УДК 519.21

І.В. Розора, *к.ф.-м.н., доц.*

Швидкість збіжності для оцінки імпульсної перехідної функції у просторі неперервних функцій

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: irozora@bigmir.net

I.V. Rozora, *Ph.D., Associate Prof.*

Convergence rate for the estimation of impulse response function in the space of continuous functions

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: irozora@bigmir.net

В роботі досліджується фізично здійснима однорідна лінійна система з імпульсною перехідною функцією. В якості оцінки імпульсної функції розглядається сумісна корелограма між процесами на вході та виході системи. Знаходиться розподіл похибки оцінювання імпульсної функції в просторі неперервних функцій.

Ключові слова: імпульсна перехідна функція, лінійна однорідна система, гауссовий процес, сумісна корелограма.

The problem of estimation of a stochastic linear system has been a matter of active research for the last years. One of the simplest models considers a 'black box' with some input and a certain output. The input may be single or multiple and there is the same choice for the output. This generates a great amount of models that can be considered. The sphere of applications of these models is very extensive, ranging from signal processing and automatic control to econometrics (errors-in-variables models). In this paper a time-invariant continuous linear system is considered with a real-valued impulse response function. We assume that impulse function is square-integrable. Input signal is supposed to be Gaussian stationary stochastic process with known spectral density. A sample input–output cross-correlogram is taken as an estimator of the response function. An upper bound for the tail of the distribution of the supremum of the estimation error is found that gives a convergence rate of estimator to impulse response function.

Key Words: impulse response function, linear time-invariant system (LTI), Gaussian process, cross-correlogram.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Вступ

Задача оцінювання характеристик лінійних систем різної фізичної природи виникає у багатьох галузях, наприклад, у радіофізиці, сейсмології, метеорології, теорії сигналів та автоматичного контролю, теорії фільтрації, фінансовій математиці тощо. Останнім чсом цей напрямок досить активно розвивається.

Деякі методи оцінювання невідомих імпульсних перехідних функцій лінійних систем та вивчення властивостей відповідних оцінок розглядались у роботах В.Булдигіна та його учнів. У класі лінійних систем важливий підклас складають неперервні однорідні системи. В якості оцінок беруться сумісні періодограми або сумісні корелограми між процесами на вході та виході системи.

Для корелограмної дискретної за часом оцінки у роботах В.Булдигіна, В.Зайця, В.Курочки та Ф.Уцета [2], [4] вивчалися умови асимптотичної незміщеності та конзистентності у середньому квадратичному, а також умови асимптотичної нормальності як у сенсі збіжності скінченновимірних розподілів, так у сенсі збіжності відповідних розподілів у просторі неперервних функцій.

В працях В.Булдигіна та І.Блажієвської [1] встановлюється асимптотична незміщеність та конзистентність у середньому квадратичному корелограмної інтегральної оцінки; з менш обмежувальними умовами, ніж в статтях В.Булдигіна і Фу Лі, вивчались питання асимптотичної нормальності оцінки та похибки оцінювання у просторі неперервних функцій.

Потрібно зауважити, що у вищезгаданих роботах вивчаються асимптотичні властивості оцінок перехідної імпульсної функції і не приділяється увага знаходженню точних оцінок розподілів для супремуму похибки оцінювання. Вперше такі оцінки були знайдені в роботі Ю. Козаченка та І. Розори [7].

В даній роботі розглядається корелограмна інтегральна оцінка імпульсної перехідної функції та знаходиться оцінка розподілу супремуму похибки оцінювання при інших умовах на імпульсну перехідну функцію ніж в статті [7].

2 Корелограми та їх властивості

Розглянемо фізично здійсниму однорідну систему з імпульсною перехідною функцією $H(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$. Це означає, що дійснозначна функція $H(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, а реакція системи на допустимий вхідний сигнал $X(t)$, $t \in \mathbf{R}$, має вигляд

$$Y(t) = \int_0^\infty H(\tau) X(t-\tau) d\tau. \qquad (1)$$

При вивченні таких систем виникає задача оцінювання функції H за спостереженнями за реакцією системи на вхідний сигнал. У даній статті розглядається корелограмний метод оцінювання імпульсної перехідної функції H за умови $H \in L_2(\mathbf{R})$.

Розглянемо дійснозначний стаціонарний центрований гауссівський випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbf{R})$, що збурює систему (1). Нехай $f = (f(\lambda), \lambda \in \mathbf{R})$ — спектральна щільність процесу X. Припускаємо, що дана функція неперервна і задовольняє умовам

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda\in\mathbf{R}} |f(\lambda)| &< \infty; \\ K_X &\in L_1(\mathbf{R}), \end{aligned}$$

де $K_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda,\ t \in \mathbf{R},$ — кореляційна функція випадкового процесу X.

Оцінку для H в точці τ, $\tau > 0$, визначимо у вигляді сумісної емпіричної корелограми між вхідним та вихідним процесами (див., наприклад, [1])

$$\hat{H}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t+\tau) X(t) dt,\ \tau > 0, \qquad (2)$$

де T — довжина інтервалу усереднення, при цьому підході до оцінювання H припускається також, що $X(t) = X_\Delta(t)$, тобто на вхід системи подається сім'я процесів, залежних від параметра $\Delta > 0$ та із певним виглядом спектральної щільності. В подальшому параметр Δ будемо опукати.

Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$.

Через

$$H^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} H(t) dt, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

позначимо перетворення Фур'є-順Planшереля функції H.

Зауваження 1. *Інтеграли в* (1) *та* (2) *розглядаються як середньоквадратичні інтеграли Рімана.*

Інтеграл в (1) *існує тоді і тільки тоді, коли існує інтеграл Рімана (див. [5], ст. 278)*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty H(\tau) K_X(s-\tau) H(s) ds d\tau. \qquad (3)$$

Якщо в даному інтегралі використати зображення кореляційної функції через спектральну щільність та перетворення Фур'є-Планшереля для функції $H(\tau)$, *отримаємо*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty H(\tau) K(s-\tau) H(s) ds d\tau =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(-\lambda) \cdot H^*(\lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

Оскільки $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} |f(\lambda)| < \infty$ *і* $H \in L_2(\mathbf{R})$, *то інтеграл* (3) *існує, а отже, і існує інтеграл в* (1).

Будемо вважати, що інтеграл (3) *існує також як інтеграл Лебега.*

Легко підрахувати, що математичне сподівання $\hat{H}_T(\tau)$ дорівнює

$$E\hat{H}_T(\tau) = \int_0^\infty H(s) K_X(\tau - s) ds. \qquad (4)$$

Отже, з (4) маємо, що в загальному випадку

$$E\hat{H}_T(\tau) \neq H(\tau),\ \ \tau \in \mathbf{R}.$$

Це означає, що оцінка $\hat{H}_T(\tau)$ є зміщеною.

В роботах [1] та [3] розглядаються послідовності коваріаційних функцій, які залежать від параметру Δ, і знаходяться умови, коли оцінка $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)$ є асимптотично незміщеною для $H(\tau)$ при $\Delta \to \infty$. Також в [3] показано, що за певних умов $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) \to H(\tau)$ з ймовірністю 1 при $\Delta \to \infty$ і $T \to \infty$.

Зауваження 2. *З роботи [1] випливає, що всі потрібні умови для асимптотичної незміщеності та для збіжності з ймовірністю 1 виконуються для послідовності таких спектральних щільностей*

$$f_\Delta(\lambda) = \frac{c}{2\pi}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{\Delta}\right\}, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \Delta > 0. \quad (5)$$

Нехай

$$\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau).$$

В [1] показано, що кореляційна функція $\hat{Z}_T(\tau)$ має вигляд

$$E\hat{Z}_T(\tau_1)\hat{Z}_T(\tau_2) =$$

$$\begin{aligned} = &\ \frac{2\pi}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2}|H^*(\lambda_2)|^2 + \\ + &\ e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)}H^*(\lambda_1)H^*(\lambda_2)\Big)\times \\ \times &\ \Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)f(\lambda_1)f(\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\Phi_T(\lambda)$ — ядро Фейєра

$$\Phi_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left(\frac{\sin(T\lambda/2)}{\lambda/2}\right).$$

Нехай S — параметрична множина. Функція $\rho(t,s)$ називається псевдометрикою на S, якщо вона задовольняє всі аксіоми метрики, окрім того, що множина $\{(t,s)\in S\times S : \rho(t,s) = 0\}$ може бути більшою ніж діагональ $\{(t,s)\in S\times S : t = s\}$.

Розглянемо функцію (див. [3])

$$g_H(\tau) = \left[\int_{-\infty}^{\infty}|H^*(\lambda)|^2\sin^2\frac{\lambda\tau}{2}d\lambda\right]^{1/2}, \quad \tau > 0. \quad (7)$$

Оскільки $H \in L_2(\mathbf{R})$, то функція (7) коректно визначена та породжує псевдометрику

$$\sqrt{\sigma}(\tau_1,\tau_2) = \sqrt{g_H(|\tau_1-\tau_2|)}, \qquad \tau_1,\ \tau_2 \in \mathbf{R}.$$

Доведення того, $\sqrt{\sigma}(\tau_1,\tau_2)$ є псевдометрикою можна подивитись у [3].

В роботі Козачено Ю, Розора І. доведено такий результат:

Теорема 2.1. *[7] Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$ і $\sup_{\lambda\in\mathbf{R}}|f(\lambda)| < \infty$, де $f(t)$ — спектральна щільність процесу $X(t)$, та наступний інтеграл є збіжним*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|H^*(\lambda)|^2\ln^{2\alpha}\left(\frac{\lambda}{2}+e^\alpha\right)d\lambda < \infty, \quad \alpha > 0.$$

Тоді

$$\left(E|\hat{Z}_T(\tau_1)-\hat{Z}_T(\tau_2)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant K_{\ln}\cdot\ln^{-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{|\tau_1-\tau_2|}+e^\alpha\right),\ \tau_1,\tau_2\in\mathbf{R},\ \alpha>0, \quad (8)$$

де $K_{\ln}$ має вигляд

$$K_{\ln} = K_{\ln}(T) = \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{T}}\cdot\sup_{t\in\mathbf{R}}|f(t)|\cdot||H^*||_2^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}|H^*(\lambda)|^2\ln^{2\alpha}\left(\frac{\lambda}{2}+e^\alpha\right)d\lambda\right)^{1/4}. \quad (9)$$

3 Квадратично-Гауссові випадкові процеси

В даному розділі розглядаються означення та деякі властивості квадратично-гауссових випадкових величин і процесів.

Нехай (Ω, F, P) — ймовірнісний простір та (T,ρ)— компактний метричний простір з метрикою ρ.

Наведемо означення із книги [6].

Означення 3.1. [6] Нехай $\Xi = \{\xi_t,\ t\in \mathrm{T}\}$ — сім'я сумісно гауссівських випадкових величин, $E\xi_t = 0$ (наприклад, ξ_t, $t\in\mathrm{T}$, є гауссівським випадковим процесом).

Простір $SG_\Xi(\Omega)$ називається простором квадратично-гауссових випадкових величин, якщо кожен елемент $\eta\in SG_\Xi(\Omega)$ можна представити у вигляді

$$\eta = \bar{\xi}^T A\bar{\xi} - \mathsf{E}\bar{\xi}^T A\bar{\xi}, \quad (10)$$

де $\bar{\xi}^T = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $\xi_k\in\Xi$, $k=1,\ldots,n$, A— дійснозначна матриця,

або $\eta\in SG_\Xi(\Omega)$ представляється як середньоквадратична границя послідовності випадкових величин з (10)

$$\eta = l.i.m._{n\to\infty}(\bar{\xi}_n^T A\bar{\xi}_n - \mathsf{E}\bar{\xi}_n^T A\bar{\xi}_n).$$

Означення 3.2. [6] Випадковий процес $\xi(t) = \{\xi(t), t \in \mathrm{T}\}$ називається квадратично-гауссовим, якщо для кожного $t \in \mathrm{T}$ випадкова величина $\xi(t)$ належить простору $SG_{\Xi}(\Omega)$.

Відомо також, що

- $SG_{\Xi}(\Omega)$ є банаховим простором з нормою $\|\zeta\| = \sqrt{\mathsf{E}\zeta^2}$;
- $SG_{\Xi}(\Omega)$ є підпростором простору Орліча, що породжується функцією

$$U(x) = \exp|x| - 1;$$

- норма $\|\zeta\|_{L_U(\Omega)}$ на $SG_{\Xi}(\Omega)$ еквівалентна нормі $\sqrt{\mathsf{E}\zeta^2}$.

Приклад 1. Розглянемо сім'ю гауссівських центрованих випадкових процесів

$\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$, $t \in \mathrm{T}$. Нехай матриця $A(t)$ є симетричною. Тоді

$$X(t) = \bar{\xi}^T(t)A(t)\bar{\xi}(t) - \mathsf{E}\bar{\xi}^T(t)A(t)\bar{\xi}(t),$$

де $\bar{\xi}^T(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$, є квадратично-гауссовим випадковим процесом.

Загальні властивості квадратично-гауссових випадкових процесів можна знайти в роботах [6], [8].

Через $N(u)$ позначимо мінімальну кількість замкнених куль радіуса u, що покривають множину T з метрикою ρ.

Нехай $\xi(t) = \{\xi(t), t \in \mathrm{T}\}$— квадратично-гауссовий випадковий процес. Припустимо, що існує функція $\sigma(h)$, $h > 0$, яка є монотонно зростаючою, неперервною і $\sigma(h) \to 0$ при $h \to 0$, а також

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h} (\mathbf{Var}(\xi(t) - \xi(s)))^{\frac{1}{2}} \leqslant \sigma(h).$$

Визначимо деякі сталі:

$$\varepsilon_0 = \inf_{t\in\mathbf{T}} \sup_{s\in\mathbf{T}} \rho(t,s), \qquad t_0 = \sigma(\varepsilon_0),$$

$$\gamma_0 = \sup_{t\in\mathbf{T}} (\mathbf{Var}\,\xi(t))^{1/2},$$

Позначимо $C = \max\{t_0, \gamma_0\}$.

Теорема 3.1. *[6] Нехай $\xi(t) = \{\xi(t), t \in \boldsymbol{T}\}$— сепарабельний квадратично-гауссовий випадковий процес, зростаюча функція $r(u) \geqslant 0, u \geqslant 1$, є такою, що $r(u) \to \infty$ при $u \to \infty$ і функція $r(\exp\{t\})$ є опуклою. Нехай*

$$\int_0^{t_0} r(N(\sigma^{(-1)}(u)))du < \infty.$$

Тоді для всіх $x > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}} |\xi\,(t)| > x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \inf_{0<p<1} \left\{ r^{(-1)} \left(\frac{1}{t_0 p} \int_0^{t_0 p} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\nu)\right)\right) d\nu \right) \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \frac{\sqrt{2}x(1-p)}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x(1-p)}{\sqrt{2}\gamma_0}\right\} \right\}.$$

4 Про швидкість збіжності корелограм в просторі неперервних функцій

Даний розділ присвячений знаходженню швидкості збіжності корелограмних інтегральних оцінок невідомих імпульсних перехідних функцій лінійних систем в просторі неперервних функцій. А саме, знаходиться оцінка розподілу супремуму похибки оцінювання на відрізку $[0, A]$.

Припустимо, що $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ вимірний дійснозначний стаціонарний центрований гауссівський процес, що збурює систему (1).

Розглянемо корелограму

$$\hat{H}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t+\tau)X(t)dt,\ \tau > 0,$$

що є оцінкою імпульсної перехідної функції H. Випадковий процес $Y(t)$ визначається в (1).

Доведемо допоміжну лему.

Лема 1. *Випадковий процес $\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau)$, $\tau > 0$, є квадратично-гауссовим.*

Доведення. Процес $\hat{Z}_T(\tau)$, $\tau > 0$, можна подати у вигляді

$$\hat{Z}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T (Y(t+\tau)X(t) - EY(t+\tau)X(t))dt. \tag{11}$$

Оскільки кожна інтегральна сума (11)

$$\sum_k (Y(t_k+\tau)X(t_k) - EY(t_k+\tau)X(t_k)) \vartriangle t_k$$

належить простору $SG_{\Xi}(\Omega)$, а сам процес $\hat{Z}_T(\tau)$ є середньо-квадратичною границею цих сум, то $\hat{Z}_T(\tau)$ є квадратично-гауссовим процесом. Отже, лема повністю доведена. □

Розглянемо точність оцінювання як різницю оцінки $\hat{H}_T(\tau)$ та імпульсної перехідної функції $H(\tau)$

$$\hat{H}_T(\tau) - H(\tau), \quad \tau > 0.$$

Оцінимо супремум похибки оцінювання на відрізку $[0, A]$, де A—деяке фіксоване додатне число.

$$P\{\sup_{\tau\in[0,A]} |\hat{H}_T(\tau) - H(\tau)| \geqslant \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Позначимо

$$h(\tau) = E\hat{H}_T(\tau) - H(\tau), \quad \tau \in [0, A].$$

Припустимо, що функція $h(\tau)$ є обмеженою на відрізку $[0, A]$.

Зауваження 3. *Дана умова виконується, коли, наприклад, функції $E\hat{H}_T(\tau)$ і $H(\tau)$ є неперервними на $[0, A]$.*

Позначимо

$$h_- = \min_{\tau\in[0,A]} h(\tau), \qquad h_+ = \max_{\tau\in[0,A]} h(\tau),$$

$$h^* = \max_{\tau\in[0,A]} |h(\tau)| = \max\{h_+, -h_-\}.$$

Із співвідношення (6) випливає, що

$$\gamma_0 = \gamma_0(T) = \sup_{\tau\in[0,A]} (\mathbf{Var}\, \hat{Z}_T(\tau))^{1/2} =$$

$$= \sup_{\tau\in[0,A]} \left(\frac{2\pi}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(|H^*(\lambda_2)|^2 + \right.\right.$$
$$+ \left. e^{i\tau(\lambda_1+\lambda_2)} H^*(\lambda_1)H^*(\lambda_2)\right) \times$$
$$\times \left. \Phi_T(\lambda_2-\lambda_1) f(\lambda_1) f(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Позначимо

$$C = C(T) = \max\{\gamma_0, K_{\ln} \ln^{-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{2}{A} + e^{\alpha}\right)\},$$

де значення $K_{\ln}$ з (9).

Теорема 4.1. *Нехай $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ — сепарабельний дійснозначний стаціонарний гауссівський процес, що збурює систему (1). Припустимо, що перехідна функція $H \in L_2(\mathbf{R})$ і для деякого $\alpha \in (0, 1]$ виконується умова*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \ln^{2\alpha}\left(\frac{\lambda}{2} + e^{\alpha}\right) d\lambda < \infty, \quad \alpha > 2.$$

Для спектральної щільності $f(t)$ випадкового процесу $X(t)$ виконується умова $\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$. Тоді для

$$\varepsilon > h^*,$$

має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{\tau\in[0,A]} |\hat{H}_T(\tau) - H(\tau)| > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \ 2Ae^{\frac{\alpha}{\alpha-2}} \inf_{p\in(0,1)} \left\{\left(\frac{A}{2} + e^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p^{2/\alpha}}}\right.$$
$$\times \ \left(1 + \frac{\sqrt{2}(\varepsilon - h^*)(1-p)}{C}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \ \left.\exp\left\{-\frac{(\varepsilon - h^*)(1-p)}{\sqrt{2}\gamma_0}\right\}\right\}. \tag{12}$$

Доведення. Різницю $\hat{H}_T(\tau) - H(\tau)$ можна подати в такому вигляді

$$\hat{H}_T(\tau) - H(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau) + h(\tau) =$$
$$= \hat{Z}_T(\tau) + h(\tau).$$

Тоді

$$\hat{H}_T(\tau) - H(\tau) \geqslant \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \hat{Z}_T(\tau) \geqslant \varepsilon - h(\tau),$$

$$\hat{H}_T(\tau) - H(\tau) \leqslant -\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \hat{Z}_T(\tau) \leqslant -\varepsilon - h(\tau).$$

Отже, для $\varepsilon > h^*$ отримаємо

$$\{|\hat{H}_T(\tau) - H(\tau)| \geqslant \varepsilon\} \subset$$
$$\subset \{|\hat{Z}_T(\tau)| \geqslant \min\{\varepsilon - h_+, \varepsilon + h_-\}\}$$

та

$$P\{\sup_{\tau\in[0,A]} |\hat{H}_T(\tau) - H(\tau)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{\sup_{\tau\in[0,A]} |\hat{Z}_T(\tau)| \geqslant \min\{\varepsilon - h_+, \varepsilon + h_-\}\}. \tag{13}$$

Очевидно, що $\min\{\varepsilon - h_+, \varepsilon + h_-\} = \varepsilon - h^*$
Для зручності позначимо

$$x = \varepsilon - h^*.$$

Оскільки з леми 1 випливає, що $\hat{Z}_T(\tau)$ є квадратично-гауссовим процесом, тоді для нього можна використати твердження теореми 3.1. З (8) випливає, що у якості функції $\sigma(h)$ можна розглянути $\sigma(h) = K_{\ln} \cdot \frac{1}{\ln^{\alpha/2}\left(\frac{1}{h} + e^{\alpha}\right)}$, де $K_{\ln}$ з (9).

З означення функції $\sigma(u)$ випливає, що

$$\sigma^{(-1)}(u) = \Big(\exp\{(K_{\ln}/u)^{2/\alpha}\} - e^{\alpha}\Big)^{-1},$$

$$0 < u < \frac{K_{\ln}}{\alpha^{\frac{\alpha}{2}}},$$

тоді

$$N(\sigma^{(-1)}(u)) \leqslant \left(\frac{A}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) =$$

$$= \left(\frac{A}{2}(\exp\{(K_{\ln}/u)^{2/\alpha}\} - e^{\alpha}) + 1\right).$$

Зауважимо, що

$$\frac{K_{\ln}}{\alpha^{\alpha/2}} > t_0 p,$$

так як $p \in (0,1)$ і $\frac{(\ln(e^{\alpha}+\frac{2}{A}))^{\alpha/2}}{\alpha^{\alpha/2}} \geqslant 1$ при $\alpha > 0$ та в нашому випадку

$$t_0 = \sigma\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{K_{\ln}}{\ln^{\alpha/2}\left(\frac{2}{A} + e^{\alpha}\right)}. \qquad (14)$$

Оскільки для $u \in (0, t_0 p)$ має місце співвідношення

$$1 - \frac{A}{2}e^{\alpha} \leqslant \frac{A}{2}\exp\left\{\left(\frac{K_{\ln}}{u}\right)^{2/\alpha}\right\},$$

то

$$N(\sigma^{(-1)}(u)) \leqslant A\exp\{(K_{\ln}/u)^{2/\alpha}\}.$$

Розглянемо тепер функцію

$$r(u) = (\ln u)^{\beta},\ \beta \in [1, \frac{\alpha}{2}),\ u \geqslant 1.$$

Легко перевірити, що вона задовольняє умовам теореми 3.1. А тому для $u \in (0, t_0 p)$ виконується наступне твердження

$$r(N(\sigma^{(-1)}(u))) \leqslant r\Big(A \cdot \exp\{(K_{\ln}/u)^{2/\alpha}\}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\ln A + (K_{\ln}/u)^{2/\alpha}\Big)^{\beta}$$

$$\leqslant (\frac{K_{\ln}}{u})^{2\beta/\alpha}\Big(\ln A\Big(\frac{t_0 p}{K_{\ln}}\Big)^{2/\alpha} + 1\Big)^{\beta}. \quad (15)$$

Оскільки обернена функція до $r(u)$ дорівнює

$$r^{(-1)}(u) = \exp\{x^{1/\beta}\}, \quad \beta \in [1, \frac{\alpha}{2}),$$

то, використовуючи оцінку (15) та значення t_0 з (14), маємо

$$r^{(-1)}\left(\frac{1}{t_0 p}\int_0^{t_0 p} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\nu)\right)\right)d\nu\right) =$$

$$= \exp\left\{\left(\frac{1}{t_0 p}\int_0^{t_0 p} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\nu)\right)\right)d\nu\right)^{1/\beta}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\left(\frac{1}{t_0 p}\int_0^{t_0 p}\Big(\frac{K_{\ln}}{u}\Big)^{\frac{2\beta}{\alpha}}\Big(\ln A\Big(\frac{t_0 p}{K_{\ln}}\Big)^{\frac{2}{\alpha}} + 1\Big)^{\beta}d\nu\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\Big(\ln A\Big(\frac{t_0 p}{K_{\ln}}\Big)^{\frac{2}{\alpha}} + 1\Big)\left(\frac{\alpha}{\alpha - 2\beta}\Big(\frac{K_{\ln}}{t_0 p}\Big)^{\frac{2\beta}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha - 2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\left(\ln A + \Big(\frac{K_{\ln}}{t_0 p}\Big)^{\frac{2}{\alpha}}\right)\right\} =$$

$$= A\left(\frac{A}{2} + e^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p^{2/\alpha}}}\exp\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha - 2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\}. \qquad (16)$$

Якщо підставити оцінку (16) в невірність з теореми 3.1, то отримаємо

$$P\{\sup_{\tau\in[0,A]}|\hat{Z}_T(\tau)| \geqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant 2A\left(\frac{A}{2} + e^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p^{2/\alpha}}}\exp\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha - 2\beta}\right)^{1/\beta}\right\}$$

$$\times\left(1 + \frac{\sqrt{2}x(1-p)}{C}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{x(1-p)}{\sqrt{2}\gamma_0}\right\}.$$

Ліва частина нерівності не залежить від β. Тому знайдемо мінімум правої частини за β.

Оскільки функція

$$g(\beta) = \exp\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha - 2\beta}\right)^{1/\beta}\right\}$$

зростає за β, $\beta \in [1, \alpha/2)$, тому його мінімум досягається в точці $\beta = 1$ і дорівнює

$$\min_{\beta\in[1,\alpha/2)} g(\beta) = g(1) = \exp\left\{\frac{\alpha}{\alpha - 2}\right\}.$$

Отже, отримаємо

$$P\{\sup_{\tau\in[0,A]}|\hat{Z}_T(\tau)| \geqslant x\} \leqslant$$

$$\leqslant 2A\exp\left\{\frac{\alpha}{\alpha-2}\right\}\left(\frac{A}{2}+e^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p^{2/\alpha}}}$$
$$\times\left(1+\frac{\sqrt{2}x(1-p)}{C}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{x(1-p)}{\sqrt{2}\gamma_0}\right\}.$$

Якщо врахувати, що $x=\varepsilon-h^*$, то з останньої нерівності отримуємо твердження теореми. $\square$

5 Висновки

В роботі розглядалась корелограмна інтегральна оцінка імпульсної перехідної функції лінійної однорідної системи. Знайдено оцінку швидкості збіжності даної корелограми в просторі неперервних функцій. Тобто отримано оцінку розподілу супрумуму похибки оцінювання.

Список використаних джерел

1. *Булдигін В.В.* Асимптотичні властивості корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій лінійних систем / В.В. Булдигін, І.П. Блажієвська // Наукові вісті НТУУ "КПІ".– 2010.– № 4.– С. 16–27.
2. *Buldygin V.V.* On cross-coorrelogram estimators of the response function in continuous linear systems from discrete observations / V.V.Buldygin, V.G. Kurotschka // Random Oper. and Stoch. Equ.–1999.– №7(1).–P. 71–90.
3. *Buldygin V.* On asymptotic normality of an estimation of unit impulse responses of linear system I, II / V. Buldygin, Fu Li // Theor. Probability and Math. Statist.–1997.— № 54, № 55.– P. 3–17, P.30-37.
4. *Buldygin V.* Asymptotic normality of cross-coorrelogram estimators of the response function/ V. Buldygin, F. Utzet, V. Zaiats // Statistical Infernce for Stochastic Processes. – 2004.–№7.–P.1–34.
5. *Гихман И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход.– Москва, Наука.– 1977.
6. *Козаченко Ю.* Моделювання випадкових процесів та полів/ Ю.Козаченко, А.Пашко, І.Розора.– Київ, Задруга.– 2007.
7. *Козаченко Ю.* Про корелограмні оцінки імпульсних перехідних функцій / Ю.Козаченко, І.Розора // Теор. ймовір. та матем. статист.– 2015.– № 93.–С. 75-86.
8. *Kozachenko Yu.* Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions / Yu. Kozachenko, O. Stus O. // Math. Communications.–1998.– **3**, №1.– P.83–94.

References

1. BULDYGIN V., BLAZHIEVSKA I. (2010) Asymptotic properties of cross-correlogram estimators of impulse response functions in linear system *Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "KPI*, **4**, 16–27.
2. BULDYGIN V., KUROTSCHKA V. (1999) On cross-coorrelogram estimators of the response function in continuous linear systems from discrete observations *Random Oper. and Stoch. Equ.*, **7**, №1, 71–90.
3. BULDYGIN V., FU LI (1997) On asymptotic normality of an estimation of unit impulse responses of linear system I, II *Theor. Probability and Math. Statist.*, **54, 55**, 3–17, 30–37.
4. BULDYGIN V., UTZET F., ZAIATS V. (2004) Asymptotic normality of cross-coorrelogram estimators of the response function *Statistical Infernce for Stochastic Processes*, **7**, 1–34.
5. GIKHMAN I, SKOROKHOD, A. (1996) *Introduction to the Theory of Random Processes*, Dover Publication, 544 p.
6. KOZACHENKO YU., PASHKO A., ROZORA I. (2007) *Simulation of Stochastic Processes and fields*, Zadruga, Kyi. (in Ukrainian)
7. KOZACHENKO YU., ROZORA I. (2015) On cross-correlogram estimators of impulse response functions *Theor. Probability and Math. Statist.*, **93**, 75-86.
8. KOZACHENKO YU., STUS O. (1998) Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions, *Math. Communications*, **3**, №1, 83–94.

Надійшла до редколегії: 20.02.2018