

УДК 514.112

DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.5>

Ірина ЛЕБЕДЕВА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.

ORCID: 0000-0001-7150-1310

e-mail: lebedyevaiv@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ангеліна ЧУБИКІНА, студентка

ORCID: 0009-0008-4340-6787

e-mail: chubykinaangelina@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

## 25 СПОСОБІВ ПІДКОРИТИ ТЕОРЕМУ ПІФАГОРА: ВІД КЛАСИКИ ДО СУЧАСНОСТІ

Геометрія володіє багатьма скарбами: один з них – це теорема Піфагора  
Йоганн Кеплер

***Анотація.** Читачам пропонується глибоке та всебічне дослідження теореми Піфагора, однієї з найвідоміших та найважливіших теорем геометрії. У статті представлено двадцять п'ять різних способів доведення цієї теореми, що охоплюють широкий спектр математичних методів та концепцій. Власне демонструється, що теорема Піфагора може бути доведена як із використанням класичних геометричних підходів, так і за допомогою сучасних математичних інструментів. Читачі зможуть ознайомитися з доведеннями, що базуються на метричних співвідношеннях у трикутнику, тригонометричних властивостях кутів, елементах векторної алгебри, властивостях кола, дотичної, хорди та січної, а також з більш складними доведеннями, що використовують диференціальні рівняння та механіку. Стаття буде цікава та корисна для широкого кола читачів, включаючи учнів старших класів, студентів математичних спеціальностей, вчителів математики та всіх, хто цікавиться історією та розвитком математичних знань.*

***Ключові слова:** геометрія; теорема Піфагора; прямокутний трикутник; алгебра; диференціальні рівняння; механіка.*

### 1. Вступ

Теорема Піфагора була відома ще до Піфагора Самоського (близько 570 - 490 рр. до н.е.), але саме він вважається її автором та першим, хто дав їй строге математичне обґрунтування. Сучасні антикознавці обґрунтовано вважають, що Піфагор не написав жодного твору. Ба більше, інформація про життя та вчення Піфагора ґрунтується на відомостях із джерел, написаних через століття після його смерті. У створеній Піфагором однойменній школі як звеличували мудрість свого засновника, так і приписували йому всі досягнення наступних поколінь. Відтак встановити, кому ж саме належить те чи інше положення – Піфагору чи його послідовникам V-IV століть, – нині неможливо.

Безпосередні учні Піфагора також не залишили письмових свідчень про його вчення. Перша книга про піфагорійців та напрямки їх досліджень написана Філолаєм

Кротонським (470 - 400 рр.), який народився через 20 років після смерті Піфагора. Піфагор та його учні займалися широким колом проблем. Це не тільки математика, але й філософія, музика та інші науки.

Піфагорійці вірили, що числа мають містичне значення та впливають на всі аспекти життя. Саме з нумерології Піфагора виникла ідея, згідно з якою навколишній фізичний світ є «матрицею», в основі якої лежать числа. У матриці немає можливості побачити числову суть буття. Числова сутність світу доступна душі після смерті, після виходу із тіла. Математика дає можливість пригадати колишній досвід і збагнути справжню реальність. У цьому контексті математика виступає основою метафізики.

Все ж легендарним математичним фактом, який невід'ємно асоціюють з Піфагором, є відома теорема про співвідношення сторін у прямокутному трикутнику. Вона має велике значення не лише в геометрії, а й в інших галузях математики – використовується для розв'язування багатьох задач, пов'язаних з прямокутними трикутниками, зокрема, для знаходження довжин сторін, площі та інших параметрів, обчислення відстаней, кутів, координат тощо. Теорема Піфагора також має застосування в фізиці, інженерії, будівництві та інших науках і прикладних сферах.

## **2. Основна частина**

Теорема Піфагора є однією з найвідоміших теорем геометрії, яка встановлює співвідношення між сторонами прямокутного трикутника. Учні вивчають цю теорему у курсі геометрії 8 класу (Істер, 2021; Мерзляк, Полонський & Якір, 2021).

**Теорема 1. (теорема Піфагора).** *У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сума квадратів катетів.*

Якщо позначити довжини катетів як  $a$  і  $b$ , а довжину гіпотенузи як  $c$ , то теорему Піфагора можна записати формулою:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Існує близько 500 різних доведень теореми Піфагора, деякі з них є досить простими та наочними, інші – більш складними та абстрактними. У даній статті ми підібрали двадцять п'ять доведень цього математичного факту, так щоб у читачів сформувався розуміння непересічності цього, поза усяким сумнівом, геніального твердження.

### **2.1 Доведення теореми Піфагора з використанням метричних співвідношень та тригонометричних властивостей кутів**

*Доведення 1. (Доведення за означенням косинуса кута).* Нехай  $\triangle ABC$  – прямокутний трикутник,  $\angle B$  – прямий кут (рис. 1). З вершини  $B$  опустимо висоту  $BH$

на гіпотенузу  $AC$ . За означенням косинуса знайдемо  $\cos \angle A$  двома способами: з прямокутного трикутника  $AHB$  та з прямокутного трикутника  $ABC$ :

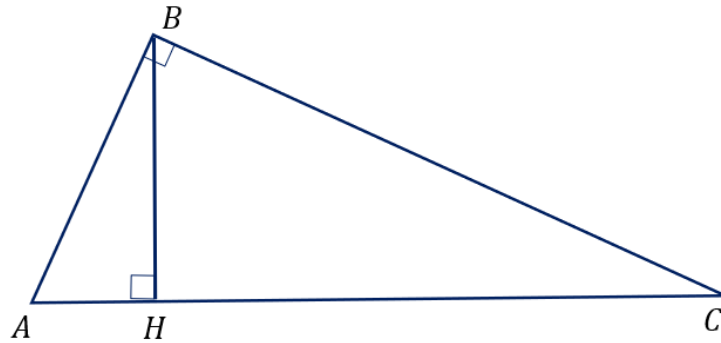


Рис. 1. Прямокутний трикутник  $ABC$

$$\cos \angle A = \frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

звідки випливає, що

$$AB^2 = AC \cdot AH \tag{1}$$

Аналогічно, знайдемо  $\cos \angle C$  двома способами: з прямокутного трикутника  $BHC$  та з прямокутного трикутника  $ABC$ :

$$\cos \angle C = \frac{HC}{BC} = \frac{BC}{AC},$$

звідки випливає, що

$$CB^2 = HC \cdot AC \tag{2}$$

Додамо почленно рівності (1) і (2), дістанемо

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AH + HC \cdot AC = AC(AH + HC) = AC \cdot AC = AC^2.$$

Отже,  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ , що й потрібно було довести. ■

*Доведення 2. (Доведення із застосуванням метричних співвідношень у прямокутному трикутнику).* Розглянемо прямокутний трикутник  $ABC$  (рис. 1) з доведення 1, де  $\angle B$  – прямий кут,  $BH$  – висота, опущена з вершини  $B$  на гіпотенузу  $AC$ . За метричними співвідношеннями у прямокутному трикутнику можемо записати:

$$AB = \sqrt{AH \cdot AC} \text{ – середнє геометричне } AH \text{ і } AC,$$

$$BC = \sqrt{HC \cdot AC} \text{ – середнє геометричне } HC \text{ і } AC.$$

Піднесемо обидві рівності до квадрату, дістанемо співвідношення (1) і (2), далі має місце доведення 1. ■

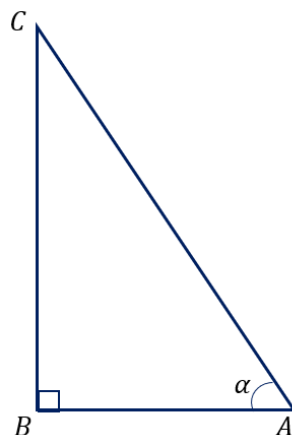


Рис. 2. Ілюстрація до міркувань доведення 3.

*Доведення 3. (Доведення на підставі основної тригонометричної тотожності).* Нехай  $ABC$  – прямокутний трикутник,  $\angle B$  – прямий кут (рис. 2). Позначимо  $\angle A = \alpha$ . Тоді, прилеглий катет

$$AB = AC \cos \alpha \quad (3)$$

Протилежний катет

$$BC = AC \sin \alpha \quad (4)$$

Піднесемо обидві частини рівностей (3) і (4) до квадрату і результати почленно додамо. Тоді

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \cos^2 \alpha + AC^2 \sin^2 \alpha = AC^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = AC^2.$$

Звідси  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ , що й потрібно було довести. ■

*Доведення 4. (Доведення за подібністю трикутників).* Нехай  $ABC$  – прямокутний трикутник,  $\angle B$  – прямий кут (рис. 1). З вершини  $B$  опустимо висоту  $BH$  на гіпотенузу  $AC$ . Маємо три подібні (за двома кутами) трикутники:  $\triangle ABC$ ,  $\triangle AHB$ ,  $\triangle BHC$ .

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}, \Rightarrow AB^2 = AC \cdot AH; \quad (5)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle BHC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{HC}{BC}, \Rightarrow BC^2 = AC \cdot HC. \quad (5)$$

Очевидно, рівності (5) і (6) ідентичні рівностям (1) і (2), тому далі, знову має місце доведення 1, а саме: додамо почленно рівності (5) і (6):

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AH + HC \cdot AC = AC(AH + HC) = AC \cdot AC = AC^2.$$

Отже,  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ , що й потрібно було довести. ■

## 2.2 Доведення теореми Піфагора з використанням елементів векторної алгебри

*Доведення 5 (Доведення із застосуванням векторної алгебри).* Нехай задано два ненульові взаємно перпендикулярні вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , ( $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ) (рис. 3). Знайдемо їх суму – вектор  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ . Обчислимо  $\vec{c}^2$ . Піднесемо до квадрату обидві частини останньої рівності, скориставшись властивостями скалярного добутку двох векторів:

$$\vec{c}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{=0} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2.$$

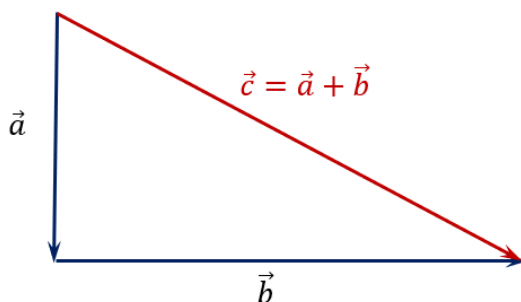


Рис. 3. Взаємно перпендикулярні вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини, тому з останньої рівності знаходимо  $\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2$ , що й потрібно було довести. ■

*Доведення 6 (Доведення методом координат).* Нехай  $AOB$  – прямокутний трикутник з катетами  $a$  і  $b$ ,  $\angle O$  – прямий кут. Введемо прямокутну декартову систему координат  $Oxy$  як показано на рис. 4. Початок координат – точка  $O$  лежить у вершині прямого кута, катети – на осях  $Ox$  та  $Oy$  відповідно. Тоді вершини трикутника мають координати:  $A(a, 0)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $B(0, b)$ ,

Довжина гіпотенузи  $AB$  дорівнює відстані між точками  $A$  і  $B$ , яку знайдемо за формулою

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

За умовою  $x_A = a$ ,  $y_A = 0$ ,  $x_B = 0$ ,  $y_B = b$ , тому

$$AB^2 = (0 - a)^2 + (b - 0)^2 = a^2 + b^2.$$

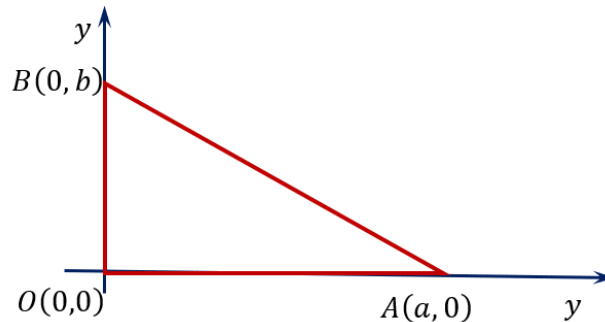


Рис. 4. Трикутник  $AOB$  в прямокутній декартовій системі координат

Очевидно, що  $OA^2 = a^2$ ,  $OB^2 = b^2$ . Відтак,  $AB^2 = OA^2 + OB^2$ , що й потрібно було довести. ■

### 2.3 Доведення теореми Піфагора із застосуванням властивостей кола, дотичної, хорди, січної.

*Доведення 7 (Доведення за властивістю січної)* (Бондар, 2024). Нехай  $ABC$  – прямокутний трикутник,  $\angle C$  – прямий кут. Побудуємо коло з центром у точці  $B$  і радіусом  $BC$  (рис. 5). Оскільки  $AC \perp BC$ , то  $AC$  – дотична до кола. Пряма  $AK$  є січною і перетинає коло в точках  $D$  і  $K$ . За властивістю січної і дотичної, проведених до кола з однієї точки, маємо:

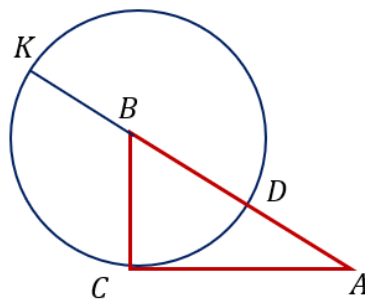


Рис. 5. Трикутник  $ABC$

$$AC^2 = AD \cdot AK. \tag{7}$$

Легко бачити, що

$$AK = AB + BK = AB + BC, \quad AD = AB - BD = AB - BC.$$

Підставимо останні рівності у співвідношення (7). Отримаємо:

$$AC^2 = AD \cdot AK = (AB - BC)(AB + BC) = AB^2 - BC^2.$$

Звідси  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , що й потрібно було довести

■

**Доведення 8 (Доведення за допомогою вписаного кола)** (Технар, 2022). Нехай задано прямокутний трикутник з катетами  $a$  і  $b$  та гіпотенузою  $c$ . Впишемо у нього коло радіуса  $r$  (рис. 6).

Обчислимо площу трикутника двома способами:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab, \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2}pr,$$

де  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$  – півпериметр трикутника,  $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$  – радіус вписаного в прямокутний трикутник кола. Прирівняємо праві частини, підставивши вирази для  $p$  і  $r$ :

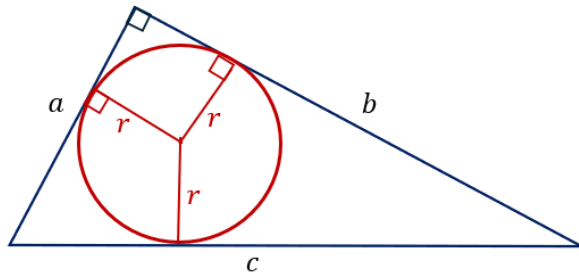


Рис. 6. Коло радіуса  $r$  вписане в прямокутний трикутник

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot \frac{1}{2}(a + b - c) \Rightarrow ab = \frac{1}{2}((a + b)^2 - c^2).$$

Звідки отримуємо  $c^2 = a^2 + b^2$ , що й потрібно було довести.

■

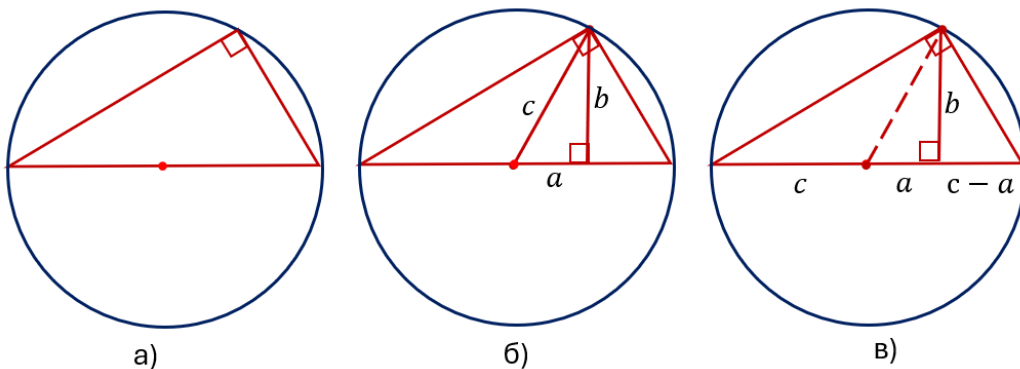


Рис. 7. Коло описане навколо прямокутного трикутника

*Доведення 9 (Доведення за допомогою описаного кола)* (Технар, 2022). Нехай задано прямокутний трикутник. Опишемо навколо нього коло, центр кола збігається з серединою гіпотенузи (рис. 7 а)). Виконаємо допоміжні побудови: з вершини прямого кута опустимо висоту на гіпотенузу та сполучимо цю вершину з центром кола. Утворився маленький прямокутний трикутник з катетами  $a$  і  $b$  та гіпотенузою  $c$  (рис. 7 б)). З центра кола виходять три радіуси довжини  $c$ . Приберемо один радіус (рис. 7 в)). За побудовою висота, опущена з вершини прямокутного трикутника має довжину  $b$  і ділить гіпотенузу на два відрізки довжинами  $c + a$  та  $c - a$ .

Застосуємо метричні співвідношення, описані у доведенні 2, згідно з якими

$$b = \sqrt{(c + a)(c - a)}.$$

Піднесемо обидві частини останньої рівності до квадрату:

$$b^2 = c^2 - a^2 \implies c^2 = a^2 + b^2.$$

Що й потрібно було довести. ■

*Доведення 10 (Доведення за допомогою теореми про перетин хорд)*. Нехай  $ABC$  – трикутник із прямим кутом у вершині  $C$ ,  $AB$  – діаметр описаного кола ( $O$  – центр кола і середина  $AB$ ),  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ .

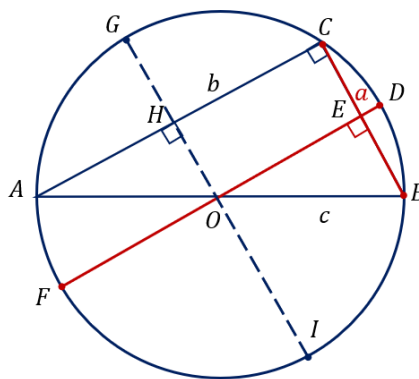


Рис. 8. Ілюстрація доведення 10

На рис. 8  $DF$  – діаметр, перпендикулярний до сторони  $BC$ , який ділить її навпіл.  $E$  і  $H$  – середини  $BC$  і  $AC$  відповідно, тобто  $EO = CH$ . За *теоремою про перетин хорд* можемо записати рівність

$$CE \cdot EB = DE \cdot EF,$$

або, через довжини сторін  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{c}{2} + \frac{b}{2}\right).$$

Після спрощення дістанемо  $a^2 = c^2 - b^2$ , звідки  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Той самий результат отримаємо, застосувавши теорему про хорди, що перетинаються, у точці  $H$ . Дійсно, оскільки  $HO = a/2$ , то за теоремою маємо

$$GH \cdot HI = AH \cdot HC \Rightarrow \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right) \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{b}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right) \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2,$$

що й потрібно було довести. ■

**Доведення 11 (Доведення за допомогою теореми Архімеда).** (Vogotolny, 2004). Нехай  $ABC$  – трикутник із прямим кутом у вершині  $C$ ,  $AB$  – діаметр описаного кола ( $O$  – центр кола і середина  $AB$ ). Якщо  $P$  – середина дуги  $ACB$ ,  $APB$  – прямокутний рівнобедрений трикутник із прямим кутом у  $P$ . Припустимо, що  $AC > BC$ , нехай  $M$  – ортогональна проєкція точки  $P$  на  $AC$ . Пряма  $PM$  перетинає  $AB$  в точці  $N$ ,  $B'$  є ортогональною проєкцією точки  $B$  на  $PM$ , як зображено на рис. 9.

Використовуючи традиційні позначення, нехай  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ .

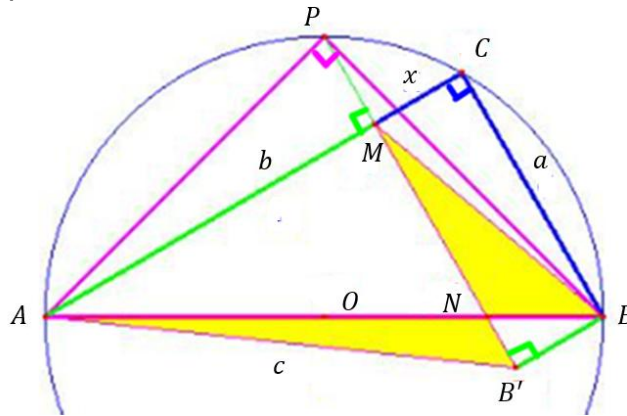


Рис. 9. Ілюстрація доведення 11

Оскільки  $BCMB'$  є прямокутником, то

$$MB' = CB = a. \tag{8}$$

Скористаємося *теоремою Архімеда про «зламану хорду» («broken chord»)*, згідно з якою

$$BC + MC = AM.$$

Нехай  $MC = x$ . Тоді

$$a + x = b - x \Rightarrow x = \frac{b - a}{2} \Rightarrow AM = b - x = b - \frac{b - a}{2} \Rightarrow$$

$$AM = \frac{a + b}{2}, \tag{9}$$

$$MC = \frac{b-a}{2}. \quad (10)$$

Оскільки  $PMC$  – рівнобедрений прямокутний трикутник з прямим кутом у вершині  $M$ , то

$$MP = MC = \frac{b-a}{2}. \quad (11)$$

Далі,

$$S_{\Delta MNB} = S_{\Delta ANB'}, \quad (12)$$

оскільки  $AM \parallel B'B$ .

Площа  $\Delta APB$  дорівнює  $c^2/4$ . Знайдемо цю площу двома способами:

I.  $S_{\Delta APB} = c^2/4$ .

II.  $S_{\Delta APB} = S_{\Delta APM} + S_{\Delta PMB} + S_{\Delta AMN} + S_{\Delta MNB} =$

$$= S_{\Delta APM} + S_{\Delta PMB} + S_{\Delta AMN} + S_{\Delta ANB'} = S_{\Delta APM} + S_{\Delta PMB} + S_{\Delta AMB'}.$$

Використовуючи (8), (9), (10), (11) для обчислення площ трикутників, отримуємо:

$$\begin{aligned} S_{\Delta APB} &= MP \cdot \frac{AM}{2} + MP \cdot \frac{MC}{2} + AM \cdot \frac{MB'}{2} = \\ &= \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot a}{2} = \frac{a^2 + b^2}{4}. \end{aligned}$$

Тобто,  $c^2/4 = (a^2 + b^2)/4$  або  $c^2 = a^2 + b^2$ , що й потрібно було довести. ■

*Доведення 12 (Доведення за допомогою теореми Птолемея). Скористаємось теоремою Птолемея: добуток довжин діагоналей вписаного в коло чотирикутника дорівнює сумі добутків довжин його протилежних сторін.*

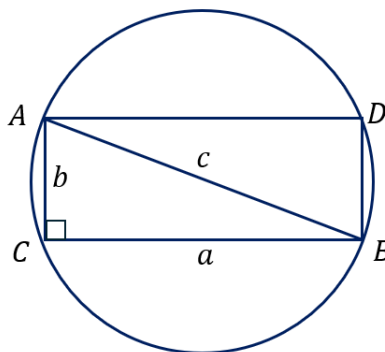


Рис. 11. Ілюстрація доведення 12

Тобто (рис. 11):

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |DB| + |CB| \cdot |AD| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

■

#### 2.4 Доведення теореми Піфагора із застосуванням допоміжних побудов, геометричних перетворень та формул обчислення площ

*Доведення 13 (Доведення за допомогою площі трапеції)* (Технар, 2022). Нехай задано відрізок  $AD$ . Розіб'ємо його точкою  $K$  на дві частини з довжинами  $a$  і  $b$  (рис. 12 а)). Опустимо до його кінців  $A$  і  $D$  перпендикуляри довжинами  $b$  та  $a$  відповідно (рис. 12 б)).

Сполучимо верхні точки перпендикулярів між собою, дістанемо трапецію  $ABCD$ . Також додатково сполучимо точки  $B$  і  $K$  та  $C$  і  $K$  як показано на рис. 12 в)). Отримали два рівні прямокутні трикутники з катетами  $a$ ,  $b$  та гіпотенузою  $c$ .

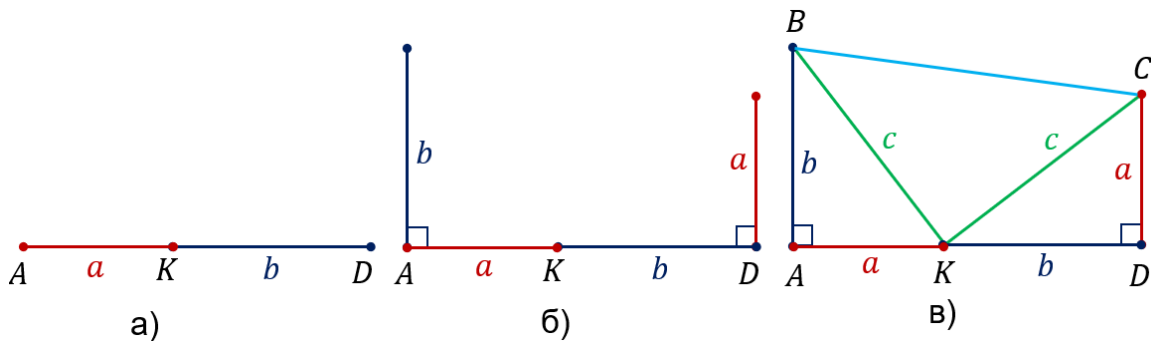


Рис. 12. Ілюстрація доведення 13

$ABCD$  – прямокутна трапеція з основою  $CD = b$ , та  $AB = a$ ,  $DA = a + b$  – висота трапеції. Обчислимо її площу двома способами.

За формулою площі трапеції маємо:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(CD + AB) \cdot AD = \frac{1}{2}(a + b)(a + b) = \frac{1}{2}(a + b)^2.$$

З другого боку, трапеція складається з прямокутних трикутників  $ABK$ ,  $BKC$ ,  $CDK$ . Тому її площа дорівнює сумі площ цих трикутників, тобто

$$S_{ABCD} = S_{ABK} + S_{BKC} + S_{CDK}.$$

Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку катетів. Отже:

$$S_{ABK} = \frac{1}{2}BA \cdot AK = \frac{1}{2}ab, \quad S_{BKC} = \frac{1}{2}BK \cdot KC = \frac{1}{2}c^2, \quad S_{CDK} = \frac{1}{2}CD \cdot DK = \frac{1}{2}ab.$$

Тоді

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2.$$

Прирівняємо праві частини рівностей:

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 = ab + \frac{1}{2}c^2,$$

$$\frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) = ab + \frac{1}{2}c^2,$$

$$\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 - ab = \frac{1}{2}c^2, \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

■

## 2.5 Доведення теореми Піфагора без слів

Доведення 14 (Доведення під девізом «Спостерігай») (Бондар, 2024). Див. рис. 13.

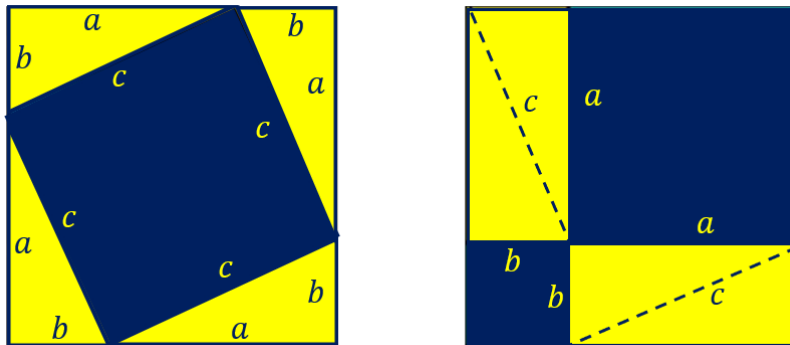


Рис. 13. Спостерігай

$$a^2 + b^2 = c^2$$

■

Доведення 15 (Доведення без слів) (Воготолпу, 2004). Авторський підхід від Едгардо Аландете з Колумбії (рис. 14).



## 2.6 Стародавні способи доведення теореми Піфагора

Доведення 17 (Давньоіндійське доведення).

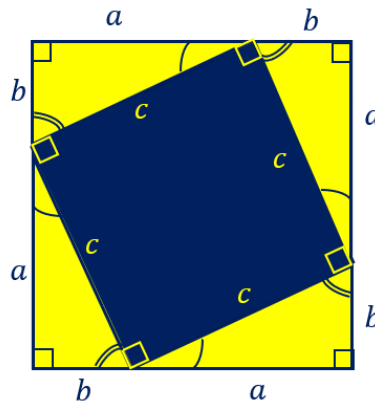


Рис. 16. Ілюстрація давньоіндійського доведення теореми Піфагора

Розташуємо чотири однакові прямокутні трикутники так, як це зображено на рисунку 16.

Чотирикутник зі сторонами  $c$  є квадратом, оскільки сума двох гострих кутів  $90^\circ$ , а розгорнутий кут –  $180^\circ$ .

Площа всієї фігури дорівнює, з одного боку, площі квадрата зі стороною  $a + b$ , а з другого – сумі площ чотирьох трикутників і внутрішнього квадрата зі стороною  $c$ :

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

■

В індійській мові санскрит, якою написані багато давньоіндійських текстів, теорема Піфагора звучить так:

«दीर्घचतुरश्रस्य अक्षया रज्जुः पार्श्वमानी तिर्यग्मानी च यत् पृथग् भूते कुरुतस् तयोः योगः कर्णस्य कृतिः»  
(*dīrghacaturaśrasya akṣayā rajjūḥ pārśvamānī tiryagmānī ca yat pṛthag bhūte kurutas tayoh yogaḥ karṇasya kṛtiḥ*)

Це можна перекласти приблизно так: «Мотузка, що проходить по діагоналі прямокутника, утворена окремо квадратами його ширини та висоти, їх сума є квадратом гіпотенузи».

Важливо зазначити, що цей варіант формулювання є одним з найбільш поширених та відповідає класичному формулюванню теореми на санскриті, хоча в різних регіонах Індії можуть використовуватися інші варіанти перекладу або формулювання теореми Піфагора.

Доведення 18 (Давньокитайське доведення 勾股弦定理). (Bogomolny, 2004; Технар, 2022).

Теорема Піфагора не має окремого ієрогліфа в китайській мові. Для її позначення використовують поєднання ієрогліфів та математичних символів. Зазвичай це виглядає так:

勾股定理 (gōu gǔ dìnglǐ) – теорема Піфагора, де:

- 勾 (gōu) – коротший катет прямокутного трикутника
- 股 (gǔ) – довший катет прямокутного трикутника
- 定理 (dìnglǐ) – теорема

Розташуємо чотири однакові прямокутні трикутники так, як це зображено на рисунку 17. Всередині утворився квадрат зі стороною  $b - a$ .

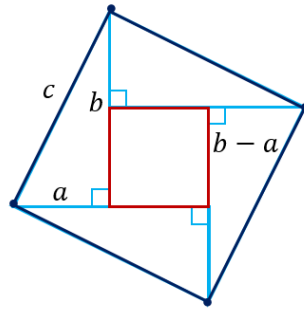


Рис. 16. Ілюстрація давньокитайського доведення теореми Піфагора

Площа всієї фігури дорівнює, з одного боку, площі квадрата зі стороною  $a + b$ , а з другого – сумі площ чотирьох трикутників і внутрішнього квадрата:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b - a)^2,$$

$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

■

**Доведення 19 (Доведення Евкліда)** (Vogtomlny, 2004; Технар, 2022). Нехай  $ABC$  – прямокутний трикутник ( $\angle BAC = 90^\circ$ ). Побудуємо квадрати  $BCED$ ,  $AHKS$ ,  $ABFG$ . Проведемо  $AL \perp BC$ . Доведемо, що прямокутник  $BMLD$  рівновеликий квадрату  $ABFG$ , а прямокутник  $MCEL$  – квадрату  $AHKS$  (рис. 17).

Проведемо відрізки  $FC$  і  $AD$ . Дійсно,

$$S_{\Delta FBC} = \frac{1}{2} S_{ABFG}, \quad S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} S_{BMLD},$$

$$\Delta ABD = \Delta FBC \Rightarrow S_{BMLD} = S_{ABFG}.$$

Проведемо відрізки  $KB$  і  $AD$ .

$$S_{\Delta KBC} = \frac{1}{2} S_{\Delta HKC}, \quad S_{\Delta ACE} = \frac{1}{2} S_{\Delta CML},$$

$$\Delta KBC = \Delta ACE \Rightarrow S_{MCEL} = S_{\Delta HKC}.$$

Тобто,  $S_{BMLD} = S_{ABFG}$ ,  $S_{MCEL} = S_{\Delta HKC}$ . Очевидно, що площа квадрата  $BCED$  дорівнює сумі площ прямокутників  $BMLD$  та  $MCEL$ :

$$S_{BCED} = S_{BMLD} + S_{MCEL} \Rightarrow S_{BCED} = S_{ABFG} + S_{\Delta HKC} \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

■

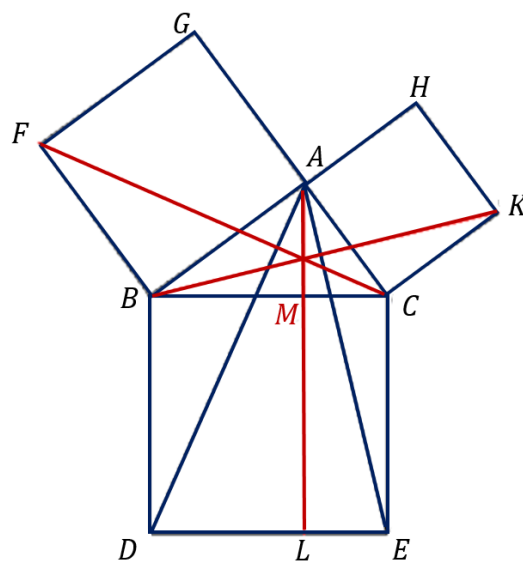


Рис. 17. Ілюстрація доведення Евкліда

## 2.7 Доведення теореми Піфагора з використанням основ аналізу та диференціальних рівнянь

Розглянемо авторський підхід, запропонований у 1988 році Майклом Харді з Університету Толедо (Vogotolny, 2004).

*Доведення 20 (Доведення Майкла Харді).* Нехай  $ABC$  – прямокутний трикутник із гіпотенузою  $BC$ . Позначимо  $AC = x$  і  $BC = y$ . Тоді, коли  $C$  рухається вздовж прямої  $AC$ ,  $x$  змінюється, а, отже, змінюється й  $y$ . Надамо змінній  $x$  нескінченно малого приросту  $dx$ . Тоді змінна  $y$  також дістала нескінченно малий приріст  $dy$  (рис. 18).

Трикутник  $CDE$  можна *наближено вважати прямокутним\** (з точністю до малих другого порядку, якщо вважати  $dx$  та  $dy$  малими першого порядку). Тоді трикутники  $CDE$  та  $ABD$  подібні (за двома кутами: спільний кут  $D$  і прямиий кут):

$$\triangle CDE \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \quad (13)$$

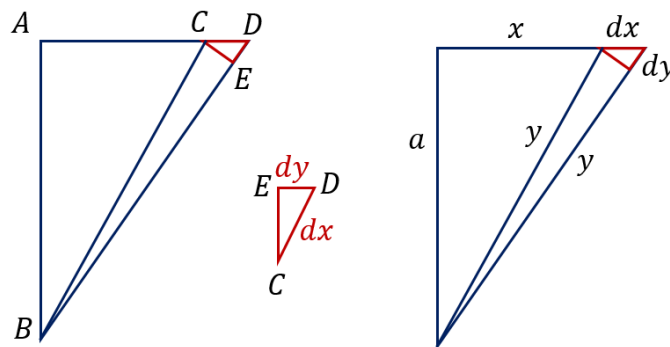


Рис. 18. Ілюстрація доведення Майкла Харді

Розглядаючи (13) як пропорцію, зробимо перетворення, яке називають відокремлення змінних у диференціальному рівнянні. В результаті отримуємо:

$$y \, dy - x \, dx = 0. \quad (14)$$

Інтегруючи (14), дістанемо:

$$y^2 - x^2 = c.$$

Значення константи  $c$  визначається з початкової умови: при  $x = 0$ ,  $y = a$ , тобто  $y(0) = a \Rightarrow c = a^2$  для всіх  $x$ . Відтак

$$y^2 = x^2 + a^2. \quad \blacksquare$$

\*Що означає, що *трикутник приблизно прямокутний*? Можна запропонувати таке пояснення. Трикутники  $ABC$  і  $ABD$  за побудовою прямокутні. За теоремою Піфагора ми маємо  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ , а також  $AB^2 + AD^2 = BD^2$  (рис. 19). У термінах  $x$  та  $y$  для цих трикутників теорему можна записати таким способом:

$$x^2 + a^2 = y^2,$$

$$(x + dx)^2 + a^2 = (y + dy)^2.$$

Після перетворень можемо записати:

$$y \cdot dy - x \cdot dx = \frac{dx^2 - dy^2}{2}.$$

Для малих  $dx$  і  $dy$ ,  $dx^2$  і  $dy^2$  навіть менші (вони є малими другого порядку, якщо вважати  $dx$  і  $dy$  малими першого порядку), і ними можна знехтувати. А отже, дріб у правій частині можна прирівняти до 0 і, як наслідок, перейти до наближеної рівності (14):  $y \cdot dy - x \cdot dx = 0$ .

Розширена, але, очевидно, незалежна версія цього доведення була опублікована Майком Старінгом у 1996 році (Wojtowny, 2004). Розглянемо запропонований підхід.

*Доведення 21 (Доведення Майкла Харді II).* Припустимо, що  $\Delta x > 0$  і розглянемо подібні прямокутні трикутники  $ABC$  і  $RCD$ ,  $ABC$  і  $PCD$ :

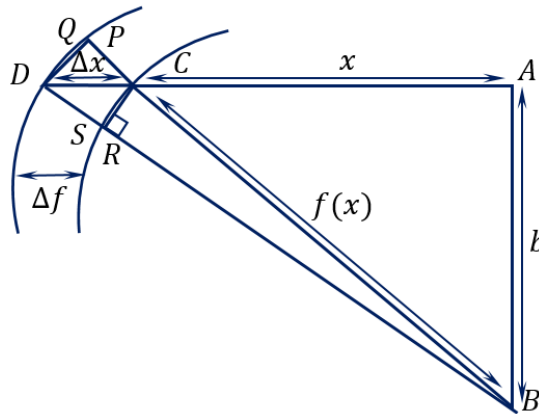


Рис. 19. Ілюстрація доведення Майкла Харді II

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{CQ}{CD} > \frac{CP}{CD} = \frac{CA}{CB} = \frac{x}{f(x)},$$

але також,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{SD}{CD} < \frac{RD}{CD} = \frac{AD}{BD} = \frac{x + \Delta x}{f(x) + \Delta f} < \frac{x}{f(x)} + \frac{\Delta x}{f(x)}.$$

Переходячи до границі при  $\Delta x \rightarrow 0 +$ , отримуємо

$$\frac{df}{dx} = \frac{x}{f(x)}. \quad (15)$$

Випадок  $\Delta x < 0$  розглядається аналогічно.

Відокремимо змінні у диференціальному рівнянні (15):

$$f(x)df = x dx. \quad (16)$$

Після інтегрування отримуємо

$$f^2(x) = x^2 + c. \quad (17)$$

Константа  $c$  знаходиться з граничної умови  $f(0) = b$ , звідки випливає, що  $c = b^2$ . Підставимо значення  $c$  у загальний розв'язок (17), знайдемо

$$f^2(x) = x^2 + b^2.$$

■

## 2.8 Доведення теореми Піфагора методами алгебри

У лінійній алгебрі добре відомий факт, що визначник розміром  $2 \times 2$  вигляду

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

визначає площу паралелограма, побудованого на двох векторах

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Джон Молокач застосував цю властивість визначників до наступної діаграми (рис. 20).

*Доведення 22 (Доведення Джона Молокача).* Дано два квадрати зі стороною  $c$  і площею  $c^2$ . Один із них визначається як паралелограм, побудований на векторах  $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$  і  $\begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix}$ . Площа цього паралелограма виражається як

$$\begin{vmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{vmatrix} = (-a)(-a) - b(-b) = a^2 + b^2.$$

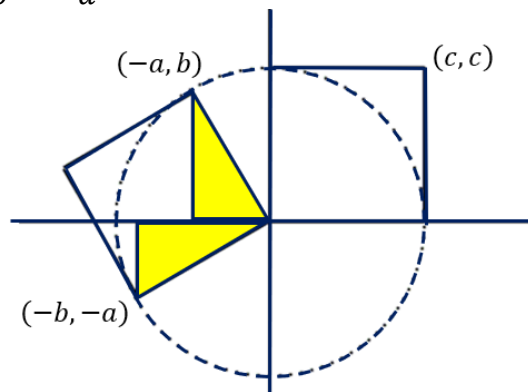


Рис. 20. Ілюстрація доведення Джона Молокач

Оскільки площі обох квадратів рівні, то  $c^2 = a^2 + b^2$ .

■

Варто зауважити, що останню формулу можна записати через визначники:

$$\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{vmatrix}.$$

*Доведення 23 (Доведення з використанням апарату комплексних чисел).*

Будь-яке комплексне число  $z$  може бути зображено формальною сумою  $z = x + iy$ , де  $x$  та  $y$  – дійсні числа, а  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.  $x = \operatorname{Re} z$  – дійсна частина комплексного числа  $z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$  – уявна частина комплексного числа  $z$ . Комплексне число  $z$  можна визначити як упорядковану пару дійсних чисел (точку, вектор)  $(x, y)$  у комплексній площині (рис. 21).

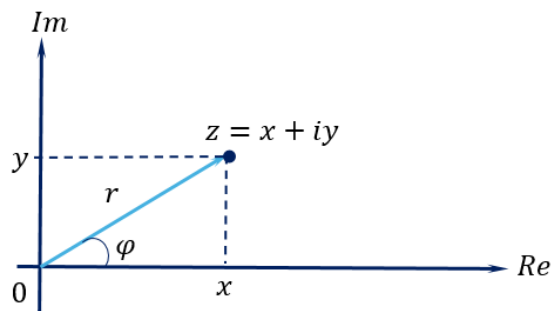


Рис. 21. Ілюстрація комплексної площини

Число  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  називається модулем комплексного числа  $z$  (позначається літерою  $r$ ).

Зобразимо на площині два комплексних числа  $z_1 = a + 0i$  та  $z_2 = 0 + bi$  (рис. 22). Побудуємо на цих векторах прямокутний трикутник з катетами  $a$  і  $b$ . Гіпотенуза  $c$  буде відповідати сумі цих чисел, її довжина дорівнює модулю суми  $z_1 + z_2$ :

$$c = |z| = |z_1 + z_2| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

■

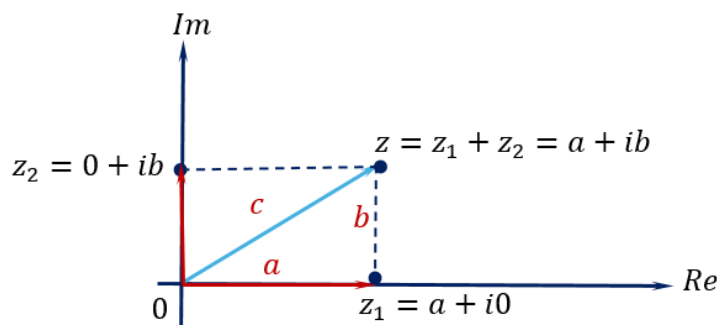


Рис. 22. Ілюстрація доведення 23

*Доведення 24 (Доведення з використанням апарату кватерніонів).*

Кватерніон – це розширення поняття комплексного числа у 4-вимірному просторі. Кватерніон  $q$  визначається як

$$q = a + bi + cj + dk,$$

де  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , а  $i, j, k$  – уявні одиниці, що задовольняють співвідношення:

$$i^2 + j^2 + k^2 = ijk = -1.$$

Дійсне число  $a$  називають *скалярною частиною* кватерніона, а  $\vec{v} = bi + cj + dk$  – його *векторною частиною*.

Будь-який кватерніон  $q = a + bi + cj + dk$  можна представити як пару комплексних чисел у вигляді

$$q = (a + bi) + (c + di)j.$$

Цей запис еквівалентний наступному:

$$q = z_1 + z_2j,$$

де  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$  – комплексні числа.

Кватерніон  $\bar{q} = a - bi - cj - dk$  називають *спряженим до  $q$* .

*Нормою кватерніона* називається число  $|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ .

*Норма є мірою "довжини" кватерніона* і слугує аналогом довжини вектора у багатовимірному просторі.

Застосуємо кватерніони для доведення теореми Піфагора.

Нехай у площині задано прямокутний трикутник з катетами  $a$  і  $b$  та гіпотенузою  $c$ . Представимо сторони трикутника як кватерніони, де катети – це компоненти уявної частини, а гіпотенуза – це довжина, пов'язана з повним кватерніоном.

Виберемо кватерніони. Нехай  $q_1$  і  $q_2$  – кватерніони, що представляють вектори вздовж катетів  $a$  і  $b$ :

$$q_1 = ai, \quad q_2 = bj,$$

де  $a, b \in \mathbb{R}$ , а  $i, j$  – уявні одиниці кватерніонів.

Обчислимо суму катетів у трикутнику (як векторів):

$$q = q_1 + q_2 = ai + bj.$$

Норма цієї суми дорівнює довжині гіпотенузи  $c$ :

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Таким способом отримали, що  $c^2 = a^2 + b^2$ . ■

Описаний підхід показує, як абстрактні математичні об'єкти (кватерніони) можуть бути використані для доведення класичних геометричних властивостей.

## 2.9 Механічна інтерпретація теореми Піфагора

*Доведення 25.* Нехай задано прямокутний трикутник з катетами  $a$  і  $b$  та гіпотенузою  $c$ . Виріжемо з пластини, виготовленої з однорідного матеріалу густиною  $\rho$ , три квадратні пластинки (квадрати) з площами  $a^2$ ,  $b^2$  та  $c^2$  (рис.23).

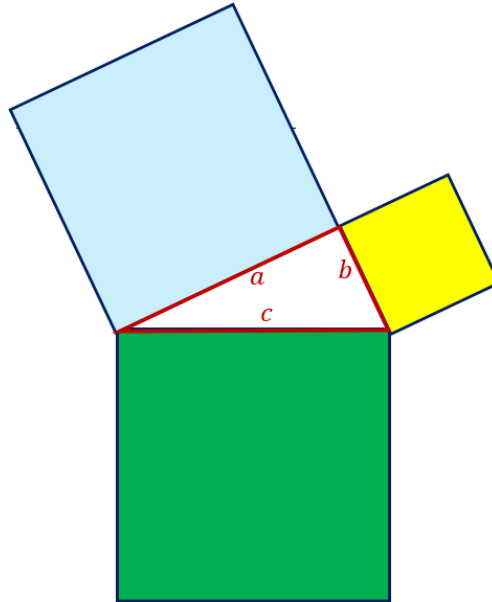


Рис. 23. Ілюстрація розкрою пластинок

Маси квадратів дорівнюють відповідно

$$m_a = \rho a^2, \quad m_b = \rho b^2, \quad m_c = \rho c^2.$$

Сконструємо важіль довжиною  $2h$ , на одному кінці якого закріпимо квадрати з площами  $a^2$  та  $b^2$ , а на другому – квадрат з площею  $c^2$  (рис.24).

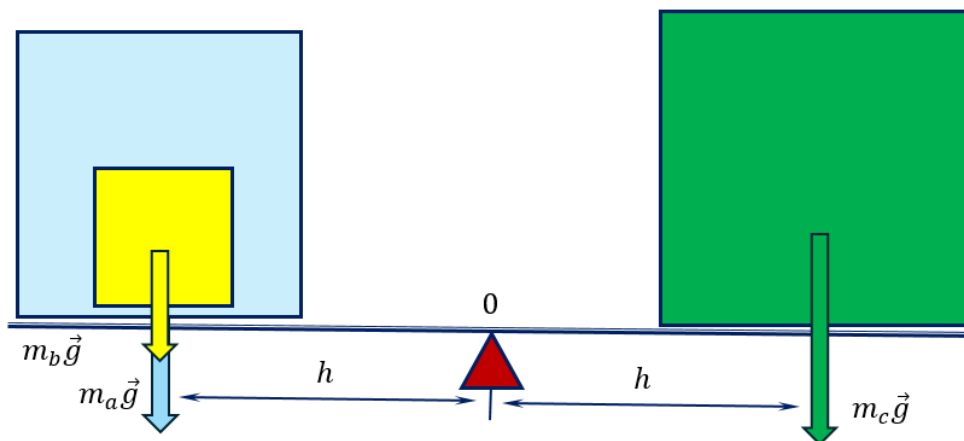


Рис. 24. Ілюстрація конструкції важеля

Точка опори важеля розміщена в центрі, тобто на відстані  $h$  до прямої дії сили ваги. На кожен квадрат діє сила ваги:

$$m_a \vec{g} = \rho a^2 \vec{g}, \quad m_b \vec{g} = \rho b^2 \vec{g}, \quad m_c \vec{g} = \rho c^2 \vec{g}.$$

Якщо важіль перебуває у рівновазі, то сума моментів активних сил відносно осі  $Oz$ , що проходить через точку опори перпендикулярно до площини рисунка, дорівнює нулю:

$$m_a g \cdot h + m_b g \cdot h - m_c g \cdot h = 0 \Rightarrow \rho a^2 g + \rho b^2 g = \rho c^2 g \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2. \quad \blacksquare$$

### 3. Висновки

Теорема Піфагора є однією з найважливіших теорем у геометрії, яка має численні застосування в різних галузях науки і техніки. Її значення важко переоцінити, адже вона є фундаментом для багатьох інших математичних тверджень та концепцій. Вище проілюстровано, що математика є невід'ємною складовою загальнолюдської культури. Одне, на перший погляд, усім відоме твердження має широке застосування в різних галузях. Матеріал підібрано таким способом, щоб використовуючи різні методи та прийоми, зацікавити читачів та допомогти їм зрозуміти суть теореми, розширити математичний світогляд та розвинути логічне мислення. Важливо, щоб як професіонали математики так і початківці усвідомлювали важливість теореми Піфагора та вміли ефективно використовувати її глибину у своїй практичній діяльності.

#### Список використаних джерел

Alex Bogomolny (2004). An interactive column using Java applets. Pythagorean Theorem from the Intersecting Chords Theorema. – Режим доступу: <https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/proof79.shtml> (дата звернення 20.10.24). – Назва з екрана.

Бондар Г.Я. (2024). Бібліотека методичних матеріалів. *Теорема Піфагора. Різні способи доведень*. – Режим доступу: <https://vseosvita.ua/library/teorema-pifagora-rizni-sposoby-doveden-783584.html> (дата звернення 01.11.24). – Назва з екрана.

Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти / О.С Істер – 2-ге вид., переробл. Київ.: Генеза, 2021. 240.

Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – 2-ге видання, переробл. Х.: Гімназія, 2021. 208 с.: іл.

Технар. (2022, вересень 22). Як довести теорему Піфагора?: 10 способів [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=V6DQYAo5mSs>

Турчин С.О. (2023). На урок. Різні способи доведення теореми Піфагора – методичний посібник. – Режим доступу: <https://naurok.com.ua/metodichniy-posibnik-rizni-sposobi-dovedennya-teoremi-pifagora-267269.html> (дата звернення 25.10.24). – Назва з екрана.

Отримано редакцією журналу: 15.12.2024

Прорецензовано: 10.03.2025

Схвалено до друку: 10.06.2025

Iryna LEBEDEVA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.  
ORCID ID: 0000-0001-7150-1310  
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Angelina CHUBYKINA, Student  
ORCID: 0009-0008-4340-6787  
e-mail: chubykinaangelina@knu.ua  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

## **25 WAYS TO CONQUER THE PYTHAGOREAN THEOREM: FROM THE CLASSICS TO THE MODERN**

**Abstract.** *Readers are offered a deep and comprehensive study of the Pythagorean theorem, one of the most famous and important theorems in geometry. The article presents twenty-five different ways to prove this theorem, covering a wide range of mathematical methods and concepts. It actually demonstrates how the Pythagorean theorem can be proven using classical geometric approaches, as well as using modern mathematical tools. Readers will be able to get acquainted with proofs based on metric relations in a triangle, trigonometric properties of angles, elements of vector algebra, properties of a circle, tangent, chord and secant, as well as more complex proofs using differential equations and mechanics. The article will be interesting and useful for a wide range of readers, including high school students, students of mathematical specialties, mathematics teachers and everyone who is interested in the history and development of mathematical knowledge.*

**Keywords:** *geometry; Pythagoras' theorem; right triangle; algebra; differential equations; mechanics.*