

УДК 519.21

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.2>

Ауналлах Ламін¹, аспірант
Ростислав Ямненко², д.ф.-м.н., доцент

**Оцінювання ймовірності банкрутства
біноміально розподіленого числа
 φ -субгауссових позовів**

^{1,2}Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Воло-
димирська, 64/13,
e-mail: rostyslav.yamnenko@knu.ua

Aounallah Lamin¹, Ph.D. student
Rostyslav Yamnenko², Dr.Sc., Associate
Professor

**Estimation of ruin probability for
binomially distributed number of
 φ -sub-Gaussian claims**

^{1,2}Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., Kyiv, Ukraine,
01601, e-mail: rostyslav.yamnenko@knu.ua

У роботі досліджуються властивості класичного процесу ризику $X(t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, який утворений біноміальною сумою строго φ -субгауссових ризиків. Отримано оцінки для ймовірності виходу такої суми за монотонно зростаючу неперервну функцію. Зокрема, за лінійного надходження премій отримано оцінку банкрутства для відповідного процесу ризику.

Ключові слова: біноміальний розподіл, φ -субгауссові випадкові величини, ймовірність банкрутства.

In this paper, we study the properties of a classical risk process $X(t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ with binomially distributed number of events $\mathbf{P}(N_t = k) = C_n^k \theta(t)^k (1 - \theta(t))^{n-k}$, and claim sizes that after centering are considered as strictly φ -sub-Gaussian random variables. Recall, that ξ is a φ -sub-Gaussian random variable, if $\mathbf{E}\xi = 0$ and there exists such a constant $a > 0$ that $\mathbf{E} \exp(\lambda \xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda))$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$.

We assume also that probability of event $\theta(t)$ satisfies assumption that $|\theta(t) - \theta(s)| \leq \mu|t - s|$ for some $\mu > 0$, and amount $f(t)$ of insurance premiums received during time t is a continuous monotonically increasing function, such that $|f(u) - f(v)| \leq \delta(u - v)$ for some continuous monotonically increasing function δ .

Estimates for probability $\mathbf{P}\left(\sup_t (\sum_{i=1}^{N_t} Y_i - f(t)) > x\right)$ of exceeding a monotone increasing continuous curve by such a binomial sum of risks are obtained for any level $x > 0$. In particular, the ruin probability estimate is derived for the risk process in case of linearly incoming premiums.

Key Words: binomial distribution, φ -sub-Gaussian random variables, ruin probability.

Communicated by Dr. Rozora I.V.

1 Вступ

Розглянемо портфель страхової компанії із n незалежних однорідних ризиків, кожен з яких може викликати не більше однієї страхової події (наприклад, критичної хвороби чи смерті застрахованої особи). Запишемо відповідний процес ризику в такому вигляді:

$$X(t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

де u – початковий капітал страхової компанії, $C > 0$ – інтенсивність надходження страхових внесків та

(I) N_t – процес, що описує число страхових подій, які сталися на інтервалі від 0 до

t відповідно до біноміального розподілу $\mathbf{P}(N_t = k) = C_n^k \theta(t)^k (1 - \theta(t))^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$, де $\theta(t)$ – неперервна функція, що описує ймовірність настання страхової події впродовж часу $[0, t]$, тобто $\theta(0) = 0$, $\theta(+\infty) = 1$, $\theta(t_1) \leq \theta(t_2)$ для довільних $t_1 < t_2$. Крім того, вважатимемо, що числа подій, що сталися на неперетинних часових інтервалах, є незалежними.

(II) Y_i – незалежні однаково розподілені випадкові величини страхових виплат.

(III) N_t та послідовність випадкових величин $(Y_1, Y_2, \dots)$ – незалежні.

Процес ризику (1.1) також можна подати так:

$$X(t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N_t} (Y_i + \alpha) = u + (C - \alpha\mu)t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

де α – середній розмір страхової виплати. Припустимо також, що

(IV) Y_i належать простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ випадкових величин.

Про властивості класів φ -субгауссових та строго φ -субгауссових випадкових величин і процесів можна дізнатися в книгах Булдігіна В.В. і Козаченка Ю.В. [2], Василик О.І., Козаченка Ю.В. і Ямненка Р.Є. [1].

Надалі ми будемо вивчати властивості суми виплат вигляду

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (1.2)$$

для яких виконуються вищенаведені умови.

Зауважимо, що в роботах [6, 7] досліджуються властивості подібних сум із φ -субгауссовими доданками, де число доданків $N(t)$ описується пуассонівським процесом.

Робота складається зі вступу та двох розділів. У розділі 2 наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин із простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, які далі застосовуються для дослідження властивостей сум (1.2). Основні результати наведено у розділі 3, а саме, отримано оцінки для ймовірності перевищення такими φ -субгауссовими сумами заданої кривої.

2 Необхідні відомості

У цьому розділі наведено необхідні означення [1, 2, 3] та результати, отримані для φ -субгауссових випадкових величин та процесів [1, 4].

Означення 2.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орліча, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Означення 2.2. Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ – деяка N -функція Орліча. Функція φ^* така, що $\varphi^*(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$, називається перетворенням Юнга – Фенхеля функції φ .

Умова Q. Для N -функції φ виконується умова Q, якщо $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0$. Можливо, що $C = +\infty$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 2.3. Нехай φ – N -функція Орліча, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ -субгауссових випадкових величин), якщо $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}\exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)).$$

Теорема 2.1. [2] Простір $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln \mathbf{E}\exp(\lambda\xi))}{|\lambda|}$$

та для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\exp(\lambda\xi) &\leq \exp(\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))), \\ (\mathbf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C\tau_\varphi(\xi), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $C > 0$ – деяка стала.

Означення 2.4. Нехай (T, ρ) – деякий псевдометричний або метричний простір. Метричною ентропією (відносно псевдометрики/метрики ρ) називається функція $H_T(\varepsilon) := \ln N_T(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, де $N_T(\varepsilon)$ – це метрична масивність множини T , тобто, кількість елементів у найменшому ε -покритті цієї множини.

Означення 2.5. Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ -субгауссовим (тобто, належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Приклад 2.1. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

Означення 2.6. Сім'я Δ випадкових величин із простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ -субгауссовою (позначається як $\Delta \in \text{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої зліченної множини I , $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$, та для довільних $\lambda_i \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right) \leq C_\Delta \left(\mathbf{E}\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ .

Означення 2.7. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ -субгауссовим (тобто, $X \in \text{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ -субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу X та позначається C_X .

Нехай (T, ρ) – псевдометричний сепарабельний простір із псевдометрикою ρ . Розглянемо сепарабельний φ -субгауссовий процес $X = (X(t), t \in T)$. Припустимо, що існує неперервна функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, яка монотонно зростає і $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h). \quad (2.3)$$

Зокрема, таку властивість має функція $\sigma(h) = \sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s))$, якщо процес $X(t)$ є неперервним у нормі τ_φ .

3 Біноміальні φ -субгауссові суми

Отже, розглянемо суму випадкового числа φ -субгауссових виплат вигляду (1.2).

Лема 3.1. Нехай $\{S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \geq 0\}$ – випадковий процес, для якого виконуються припущення (I)–(IV). Тоді для всіх $0 \leq st < s$ і $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються такі нерівності:

$$\mathbb{E} \exp\{\lambda S(t)\} \leq (\theta(t) \exp\{\varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(t))^n, \quad (3.1)$$

$$\mathbb{E} \exp\{\lambda(S(t) - S(s))\} \leq ((\theta(t) - \theta(s)) \exp\{\varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(t) + \theta(s))^n \quad (3.2)$$

та

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{N_t} Y_n - \sum_{k=1}^{N_s} Y_k \right)^2 = n|\theta(t) - \theta(s)| \mathbb{E} Y_1^2. \quad (3.3)$$

Доведення. Оскільки $S(t)$ має складний біноміальний розподіл, то з (2.1) випливає, що

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\{\lambda S(t)\} &= \mathbb{E} \exp\{\lambda \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\} \\ &= \mathbb{E} \prod_{i=1}^{N_t} \exp\{\lambda Y_i\} = \mathbb{E} \sum_{m=0}^n \prod_{i=1}^m \exp\{\lambda Y_i\} I_{\{N_t=m\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^n \left(\prod_{i=1}^m \mathbb{E} \exp\{\lambda Y_i\} \right) \mathbb{P}(N_t = m) \\ &= \sum_{m=0}^n (\mathbb{E} \exp\{\lambda Y_1\})^m C_n^m \theta(t)^m (1 - \theta(t))^{n-m} \\ &= (\theta(t) \mathbb{E} \exp\{\lambda Y_1\} + 1 - \theta(t))^n \\ &\leq (\theta(t) \exp\{\varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(t))^n. \end{aligned}$$

Аналогічно, враховуючи, що $N_s \leq N_t$, $\mathbb{E} \exp\{\lambda(S(t) - S(s))\} = \mathbb{E} \exp\left\{\lambda \sum_{i=N_s+1}^{N_t} Y_i\right\} = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m (\mathbb{E} \exp\{\lambda Y_i\})^{m-k} \mathbb{P}(\{N_t = m\} \cap \{N_s = k\}) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m (\mathbb{E} \exp\{\lambda Y_i\})^{m-k} \mathbb{P}(\{N_t = m\} / \{N_s = k\}) \mathbb{P}(N_s = k) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m (\mathbb{E} \exp\{\lambda Y_i\})^{m-k} C_{n-k}^{m-k} (\theta(t) - \theta(s))^{m-k} (1 - \theta(t) + \theta(s))^{n-m+k} C_n^k \theta(s)^k (1 - \theta(s))^{n-k} = ((\theta(t) - \theta(s)) \exp\{\varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1))\} + 1 - \theta(t) + \theta(s))^n.$

Так як $D(S(t) - S(s) | N_t = k, N_s = l) = D\left(\sum_{i=l+1}^k Y_i\right) = (k - l)DY_i$, то $D(S(t) - S(s) | N_t, N_s) = (N_t - N_s)DY_1$. Отже, $D(S(t) - S(s)) = n(\theta(t) - \theta(s))\mathbb{E} Y_1^2$. $\square$

Дослідимо оцінки ймовірності перевищення сумами (1.2) рівня $x \geq 0$ над деякою неперервною функцією $f(t)$, яка відображає величину надходження страхових премій за час t . Розглянемо спершу умови обмеженості супремуму різниці $S(t) - f(t)$ та оцінки для експоненціального моменту цього супремуму.

Припустимо, що $|\theta(t) - \theta(s)| \leq \mu|t - s|$ для деякого $\mu > 0$. Тоді, користуючись тотожністю (3.3), у якості функції $\sigma(h)$, що задовольняє припущення (2.3) для процесу $S(t)$, виберемо

$$\sigma(h) = (\mu h \mathbb{E} Y_1^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

Лема 3.2. Нехай $X(t) = S(t) - f(t)$, де $\{S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \geq 0\}$ – випадковий процес, для якого виконуються припущення (I)–(IV). Нехай також $|\theta(t) - \theta(s)| \leq \mu|t - s|$ для деякого $\mu > 0$. Припустимо, що прирости неперервної функції $f = \{f(t), t \in \mathbf{T}\}$ обмежені монотонно зростаючою функцією $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$: $|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u, v))$, а $\{q_k, k \in \mathbf{N}\}$ – деяка послідовність, така що $q_k > 1$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} \leq 1$.

Тоді для всіх $\lambda > 0$ і $p \in (0, 1)$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in B} X(t) \right\} &\leq \prod_{k=1}^{\infty} \left(N_B \left(\frac{(\beta p^k)^2}{\mu E Y_1^2} \right) \right)^{\frac{1}{q_k}} \\ &\times \sup_{u \in B} \left[(\theta(u) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_{\varphi}(Y_1)) \} + 1 - \theta(u))^{\frac{n}{q_1}} \times \right. \\ &\quad \times \exp \{ -\lambda f(u) \} \left. \times \left(\frac{(\beta p^k)^2}{E Y_1^2} \exp \{ \varphi(q_k \lambda \tau_{\varphi}(Y_1)) \} + 1 \right)^{\frac{n}{q_k}} \times \right. \\ &\quad \times \exp \left\{ \lambda \delta \left(\frac{(\beta p^k)^2}{\mu E Y_1^2} \right) \right\} \left. \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Доведення. Покладемо $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}(\beta p^k) = \frac{(\beta p^k)^2}{\mu E Y_1^2}$ і позначимо через V_{ε_k} множину центрів замкнених куль радіусу ε_k , яка утворює мінімальне покриття компакту B . Кількість точок у множині V_{ε_k} дорівнює $N_B(\varepsilon_k)$. Із леми 3.1 і нерівності Чебишова випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{ |S(t) - S(s)| > \varepsilon \} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{N_t} Y_n - \sum_{k=1}^{N_s} Y_k \right)^2 \\ &= \varepsilon^{-2} n \mu |\theta(t) - \theta(s)| E Y_1^2. \end{aligned}$$

Отже, процес $S(t)$ і, відповідно, процес $X(t) = S(t) - f(t)$ неперервні за ймовірністю. Якщо сепарабельний випадковий процес на (B, ρ) неперервний за ймовірністю, тоді будь-яка зліченна скрізь щільна по відношенню до ρ множина може розглядатися як множина сепарабельності цього процесу. Таким чином, множина $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{\varepsilon_k}$ є сепарантою процесу X , і з ймовірністю одиниця виконується рівність

$$\sup_{t \in B} X(t) = \sup_{t \in V} X(t). \quad (3.6)$$

Розглянемо відображення $\alpha_n = \{\alpha_n(t), n = 0, 1, \dots\}$ множини V в V_{ε_n} , де $\alpha_n(t)$ – точка з множини V_{ε_n} така, що $\rho(t, \alpha_n(t)) = |t - \alpha_n(t)| < \varepsilon_n$. Якщо $t \in V_{\varepsilon_n}$, тоді $\alpha_n(t) = t$. Якщо ж існує кілька таких точок з множини V_{ε_n} , що

$\rho(t, \alpha_n(t)) < \varepsilon_n$, тоді виберемо одну з них і позначимо через $\alpha_n(t)$. Застосуємо нерівність Чебишова. Із (2.1) і леми 3.1 випливає, що

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{ |S(t) - S(\alpha_n(t))| > p^{\frac{n}{2}} \} &\leq \frac{\mathbb{E}(S(t) - S(\alpha_n(t)))^2}{p^n} \\ &= \frac{n \mu Y_1^2 |t - \alpha_n(t)|}{p^n} < \frac{n \mu Y_1^2 \varepsilon_n}{p^n} = \frac{\beta^2 p^n}{\mu Y_1^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Остання нерівність означає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \{ |S(t) - S(\alpha_n(t))| > p^{\frac{n}{2}} \} < \infty.$$

Тому з леми Бореля-Кантеллі випливає, що $S(t) - S(\alpha_n(t)) \rightarrow 0$ і, відповідно, $X(t) - X(\alpha_n(t)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ з ймовірністю одиниця. Множина V зліченна, отже, $X(t) - X(\alpha_n(t)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всіх t одночасно. Нехай t – довільна точка з множини V . Позначимо через $t_m = \alpha_m(t)$, $t_{m-1} = \alpha_{m-1}(t_m)$, $\dots$, $t_1 = \alpha_1(t_2)$ для будь-якого $m \geq 1$. Тоді для всіх $m \geq 2$ виконується така нерівність: $X(t) = X(t_1) + \sum_{k=2}^m (X(t_k) - X(t_{k-1})) + X(t) - X(\alpha_m(t)) \leq \max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) + \sum_{k=2}^m \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u)) + X(t) - X(\alpha_m(t)))$. Тому з (3.6) випливає, що з ймовірністю одиниця $\sup_{t \in B} X(t) = \sup_{t \in V} X(t) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) + \sum_{k=2}^m \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) \right)$.

Далі, застосовуючи нерівність Гельдера і лему Фату, для всіх $\lambda > 0$ отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in B} X(t) \right\} &\leq \mathbb{E} \liminf_{m \rightarrow \infty} \exp \left\{ \lambda \left(\max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) + \sum_{k=2}^m \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) \right) \right\} \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \exp \left\{ \lambda \left(\max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) + \sum_{k=2}^m \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) \right) \right\} \\ &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\mathbb{E} \exp \{ q_1 \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) \} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &\times \prod_{k=2}^m \left(\mathbb{E} \exp \left\{ q_k \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) \right\} \right)^{\frac{1}{q_k}} \\ &\leq \left(\mathbb{E} \exp \left\{ q_1 \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) \right\} \right)^{\frac{1}{q_1}} \times \end{aligned}$$

$\times \prod_{k=2}^{\infty} \left(\mathbb{E} \exp \left\{ q_k \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) \right\} \right)^{\frac{1}{q_k}}$ **Лема 3.3.** Припустимо, що умови леми 3.2 виконуються та

$$= I_1 \cdot \prod_{k=2}^{\infty} I_k.$$

$$\int_0^{\beta} H_B \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) du < \infty, \quad (3.8)$$

Розглянемо окремо кожен множник I_k . Із леми 3.1 випливає, що

Тоді для всіх $p \in (0, 1)$, $0 \leq \beta \leq \left(\frac{\mu(b-a)EY_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$, $\mathbb{E} \exp \{q_1 \lambda S(u)\} \leq (\theta(u) \exp\{\varphi(\lambda \tau_{\varphi}(Y_1))\} + 1 - \theta(u))^{n_1} \leq EY_1^2$ і $\lambda > 0$ виконується нерівність

Відповідно, $I_1 \leq$

$$\left(\sum_{u \in V_{\varepsilon_1}} \mathbb{E} \exp \{q_1 \lambda S(u)\} \exp \{-q_1 \lambda f(u)\} \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in B} (S(t) - f(t)) \right\} \leq Z(\lambda, p, \beta), \quad (3.9)$$

де $Z(\lambda, p, \beta) =$

$$\leq \left(\sum_{u \in V_{\varepsilon_1}} \max_{u \in V_{\varepsilon_1}} (\mu u \exp\{\varphi(\lambda \tau_{\varphi}(Y_1))\} + 1)^n \right.$$

$$= \exp \left\{ W(\lambda, p, \beta) + \frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} H_B \left(\frac{u^2}{\mu EY_1^2} \right) du \right\} \times$$

$$\exp \{-q_1 \lambda f(u)\} \Big)^{\frac{1}{q_1}} \leq (N_B(\varepsilon_1))^{\frac{1}{q_1}} \times$$

$$\times \exp \left\{ n \frac{\beta^2(1-p)}{\mu EY_1^2} \sum_{k=2}^{\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_{\varphi}(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) + \right.$$

$$\times \sup_{u \in B} \left[(\theta(u) \exp\{\varphi(\lambda \tau_{\varphi}(Y_1))\} + 1 - \theta(u))^{\frac{n}{q_1}} \times \right. \\ \left. \times \exp\{-\lambda f(u)\} \right].$$

$$+ \lambda \sum_{k=2}^{\infty} \delta \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{\mu EY_1^2} \right) \Big\},$$

Із (3.2) також випливає, що

$$\mathbb{E} \exp \{q_k \lambda (S(u) - S(\alpha_{k-1}(u)))\} \leq (|u - \alpha_{k-1}(u)| \exp\{\varphi(\lambda \tau_{\varphi}(Y_1))\} + 1 - |u - \alpha_{k-1}(u)|)^n \leq (\mu \varepsilon_k \exp\{\varphi(q_k \lambda \tau_{\varphi}(Y_1))\} + 1)^n.$$

$$W(\lambda, p, \beta) = \inf_{v \geq \frac{1}{1-p}} \left(\frac{1}{v} H_B \left(\frac{(\beta p)^2}{\mu EY_1^2} \right) + \right.$$

А значить, із припущення про обмеженість приростів функції f , маємо

$$+ \sup_{u \in B} \left[\frac{n}{v} \ln (\theta(u) \exp\{\varphi(\lambda \tau_{\varphi}(Y_1))\} + 1 - \theta(u)) - \lambda f(u) \right].$$

$$I_k \leq \left(N_B(\varepsilon_k) \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} \mathbb{E} \exp \{q_k \lambda (S(u) - \right.$$

Доведення. З леми 3.2 випливає, що для всіх $q_k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, таких що $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} \leq 1$, та довільного $\lambda > 0$ справедлива нерівність

$$S(\alpha_{k-1}(u))) \} \exp \{-q_k \lambda (f(u) - f(\alpha_{k-1}(u)))\} \Big)^{\frac{1}{q_k}}$$

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in B} X(t) \right\} \leq \exp \left\{ \frac{1}{q_1} H_B(\varepsilon_1) + \right.$$

$$\leq (N_B(\varepsilon_k))^{\frac{1}{q_k}} \left(\max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (\mu \varepsilon_k \exp\{\varphi(q_k \lambda \tau_{\varphi}(Y_1))\} + 1)^n \exp\{q_k \lambda \delta(\rho(u, \alpha_{k-1}(u)))\} \right)^{\frac{1}{q_k}}$$

$$\sup_{u \in B} \left[\frac{n}{q_1} \ln (\theta(u) \exp\{\varphi(\lambda \tau_{\varphi}(Y_1))\} + 1 - \theta(u)) - \lambda f(u) \right] \Big\}$$

$$\leq (N_B(\varepsilon_k))^{\frac{1}{q_k}} (\mu \varepsilon_k \exp\{\varphi(q_k \lambda \tau_{\varphi}(Y_1))\} + 1)^{\frac{n}{q_k}}$$

$$\times \exp \left\{ \lambda \sum_{k=2}^{\infty} \delta(\varepsilon_k) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{q_k} \left[H_B(\varepsilon_k) + \right. \right.$$

$$\times \exp\{\lambda \delta(\varepsilon_k)\} \Bigg\} = \left(N_B \left(\frac{(\beta p^k)^2}{\mu EY_1^2} \right) \right)^{\frac{1}{q_k}} \times$$

$$+ n \ln (\mu \varepsilon_k \exp\{\varphi(q_k \lambda \tau_{\varphi}(Y_1))\} + 1) \Bigg\}. \quad (3.10)$$

$$\times \left(\frac{(\beta p^k)^2}{EY_1^2} \exp\{\varphi(q_k \lambda \tau_{\varphi}(Y_1))\} + 1 \right)^{\frac{n}{q_k}}$$

$$\text{де } \varepsilon_k = \frac{(\beta p^k)^2}{\mu EY_1^2}.$$

$$\times \exp \left\{ \lambda \delta \left(\frac{(\beta p^k)^2}{\mu EY_1^2} \right) \right\}.$$

Нехай $q_1 = v$, де v – таке число, що $v \geq \frac{1}{1-p}$, і для $k = 2, 3, \dots$

Звідки і випливає твердження леми. $\square$

$$q_k = \frac{1}{\lambda \tau_{\varphi}(Y_1)} \varphi^{(-1)} \left(\ln \left[-1 + \right. \right. \quad (3.11)$$

$$+ \frac{1}{\mu \varepsilon_k} \exp \left\{ H_B(\varepsilon_k) + \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) \right\} \Bigg],$$

Так як для всіх $k \geq 2$ при $\beta p^2 \leq \mathbf{E}Y_1^2$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_k} &< \frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{\varphi^{(-1)} \left(\ln \left[-1 + \frac{1}{\mu \varepsilon_k} \exp \left\{ \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) \right\} \right] \right)} \\ &\leq \frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{\varphi^{(-1)} \left(\varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) \right)} = p^{k-1}(1-p), \text{ то} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} &< \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}(1-p) = 1. \end{aligned}$$

Розглянемо $\tilde{Z}(p, \lambda) =$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{H_B(\varepsilon_k) + n \ln \left(\mu \varepsilon_k \exp \{ \varphi(q_k \lambda \tau_\varphi(Y_1)) \} + 1 \right)}{q_k}.$$

Для послідовності q_k із (3.11) маємо $\tilde{Z}(p, \lambda) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{H_B(\varepsilon_k)}{q_k} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n}{q_k} \left(H_B(\varepsilon_k) + \frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) \\ &< (n+1)(1-p) \sum_{k=2}^{\infty} H_B(\varepsilon_k) p^{k-1} + \\ &+ \frac{\beta^2(1-p)}{\mu \mathbf{E}Y_1^2} \sum_{k=2}^{\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right). \quad (3.12) \end{aligned}$$

Функція $H_B \left(\frac{u^2}{\mu \mathbf{E}Y_1^2} \right) = H_B(\sigma^{(-1)}(u))$ є спадною при $u > 0$. Тоді

$$\int_{\beta p^{k+1}}^{\beta p^k} H_B(\sigma^{(-1)}(u)) du \geq H_B(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)) \beta p^k (1-p). \quad (3.13)$$

Із нерівностей (3.12) і (3.13) маємо, що

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(p, \lambda) &\leq \frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} H_B(\sigma^{(-1)}(u)) du + \\ &+ \frac{\beta^2(1-p)}{\mu \mathbf{E}Y_1^2} \sum_{k=2}^{\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right). \quad (3.14) \end{aligned}$$

Тому оцінка (3.8) випливає з нерівностей (3.10) та (3.14). $\square$

Застосовуючи нерівність Чебишова до леми 3.3, можна отримати теорему, що містить умови обмеженості з ймовірністю одиниця та оцінки ймовірності виходу траєкторій процесу $S(t)$ за рівень, визначений деякою кривою.

Теорема 3.1. Нехай для процесу $\{S(t), t \in B\}$, виконуються умови леми 3.3, а $r = \{r(u), u \geq 1\}$ – така неспадна неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, а $s(t) = r(\exp\{t\}), t \geq 0$, є опуклою функцією. Тоді якщо $\int_0^\beta r \left(N_B \left(\frac{u^2}{\mu \mathbf{E}Y_1^2} \right) \right) du < \infty$, то для всіх $0 \leq \beta \leq \left(\frac{\mu(b-a)\mathbf{E}Y_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$ справджуються нерівності

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B} (S(t) - f(t)) > x \right\} \leq Z_r(\beta, x),$$

$$\mathbf{P} \left\{ \inf_{t \in B} (S(t) - f(t)) < -x \right\} \leq Z_r(\beta, x),$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B} |S(t) - f(t)| > x \right\} \leq 2Z_r(\beta, x),$$

де $Z(p, \beta, x) =$

$$\begin{aligned} &= \inf_{p \in (0,1)} r^{(-1)} \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} r \left(N_B \left(\frac{u^2}{\mu \mathbf{E}Y_1^2} \right) \right) du \right) \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ \frac{n\beta^2(1-p)}{\mathbf{E}Y_1^2} \sum_{k=2}^{\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) + \right. \\ &+ W(\lambda, p, \beta) + \lambda \sum_{k=2}^{\infty} \delta \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{\mu \mathbf{E}Y_1^2} \right) - \lambda x \Bigg\}, \\ W(\lambda, p, \beta) &= \inf_{v \geq \frac{1}{1-p}} \left(\frac{1}{v} H_B \left(\frac{(\beta p)^2}{\mu \mathbf{E}Y_1^2} \right) + \right. \\ &+ \sup_{u \in B} \left[\frac{n}{v} \ln \left(\theta(u) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1)) \} + 1 - \theta(u) \right) - \lambda f(u) \right] \Bigg). \end{aligned}$$

Доведення. Скористаємось доведенням леми 3.3. Вибравши відповідні q_k (див. (3.11)), матимемо для довільних $\lambda > 0, p \in (0, 1)$ і $v \geq \frac{1}{1-p}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in B} X(t) \right\} &\leq \exp \left\{ \frac{1}{v} H_B(\varepsilon_1) + \right. \\ \sup_{u \in B} \left[\frac{n}{v} \ln \left(\theta(u) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1)) \} + 1 - \theta(u) \right) - \lambda f(u) \right] & \\ + \lambda \sum_{k=2}^{\infty} \delta \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{\mu \mathbf{E}Y_1^2} \right) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n+1}{q_k} H_B(\varepsilon_k) + & \\ + n \frac{\beta^2(1-p)}{\mathbf{E}Y_1^2} \sum_{k=2}^{\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) \Bigg\}. & \quad (3.15) \end{aligned}$$

Згідно умови теореми функція $s(t) = r(\exp\{t\})$ є опуклою, тому для будь-яких $x_i \geq 0$

та $\delta_i > 0, i = \overline{1, \infty}$, таких, що $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = 1$, маємо

$$s \left(\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i s(x_i). \text{ Якщо ж } \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i < 1, \text{ то}$$

$$s \left(\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i \right) = s \left(\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i x_i + 0 \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \right) \right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i s(x_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \right) s(0) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i s(x_i). \quad (3.16)$$

Із нерівностей (3.15) і (3.16) випливає, що

$$\exp \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n+1}{q_k} H_B \left(\sigma^{(-1)} \left(\beta p^k \right) \right) \right\} =$$

$$r^{(-1)} \left(r \left(\exp \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n+1}{q_k} \ln N_B \left(\sigma^{(-1)} \left(\beta p^k \right) \right) \right\} \right) \right)$$

$$\leq r^{(-1)} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{n+1}{q_k} s \left(\ln N_B \left(\sigma^{(-1)} \left(\beta p^k \right) \right) \right) \right)$$

$$\leq r^{(-1)} \left((n+1)(1-p) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=2}^{\infty} p^{k-1} r \left(N_B \left(\sigma^{(-1)} \left(\beta p^k \right) \right) \right) \right). \quad (3.17)$$

Функція $N_B \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) = N_B \left(\frac{u^2}{\mu E Y_1^2} \right)$ спадає при $u > 0$. Тоді $\int_{\beta p^{k+1}}^{\beta p^k} r \left(N_B \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) \right) du \geq$
 $r \left(N_B \left(\sigma^{(-1)}(\beta p^k) \right) \right) \beta p^k (1-p)$ та

$$(n+1) \sum_{k=2}^{\infty} (1-p) p^{k-1} r \left(N_B \left(\sigma^{(-1)} \left(\beta p^k \right) \right) \right)$$

$$\leq \frac{n+1}{\beta p} \sum_{k=2}^{\infty} \int_{\beta p^{k+1}}^{\beta p^k} r \left(N_B \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) \right) du$$

$$= \frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} r \left(N_B \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) \right) du. \quad (3.18)$$

Отже, твердження цієї теореми випливає з (3.15), (3.17), (3.18) та нерівності Чебишова. $\square$

Теорема 3.2. Нехай $X(t) = S(t) - f(t)$, де $\{S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \geq 0\}$ – випадковий процес, для

якого виконуються припущення (I)–(IV). Нехай також $|\theta(t) - \theta(s)| \leq \mu |t - s|$ для деякого $\mu > 0$. Припустимо, що прирости неперервної функції $f = \{f(t), t \in \mathbf{T}\}$ обмежені монотонно зростаючою функцією $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$: $|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u, v))$, а $r = \{r(u), u \geq 1\}$ – така неспадна неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, а $s(t) = r(\exp\{t\}), t \geq 0$, є опуклою функцією. Тоді для всіх $0 \leq \beta \leq \left(\frac{\mu(b-a)EY_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$ справджуються нерівності

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B} (S(t) - f(t)) > x \right\} \leq Z_r(\beta, x),$$

$$\mathbf{P} \left\{ \inf_{t \in B} (S(t) - f(t)) < -x \right\} \leq Z_r(\beta, x),$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B} |S(t) - f(t)| > x \right\} \leq 2Z_r(\beta, x),$$

де $Z_r(\beta, x) =$

$$= \inf_{p \in (0,1)} r^{(-1)} \left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} r \left(N_B \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) \right) du \right) \times$$

$$\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} n \ln \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{EY_1^2} \exp \left\{ \varphi \left(\frac{\lambda \tau_{\varphi}(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) \right\} \right. \right.$$

$$\left. \left. + 1 \right) + \eta_{\varphi}(\lambda, p) + \lambda \delta \left(\frac{(\beta p^{k-1})^2}{\mu EY_1^2} \right) \right\} - \lambda x \Big\},$$

$$\eta_{\varphi}(\lambda, p) = \sup_{u \in B} \left[n(1-p) \times \right.$$

$$\left. \times \ln \left(\theta(u) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_{\varphi}(Y_1)) \} + 1 - \theta(u) \right) - \lambda f(u) \right].$$

Доведення. Використаємо лему 3.2, вибравши послідовність $q_k = \frac{1}{(1-p)p^{k-1}}$, де $p \in (0, 1)$. Покладемо також $\eta_{\varphi}(\lambda, p) = \sup_{u \in B} \left[n(1-p) \times \right.$
 $\left. \times \ln \left(\theta(u) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_{\varphi}(Y_1)) \} + 1 - \theta(u) \right) - \lambda f(u) \right].$
Тоді $E \exp \{ \lambda \sup_{t \in B} X(t) \} \leq$
 $\leq \exp \left\{ \eta_{\varphi}(\lambda, p) + \sum_{k=1}^{\infty} (1-p) p^{k-1} H_B \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{\mu EY_1^2} \right) + \right.$
 $\left. + \sum_{k=2}^{\infty} n \ln \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{EY_1^2} \exp \left\{ \varphi \left(\frac{\lambda \tau_{\varphi}(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) \right\} + 1 \right) \right.$
 $\left. + \lambda \delta \left(\frac{(\beta p^{k-1})^2}{\mu EY_1^2} \right) \right\}. \quad (3.19)$

Із властивостей функції $r(t)$ випливає, що

$$\exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1-p) p^{k-1} H_B \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{\mu EY_1^2} \right) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 & r^{(-1)} \left(r \left(\exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)p^{k-1} \ln N_B \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{\mu E Y_1^2} \right) \right\} \right) \right) \\
 & \leq r^{(-1)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)p^{k-1} r \left(N_B \left(\sigma^{(-1)} \left(\beta p^k \right) \right) \right) \right) \\
 & \leq r^{(-1)} \left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} r \left(N_B \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) \right) du \right), \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

де функція $\sigma(u)$ визначена в (3.4). Тоді твердження теореми випливає з леми 3.2, нерівно-

стей (3.19), (3.20) і Чебишова. $\square$

Висновки

У роботі отримано оцінки ймовірності банкрутства процесу ризику, що описується сумою випадкового біноміально розподіленого числа доданків, які є φ -субгауссовими випадковими величинами позовів, а інтенсивність надходження премій є монотонно зростаючою неперервною кривою, зокрема, лінійною.

Список використаних джерел

1. *Василик О.І.* φ -Субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко. – К: ВПЦ “Київський університет”, 2008. – 231 с.
2. *Buldygin V. V.*, Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.
3. *Giuliano Antonini R.* Space of φ -sub-Gaussian random variables / R. Giuliano Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina. // *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5), 2003. – 27. – P.92–124.
4. *Kozachenko Yu.* Upper estimate of overrunning by $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function / Yu. Kozachenko, R. Yamnenko, O. Vasylyk // *Random Oper. Stoch. Equ.*, 2005. – 13, no. 2. – P.111–128.
5. *Yamnenko R.* Random process from the class $V(\varphi, \psi)$: Exceeding a curve / R. Yamnenko, O. Vasylyk // *Theory of Stochastic Processes*. – 2007. – Vol.13 (29), no.4. – P. 219–232.
6. *Vasylyk, O.* Some properties of random Poisson sums with φ -sub-Gaussian terms / O. Vasylyk, R. Yamnenko // *Prykl. Stat., Aktuarna Finans. Mat.* – 2007. – Vol.1. – P. 133–148.
7. *Saienko M.I.* Sub-Gaussian risk processes with dependent moments of claims incoming and contracts signing/ M.I. Saienko, R.E. Yamnenko // *Nauk. visnyk Uzngorod. Un-ty.* – 2013. – Vol.24, Iss.2. – P. 176–184.

References

1. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *φ -sub-Gaussian random process*, Kyiv: VPC “Kyivskyi Universytet”, 231 p. (In Ukrainian)
2. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*. American Mathematical Society, Providence, RI, 257 p.
3. GIULIANO ANTONINI, R., KOZACHENKO, YU. V., NIKITINA, T. (2003) Space of φ -sub-Gaussian random variables. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5) 27, p.92–124.
4. KOZACHENKO, YU., YAMNENKO, R., VASYLYK, O. (2005) Upper estimate of overrunning by $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function. *Random Oper. Stoch. Equ.* 13, no. 2, p.111–128.
5. YAMNENKO, R., VASYLYK O. (2007) Random process from the class $V(\varphi, \psi)$: Exceeding a curve. *Theory of Stochastic Processes*. Vol.13 (29), no.4, p. 219–232.
6. VASYLYK O., YAMNENKO, R. (2007) Some properties of random Poisson sums with φ -sub-Gaussian terms. *Prykl. Stat., Aktuarna Finans. Mat.* Vol.1., p. 133–148.
7. SAIENKO M.I., YAMNENKO R.E. (2013) Sub-Gaussian risk processes with dependent moments of claims incoming and contracts signing. *Nauk. visnyk Uzngorod. Un-ty.* Vol.24, iss.2, p. 176–184.

Received: 12.03.2022