.

Розглянемо тепер випадковий процес з дискретним часом

$$X_n(t) = S_n^0 \prod_{k=1}^{[nt]} \frac{1 + R_n^k}{1 + r_n^k}, t_n^k \le t \le t_n^{k+1}, 0 \le k \le n-1,$$

де $[a]$ –ціла частина числа a, $\prod_{k=1}^{0} = 1$. Нехай $S_n^0 = 1$. І будемо припускати, що випадкові величини $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ незалежні в сукупності і мають неперервний розподіл, зосереджений на деякому інтервалі $[a_n^k, b_n^k]$, причому виконується умова: $\mu_n^k - \frac{(\sigma_n^k)^2}{b_n^k - \mu_n^k} < r_n^k < \mu_n^k + \frac{(\sigma_n^k)^2}{\mu_n^k - a_n^k}$, $1 \le k \le n$. Тоді ринок буде безарбітражним в n-й серії. В рамках наступної теореми введемо позначення $(\sigma_n^{k,*})^2 = Var_{P_n^*} R_n^k$. Тоді має місце функціональна гранична теорема для послідовності фінансових ринків з дискретним часом в схемі Блека–Шоулса.

Теорема 3.

(і) Нехай випадкові величини $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ задовольняють умови

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le n} r_n^k = 0,\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{[nt]} r_n^k = rt > 0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{[nt]} (\sigma_n^{k,*})^2 = (\sigma^*)^2 t > 0, 0 \le t \le T.$$

Тоді відносно мартингальних мір P_n^*, заданих співвідношеннями (2) та (3) має місце слабка збіжність скінченновимірних розподілів:

$$X_n(t) \xrightarrow{d} \exp\{\sigma^* W_t - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2 t\}, 0 \le t \le T.$$

(ii) Нехай виконуються умови пункту (i), і крім того, існує стала $C > 0$ така, що

$$\sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} r_n^k \le C(t_2 - t_1),\ \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} (\sigma_n^{k,*})^2 \le C(t_2 - t_1)$$

для всіх $0 \le t_1 \le t_2 \le T$. Тоді відносно мартингальних мір P_n^*, заданих співвідношеннями (2) та (3) має місце слабка збіжність мір, що відповідають випадковим процесам X_n:

$$X_n(t) \xrightarrow{W} \exp\{\sigma^* W_t - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2 t\}, 0 \le t \le T.$$

Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді, зокрема, в момент T має місце центральна гранична теорема, а саме:

$$X_n(T) \xrightarrow{W} \exp\{\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\}.$$

Цей результат використано для оцінки швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу в дискретному часі до відповідних цін на граничному ринку з неперервним часом, який наведено далі.

Розглянемо опціони купівлі $\mathrm{X} = (S - K)^+$ та продажу $\Pi = (K - S)^+$ на актив S і зі страйковою ціною K. Будемо вважати, що граничний ринок є ринком Блека–Шоулса. А дограничні ринки будемо розглядати в таких умовах: випадкові величини $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ однаково розподілені з $ER_n^k = \mu_n, DR_n^k = \sigma_n^2$, незалежні в сукупності і мають неперервний розподіл, зосереджений на деякому інтервалі $[a_n, b_n]$. Нехай також виконується умова: $\mu_n - \frac{\sigma_n^2}{b_n - \mu_n} < r_n < \mu_n + \frac{\sigma_n^2}{\mu_n - a_n}$. Це забезпечує достатню умову безарбітражності ринку в n-й серії.

Позначимо через

$$\pi(\mathrm{X}_n) = E_{P_n^*}\left(X_n(T) - K\left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{-n} \right)^+$$

дисконтовану справедливу ціну опціона купівлі в дограничній моделі відносно мартингальної міри заданої рівностями (1) та (3), і через $\pi(\mathrm{X})$ – ціна Блека-

Шоулса на опціон купівлі в момент T, зі страйковою ціною K, відсотковою ставкою r і дисперсією $(\sigma^*)^2$, а також відповідні ціни $\pi(\Pi_n)$ та $\pi(\Pi)$ опціонів продажу. Позначимо $(\sigma_n^*)^2 = Var_{P_n^*}(R_n^k)$.

Теорема 4. Нехай виконуються наступні умови:
(i)послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $\{R_n^k, 1 \le k \le n\}$ задовольняє умови сформульовані вище; відсоткова ставка в кожній серії є рівномірною: $r_n^k = \frac{r}{n}$, причому мають місце наступні оцінки

$$\left|\frac{r}{n} - \mu_n\right| \le C_n^2, \left|E(R_n^k)^3\right| \le \frac{C}{n^2}, E(R_n^k)^4 - \mu_n E(R_n^k)^3 | \le \frac{C}{n^2}.$$

(ii)випадкові величини

$$\xi_n^k = \sqrt{n}\left(R_n^k - \frac{1}{2}(R_n^k)^2 + \frac{1}{3}(R_n^k)^3 - \frac{1}{3_n^*}(R_n^k)^3 - \frac{r}{n} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{n^2} + \frac{(\sigma_n^*)^2}{2}\right)$$

задовольняють умови наслідку 1, причому їхній розподіл зосереджено на деякому інтервалі $[a,b]$. Нехай для всіх $n \ge n_0$ виконується умова $\nu_n^{(1)}(3) < \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$, причому $| n(\sigma_n^*)^2 - (\sigma^*)^2 | \le \frac{C}{n}$.

Тоді

$$\left|\pi(X_n) - \pi(X)\right| + \left|\pi(\Pi_n) - \pi(\Pi)\right| \le \frac{C}{n}.$$

В **третьому розділі** досліджується швидкість збіжності цін опціонів при дискретизації геометричного процесу Орнштейна-Уленбека бернуллієвськими стрибками цін акцій.

Припустимо, що $T > 0$, $\mathrm{T} = [0,T]$ і $\Omega_F = (\Omega, F, (F_t, t \in \mathrm{T}), P)$ – повний стандартний стохастичний базис. Нехай $W = (W_t, F_t, t \in \mathrm{T})$ – адаптований вінерівський процес. Розглянемо адаптований процес

Орнштейна-Уленбека $X = (X_t, F_t, t \in \mathrm{T})$ зі сталими параметрами на цьому стохастичному базисі. Такий процес Орнштейна-Уленбека є єдиним розв'язком наступного стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = (\mu - X_t)dt + \sigma dW_t,\ X_0 = x_0 \in, t \in \mathrm{T}, \tag{4}$$

де $\mu \in R$ і $\sigma > 0$. Припустимо, що ціна активу S_t задовольняє рівність

$$S_t = \exp\left\{X_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right\}, t \in \mathrm{T}, \tag{5}$$

де невипадкова величина $-\frac{\sigma^2}{2}t$ додається з огляду на технічну простоту.

Побудуємо дискретну схему, яка слабко збігається до геометричного процесу Орнштейна-Уленбека (5). Спочатку розглянемо наступну дискретну апроксимаційну схему для самого процесу Орнштейна-Уленбека, яка базується на апроксимації Ейлера розв'язку стохастичного диференціального рівняння (4), але прирости вінерівського процесу замінимо на бернуллієвські незалежні однаково розподілені випадкові величини. А саме, припустимо, що ми маємо послідовність ймовірнісних просторів (Ω_n, F_n, P_n), $n \ge 1$ і нехай $\{q_k^{(n)}, n \ge 1,\ 0 \le k \le n\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин таких, що $q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$.

Нехай $n > T$. Введемо рекурентну схему:

$$x_0^{(n)} \in,\ R_k^{(n)} := x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} = \frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n} + q_k^{(n)},\ 1 \le k \le n. \tag{6}$$

Нехай $F_0^n = \{\emptyset, \Omega\}$ і $F_k^n = \{R_i^{(n)}, 1 \le i \le k\}$. Позначимо

$$X_t^n = x_0^{(n)} 1_{\left\{t < \frac{T}{n}\right\}} + \left(x_0^{(n)} + \sum_{1 \le k \le \left[\frac{tn}{T}\right]} R_k^{(n)} \right) 1_{\left\{t \ge \frac{T}{n}\right\}} = x_{\left[\frac{tn}{T}\right]}^{(n)}.$$

Далі всюди $\sum_{1 \le k \le \left[\frac{tn}{T}\right]} = 0$ та $\prod_{1 \le k \le \left[\frac{tn}{T}\right]} = 1$ при $t < \frac{T}{n}$. Побудуємо відповідну мультиплікативну схему для дограничного цінового процесу наступним чином

$$S_t^n = \exp\{x_0^{(n)}\} \prod_{1 \le k \le \left[\frac{tn}{T}\right]} (1 + R_k^{(n)}),\ t \in \mathrm{T}. \tag{7}$$

Теорема 5. Нехай $\{q_k^{(n)}, n \ge 1, 0 \le k \le n\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин таких, що $q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$ і $r_k^{(n)} = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$, $|x_0^{(n)}| \le C$. Тоді ринок (B_t^n, S_t^n) асимптотично безарбітражний, що означає, що існує таке $n_0 \in \mathrm{N}$, що (B_t^n, S_t^n) є безарбітражним для будь-якого $n \ge n_0$. Для таких $n \ge n_0$ ринок (B_t^n, S_t^n) є повним і єдина еквівалентна мартингальна міра $P^{n,*}$ має похідну Радона-Нікодима у вигляді

$$\frac{dP^{n,*}}{dP^n} = \prod_{k=1}^{n} (1 + \rho_{k-1}^{(n)} q_k^{(n)}),\ \rho_{k-1}^{(n)} = \frac{n r_k^{(n)} - (\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{\sigma T}.$$

Перейдемо тепер до оцінки швидкості збіжності цін опціонів. Позначимо через X_n і X стандартний опціон купівлі, Π_n і Π – стандартний опціон продажу з ціною погашення $K \ge 0$ і датою погашення T, на дограничних і граничних активах, відповідно. Відповідні дисконтовані об’єктивні ціни позначимо через $\pi(\mathrm{X}_n)$, $\pi(\mathrm{X})$, $\pi(\Pi_n)$ і $\pi(\Pi)$, і справедливі ціни – $\pi^*(\mathrm{X}_n)$, $\pi^*(\mathrm{X})$, $\pi^*(\Pi_n)$ і $\pi^*(\Pi)$. Будемо припускати, що ціна облігації для дограничної моделі дорівнює $B_t^{(n)} = (1+\frac{rT}{n})^{[\frac{tn}{T}]}$ і гранична ціна облігації дорівнює $B_t = e^{rt}$. Маємо наступні відношення:

$$\pi(\mathrm{X}_n) = \left[(\prod_{1\le k\le n} (1+R_k^{(n)}) - K)^+ (1+\frac{rT}{n})^{-n} \right], n \ge 1,$$

$$\pi(\mathrm{X}) = \left[(\exp\{X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\} - K)^+ e^{-rT} \right],$$

$$\pi(\Pi_n) = \left[(K - \prod_{1\le k\le n} (1+R_k^{(n)}))^+ (1+\frac{rT}{n})^{-n} \right], n \ge 1,$$

$$\pi(\Pi) = \left[(K - \exp\{X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T\})^+ e^{-rT} \right].$$

Теорема 6. Нехай виконуються наступні умови:

(i) $| x_0^{(n)} - x_0 | \le \frac{C_0}{n^{1/2}}$ з деякою сталою $C_0 > 0$;

(ii) Незалежні однаково розподілені випадкові величини $q_k^{(n)}$ приймають значення $\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з імовірністю $\frac{1}{2}$.

Тоді, починаючи з деякого $n_0 \in \mathrm{N}$, має місце наступна оцінка

$$| \pi(\Delta) - \pi(\Delta_n) | \le \frac{C_1}{n^{1/2}}$$

для деякого $C_1 > 0$ і $\Delta = \mathrm{X}, \Pi$.

Зауважимо, що швидкість збіжності об’єктивних цін опціонів має місце лише у припущенні, що відносно об’єктивної міри $q_k^{(n)}$ приймають значення $\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Таким чином, якщо ми хочемо одержати швидкість збіжності такого ж порядку відносно мартингальної міри, наша задача полягає у тому, щоб задати ймовірності спільного розподілу $P_n\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}\} \right)$ так, щоб відносно мартингальної міри P_n^* випадкові величини $q_k^{(n)}$ були незалежними в сукупності і приймали значення $\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Спочатку розглянемо модель цінового процесу (6)–(7), але без припущення про взаємну незалежність випадкових величин $\{q_k^{(n)}, 1 \le k \le n\}$. Позначимо умовні ймовірності $P_{k,n}^{\pm} = P_n(q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}} \mid F_{k-1}^n)$. Виявляється, що при відмові від незалежності, властивості дограничної моделі істотно залежать від поведінки $P_{k,n}^{\pm}$, про що свідчить наступний результат. Зауважимо, що $P_{k,n}^{+} + P_{k,n}^{-} = 1.$ Введемо позначення $h_{k,n}^{\pm} = \frac{(\mu - x_{k-1}^{(n)})T}{n} \pm \sqrt{\frac{T}{n}},$ а також позначимо $\rho_{k,n} = \frac{r_k^{(n)} - h_{k,n}^{+}{}_{k,n}^{+} - h_{k,n}^{-}{}_{k,n}^{-}}{4\sigma \frac{T}{n} P_{k,n}^{+} P_{k,n}^{-}}.$

Теорема 7.

(i) Нехай кожна серія при $n > T$ задовольняє умови:

(a) $P_{k,n}^{\pm} > 0$ з імовірністю 1 і $E\left|\rho_{k,n}(x_k^{(n)} - (x_k^{(n)} \mid F_{k-1}^{n})\right| < \infty, 1 \le k \le n$

(b) Існує стала $C > 0$ незалежна від k і n і така, що

$$|2P_{k,n}^{+} - 1| < \frac{C}{n^{1/2}},\ r_k^{(n)} \le \frac{C}{n},\ |x_0^{(n)} - x_0| \le C, 1 \le k \le n.$$

Тоді існує номер серії $n_0 > T$, починаючи з якого ринок (6)–(7) є безарбітражним і повним.

(ii) Нехай в деякій n-й серії при $n > T$ виконуються умови:

$P_{k,n}^{\pm} > 0$ з імовірністю 1 при $1 \le k \le n$, причому існує таке k, що

$$E\left|\rho_{k,n}(x_k^{(n)} - (x_k^{(n)} \mid F_{k-1}^{n})\right| = \infty.$$

Тоді еквівалентної мартингальної міри не існує, отже, ринок не є безарбітражним, питання повноти не розглядається.

(iii) Нехай $P_{k,n}^{+} = 0$ з додатною імовірністю або $P_{k,n}^{-} = 0$ з додатною імовірністю.

(c) Якщо на множині $A_{k,n}^{+} := \{\omega \in \Omega : P_{k,n}^{+} = 0\}$, за умови, що $P_{k,n}^{+} = 0$ з додатною імовірністю, має місце рівність

$$h_{k,n}^{+} = r_k^{(n)}, \tag{8}$$

або на множині $A_{k,n}^{-} := \{\omega \in \Omega : P_{k,n}^{-} = 0\}$, за умови, що $P_{k,n}^{-} = 0$ з додатною імовірністю, має місце рівність

$$h_{k,n}^{-} = r_k^{(n)}, \tag{9}$$

на множині $\Omega \setminus A_{k,n}^{+}$ виконується умова $|2P_{k,n}^{+} - 1| < \frac{C}{n^{1/2}}$, а на множині $\Omega \setminus A_{k,n}^{-}$ виконується умова $|2P_{k,n}^{-} - 1| < \frac{C}{n^{1/2}}$ і, крім того,

$$\left|\rho_{k,n}(x_k^{(n)} - (x_k^{(n)} \mid F_{k-1}^{n})\right| < \infty, 1 \le k \le n,$$

то ринок є безарбітражним і неповним.

(d) Якщо на множині $A_{k,n}^{+}$, за умови, що $P_{k,n}^{+} = 0$ з додатною імовірністю, рівність (8) не має місця, або на множині $A_{k,n}^{-}$, за умови, що $P_{k,n}^{-} = 0$

з додатною імовірністю, рівність (9) не має місця, то ринок не є безарбітражним.

Тепер будемо вважати, що виконується умова (i) теореми 7, тобто ринок є безарбітражним і повним. Введемо позначення для множини всіх можливих значень наборів випадкових величин $\{q_k^{(n)}, 1 \le k \le n\}$: $\Xi = \{\xi = \sqrt{\frac{T}{n}}(\pm 1, \ldots, \pm 1)\}$. Позначимо $\omega(\xi)$ ті елементи ймовірнісного простору, на яких набір $\{q_k^{(n)}, 1 \le k \le n\}$ приймає значення ξ і позначимо імовірність кожного такого набору відносно об'єктивної міри через $P_n(\xi)$.

Теорема 8. Нехай виконуються наступні умови:

(i) Існує така стала $C > 0$, що $|x_0^{(n)} - x_0| \le \frac{C}{n^{1/2}}$;

(ii) Виконуються умови (a) та (b) пункту (i) теореми 7;

(iii) На кожному $\omega(\xi)$ виконується рівність

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta M_k^{(n)}(\omega(\xi)))P_n(\xi) = 2^{-n}.$$

Тоді, починаючи з деякого $n_0 > T$ має місце наступна оцінка

$$|\pi^*(\Delta) - \pi^*(\Delta_n)| \le \frac{C_1}{n^{1/2}}$$

для деякого $C_1 > 0$ і $\Delta = X, \Pi$.

У **четвертому розділі** доведено функціональні граничні теореми в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса та обчислюється ціна опціону за допомогою числення Маллявена.

Введемо повний та "зрізаний" процеси Кокса-Інгерсолла-Росса. Нехай $T > 0$, $\mathbb{T} = [0, T]$ і $\Omega_F = (\Omega, F, (F_t, t \in \mathbb{T}), P)$ – повний фільтрований ймовірнісний простір, $W = (W_t, F_t, t \in \mathbb{T})$ – адаптований вінерівський процес. На цьому просторі розглянемо процес Кокса-Інгерсолла-Росса із сталими параметрами. Цей процес є єдиним розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = (b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t,\ X_0 = x_0 > 0,\ t \in \mathbb{T}, \tag{10}$$

де $b > 0$, $\sigma > 0$.

Як відомо, умова $\sigma^2 < 2b$ є необхідною і достатньою для того, щоб процес X приймав додатні значення і не заходив в нуль. Далі вважаємо цю умову виконаною.

Введемо "зрізаний" процес Кокса-Інгерсолла-Росса, який використаємо для доведення слабкої збіжності цін активу. Нехай тепер $C > 0$. Розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння з тими ж коефіцієнтами b та σ, що і рівняння (10):

$$dX_t^C = (b - X_t^C \wedge C)dt + \sigma\sqrt{X_t^C \wedge C}dW_t,\ X_0^C = x_0 > 0,\ t \in. \tag{11}$$

Доведено, що при кожному $C > 0$ рівняння (11) має єдиний сильний розв'язок. Встановлено, що "зрізаний" процес КІР не заходить в нуль при тій же умові, що й незрізаний процес.

Розглянемо дискретну апроксимаційну схему для процесу X. Нехай $(\Omega^{(n)}, F^{(n)}, P^{(n)})$, $n \geq 1$ – послідовність ймовірнісних просторів. Розглянемо послідовність однаково розподілених незалежних випадкових величин $\{q_k^{(n)}, n \geq 1, 0 \leq k \leq n\}$ на відповідному ймовірнісному просторі. Нехай ці величини приймають одне з можливих значень $\pm\sqrt{\frac{T}{n}}$, причому вони є симетричними, тобто $P^n\left(q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}\right) = \frac{1}{2}$. Нехай далі $n > T$. Побудуємо дискретні апроксимаційні схеми для випадкових процесів X та X^C наступним чином. Для повного процесу розглянемо наближення виду

$$X_0^{(n)} = x_0 > 0,\ X_k^{(n)} = X_{k-1}^{(n)} + \frac{(b - X_{k-1}^{(n)})T}{n} + \sigma q_k^{(n)}\sqrt{X_{k-1}^{(n)}}, \tag{12}$$

$$Q_k^{(n)} := X_k^{(n)} - X_{k-1}^{(n)} = \frac{(b - X_{k-1}^{(n)})T}{n} + \sigma q_k^{(n)}\sqrt{X_{k-1}^{(n)}},\ 1 \leq k \leq n,$$

а відповідні наближення X^C задаються рівностями

$$\begin{gathered} X_0^{(n,C)} = x_0 > 0, \\ X_k^{(n,C)} = X_{k-1}^{(n,C)} + \frac{(b - (X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C))T}{n} + q_k^{(n)}\sqrt{X_{k-1}^{(n,C)} \wedge C} \\ Q_k^{(n,C)} := X_k^{(n,C)} - X_{k-1}^{(n,C)} \end{gathered} \tag{13}$$

Позначимо через Q і $\mathrm{Q}^n, n \geq 1$ міри, що відповідають процесам X і $X^{(n)}, n \geq 1$, відповідно, а через Q^C і $\mathrm{Q}^{n,C}, n \geq 1$ міри, що відповідають процесам X^C і $X^{(n,C)}, n \geq 1$, відповідно. Слабку збіжність мір, що відповідають випадковим процесам, позначимо символом $\overset{W}{\to}$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 9. Має місце слабка збіжність мір $\mathrm{Q}^{n,C} \overset{W}{\to} \mathrm{Q}^C$ при $n \to \infty$ та $\mathrm{Q}^n \overset{W}{\to} \mathrm{Q}$ при $n \to \infty$.

Побудуємо дискретну апроксимаційну мультиплікативну схему для процесу

e^{X_t}, $t\in[0,T]$, де X_t – процес Кокса-Інгерсолла-Росса, заданий рівнянням (11). Для цього розглянемо дискретну апроксимаційну схему (12)–(13), і на її основі побудуємо мультиплікативний процес

$$S_t^{n,C} = \exp\{X_0^{(n,C)}\}\prod_{1\le k\le\left[\frac{tn}{T}\right]}(1+Q_k^{(n,C)}),\ t\in \mathrm{T}.$$

$$S_t^{C} = \exp\left\{X_t^C - \frac{2}{2}\int_0^t (X_t^C\wedge C)dt\right\},\ t\in \mathrm{T}$$

$$S_t^{n} = \exp\{x_0\}\prod_{1\le k\le\left[\frac{tn}{T}\right]}(1+Q_k^{(n)}),\ t\in \mathrm{T},$$

$$S_t = \exp\left\{X_t - \frac{2}{2}\int_0^t X_t dt\right\},\ t\in \mathrm{T}$$

$$\tilde{S}_t^{n} = \exp\{x_0\}\prod_{1\le k\le\left[\frac{tn}{T}\right]}\left[(1+Q_k^{(n,C)})\exp\left\{\frac{2}{2n}X_k^{(n)}\right\}\right],\ t\in \mathrm{T}$$

та

$$\tilde{S}_t = \exp\{X_t\},\ t\in \mathrm{T}.$$

Через G^C, $G^{n,C}$, G, G^n, $\tilde{G}$ та $\tilde{G}^n$, $n\ge 1$ позначимо міри, які відповідають процесам S_t^C, $S_t^{n,C}$, S_t, S_t^n, $\tilde{S}_t$ та $\tilde{S}_t^n$, $n\ge 1$, відповідно.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 10. Має місце слабка збіжність мір $G^{n,C}\xrightarrow{W}G^C$ при $n\to\infty$ та $G^n\xrightarrow{W}G$ при $n\to\infty$.

Зауваження 1. Аналогічним чином може бути доведено, що має місце слабка збіжність мір $\tilde{G}^n\xrightarrow{W}\tilde{G}$ при $n\to\infty$.

Перейдемо тепер до оцінювання опціонів на акції зі стохастичною волатильністю. Розглянемо модель Хестона. Нехай задано повний імовірнісний простір $\{\Omega,\Phi,\mathbf{F}=\{\Phi_t^{(W,\tilde{W})},t\ge 0\},\}$ з фільтрацією, породженою двома вінерівськими процесами $\{W_t,\ \tilde{W}_t,\ 0\le t\le T\}$. Розглянемо модель ринку з одним безризиковим і одним ризиковим активом, причому ціна безризикового активу задається невипадковою експонентою $B_t=e^{rt}$, де $r>0$, а ціна ризикового активу задається геометричним броунівським рухом $\{S_t, 0\le t\le T\}$ зі стохастичною волатильністю, яка в свою чергу є вимірною функцією від процесу Кокса-Інгерсолла-Росса. Тобто ринок описується парою стохастичних диференціальних рівнянь

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{X_t} S_t dW_t, \qquad (14)$$

$$dX_t = (b - X_t)dt + \sigma \sqrt{X_t} d\tilde{W}_t. \qquad (15)$$

Позначимо S_0 і $X_0 > 0$ невипадкові початкові значення процесів, визначених рівняннями (14)-(15) відповідно. Позначимо також

$$\overline{Y}_t = (1, Y_t) = (1, e^{-rt} S_t)$$

вектор дисконтованих цін активів. Нехай виконуються умови

(A1) вінерівські процеси W і $\tilde{W}$ є некорельованими, а отже, незалежними;

(A2) коефіцієнти b і σ є додатними і $\sigma^2 \le 2b$.

Встановлено безарбітражність даної моделі в сенсі $\overline{NA}_g$. Показано, що відносно еквівалентної мартингальної міри Q з похідною Радона–Нікодима вигляду

$$\frac{dQ}{dP}|_{\Phi_t} = \exp\left\{\int_0^t \frac{r-\mu}{\sqrt{X_s}} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{(r-\mu)^2}{X_s}\right) ds\right\},$$

пара процесів (S_t, X_t) має наступне зображення:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{X_t} S_t dW_t^Q, \qquad (16)$$

$$dX_t = (b - X_t)dt + \sigma \sqrt{X_t} d\tilde{W}_t^Q,$$

де, за теоремою Гірсанова, процеси

$$W_t^Q = W_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sqrt{X_s}} ds, \; \tilde{W}_t^Q = \tilde{W}_t,$$

є незалежними вінерівськими процесами відносно Q. Очевидно, ця міра є мінімальною мартингальною мірою.

Позначимо через V_C ціну у початковий момент часу Європейського опціону купівлі $C = (S_T - K)^+$ зі страйковою ціною $K \ge 0$ в моделі (16). Вказана ціна задається виразом

$$V_C = e^{-rT} E^Q\{(S_T^Q - K)^+\} = e^{-rT} E^Q\{E^Q\{(S_T - K)^+ \mid X_s, 0 \le s \le T\}\}. \qquad (17)$$

Внутрішнє математичне сподівання є умовним за траєкторією $\{X_s, 0 \le s \le T\}$, і тому є ціною Блека-Шоулса для моделі з невипадковою волатильністю, залежною від часу. Внутрішнє умовне математичне сподівання у (17), позначимо його $E(\tilde{\sigma})$, має наступне зображення:

$$E(\tilde{\sigma}) := E^Q\{(S_T^Q - K)^+ \mid X_s, 0 \le s \le T\} = S_0 e^{rT}\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)T - \ln K}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}\right) \quad (18)$$

$$- K\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)T - \ln K}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}}\right),$$

де $\tilde{\sigma} := \left(\frac{1}{T}\int_0^T X_s ds\right)^{\frac{1}{2}}, \Phi(\cdot)$ – функція стандартного нормального розподілу. Функцію $\tilde{\sigma}$ можна трактувати як усереднену волатильність за період часу від початкового моменту до моменту виконання опціону. Формула (18) показує, що ціна опціону на модель Блека–Шоулса зі стохастичною волатильністю повністю визначається розподілом випадкової величини $\tilde{\sigma}$.

Теорема 11.

Нехай $6\sigma^2 < b$. Для процесу КІР X, визначеного стохастичним диференціальним рівнянням (15), випадкова величина $\tilde{\sigma}^2$ має неперервну обмежену функцію щільності вигляду:

$$p_{\tilde{\sigma}^2}(x) = E\left[1_{\{\tilde{\sigma} > \sqrt{x}\}}\left(\frac{T}{\sigma}\int_0^T \sqrt{X_t}\int_0^t \Psi_{h,t} dW_h dt - \frac{T}{2}\int_0^T\int_0^t \Psi_{h,t}\psi_{h,t} dh dt\right)\right] \quad (19)$$

де

$$\psi_{h,t} := \exp\left\{-\frac{t-h}{2} - \left(\frac{b}{2} - \frac{{}^2}{8}\right)\int_h^t \frac{ds}{X_s}\right\},$$

$$\Psi_{h,t} = \psi_{h,t}\left[\int_0^T\int_0^T \sqrt{X_{t_1}}\sqrt{X_{t_2}}\int_0^{t_1 \wedge t_2} \psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2} dh dt_1 dt_2\right]^{-1}.$$

Наслідок 2. Нехай виконуються умови теореми 11. Тоді ціна у початковий момент часу Європейського опціону купівлі $C = (S_T - K)^+$ зі страйковою ціною $K \ge 0$ задається виразом

$$V_C = \int_0^\infty (S_0\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r + \frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}}\right)) p_{\tilde{\sigma}^2}(x) dx$$

де $p_2(x)$ визначено у (19).

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

Висновки

Дисертація присвячена розвитку теорії оцінювання опціонів та знаходженню їх швидкості збіжності.

З цією метою було знайдено швидкість збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону розподілу в термінах “зрізаних” псевдомоментів. Для цього реалізовано ідею Ю.П. Студнєва отримання оцінки швидкості збіжності порядку вище ніж $n^{-\frac{1}{2}}$. Для ринку в схемі серій та для ринку з дискретним часом, утвореного незалежними випадковими величинами, в основному, коли їхній розподіл є неперервним, знайдено умови безарбітражності. Доведено, що при певному виборі мартингальної міри випадкові величини, незалежні всукупності відносно об’єктивної міри, залишаються незалежними всукупності відносно цієї мартингальної міри. Доведено функціональну граничну теорему для ринку з дискретним часом у схемі Блека-Шоулса. Доведено теорему про оцінку швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу за методом псевдомоментів. Знайдено приклади функцій розподілу, до яких можна застосувати метод псевдомоментів.

Розглянуто граничну модель цін активів, змодельованих геометричним процесом Орнштейна-Уленбека та опис і властивості допграничного дискретного цінового процесу; дискретну апроксимаційну схема для процесу

Орнштейна-Уленбека, яка базується на апроксимації Ейлера, але прирости вінерівського процесу замінюються на бернуллієвські незалежні однаково розподілені випадкові величини. Сформульовано умови, за виконання яких швидкість збіжності об’єктивних і справедливих цін опціонів обмежена зверху величиною $\frac{C}{\sqrt{n}}$. Проаналізовано перехід від об’єктивної міри до мартингальної і зміни, що відбуваються з розподілом цін на ринку при такому переході у вказаній моделі.

Побудовано дискретні апроксимаційні схеми для ціни активу, який змодельований процесом КІР. Розглянуто дискретну апроксимаційну схему Ейлера для процесу КІР, але прирости вінерівського процесу замінюються на незалежні однаково розподілені обмежені симетричні випадкові величини. Було введено “зрізаний” процес Кокса-Інгерсолла-Росса, який використано для доведення слабкої збіжності цін активу. Встановлено, що “зрізаний” процес КІР не заходить в нуль при тій же умові, що й незрізаний процес. Наведено апроксимаційні схеми для обох процесів. Доведено функціональні граничні теореми для адитивної та мультиплікативної схем в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса. Проведено точне і наближене оцінювання опцінів в моделі Хестона, застосовуючи числення Маллявена.

Список опублікованих праць за темою дисертації

[1] Мішура Ю.С. Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів / Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2015. — Вип. 92. — С. 110-124.

[2] Мішура Ю.С. Швидкість збіжності цін опціонів при дискретизації геометричного процесу Орнштейна-Уленбека бернуллієвськими стрибками цін акцій / Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2015. — Вип. 93. — С. 127-141.

[3] Mishura Yu. Functional limit theorems for additive and multiplicative schemes in the Cox-Ingersoll-Ross model / Yu. Mishura, Ye. Munchak // Modern Stoch. Theory Appl.. — 2016. — Vol. 3, No. 1. — P. 1–17.

[4] Кучук-Яценко С.В. Застосування числення Маллявена до точного і наближеного оцінювання опціонів на акції зі стохастичною волатильністю / С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Теорія ймовірностей і математична статистика. — 2016. — Вип. 94. — С. 93–115.

[4.] Kuchuk-Yatsenko S.V. An application of the Malliavin calculus for calculating the precise and approximate prices of options with stochastic volatility / S.V. Kuchuk-Yatsenko, Yu.S. Mishura and Ye.Yu. Munchak // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2017. — No. 94. — P. 97–120.

[5] Mishura Yu. The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments / Yu. Mishura, Ye. Munchak, P. Slyusarchuk // Modern Stoch. Theory Appl.. — 2015. — Vol. 2, No. 1. — P. 95–106.

[6] Кучук-Яценко С.В. Обчислення цін опціонів у моделях фінансових ринків, заданих лінійними стохастичними диференціальними рівняннями зі стохастичним коефіцієнтом дифузії/ С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // “Міжнародна літня математична школа пам’яті В.О. Плотнікова”. Тези доповідей. (Одеса, Україна). — 2016. — С. 40.

[7] Кучук-Яценко С.В. Модель фінансового ринку, задана лінійним стохастичним диференціальним рівнянням зі стохастичним коефіцієнтом дифузії/ С.В. Кучук-Яценко, Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Міжнародна наукова конференція “Диференціальні рівняння та їх застосування”. Тези доповідей. (Ужгород, Україна). — 2016. — С. 86.

[8] Мішура Ю.С. Оцінка швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу. Всеукраїнська наукова конференція. Тези доповідей. "— Ворохта, Україна. — 2016. — С. 42.

[9] Мішура Ю.С. Оцінка швидкості збіжності цін опціонів купівлі та продажу із застосуванням методу псевдомоментів/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна – 2016”. — Київ, Україна. — 2016. — С. 54–57.

[10] Мішура Ю.С. Швидкість збіжності об’єктивних цін опціонів у схемі

Бернуллі/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Матеріали конференції. Т. 3. — Київ, Україна. — 2016. — С. 110–112.

[11] Мішура Ю.С. Функціональні граничні теореми в моделі Кокса-Інгерсолла-Росса/ Ю.С. Мішура, Є.Ю. Мунчак // Матеріали XV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2017". — Київ, Україна. — 2017. — С. 57–60.

[12] Mishura Yu. The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments / Yu. Mishura, Ye. Munchak, P. Slyusarchuk // International conference. Probability, reability and stochastic optimization. Conference materials. — Kyiv, Ukraine. — 2015. — P. 14.

Анотація

Мунчак Є. Ю. Функціональні граничні теореми для фінансових ринків з дискретним та неперервним часом. "— Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико"=математичних наук за спеціальністю 01.01.05 "— теорія ймовірностей і математична статистика. "— Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена застосуванню функціональних граничних теорем до фінансових ринків з дискретним та неперервним часом. Зокрема, розвивається питання оцінки та швидкості збіжності цін опціонів у різних моделях.

Реалізуючи ідею Ю. П. Студнєва, було встановлено швидкість збіжності розподілів сум незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального закону розподілу в термінах зрізаних псевдомоментів порядку вище, ніж $n^{-\frac{1}{2}}$. Цей результат застосовано до послідовності фінансових ринків з дискретним часом в схемі серій та досліджено швидкість збіжності цін опціонів купівлі та продажу.

Розглянуто дискретну апроксимаційну схему цін акцій, змодельованих геометричним процесом Орнштейна-Уленбека. Оцінено швидкість збіжності об'єктивних та справедливих цін опціонів.

Розглянуто повний та "зрізаний" процеси Кокса-Інгерсолла-Росса. Доведено слабку збіжність цін активу. Розглянуто модель Хестона, для якої досліджено питання точного обчислення ціни Європейського опціона купівлі. Із застосуванням методів числення Маллявена встановлено вигляд функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання опціона.

Ключові слова: швидкість збіжності, зрізані псевдомоменти, нормальний розподіл, фінансові ринки в дискретному та неперервному часі, ціни опціонів, модель Блека-Шоулса, процес Орнштейна-Уленбека, процес Кокса-Інгерсолла-Росса, дискретна апроксимаційна схема, функціональні граничні теореми,

стохастична волатильність, числення Маллявена.

Аннотация

Мунчак Е. Ю. Функциональные предельные теоремы для финансовых рынков с дискретным и непрерывным временем."— Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико"=математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. "— Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Министерство образования и науки Украины, Киев, 2017.

Диссертация посвящена применению функциональных предельных теорем к финансовым рынкам с дискретным и непрерывным временем. В частности, развивается вопросы оценки и скорости сходимости цен опционов в различных моделях.

Установлено скорость сходимости распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин к нормальному закону распределения в терминах урезанных псевдомоментов. Для этого была обобщена оценка Ю. Студнева. Получено такую же оценку, обходясь без условия Крамера. Зато введено ограничены урезанные псевдомоменты и интегрируемость характеристической функции. Этот результат применено к последовательности финансовых рынков с дискретным временем в схеме серий и исследованы скорость сходимости цен опционов покупки и продажи при слабой сходимости цен рисковых активов в модели с дискретным временем к модели Блэка-Шоулса. Установлен порядок скорости сходимости $O(n^{-1})$, где n - количество периодов для проведения торгов на фиксированном интервале времени в допредельной модели.

Рассматривается дискретная аппроксимационная схема для процесса Орнштейна-Уленбека, основанная на аппроксимации Эйлера, но приросты Винеровского процесса заменяются на бернуллиевськие независимые одинаково распределенные случайные величины. Сформулированы условия, при выполнении которых скорость сходимости объективных и справедливых цен опционов ограничено сверху величиной $\frac{C}{\sqrt{n}}$. Проанализированы переход от объективной меры к мартингальнои и изменения, происходящие с распределением цен на рынке при таком переходе в указанной модели.

Рассматривается процесс Кокса-Ингерсолл-Росса (КИР), когда он не заходит в ноль, и исследуется слабая аппроксимация этого процесса. В первом случае последовательность допредельного рынков смоделирована как последовательность дискретно временных аддитивных стохастических процессов, во втором случае – как последовательность мультипликативных стохастических процессов. Дискретные аппроксимационные схемы построены для цены актива, смоделирован процесс КИР. Рассматривается дискретная аппроксимационная схема Эйлера для процесса КИР, но приросты Винеровского процесса заменяются на независимые одинаково распределенные ограничены симметричные случайные величины. Вводится “урезанный” процесс Кокса-Ингерсолла-Росса, который используется для доказательства слабой сходимости цен актива. Рассматривается полный и “урезанный” процессы Кокса-Ингерсолла-Росса, устанавливается, что “урезанный” процесс КИР не заходит в ноль при том же условии, что и неурезанный процесс. Приводятся аппроксимационные схемы для обоих процессов и приходится слабая сходимость цен актива для аддитивной и мультипликативной моделей.

Представлены некоторые свойства моделей Блэка-Шоулса со стохастической волатильностью, которая задается функцией от процесса Кокса-Ингерсолла-Росса. Приводятся сведения об отсутствии арбитража в модели, а также изображения цены Европейского опциона. С применением методов исчисления Маллявена установлено вид функции плотности случайной величины, которая выражает среднее значение волатильности в течение времени для выполнения опциона. После этого записано цену опциона через найденную плотность.

Ключевые слова: скорость сходимости, урезанные псевдомоменты, нормальное распределение, финансовые рынки в дискретном и непрерывном времени, цены опционов, модель Блэка-Шоулса, процесс Орнштейна-Уленбека, процесс Кокса-Ингерсолл-Росса, дискретная аппроксимационная схема, функциональные предельные теоремы, стохастическая волатильность, исчисления Маллявена.

Abstract

Munchak Y.Y. Functional limit theorems and applications to discrete-time and continuous-time financial markets. — Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality.

The dissertation is devoted to application of functional limit theorems to financial markets with discrete and continuous time. In particular, the assessment of convergence rate and option prices in different models are considered here.

The rate of convergence of distributions of sums of independent identically distributed random variables to the Gaussian distribution is established in terms of truncated pseudomoments of the order higher than $n^{-\frac{1}{2}}$. This result is applied to sequences of financial markets operating in discrete time in the scheme series. We study the rate of convergence of put and call option prices.

The discrete approximation scheme for the price of asset that is modeled by geometrical Ornstein-Uhlenbeck process is considered. The rate of convergence of objective and fair option prices is estimated.

For the models where the asset prices are driven by complete and “truncated” Cox–Ingersoll–Ross processes the weak convergence of asset prices in discrete approximation schemes is proven. Also we consider Heston model and investigates the matter the exact pricing of the European option for this model. The form of density function of the random variable, which express the average of the volatility over time to maturity is established using Malliavin calculus.

Key words: the rate of convergence, truncated pseudomoments, normal distribution, financial markets with discrete and continuous time, option prices, Black-Scholes model, Ornstein-Uhlenbeck process, Cox-Ingersoll-Ross process, discrete approximation scheme, functional limit theorems, stochastic volatility, Malliavin calculus.